

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Εφαρμοσμένα μαθηματικά για μηχανικούς
Γ. Τζιρίτας, Καθηγητής

1^η σειρά ασκήσεων
Παράδοση: 9 Οκτωβρίου 2015

1. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει

$$|z - 4| = 2|z - 1|$$

- (a) Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των αριθμών είναι κύκλος με κέντρο την αρχή και ακτίνα 2.
(b) Αν z_1, z_2 είναι δυο αριθμοί από τους παραπάνω, να αποδειχθεί ότι ο αριθμός

$$w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}$$

είναι πραγματικός και ότι $|w| \leq 4$.

- (c) Αν $w = -4$, να ευρεθεί η σχέση μεταξύ z_1, z_2 και να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία $A(z_1)$, $B(z_2)$ και $\Gamma(2iz_1)$ είναι ισοσκελές.

2. Δίδεται η εξίσωση $2|z|^2 + i(z + \bar{z}) - 4 - 2i = 0$.

- (a) Να αποδειχθεί ότι

$$z_1^{10} + z_2^{10} = 0,$$

όπου z_1 και z_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

- (b) Να ευρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των w για τα οποία

$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|.$$

- (c) Να αποδειχθεί ότι $3 \leq |w| \leq 7$.

3. Να ευρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης

$$z^4 + 4 = 0.$$

και στη συνέχεια να παραγοντοποιηθεί το πολυώνυμο $z^4 + 4$ σε δευτεροβάθμιους παράγοντες με πραγματικούς συντελεστές.

4. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν την ισότητα $(2a - z)^n = z^n$, όπου a πραγματικός αριθμός και $n \geq 1$ φυσικός αριθμός. Να αποδειχθεί ότι το πραγματικό μέρος των αριθμών αυτών ισούται με a .