

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς

4^η σειρά ασκήσεων
Απάντηση 1ης άσκησης

Να βρεθεί το ολοκλήρωμα

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^{n+1} dz}{z^2 - 2r \cos \theta z + r^2},$$

για $|r| < 1, n \geq 0$.

Οι ρίζες του παρανομαστή είναι

$$\rho_{1,2} = re^{\pm i\theta}.$$

Θεωρούμε την περίπτωση όπου $\theta \neq k\pi$, οπότε

$$\frac{1}{z^2 - 2r \cos \theta z + r^2} = \frac{1}{2r \sin \theta} \left(\frac{1}{z - re^{i\theta}} - \frac{1}{z - re^{-i\theta}} \right)$$

Επειδή οι δύο ρίζες βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, βρίσκουμε

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^{n+1} dz}{z^2 - 2r \cos \theta z + r^2} = 2\pi i \frac{2r^{n+1} \sin(n+1)\theta}{2r \sin \theta} = 2\pi i \frac{r^n \sin(n+1)\theta}{\sin \theta}.$$

Θεωρούμε την περίπτωση όπου $\theta = 2k\pi$, οπότε

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^{n+1} dz}{(z - r)^2} = 2\pi i (n+1) r^n.$$

Τέλος, θεωρούμε την περίπτωση όπου $\theta = (2k+1)\pi$, οπότε

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^{n+1} dz}{(z + r)^2} = 2\pi i (n+1) (-r)^n.$$