ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς

Γ. Τζιρίτας, Καθηγητής

1^{η} σειρά ασκήσεων

Απαντήσεις

1. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει

$$|z-4| = 2|z-1|$$

(a) Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των αριθμών είναι κύκλος με κέντρο την αρχή και ακτίνα 2.
Απάντηση:

$$|z-4| = 2|z-1| \Leftrightarrow (z-4)(\overline{z}-4) = 2(z-1)(\overline{z}-1) \Leftrightarrow |z| = 2.$$

(b) Αν z_1, z_2 είναι δυο αριθμοί από τους παραπάνω, να αποδειχθεί ότι ο αριθμός

$$w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}$$

είναι πραγματικός και ότι $|w| \leq 4$.
Απάντηση:

$$w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = \frac{2z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} + \frac{2z_2\overline{z}_1}{z_1\overline{z}_1} = \frac{2z_1\overline{z}_2}{4} + \frac{2z_2\overline{z}_1}{4} = \Re(z_1\overline{z}_2).$$

$$\Re(z_1\overline{z}_2) \leq |z_1\overline{z}_2| = 4.$$

(c) Αν $w = -4$, να ευρεθεί η σχέση μεταξύ z_1, z_2 και να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία $A(z_1)$, $B(z_2)$ και $\Gamma(2iz_1)$ είναι ισοσκελές.
Απάντηση:

$$\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = -4 \Leftrightarrow (z_1+z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow z_2 = -z_1.$$

$$|z_1 - 2iz_1| = |z_1||1-2i| = |z_2||1+2i| = |z_2 - 2iz_1|.$$

2. Δίδεται η εξίσωση $2|z|^2 + i(z+\overline{z}) - 4 - 2i = 0$.

(a) Να αποδειχθεί ότι

$$z_1^{10} + z_2^{10} = 0,$$

όπου z_1 και z_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.
Απάντηση:

$$2|z|^2 + i(z+\overline{z}) - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow 2(x^2+y^2) - 4 + 2i(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1, y = \pm 1.$$

$$z_1 = 1+i, z_2 = 1-i \Rightarrow z_1^2 = 2i, z_2^2 = -2i \Rightarrow z_1^{10} + z_2^{10} = (2i)^5 + (-2i)^5 = 0.$$

(b) Να ευρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των w για τα οποία

$$|w-4+3i| = |z_1 - z_2|.$$

Απάντηση:

$$|w-4+3i| = 2, \quad \text{κύκλος με κέντρο} \ \ z_0 = (4,-3) \ \ \text{και ακτίνα} \ \ 2.$$

(c) Να αποδειχθεί ότι $3 \leq |w| \leq 7$.
Απάντηση:

$$3 = ||w-z_0| - |z_0|| \leq |w| = |(w-z_0)+z_0| \leq |w-z_0| + |z_0| = 7.$$

3. Να ευρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης

$$z^4 + 4 = 0.$$

και στη συνέχεια να παραγοντοποιηθεί το πολυώνυμο z^4+4 σε δευτεροβάθμιους παράγοντες με πραγματικούς συντελεστές.
Απάντηση:

$$z^4+4=0 \Leftrightarrow z^4 = -4 = \sqrt{2}e^{i\pi} \Leftrightarrow z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}, k=0,1,2,3.$$

$$z_1 = 1+i, z_2 = -1+i, z_3 = -1-i = \overline{z}_2, z_4 = 1-i = \overline{z}_1$$

$$z^4+4 = (z-z_1)(z-\overline{z}_1)(z-z_2)(z-\overline{z}_2) = (z^2-2z+2)(z^2+2z+2).$$

4. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν την ισότητα $(2a-z)^n = z^n$, όπου a πραγματικός αριθμός και $n \geq 1$ φυσικός αριθμός. Να αποδειχθεί ότι το πραγματικό μέρος των αριθμών αυτών ισούται με a.
Απάντηση:

$$(2a-z)^n = z^n \Rightarrow |2a-z| = |z| \Rightarrow (2a-z)(2a-\overline{z}) = |z|^2 \Rightarrow 2a(2a-z-\overline{z}) = 0.$$

Αν $a \neq 0$, τότε $\Re(z) = a$. Αν $a = 0$ και n περιττός, τότε $z = 0$, οπότε ισχύει $\Re(z) = a$. Αν $a = 0$ και n άρτιος, τότε η εξίσωση γίνεται ταυτότητα.