

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς
Γ. Τζιρίτας, Καθηγητής

6^η σειρά ασκήσεων
Απαντήσεις

1. Δίδονται δύο συνεχή σήματα

$$g(t) = -te^{at}u(-t) - te^{-at}u(t),$$

και

$$h(t) = -te^{at}u(-t) + te^{-at}u(t),$$

με $a > 0$. Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier και για τα δύο και μέσω του μετασχηματισμού Fourier να αποδειχθεί ότι

$$h(t) = \frac{a}{2} \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau + \frac{1}{2a} g'(t).$$

Απάντηση:

$$G(\omega) = \frac{1}{(a - i\omega)^2} - \frac{1}{(a + i\omega)^2} = \frac{2ia\omega}{(a^2 + \omega^2)^2}$$
$$H(\omega) = \frac{1}{(a - i\omega)^2} + \frac{1}{(a + i\omega)^2} = \frac{2(a^2 - \omega^2)}{(a^2 + \omega^2)^2}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του

$$\frac{a}{2} \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau + \frac{1}{2a} g'(t)$$

είναι

$$\frac{a}{2} \frac{4ia\omega}{(a^2 + \omega^2)^2 i\omega} + \frac{1}{2a} i\omega \frac{4ia\omega}{(a^2 + \omega^2)^2} = \frac{2(a^2 - \omega^2)}{(a^2 + \omega^2)^2}$$

2. Να ευρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος

$$x(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

Απάντηση:

Το σήμα $x(t)$ ισούται με τη συνέλιξη του

$$h(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

με τον εαυτό του. Άρα

$$X(\omega) = \left(\text{sinc} \frac{\omega}{2} \right)^2.$$

3. Δίδεται ο ακόλουθος μετασχηματισμός Fourier

$$H(\omega) = \frac{1 - i\omega}{1 + i\omega}.$$

Ζητείται να παρασταθεί σε πολική μορφή και να ευρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός.

Απάντηση:

$$H(\omega) = \frac{1 - i\omega}{1 + i\omega} = \frac{e^{-i \arctan \omega}}{e^{i \arctan \omega}} = e^{-2i \arctan \omega}$$

$$H(\omega) = \frac{2}{1 + i\omega} - 1$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier θα είναι

$$h(t) = 2e^{-t}u(t) - \delta(t).$$