ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς
Γ. Τζιρίτας, Καθηγητής

9^{η} **σειρά ασκήσεων**
Απαντήσεις

1. Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος διακριτού χρόνου

$$g(n) = a^{-n}u(-n) - a^n u(n), |a| < 1.$$

Να ευρεθεί το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού. Για ποιές συχνότητες το μέτρο είναι μέγιστο;
Απάντηση:

$$G(\omega) = \frac{1}{1-ae^{i\omega}} - \frac{1}{1-ae^{-i\omega}} = \frac{ae^{i\omega} - ae^{-i\omega}}{1+a^2-2a\cos\omega} = \frac{2ai\sin\omega}{1+a^2-2a\cos\omega}$$

Το μέτρο είναι

$$|G(\omega)| = \frac{2|a\sin\omega|}{1+a^2-2a\cos\omega}$$

Η φάση είναι

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & a\sin\omega > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & a\sin\omega < 0 \end{cases}$$

Επειδή το μέτρο είναι άρτια και περιοδική συνάρτηση της συχνότητας αρκεί να ευρεθούν οι θέσεις μεγίστου για $0 \le \omega \le \pi$. Η παραγώγιση του μέτρου δίδει για τον αριθμητή

$$2|a|\cos\omega(1+a^2-2a\cos\omega) - 4a|a|\sin^2\omega = 2|a|(1+a^2)\cos\omega - 4a|a|.$$

Επειδή $|G(0)| = |G(\pi)| = 0$ και $|a| < 1, a \neq 0$, υπάρχει μέγιστο για $\pm\omega$ τέτοιο ώστε

$$\cos\omega = \frac{2a}{1+a^2}$$

2. Για ένα διακριτό σήμα $x(n)$ δίδονται οι ακόλουθες σχέσεις για το μετασχηματισμό Fourier.

   (a) $X(0) = 1$
   (b) $X(\pi) = 0$
   (c) $\varphi(\omega) = 0, \forall\omega$
   (d) $\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)d\omega = \pi$

Να ευρεθεί το μικρότερης έκτασης σήμα διακριτού χρόνου που ικανοποιεί τις ανωτέρω συνθήκες.
Απάντηση:
Αφού $\varphi(\omega) = 0, \forall\omega$, θα είναι $X(\omega)$ άρτια, πραγματική και μη αρνητική. Επομένως και το σήμα θα είναι άρτιο. Από $\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)d\omega = \pi$ προκύπτει ότι $x(0) = \frac{1}{2}$. Από τις δύο πρώτες σχέσεις, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το σήμα είναι άρτιο, συνάγεται ότι

$$x(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} x(2n-1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} x(2n) = 1$$

$$x(0) - 2\sum_{n=1}^{\infty} x(2n-1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} x(2n) = 0$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} x(2n-1) + \sum_{n=1}^{\infty} x(2n) = \frac{1}{4}, \quad -\sum_{n=1}^{\infty} x(2n-1) + \sum_{n=1}^{\infty} x(2n) = -\frac{1}{4}.$$

Τελικά

$$\sum_{n=1}^{\infty} x(2n-1) = \frac{1}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} x(2n) = 0.$$

Για μικρότερη έκταση θα είναι $x(1) = \frac{1}{4}$ και $x(n) = 0, n > 1$. Λόγω του άρτιου σήματος θα είναι τελικά

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 0 \\ \frac{1}{4} & |n| = 1 \\ 0 & |n| > 1 \end{cases}$$