ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς

Γ. Τζιρίτας, Καθηγητής

3^{η} **σειρά ασκήσεων**

Απαντήσεις

1. Δίδονται δύο συνεχή σήματα

$$x_k(t) = e^{-a_k t} u(t), k = 1, 2$$

με $a_1 \neq a_2$. Να υπολογισθεί η συνέλιξη μεταξύ των δύο σημάτων.
Απάντηση:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_1 \tau} u(\tau) e^{-a_2 (t-\tau)} u(t-\tau) d\tau$$

$$= e^{-a_2 t} \int_0^t e^{(a_2 - a_1)\tau} d\tau = \frac{e^{-a_1 t} - e^{-a_2 t}}{a_2 - a_1}$$

2. Δίδονται δύο συνεχή σήματα

$$x_k(t) = u\left(t + \frac{T_k}{2}\right) u\left(\frac{T_k}{2} - t\right), k = 1, 2$$

με $T_2 > T_1$. Να υπολογισθεί η συνέλιξη μεταξύ των δύο σημάτων.
Απάντηση:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u\left(\tau + \frac{T_1}{2}\right) u\left(\frac{T_1}{2} - \tau\right) u\left(t - \tau + \frac{T_2}{2}\right) u\left(\frac{T_2}{2} - t + \tau\right) d\tau$$

Για μη μηδενικές τιμές θα πρέπει

$$\max\left(-\frac{T_1}{2}, t - \frac{T_2}{2}\right) \leq \tau \leq \min\left(\frac{T_1}{2}, t + \frac{T_2}{2}\right)$$

Οπότε υπάρχουν τρεις περιπτώσεις

(a) $-\frac{T_1+T_2}{2} \leq t \leq -\frac{T_2-T_1}{2}$

$$y(t) = \int_{-\frac{T_1}{2}}^{t+\frac{T_2}{2}} d\tau = t + \frac{T_1 + T_2}{2}$$

(b) $-\frac{T_2-T_1}{2} < t < \frac{T_2-T_1}{2}$

$$y(t) = \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} d\tau = T_1$$

(c) $\frac{T_2-T_1}{2} \leq t \leq \frac{T_2+T_1}{2}$

$$y(t) = \int_{t-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_1}{2}} d\tau = \frac{T_1 + T_2}{2} - t$$

Τελικά θα είναι

$$y(t) = \begin{cases} T_1 & |t| < \frac{T_2-T_1}{2} \\ \frac{T_2+T_1}{2} - |t| & \frac{T_2-T_1}{2} \leq |t| \leq \frac{T_2+T_1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T_2+T_1}{2} \end{cases}$$

3. Να υπολογισθεί η συνέλιξη μεταξύ των διακριτών σημάτων

$$h(n) = a^n u(n) \quad \text{και} \quad x(n) = a^n u(n) u(N-n).$$

Απάντηση:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(k) u(N-k) a^{n-k} u(n-k) = a^n \sum_{k=0}^{\min(n,N)} 1 = a^n(\min(n,N)+1)u(n)$$

4. Δίδονται δύο διακριτά συστήματα

(a) $h_1(n) = (-1)^n u(n) u(1-n)$

(b) $h_2(n) = u(n)u(2-n) + \delta(n-1)$

και το σήμα

$$x(n) = u(n)u(10-n).$$

Να υπολογισθεί η απόκριση των δύο συστημάτων με είσοδο το σήμα $x(n)$.
Απάντηση:
Πρώτος τρόπος

(a) Θα πρέπει $\max(0, n-1) \leq k \leq \min(10, n)$, οπότε απαιτείται υπολογισμός για $0 \leq n \leq 11$ και υπάρχουν τρεις περιπτώσεις

$$\begin{aligned} n = 0, &\quad y_1(0) = \textstyle\sum_{k=0}^{0} (-1)^k = 1 \\ 1 \leq n \leq 10, &\quad y_1(n) = \textstyle\sum_{k=n-1}^{n} (-1)^k = 0 \\ n = 11, &\quad y_1(11) = \textstyle\sum_{k=10}^{10} (-1)^{11-k} = -1 \end{aligned}$$

(b) Θα πρέπει $\max(0, n-2) \leq k \leq \min(10, n)$, οπότε απαιτείται υπολογισμός για $0 \leq n \leq 12$ και υπάρχουν τρεις περιπτώσεις

$$\begin{aligned} 0 \leq n \leq 1, &\quad y_2(n) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} h_2(n-k) \\ 2 \leq n \leq 10, &\quad y_2(n) = \textstyle\sum_{k=n-2}^{n} h_2(n-k) = 4 \\ 11 \leq n \leq 12, &\quad y_2(11) = \textstyle\sum_{k=n-2}^{10} h_2(n-k) \end{aligned}$$

Δεύτερος τρόπος

(a) $y_1(n) = x(n) - x(n-1) = \delta(n) - \delta(n-11)$.

(b) $y_2(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$
$= \delta(n) + 3\delta(n-1) + 4u(n-2)u(10-n) + 3\delta(n-11) + \delta(n-12)$.