

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής

ΕΜΒΟΛΙΜΗ ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Ρήτρα εξέτασης: 5.0/10.0, Μονάδες εξέτασης: 110, Άριστα: 100

- **ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ και 00 ΛΕΠΤΑ**
- **Διαθέσιμες μονάδες: 110 - Άριστα: 100**
- **Αναφέρετε ρητά ποιό θέμα και ποιό ερώτημα απαντάτε κάθε φορά.**
- **Αιτιολογήστε ΠΛΗΡΩΣ όσα γράφετε. Απαντήσεις χωρίς δικαιολόγηση δε βαθμολογούνται.**
- **Η εξέταση διεξάγεται με ανοιχτές σημειώσεις πάσης φύσεως, πλην ηλεκτρονικών βοηθημάτων.**

Θέμα 1ο - 30 μονάδες: Σειρές Fourier

Δίνεται το παρακάτω περιοδικό σήμα $x(t)$:

$$x(t) = 2 \cos\left(2\pi 80 t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\pi 240 t - \frac{\pi}{3}\right) - \cos(2\pi 360 t)$$

- (α) **(15 μ.)** Βρείτε την περίοδο, T_0 , του σήματος και σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης.
- (β) **(10 μ.)** Βρείτε το μετασχ. Fourier της Σειράς Fourier αυτής.
- (γ) **(5 μ.)** Ποιός όρος της Σειράς Fourier που σας δίνεται στην εκφώνηση έχει το 66.66% της συνολικής μέσης ισχύος του περιοδικού σήματος; Εξηγήστε.

Λύση:

- (α) Η περίοδος βρίσκεται εύκολα μέσω της θεμελιώδους συχνότητας, αφού

$$f_0 = \text{Μ.Κ.Δ.}\{80, 240, 360\} = 40 \text{ Hz} \quad (1)$$

και

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{40} \text{ sec} \quad (2)$$

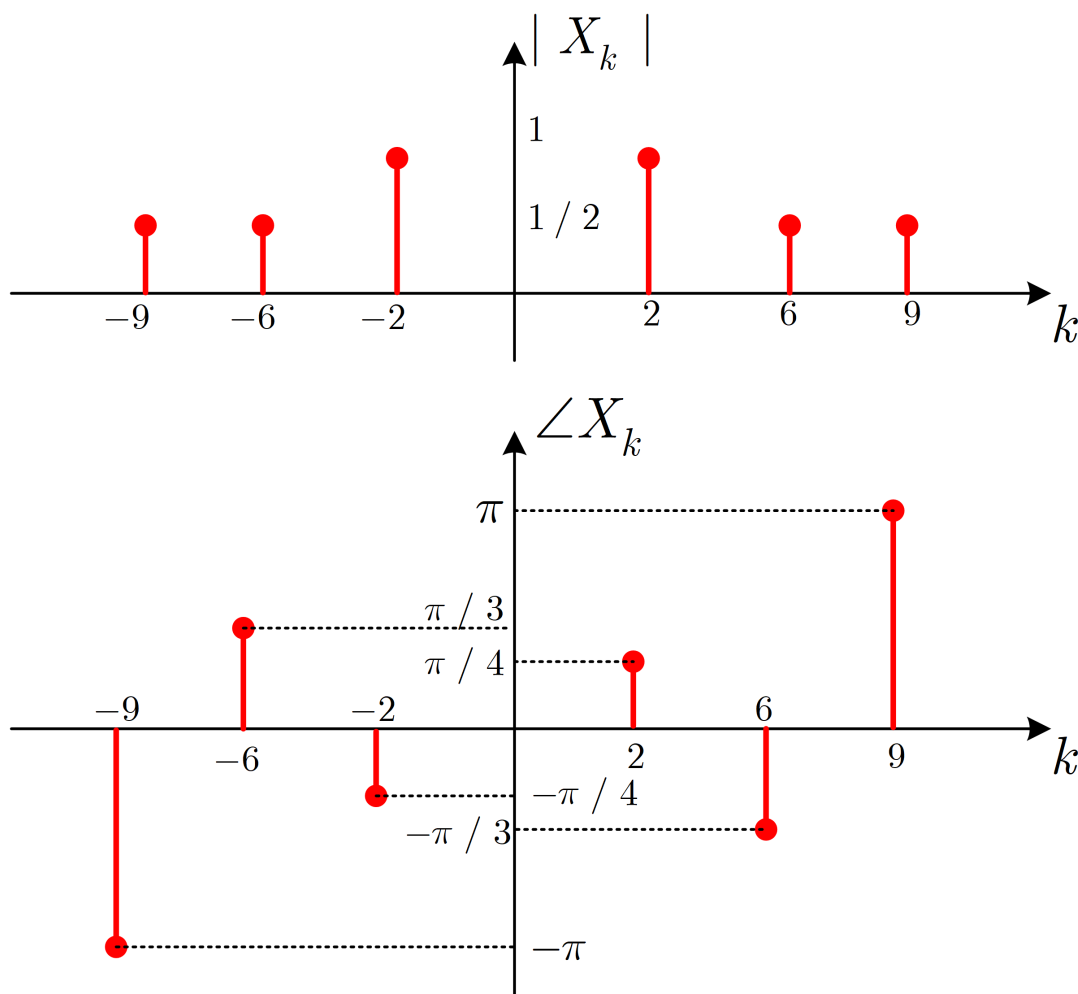
Για το σχεδιασμό του φάσματος πλάτους και φάσης χρειαζόμαστε την εκθετική μορφή της σειράς, δηλ.

$$x(t) = 2 \cos\left(2\pi 80 t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\pi 240 t - \frac{\pi}{3}\right) - \cos(2\pi 360 t) \quad (3)$$

$$= e^{j\pi/4} e^{j2\pi 80 t} + e^{-j\pi/4} e^{-j2\pi 80 t} + \frac{1}{2} e^{-j\pi/3} e^{j2\pi 240 t} + \frac{1}{2} e^{j\pi/3} e^{-j2\pi 240 t} - \frac{1}{2} e^{j2\pi 360 t} - \frac{1}{2} e^{-j2\pi 360 t} \quad (4)$$

$$= e^{j\pi/4} e^{j2\pi 80 t} + e^{-j\pi/4} e^{-j2\pi 80 t} + \frac{1}{2} e^{-j\pi/3} e^{j2\pi 240 t} + \frac{1}{2} e^{j\pi/3} e^{-j2\pi 240 t} + \frac{1}{2} e^{j\pi} e^{j2\pi 360 t} + \frac{1}{2} e^{-j\pi} e^{-j2\pi 360 t} \quad (5)$$

Οι συχνότητες είναι ακέραιες πολλαπλάσιες ($k = 2, 6, 9$) της θεμελιώδους, οπότε τα φάσματα πλάτους και φάσης φαίνονται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Φάσματα πλάτους και φάσης Θέματος 1.

(β) Ο μετασχ. Fourier χρησιμοποιεί το ζεύγος

$$Ae^{j\phi}e^{j2\pi kf_0t} \longleftrightarrow Ae^{j\phi}\delta(f - kf_0) \quad (6)$$

οπότε

$$X(f) = e^{j\pi/4}\delta(f - 80) + e^{-j\pi/4}\delta(f + 80) + \frac{1}{2}e^{-j\pi/3}\delta(f - 240) \quad (7)$$

$$+ \frac{1}{2}e^{j\pi/3}\delta(f + 240) + \frac{1}{2}e^{j\pi}\delta(f - 360) + \frac{1}{2}e^{-j\pi}\delta(f + 360) \quad (8)$$

(γ) Η μέση ισχύς καθενός όρου της σειράς Fourier είναι $A^2/2$, με A το πραγματικό πλάτος κάθε όρου. Οπότε έχουμε ισχύ $2^2/2$, $1/2$, και $1/2$, αντίστοιχα για τους όρους του αθροίσματος. Οπότε ο πρώτος όρος, των 80 Hz, φέρει τα $2/3$ της συνολικής μέσης ισχύος του σήματος.

Θέμα 2ο - 25 μονάδες: Μετασχηματισμός Fourier

Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier του παρακάτω σήματος:

$$x(t) = \begin{cases} -j/4, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ j/4, & t < 0 \end{cases}$$

Λύση:
Θα είναι

$$x(t) = -\frac{j}{4}u(t) + \frac{j}{4}u(-t) \quad (9)$$

(10)

και εφαρμόζοντας μετασχ. Fourier παίρνουμε

$$X(f) = -\frac{j}{4} \left(\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \right) + \frac{j}{4} \left(\frac{1}{2}\delta(-f) + \frac{1}{-j2\pi f} \right) \quad (11)$$

Όμως $\delta(f) = \delta(-f)$, κι έτσι

$$X(f) = -\frac{j}{8}\delta(f) - \frac{1}{8\pi f} + \frac{j}{8}\delta(f) - \frac{1}{8\pi f} = -\frac{1}{4\pi f} \quad (12)$$

Τελικά

$$-j \left(\frac{1}{4}u(t) - \frac{1}{4}u(-t) \right) \longleftrightarrow -\frac{1}{4\pi f} \quad (13)$$

Εναλλακτικά, ξέρουμε ότι

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f} \quad (14)$$

και το σήμα της εκφώνησης γράφεται ως

$$x(t) = -\frac{j}{4}\text{sgn}(t) \quad (15)$$

οπότε

$$X(f) = -\frac{j}{4} \frac{1}{j\pi f} = -\frac{1}{4\pi f} \quad (16)$$

Θέμα 3ο - 30 μονάδες: Διαφορικές Εξισώσεις

Δίνεται η παρακάτω διαφορική εξίσωση που περιγράφει ένα αιτιατό σύστημα:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 11 \frac{dy(t)}{dt} + 24y(t) = 5 \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

(α') **(10 μ.)** Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$, μαζί με το πεδίο σύγκλισης.

(β') **(15 μ.)** Βρείτε την κρουστική απόκριση, $h(t)$, του συστήματος.

(γ') **(5 μ.)** Βρείτε την έξοδο του συστήματος $y(t)$, για είσοδο $x(t) = -2\delta(t-1)$.

Λύση:

(α') Μεταφέρουμε την εξίσωση στο χώρο του Laplace, ως

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 11 \frac{dy(t)}{dt} + 24y(t) = 5 \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) \quad (17)$$

$$s^2 Y(s) + 11sY(s) + 24Y(s) = 5sX(s) + 3X(s) \quad (18)$$

$$Y(s)(s^2 + 11s + 24) = X(s)(5s + 3) \quad (19)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{5s + 3}{s^2 + 11s + 24} \quad (20)$$

με πιθανά πεδία σύγκλισης αυτά που καθορίζονται από τους δυο πόλους στις θέσεις $s = -3$, $s = -8$. Αφού το σύστημα είναι αιτιατό, θα έχει δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης, δηλ. $\Re\{s\} > -3$.

- (β) Για την κρουστική απόκριση θα πρέπει να κάνουμε πρώτα ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα και μετά να γυρίσουμε το αποτέλεσμα πίσω στο χρόνο, δηλ.

$$H(s) = \frac{5s + 3}{s^2 + 11s + 24} = \frac{A}{s + 3} + \frac{B}{s + 8} \quad (21)$$

με

$$A = H(s)(s + 3) \Big|_{s=-3} = -\frac{12}{5} \quad (22)$$

$$B = H(s)(s + 8) \Big|_{s=-8} = \frac{37}{5} \quad (23)$$

και λόγω αιτιατότητας

$$h(t) = -\frac{12}{5}e^{-3t}u(t) + \frac{37}{5}e^{-8t}u(t) \quad (24)$$

- (γ) Η έξοδος του συστήματος θα είναι

$$y(t) = h(t) * x(t) = h(t) * (-2\delta(t - 1)) = \frac{24}{5}e^{-3(t-1)}u(t - 1) - \frac{74}{5}e^{-8(t-1)}u(t - 1) \quad (25)$$

Θέμα 4ο - 25 μονάδες: Δειγματοληψία

Το σήμα $x(t) = \text{sinc}(200t)$ δειγματοληπτείται με συχνότητα δειγματοληψίας f_s ίση με

- i. 100 Hz,
- ii. 150 Hz,
- iii. 300 Hz.

Για κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις:

- (α) **(20 μ.)** Σχεδιάστε το φάσμα, $X_s(f)$, του δειγματοληπτημένου σήματος.
- (β) **(5 μ.)** Σε ποιά/ες περίπτωση/εις μπορείτε να ανακτήσετε το αρχικό σήμα από το δειγματοληπτημένο σήμα;

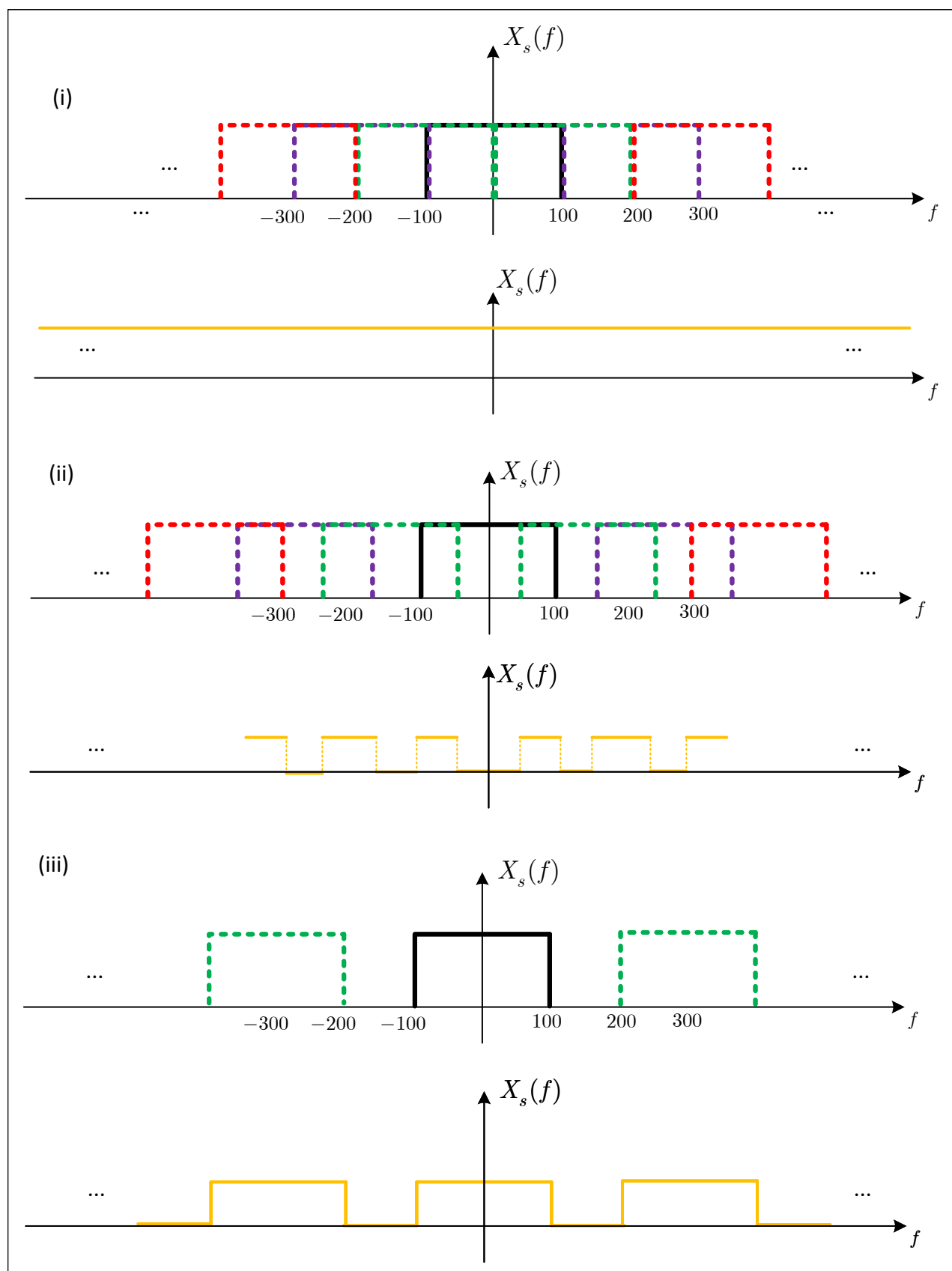
Λύση:

Ο μετασχ. Fourier του σήματος $x(t)$ δίνεται ως

$$X(f) = \frac{1}{200} \text{rect} \left(\frac{f}{200} \right) \quad (26)$$

που “ζει” στο διάστημα $(-100, 100)$ Hz.

- (α') Δείτε το Σχήμα 2. Τα διαφορετικά χρώματα αναπαριστούν τα aliases ανά kf_s , $k \in \mathbb{Z}$ και την επικάλυψή τους, ενώ το δεύτερο σχήμα με το πορτοκαλί χρώμα δείχνει το τελικό φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος.
- (β') Θα πρέπει $f_s > 2f_{max}$, οπότε μόνο στην τελευταία περίπτωση ($f_s = 300$ Hz) είναι εφικτή η ανάκτηση του σήματος από τα δείγματά του. Η μέγιστη συχνότητα του σήματος είναι ίση με $f_{max} = 100$ Hz, άρα χρειαζόμαστε $f_s > 200$ Hz.



Σχήμα 2: Σχήμα Θέματος 4.