

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Θέμα 1ο - 25 μονάδες (5 μ. κάθε ερώτημα): Βασικές Γνώσεις

Σωστό ή Λάθος; **Δικαιολογήστε επαρκώς - απάντηση χωρίς αιτιολόγηση δε βαθμολογείται.**

(α) Αν ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμο, δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (1)$$

τότε το $x(t)$ είναι το μηδενικό σήμα.

(β) Αν το $x(t)$ είναι σήμα ενέργειας, τότε το χρονικά κλιμακωμένο σήμα $x(at)$, $a \neq 0$, έχει την ίδια ενέργεια με το $x(t)$.

(γ) Αν το $x(t)$ είναι πραγματικό και περιττό σήμα, τότε ο Μετασχηματισμός Fourier $X(f)$ είναι αμιγώς φανταστικός και περιττός.

(δ) Αν δύο πραγματικά σήματα ενέργειας $x_1(t)$ και $x_2(t)$ έχουν το ίδιο φάσμα πλάτους,

$$|X_1(f)| = |X_2(f)| \quad (2)$$

τότε έχουν και την ίδια συνάρτηση αυτοσυσχέτισης.

(ε) Αν το $x(t)$ είναι σήμα βασικής ζώνης στο διάστημα $|f| < B$, τότε και το $x^2(t)$ είναι επίσης βασικής ζώνης στο ίδιο διάστημα $|f| < B$.

Λύση:

(α) Σωστό. Ένα μη μηδενικό περιοδικό σήμα δεν μπορεί να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο, η ποσότητα 1 θα απειρίζεται.

(β) Λάθος. Έστω $a > 0$ και E η ενέργεια του $x(t)$. Τότε είναι

$$E_a = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(at) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(u) \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(u) du = \frac{1}{a} E \quad (3)$$

Όμοια και για $a < 0$.

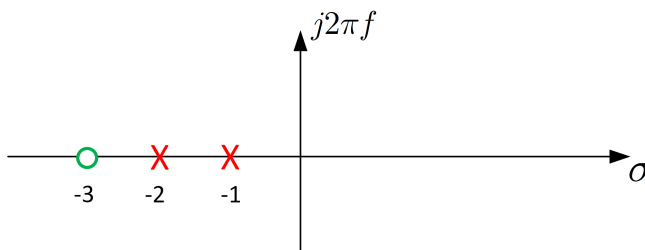
(γ) Σωστό. Αν $x(t)$ πραγματικό, τότε $X(-f) = X^*(f)$, και αν περιττό, τότε $X(f) \in \mathbb{I}$, που συνεπάγεται ότι $X^*(f) = -X(f)$. Οπότε $X(-f) = -X(f)$, που είναι περιττός μετασχηματισμός.

(δ) Σωστό. Αφού $\Phi_x(f) = |X(f)|^2 \longleftrightarrow \phi_x(\tau)$, αν δυο σήματα έχουν το ίδιο φάσμα πλάτους θα έχουν την ίδια φασματική πυκνότητα ενέργειας και άρα και την ίδια συνάρτηση αυτοσυσχέτισης.

(ε) Λάθος. Το σήμα $x^2(t)$ έχει μετασχ. Fourier $X(f) * X(f)$, ο οποίος με βάση την ιδιότητα του εύρους της συνέλιξης “ζει” στο διάστημα $[-2B, 2B]$. Άρα το σήμα $x^2(t)$ είναι σήμα βασικής ζώνης στο $|f| < 2B$ κι όχι στο $|f| < B$.

Θέμα 2ο - 25 μονάδες: Συστήματα και Μετασχ. Laplace

Έστω το *αιτιατό* ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του Σχήματος 1.



Σχήμα 1: Διάγραμμα πόλων-μηδενικών Θέματος 2.

- (α') **(5 μ.)** Ποιό είναι το πεδίο σύγκλισης του συστήματος;
- (β') **(10 μ.)** Αν γνωρίζετε ότι $H(0) = \frac{3}{2}$, βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος.
- (γ') **(5 μ.)** Μπορείτε να υπολογίσετε την απόκριση σε συχνότητα $H(f)$ από την παραπάνω συνάρτηση μεταφοράς; Αν ναι, βρείτε τη. Αν όχι, γιατί; Εξηγήστε σε κάθε περίπτωση.
- (δ') **(5 μ.)** Βρείτε μια διαφορική εξίσωση που υλοποιεί το παραπάνω σύστημα.

Λύση:

- (α') Το σύστημα, ως αιτιατό από εκφώνηση, θα έχει δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης, δεξιότερα από τον πόλο με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος. Ο πόλος αυτός είναι ο $s = -1$, άρα $\Re\{s\} > -1$ είναι το πεδίο σύγκλισης.
- (β') Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος γράφεται ως

$$H(s) = A \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} \implies H(0) = \frac{3}{2} = A \frac{3}{2} \implies A = 1 \quad (4)$$

Οπότε

$$H(s) = \frac{s+2}{(s+2)(s+1)}, \quad \sigma > -1 \quad (5)$$

- (γ') Ο φανταστικός άξονας περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης και άρα η απόκριση σε συχνότητα μπορεί να υπολογιστεί από τη συνάρτηση μεταφοράς, ως

$$H(f) = H(s) \Big|_{s=j2\pi f} = \frac{j2\pi f + 3}{(j2\pi f + 2)(j2\pi f + 1)} \quad (6)$$

- (δ') Από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \iff X(s)(s+3) = Y(s)(s+2)(s+1) \quad (7)$$

$$3X(s) + sX(s) = Y(s)(s^2 + 3s + 2) \quad (8)$$

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = sX(s) + 3X(s) \quad (9)$$

και επιστρέφοντας στο χρόνο

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + 3x(t) \quad (10)$$

Θέμα 3ο - 25 μονάδες: Νέος Μετασχηματισμός!

Ο μετασχηματισμός Sumudu ενός σήματος $x(t)$ ορίζεται ως

$$S_x(\rho) = \mathcal{S}\{x(t)\}(\rho) = \int_0^\infty x(\rho t) e^{-t} dt \quad (11)$$

για τις τιμές του ρ για τις οποίες το παραπάνω ολοκλήρωμα συγκλίνει (οι οποίες δε σας ενδιαφέρουν εδώ).

(α') **(10 μ.)** Δείξτε, χρησιμοποιώντας απευθείας τον παραπάνω ορισμό, ότι

$$x(t) = 1, \quad \forall t \xrightarrow{\mathcal{S}} S_x(\rho) = 1, \quad \forall \rho \quad (12)$$

και

$$x(t) = e^{-at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} S_x(\rho) = \frac{1}{1+a\rho} \quad (13)$$

(β') **(5 μ.)** Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Sumudu είναι γραμμικός. Δηλαδή, αν

$$x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} S_{x_1}(\rho), \quad x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} S_{x_2}(\rho), \quad (14)$$

να δείξετε ότι, για σταθερές a, b ,

$$\mathcal{S}\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = aS_{x_1}(\rho) + bS_{x_2}(\rho) \quad (15)$$

(γ') **(10 μ.)** Αποδείξτε την ιδιότητα χρονικής κλιμάκωσης, δηλ.

$$\text{αν } x(t) \xrightarrow{\mathcal{S}} S_x(\rho) \text{ τότε } x(at) \xrightarrow{\mathcal{S}} S_x(a\rho), \quad a > 0 \quad (16)$$

Λύση:

(α') Αν $x(t) = 1, \forall t$, τότε

$$S_x(\rho) = \int_0^\infty x(\rho t) e^{-t} dt = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = -(0 - 1) = 1, \quad \forall \rho \quad (17)$$

και αν $x(t) = e^{-at}u(t)$, τότε

$$S_x(\rho) = \int_0^\infty x(\rho t) e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-a\rho t} \cdot e^{-t} dt \quad (18)$$

$$= \int_0^\infty e^{-t(a\rho+1)} dt = -\frac{1}{1+a\rho} e^{-(1+a\rho)t} \Big|_0^{+\infty} \quad (19)$$

$$= -\left(0 - \frac{1}{a\rho+1}\right) = \frac{1}{1+a\rho} \quad (20)$$

αν $1+a\rho > 0$, δηλ. $\rho > -\frac{1}{a}$.

(β') Έστω $z(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$, τότε

$$S_z(\rho) = \int_0^\infty z(\rho t) e^{-t} dt = \int_0^\infty (ax_1(\rho t) + bx_2(\rho t)) e^{-t} dt \quad (21)$$

$$= \int_0^\infty ax_1(\rho t) e^{-t} dt + \int_0^\infty bx_2(\rho t) e^{-t} dt \quad (22)$$

$$= aS_{x_1}(\rho) + bS_{x_2}(\rho) \quad (23)$$

(γ') Έχουμε

$$\mathcal{S}\{x(at)\} = \int_0^\infty x(a\rho t)e^{-t} dt \quad (24)$$

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού, αν θέσουμε όπου ρ το $a\rho$,

$$\mathcal{S}_x(a\rho) = \int_0^\infty x(a\rho t)e^{-t} dt \quad (25)$$

άρα

$$x(at) \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{S}_x(a\rho), \quad a > 0 \quad (26)$$

Θέμα 4ο - 35 μονάδες: Συστήματα και Φασματικές Πυκνότητες

Έστω η οικογένεια σημάτων ενέργειας

$$x_a(t) = e^{-2\pi at}u(t), \quad a > 0. \quad (27)$$

(α') (5 μ.) Δείξτε ότι ο Μετασχηματισμός Fourier του $x_a(t)$ είναι

$$X_a(f) = \frac{1}{2\pi(a + jf)} \quad (28)$$

(β') (5 μ.) Βρείτε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας $\Phi_x(f)$ του σήματος $x_a(t)$.

(γ') (15 μ.) Το σήμα $x_a(t)$ εφαρμόζεται ως είσοδος σε ΓΧΑ σύστημα με συχνοτική απόκριση

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2a}\right) \quad (29)$$

Βρείτε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας της εξόδου, $\Phi_y(f)$.

(δ') (10 μ.) Υπολογίστε τις ενέργειες E_x και E_y και δείξτε ότι ο λόγος ενέργειας εξόδου προς ενέργεια εισόδου είναι ανεξάρτητος της παραμέτρου a και ισούται με

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{1}{2} \quad (30)$$

Help: $\int_{-c}^c \frac{df}{a^2 + f^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{f}{a}\right) \Big|_{-c}^c$

Λύση:

(α') Από τον ορισμό του Μετασχηματισμού Fourier,

$$X_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (31)$$

Επειδή $x_a(t) = 0$ για $t < 0$,

$$X_a(f) = \int_0^\infty e^{-2\pi at} e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^\infty e^{-2\pi(a+jf)t} dt = \frac{1}{2\pi(a + jf)} \quad (32)$$

όπου το ολοκλήρωμα συγκλίνει επειδή $a > 0$. Άρα

$$X_a(f) = \frac{1}{2\pi(a + jf)} \quad (33)$$

Το ίδιο μπορεί να προκύψει και από τα έτοιμα ζεύγη μετασχηματισμού που έχετε στα πινακάκια σας.

(β) Η φασματική πυκνότητα ενέργειας ενός σήματος ενέργειας είναι

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2 \quad (34)$$

Επομένως

$$\Phi_x(f) = \left| \frac{1}{2\pi(a + jf)} \right|^2 = \frac{1}{4\pi^2|a + jf|^2} = \frac{1}{4\pi^2(a^2 + f^2)} \quad (35)$$

(γ) Για ένα ΓΧΑ σύστημα ισχύει

$$Y(f) = H(f)X_a(f) \quad (36)$$

Επομένως

$$\Phi_y(f) = |Y(f)|^2 = |H(f)|^2 |X_a(f)|^2 \quad (37)$$

Δίνεται ότι

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2a}\right) \quad (38)$$

άρα

$$|H(f)|^2 = \begin{cases} 1, & |f| < a, \\ 0, & |f| > a. \end{cases} \quad (39)$$

Συνεπώς,

$$\Phi_y(f) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi^2(a^2 + f^2)}, & |f| < a, \\ 0, & |f| > a. \end{cases} \quad (40)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\Phi_y(f) = \frac{1}{4\pi^2(a^2 + f^2)} \text{rect}\left(\frac{f}{2a}\right) \quad (41)$$

(δ) Η ενέργεια του σήματος εισόδου μπορεί να υπολογιστεί απευθείας στο πεδίο του χρόνου ως

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-4\pi at} dt = -\frac{1}{4\pi a} e^{-4\pi at} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{4\pi a} \quad (42)$$

Για την έξοδο χρησιμοποιούμε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας:

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_y(f) df \quad (43)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-a}^a \frac{1}{a^2 + f^2} df = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{a} \left[\tan^{-1}\left(\frac{f}{a}\right) \right]_{-a}^a \\ &= \frac{1}{4\pi^2 a} (\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-1)) \\ &= \frac{1}{4\pi^2 a} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{8\pi a} \end{aligned} \quad (44)$$

Τελικά

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\frac{1}{8\pi a}}{\frac{1}{4\pi a}} = \frac{1}{2} \quad (45)$$

Παρατηρούμε ότι ο λόγος E_y/E_x είναι ανεξάρτητος από την παράμετρο a .