ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς

Γ. Τζιρίτας, Καθηγητής

7^{η} σειρά ασκήσεων

Απαντήσεις

1. Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος

$$x(t) = \begin{cases} A + A\left(1 - \frac{2|t|}{T}\right), & |t| < \frac{T}{2} \\ A, & \frac{T}{2} \leq |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

Απάντηση:
$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, όπου

$$x_1(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{2|t|}{T}\right), & |t| < \frac{T}{2} \\ 0, & |t| \geq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Άρα

$$X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) = 2AT\mathrm{sinc}(\omega T) + A\frac{T}{2}\left(\mathrm{sinc}\frac{\omega T}{4}\right)^2$$

2. Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος

$$g(t) = \begin{cases} 1, & -T \leq t < 0 \\ -1, & 0 < t \leq T \\ 0, & t = 0, \text{ ή } |t| > T \end{cases}$$

Μέσω του μετασχηματισμού Fourier να αποδειχθεί ότι

$$\int_{-\infty}^{t} g(\tau) d\tau = \begin{cases} T - |t|, & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

Επίσης να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του $g(t) \sin \frac{\pi t}{T}$. Για ποιές συχνότητες το μέτρο αυτού του μετασχηματισμού είναι μέγιστο;
Απάντηση:

$$G(\omega) = \int_{-T}^{0} e^{-i\omega t} dt - \int_{0}^{T} e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{i\omega T} + e^{-i\omega T} - 2}{i\omega}$$

$$G(\omega) = -4\frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2}}{i\omega} = i\omega T^2 \left(\mathrm{sinc}\frac{\omega T}{2}\right)^2$$

Οπότε ο μετασχηματισμός Fourier του $\int_{-\infty}^{t} g(\tau) d\tau$ είναι, επειδή $G(0) = 0$,

$$T^2 \left(\mathrm{sinc}\frac{\omega T}{2}\right)^2$$

Άρα

$$\int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau = \begin{cases} T-|t|, & |t|\leq T \\ 0 & |t|>T \end{cases}$$

Θέτοντας $f(t)=g(t)\sin\frac{\pi t}{T}$, έχουμε

$$F(\omega)=\frac{i\pi i T^2}{2\pi}\left((\omega+\frac{\pi}{T})\left(\mathrm{sinc}\frac{(\omega+\frac{\pi}{T})T}{2}\right)^2-(\omega-\frac{\pi}{T})\left(\mathrm{sinc}\frac{(\omega-\frac{\pi}{T})T}{2}\right)^2\right)$$

$$F(\omega)=-T\left((\frac{\omega T}{2}+\frac{\pi}{2})\left(\mathrm{sinc}(\frac{\omega T}{2}+\frac{\pi}{2})\right)^2-(\frac{\omega T}{2}-\frac{\pi}{2})\left(\mathrm{sinc}(\frac{\omega T}{2}-\frac{\pi}{2})\right)^2\right)$$

$$F(\omega)=-T\cos^2\frac{\omega T}{2}\left(\frac{1}{\frac{\omega T}{2}+\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{\frac{\omega T}{2}-\frac{\pi}{2}}\right)=\pi T\frac{\cos^2\frac{\omega T}{2}}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2},\omega\neq\frac{\pi}{T},$$

ενώ $F\left(\frac{\pi}{T}\right)=0$. Για την εύρεση του μεγίστου θα αποδείξουμε ότι για σήματα σταθερού προσήμου ισχύει $|F(\omega)|\leq|F(0)|$. Πράγματι, επειδή δεν αλλάζει το πρόσημο, αρνητικό για την $f(t)$ της άσκησης, θα ισχύει

$$|F(\omega)|\leq\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt=|F(0)|.$$

Άρα το μέγιστο είναι για τη συχνότητα 0 και ισούται με $\frac{4T}{\pi}$.

3. Έστω σήμα $f(t)$ με $f(t)=0, t<0$ και $f(t)\geq 0, t\geq 0$. Ορίζεται το σήμα

$$g(t)=f(-t)u(-t)-f(t)u(t).$$

Να αποδειχθεί ότι ο μετασχηματισμός Fourier του $g(t)$ είναι

$$G(\omega)=-2i|F(\omega)|\sin(\varphi(\omega)),$$

όπου $\varphi(\omega)$ είναι η φάση του σήματος $f(t)$. Να εφαρμοσθεί το ανωτέρω στο

$$f(t)=ae^{-at}u(t), a>0$$

και να αποδειχθεί μέσω του μετασχηματισμού Fourier ότι σε αυτή την περίπτωση

$$\int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau=e^{-a|t|}$$

Απάντηση:

$$G(\omega)=F(-\omega)-F(\omega)=|F(\omega)|e^{-i\varphi(\omega)}-|F(\omega)|e^{i\varphi(\omega)}=-2i|F(\omega)|\sin(\varphi(\omega)).$$

Αν $f(t)=ae^{-at}u(t), a>0$, τότε

$$F(\omega)=\frac{a}{a+i\omega}=\frac{a}{\sqrt{a^2+\omega^2}}e^{-\arctan\frac{\omega}{a}}$$

$$G(\omega)=2i\frac{a}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\sin(\arctan\frac{\omega}{a})=2i\frac{a\omega}{a^2+\omega^2}.$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του $\int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau$ είναι $\frac{2a}{a^2+\omega^2}$, επειδή $G(0)=0$, οπότε

$$\int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau=e^{-a|t|}$$