ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς

Γ. Τζιρίτας, Καθηγητής

5^{η} **σειρά ασκήσεων**

Απαντήσεις

1. Δίδεται η κρουστική απόκριση ενός συνεχούς συστήματος

$$h(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0,$$

και το σήμα

$$x(t) = u\,(t+T)\,u\,(T-t)\,.$$

Να υπολογισθεί η έξοδος του συστήματος.

Απάντηση:

$$y(t) = \int_{-T}^{T} e^{-a|t-\tau|} d\tau$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή του t

(a) $t < -T \quad \Rightarrow \quad t - \tau < 0$

$$y(t) = \int_{-T}^{T} e^{a(t-\tau)} d\tau = e^{at} \int_{-T}^{T} e^{-a\tau} d\tau = \frac{e^{aT} - e^{-aT}}{a} e^{at}$$

(b) $|t| \leq T$

$$y(t) = \int_{-T}^{T} e^{-a|t-\tau|} d\tau = e^{-at} \int_{-T}^{t} e^{a\tau} d\tau + e^{at} \int_{t}^{T} e^{-a\tau} d\tau = \frac{2}{a} - \frac{e^{-aT}}{a} \left(e^{at} + e^{-at}\right)$$

(c) $t > T \quad \Rightarrow \quad t - \tau > 0$

$$y(t) = \int_{-T}^{T} e^{-a(t-\tau)} d\tau = e^{-at} \int_{-T}^{T} e^{a\tau} d\tau = \frac{e^{aT} - e^{-aT}}{a} e^{-at}$$

2. Δίδεται η κρουστική απόκριση ενός διακριτού συστήματος

$$h(n) = \alpha^{|n|}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

και το σήμα

$$x(n) = u(n+N)u(N-n).$$

Να υπολογισθεί η έξοδος του συστήματος.

Απάντηση:

$$y(n) = \sum_{k=-N}^{N} \alpha^{|n-k|}$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή του n

(a) $n < -N \quad \Rightarrow \quad n-k<0$

$$y(n)=\sum_{k=-N}^{N}\alpha^{k-n}=\alpha^{-n}\sum_{k=-N}^{N}\alpha^{k}=\frac{\alpha^{-N}-\alpha^{N+1}}{1-\alpha}\alpha^{-n}$$

(b) $|n|\leq N$

$$y(n)=\sum_{k=-N}^{N}\alpha^{|n-k|}=\alpha^{n}\sum_{k=-N}^{n}\alpha^{-k}+\alpha^{-n}\sum_{k=n+1}^{N}\alpha^{k}=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}-\alpha^{N+1}\frac{\alpha^{n}+\alpha^{-n}}{1-\alpha}$$

(c) $n > N \quad \Rightarrow \quad n-k>0$

$$y(t)=\sum_{k=-N}^{N}\alpha^{n-k}=\alpha^{n}\sum_{k=-N}^{N}\alpha^{-k}=\frac{\alpha^{-N}-\alpha^{N+1}}{1-\alpha}\alpha^{n}$$

3. Δίδονται τα ακόλουθα περιοδικά σήματα με περίοδο 2.

(a)

$$x_1(t)=\begin{cases}1, & |t|\leq\frac{1}{2}\\ 0, & \frac{1}{2}<|t|\leq 1\end{cases}$$

(b)

$$x_2(t)=1-|t|,\quad |t|\leq 1.$$

(c)

$$x_3(t)=\cos\frac{\pi t}{2},\quad |t|\leq 1.$$

Ζητείται να προσδιορισθεί ο ελάχιστος αριθμός συντελεστών του αναπτύγματος σε τριγωνομετρική σειρά, ώστε η προκύπτουσα προσέγγιση να είναι τουλάχιστον στο 95% της μέσης ισχύος του αντίστοιχου σήματος. Η λύση μπορεί να δοθεί προγραμματιστικά. Να παρασταθούν γραφικά στην κύρια περίοδο το σήμα και η προσέγγισή του.

Απάντηση:

(a) Ενέργεια για περίοδο 2

$$E=\frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2}dt=\frac{1}{2}$$

Οι συντελεστές είναι:

$$c_1(0)=\frac{1}{2}, c_1(n)=c_1(-n)=\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi},\quad n\geq 1$$

Υπολογίζοντας προκύπτει

$$c_1^2(0)+\sum_{n=1}^{3}\Big(c_1^2(n)+c_1^2(-n)\Big)=0.4752>0.95E$$

(b) Ενέργεια για περίοδο 2

$$E = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-|t|)^2 dt = \int_0^1 (1-t)^2 dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

Οι συντελεστές είναι:

$$c_2(0) = \frac{1}{2}, c_2(n) = c_2(-n) = \frac{1-(-1)^n}{(n\pi)^2}, \quad n \geq 1$$

Υπολογίζοντας προκύπτει

$$c_2^2(0) + c_2^2(1) + c_2^2(-1) = 0.3321 > 0.95E$$

(c) Ενέργεια για περίοδο 2

$$E = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos^2\frac{\pi t}{2} dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(1+\cos\frac{2\pi t}{2}\right) dt = \frac{1}{2}$$

Οι συντελεστές είναι:

$$c_3(0) = \frac{2}{\pi}, c_3(n) = c_3(-n) = \frac{2(-1)^{n-1}}{(4n^2-1)\pi}, \quad n \geq 1$$

Υπολογίζοντας προκύπτει

$$c_3^2(0) + c_3^2(1) + c_3^2(-1) = 0.4953 > 0.95E$$