ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς

Γ. Τζιρίτας, Καθηγητής

8^η **σειρά ασκήσεων**
Απαντήσεις

1. Δίδονται τα ακόλουθα σήματα συνεχούς χρόνου:

   (a) $x_1(t) = \cos\frac{2\pi t}{T}$
   (b) $x_2(t) = \mathrm{sinc}\frac{\pi t}{T}$.

   Λαμβάνονται δείγματα με συχνότητα $\frac{2\pi}{T}$.

   - Ποιές είναι οι τιμές των δειγμάτων;
   - Ποιά σήματα αποκαθίστανται με χρήση του ιδανικού φίλτρου για αυτή τη συχνότητα δειγματοληψίας;
   - Να αποδειχθεί ότι
   $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\frac{\pi(t-nT)}{T} = 1, \quad \forall t$$
   - Να ευρεθεί η συχνότητα Nyquist για το σήμα $x_1(t)x_2(t)$.

   Απάντηση:
   Η περίοδος της δειγματοληψίας είναι T. Άρα τα δείγματα για το $x_1(t)$ είναι
   $$x_1(nT) = \cos 2\pi n = 1.$$
   Για το $x_2(t)$ τα δείγματα θα είναι
   $$x_2(nT) = \mathrm{sinc}\pi n = \delta(n)$$
   Για την αποκατάσταση απαιτείται η μέγιστη συχνότητα να μην περνά τη συχνότητα $\frac{\pi}{T}$. Η απαίτηση δεν ικανοποιείται για το $x_1(t)$, ενώ ικανοποιείται οριακά για το $x_2(t)$. Από τα δείγματα $x_1(nT)$ αποκαθίσταται το σήμα $x(t) = 1$. Οπότε θα ισχύει
   $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\frac{\pi(t-nT)}{T} = 1, \quad \forall t$$
   Η μέγιστη συχνότητα του $x_1(t)x_2(t)$ είναι $\frac{3\pi}{T}$, επομένως η συχνότητα Nyquist είναι $\frac{6\pi}{T}$.

2. Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier των ακολούθων σημάτων διακριτού χρόνου:

   - $a^{|n+1|} + a^{|n-1|}$
   Απάντηση:
   Ο μετασχηματισμός Fourier του $x(n) = \alpha^{|n|}, \quad |\alpha| < 1$ είναι
   $$\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}.$$
   Οπότε βρίσκουμε
   $$\frac{2(1-\alpha^2)\cos\omega}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}.$$

- $u(n+1)u(1-n)+\delta(n)$
  Απάντηση:
  $u(n+1)u(1-n)+\delta(n)=\delta(n+1)+\delta(n-1)+2\delta(n)$. Άρα βρίσκουμε

$$2+2\cos\omega=4\cos^2\frac{\omega}{2}.$$

- $1+\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$
  Απάντηση:

$$1+\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)=1+\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi n}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi n}{4}$$

  Άρα βρίσκουμε

$$2\pi\delta(\omega)+\frac{i\pi}{2}\left(\delta\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)-\delta\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)+\delta\left(\omega+\frac{3\pi}{4}\right)-\delta\left(\omega-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

3. Να ευρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier σημάτων διακριτού χρόνου για τις δύο παρακάτω περιπτώσεις που δίδεται ο ευθύς μετασχηματισμός:

- $H_1(\omega)=\frac{\sin\omega}{1+a^2-2a\cos\omega}$
  Απάντηση:

$$H_1(\omega)=\frac{a\left(e^{i\omega}-e^{-i\omega}\right)}{2ai(1+a^2-2a\cos\omega)}=\frac{1-ae^{-i\omega}-(1-ae^{i\omega})}{2ai(1-ae^{i\omega})(1-ae^{-i\omega})}=\frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{1-ae^{i\omega}}-\frac{1}{1-ae^{-i\omega}}\right)$$

$$h_1(n)=\frac{1}{2ai}\left(a^{-n}u(-n)-a^nu(n)\right)$$

- $H_2(\omega)=\sin^2\omega+\cos^2 5\omega$
  Απάντηση:

$$H_2(\omega)=\frac{1}{2}\left(1-\cos 2\omega\right)+\frac{1}{2}\left(1+\cos 10\omega\right)$$

$$h_2(n)=\delta(n)-\frac{1}{4}(\delta(n+2)+\delta(n-2))+\frac{1}{4}(\delta(n+10)+\delta(n-10))$$