Κεφάλαιο 8

Συστήματα στο χώρο του Laplace

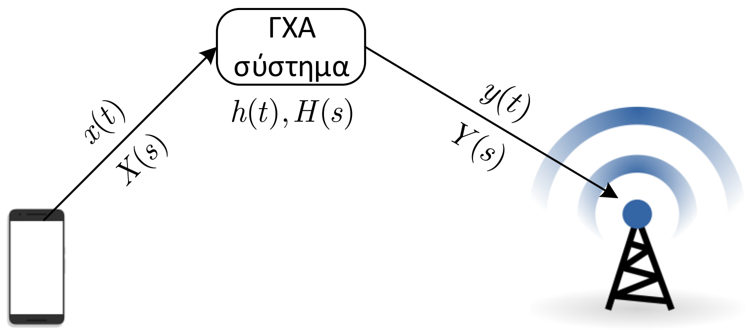
Ο μετασχ. Laplace είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για την ανάλυση συστημάτων. Η ικανότητά του να ερμηνεύει συχνοτικά πλήθος σημάτων, σημαντικά περισσότερων από το μετασχ. Fourier, τον κάνει ιδανικό για τη μελέτη συστημάτων.

Έχουμε δει αρκετά πράγματα για τα συστήματα σε προηγούμενο κεφάλαιο, καθώς και σχετικά με την αιτιατότητα και την ευστάθεια ενός συστήματος. Υπάρχουν δεξιόπλευρα, αριστερόπλευρα, αμφίπλευρα, αιτιατά και μη συστήματα που ορίζονται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που περιγράφηκε στην Παράγραφο 7.3.3. Μάλιστα, την αιτιατότητα και την ευστάθεια την είχαμε ορίσει και στις πρώτες μας συζητήσεις για συστήματα, ως την ικανότητα του συστήματος να εξαρτά την έξοδό του μόνο από τωρινές ή παρελθοντικές τιμές της εισόδου (αιτιατότητα) και την ιδιότητα του συστήματος να παράγει φραγμένες εξόδους για φραγμένες εισόδους (ευστάθεια).

Ας δούμε σε αυτό το κεφάλαιο πως όλα αυτά εκφράζονται στον χώρο του μετασχ. Laplace, πόσο απλοποιούνται, και πως μας βοηθά ο μετασχ. Laplace να λύνουμε πρακτικά προβλήματα.

8.1 Μια μικρή εφαρμογή-κίνητρο

Ας υποθέσουμε ότι επικοινωνείτε με ένα φίλο σας τηλεφωνικά μέσω ενός smartphone. Το σήμα φωνής σας κωδικοποιείται ψηφιακά και αποστέλλεται μέσω του τηλεπικοινωνιακού καναλιού - που στο παράδειγμα αυτό πρόκειται για τον ελεύθερο χώρο (αέρα) - στο σταθμό βάσης της υπηρεσίας κινητής τηλεφωνίας σας. Προτού παραδωθεί στο smartphone του συνομιλητή σας, πρέπει να "καθαριστεί" από τις παρεμβολές του τηλεπικοινωνιακού καναλιού. Ας θεωρήσουμε το τηλεπικοινωνιακό κανάλι ως ΓΧΑ σύστημα, με είσοδο το ψηφιοποιημένο σήμα φωνής σας και έξοδο μια τροποποιημένη έκδοσή του λόγω των παρεμβολών που εισήχθησαν από το κανάλι, όπως στο Σχήμα 8.1. Ο σταθμός βάσης αναλαμβάνει περιοδικά να εκτιμά το κανάλι στο χώρο που βρίσκεστε, δηλ. να υπολογίζει την



Σχήμα 8.1: *Ασύρματο τηλεπικοινωνιακό κανάλι.*

κρουστική απόκριση $h(t)$ του καναλιού. Σκοπός του σταθμού βάσης είναι να προσπαθήσει να ακυρώσει την επίδραση του καναλιού στο σήμα εισόδου, ώστε να παραδώσει στο φίλο σας ένα όσο το δυνατόν πιστότερο αντίγραφο του σήματος φωνής που εστάλη από το τηλέφωνό σας. Αν υποθέσετε ότι το κανάλι με ευσταθή και αιτιατή κρουστική απόκριση $h(t)$ έχει μετασχ. Laplace $H(s)$, τότε ο σταθμός βάσης θα ήθελε να *αντιστρέψει* την επίδραση του συστήματος επάνω στο σήμα εισόδου. Από την ιδιότητα της συνέλιξης στο χρόνο γνωρίζετε ότι

$$Y(s) = H(s)X(s) \tag{8.1}$$

και θα θέλατε να βρείτε ένα σύστημα $H_i(s) = \frac{1}{H(s)}$ έτσι ώστε

$$H_i(s)Y(s) = H_i(s)H(s)X(s) = X(s) \tag{8.2}$$

δηλ.

$$H_i(s)H(s) = 1, \;\; R_{H_i} \cap R_H \neq \emptyset \tag{8.3}$$

Το σύστημα $H_i(s)$ θα δείτε ότι ονομάζεται ***αντίστροφο σύστημα*** και θα μελετήσετε τις ιδιότητές του. Όμως, πολλές φορές το αντίστροφο σύστημα δεν είναι ευσταθές και αιτιατό όπως απαιτείται για την υλοποίησή του. Γιατί συμβαίνει αυτό; Τι εναλλακτικές επιλογές υπάρχουν σε αυτήν την περίπτωση; Μπορούμε με κάποιο τρόπο να ακυρώσουμε όλικά ή μερικά την επίδραση του καναλιού, και με τι κόστος; Τέτοια ερωτήματα θα είστε σε θέση να απαντήσετε με την ολοκλήρωση του κεφαλαίου αυτού.

8.2 Η Συνάρτηση Μεταφοράς

Ας θεωρήσουμε τώρα μια είσοδο της μορφής

$$x(t) = e^{s_0 t}, \;\; s_0 \in \mathbb{C} \tag{8.4}$$

σε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$. Η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = T\{x(t)\} = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{8.5}$$

Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s_0(t-\tau)}d\tau = e^{s_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s_0\tau}d\tau \tag{8.6}$$

Ορίζουμε ως **Συνάρτηση Μεταφοράς** το μετασχ. Laplace της κρουστικής απόκρισης του συστήματος

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt \tag{8.7}$$

και έτσι από τη Σχέση (8.6) μπορούμε να γράψουμε οτι

$$y(t) = H(s_0)e^{s_0 t} \tag{8.8}$$

Σας θυμίζει κάτι; ☺Βλέπουμε ότι η επίδραση της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος $H(s)$ επάνω σε μια είσοδο της μορφής $e^{s_0 t}$ είναι ο πολλαπλασιασμός της με τη συνάρτηση μεταφοράς για την τιμή s_0, $H(s_0)$! Θυμηθείτε οτι *ιδιοσυνάρτηση* ενός συστήματος λέγεται το σήμα που περνάει από το σύστημα χωρίς καμιά τροποποίηση πλήν του πολλαπλασιασμού του με μια συνήθως μιγαδική σταθερά, όπως είδαμε στο μετασχ. Fourier. Έτσι, αναγνωρίζουμε το $e^{s_0 t}$ ως ***ιδιοσυνάρτηση*** του ΓΧΑ συστήματος και την τιμή $H(s_0)$ ως η αντίστοιχη ***ιδιοτιμή***.

Τώρα, ας εκφράσουμε την μιγαδική συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ σε πολική μορφή, ως

$$H(s) = |H(s)|e^{j\phi(s)} \tag{8.9}$$

όπου $|H(s)|$ και $\phi(s)$ είναι το μέτρο και η φάση του $H(s)$, αντίστοιχα. Ξαναγράφοντας την έξοδο του συστήματος, θα έχουμε

$$y(t) = |H(s)|e^{j\phi(s)}e^{st} \tag{8.10}$$

Με χρήση του $s = \sigma + j2\pi f$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} y(t) &= |H(\sigma + j2\pi f)|e^{\sigma t}e^{j(2\pi f t + \phi(\sigma + j2\pi f))} \\ &= |H(\sigma + j2\pi f)|e^{\sigma t}\cos(2\pi f t + \phi(\sigma + j2\pi f)) + j|H(\sigma + j2\pi f)|e^{\sigma t}\sin(2\pi f t + \phi(\sigma + j2\pi f)) \end{aligned} \tag{8.11}$$

Μπορούμε εδώ να παρατηρήσουμε ότι το σύστημα, δεδομένης της εισόδου της μορφής $x(t) = e^{st}$, αλλάζει το πλάτος της εισόδου κατα παράγοντα $|H(\sigma + j2\pi f)|$ και μετατοπίζει τη φάση των ημιτονοειδών συνιστωσών κατά $\phi(\sigma + j2\pi f)$. Το σύστημα δεν αλλάζει ούτε τον παράγοντα σ, ούτε τη συχνότητα f της εισόδου. Ενδιαφέρον! ☺

8.3 Μετασχηματισμός Laplace και Διαφορικές Εξισώσεις Συστημάτων

Τώρα που έχουμε ένα τόσο δυνατό εργαλείο ανάλυσης σημάτων και συστημάτων, μπορούμε να μιλήσουμε ακόμα πιο γενικά για τα συστήματα, θεωρώντας ότι αυτά περιγράφονται από μια διαφορική εξίσωση. Όπως έχουμε πει, πολλά φυσικά και μηχανικά συστήματα μπορούν να αναχθούν σε διαφορικές εξισώσεις. Για παράδειγμα, τα ηλεκτρικά κυκλώματα συνεχούς ή εναλλασσόμενου ρεύματος περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις, και η απλοποίηση που συνεπάγεται με την ανάλυσή τους στο χώρο του Laplace είναι σημαντική. Εν γένει λοιπόν, ο μετασχ. Laplace μας επιτρέπει να λύνουμε τέτοιες διαφορικές εξισώσεις πολύ εύκολα, μετατρέποντάς τες σε απλές *αλγεβρικές*!

Πιο συγκεκριμένα λοιπόν, έστω το σύστημα που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές a_k, b_l,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{l=0}^{M} b_l \frac{d^l x(t)}{dt^l} \tag{8.12}$$

Έχουμε δει σε προηγούμενα κεφάλαια τον τρόπο λύσης μιας τέτοιας διαφορικής εξίσωσης τόσο στο πεδίο του χρόνου, όσο και σε αυτόν της συχνότητας. Τα προβλήματα που συναντήσαμε - και λύσαμε - ήταν τα ακόλουθα:

(α΄) Η εύρεση της εξόδου ενός συστήματος που *δεν* είναι ΓΧΑ, δηλ. που έχει μη μηδενικές αρχικές συνθήκες. Σε αυτά τα συστήματα, η έξοδος - όπως θα θυμάστε - αποτελείται από δυο συνιστώσες: την απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}(t)$ και την απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}(t)$. Όμως ο δίπλευρος μετασχ. Laplace δεν περιλαμβάνει αρχικές συνθήκες στον υπολογισμό του, άρα δεν μπορεί να μας δώσει την απόκριση μηδενικής εισόδου. Αυτό όμως μπορεί να το κάνει ο μονόπλευρος μετασχ. Laplace, ο οποίος (δείτε τον Πίνακα 7.1) περιλαμβάνει αρχικές συνθήκες στον υπολογισμό του! Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^n X(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(t)\Big|_{t=0} \tag{8.13}$$

από το μονόπλευρο μετασχ. Laplace, για να μετατρέψουμε τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική, να βρούμε το μετασχ. Laplace της εξόδου, και να τον αντιστρέψουμε πίσω στο χρόνο. Ο αναγνώστης μπορεί να δείξει ότι ο μετασχ. Laplace της εξόδου $Y(s)$ δίνεται σε αυτήν την περίπτωση ως

$$Y(s) = Y_{zs}(s) + Y_{zi}(s) \tag{8.14}$$

$$= \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} X(s) + \frac{\sum_{k=0}^{N} \sum_{i=1}^{k} s^{k-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} y(t)\Big|_{t=0^-} + \sum_{l=0}^{M} \sum_{i=1}^{l} s^{l-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(t)\Big|_{t=0^-}}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \tag{8.15}$$

$$= \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} X(s) + \frac{\sum_{k=0}^{N} \sum_{i=1}^{k} s^{k-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} y(t)\Big|_{t=0^-}}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \tag{8.16}$$

αφού η είσοδος εφαρμόζεται πάντα σε χρονικές στιγμές $t \geq 0$. Παρατηρήστε πόσο εύκολα διαχωρίζονται οι αποκρίσεις μηδενικής εισόδου και μηδενικής κατάστασης.

(β΄) Η εύρεση της εξόδου ενός συστήματος που είναι ΓΧΑ, δηλ. έχει μηδενικές αρχικές συνθήκες. Σε αυτά τα συστήματα, η έξοδος αποτελείται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης. Αφού οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^n X(s) \tag{8.17}$$

του αμφίπλευρου μετασχ. Laplace για να μετατρέψουμε τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική, να βρούμε το μετασχ. Laplace της εξόδου, και να τον αντιστρέψουμε πίσω στο χρόνο. Τότε η Σχέση (8.16) γίνεται

$$Y(s) = Y_{zs}(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} X(s) \tag{8.18}$$

(γ΄) Η εύρεση της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ ενός συστήματος. Στο χώρο του Laplace αυτό γίνεται μεσω της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ που χαρακτηρίζει το σύστημα. Θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές και χρησιμοποιούμε ξανά τη σχέση

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^n X(s) \tag{8.19}$$

για να μετατρέψουμε τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική και να κατασκευάσουμε το λόγο $Y(s)/X(s)$ που θα μας δώσει τη συνάρτηση μεταφοράς. Από τη Σχέση (8.18), θα έχουμε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \tag{8.20}$$

Η ίδια σχέση λαμβάνεται απ' ευθείας και από τη Σχέση (8.1), αφού γνωρίζουμε ότι η απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος αποτελείται από τη συνέλιξη της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Στο χώρο του Laplace, η συνέλιξη μετατρέπεται σε γινόμενο της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ και του μετασχ. Laplace της εισόδου $X(s)$.

Παρατηρήστε ότι για ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, η συνάρτηση μεταφοράς είναι ρητή συνάρτηση του s. Αυτό είναι σημαντικό χαρακτηριστικό χαρακτηριστικό των ΓΧΑ συστημάτων που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.

Ας δούμε δυο παραδείγματα που δείχνουν χαρακτηριστικά πώς ο μετασχ. Laplace μπορεί να μας διευκολύνει όταν έχουμε να κάνουμε με τέτοια συστήματα. Ας υποθέσουμε ότι, όπως και όταν δουλεύαμε στο πεδίο του χρόνου, οι λύσεις μας θα είναι αιτιατές.

Παράδειγμα 8.1:

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \tag{8.21}$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 2$, $y'(0^-) = 1$ και είσοδο $x(t) = e^{-4t}u(t)$.

Λύση:
Προφανώς θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της παραγώγισης του μονόπλευρου μετασχ. Laplace. Εφαρμόζοντας την και στα δυο μέλη, έχουμε:

$$L\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + L\left\{5\frac{dy(t)}{dt}\right\} + L\{6y(t)\} = L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + L\{x(t)\} \tag{8.22}$$

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 5sY(s) - 5y(0^-) + 6Y(s) = sX(s) - x(0^-) + X(s) \tag{8.23}$$

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 5sY(s) - 10 + 6Y(s) = sX(s) - 0 + X(s) \tag{8.24}$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) - 2s - 11 = X(s)(s+1) \tag{8.25}$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) - 2s - 11 = \frac{s+1}{s+4} \tag{8.26}$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) = \frac{s+1}{s+4} + 2s + 11 \tag{8.27}$$

$$Y(s) = \frac{\frac{s+1}{s+4} + 2s + 11}{s^2 + 5s + 6} \tag{8.28}$$

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)(s+4)} \tag{8.29}$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα, μια και ο βαθμός του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος του αριθμητή. Οπότε

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+4} \tag{8.30}$$

με

$$A = Y(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+3)(s+4)}\Big|_{s=-2} = \frac{13}{2} \tag{8.31}$$

$$B = Y(s)(s+3)\Big|_{s=-3} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+4)}\Big|_{s=-3} = -3 \tag{8.32}$$

$$C = Y(s)(s+4)\Big|_{s=-4} = \frac{2s^2+20s+45}{(s+2)(s+3)}\Big|_{s=-4} = -\frac{3}{2} \tag{8.33}$$

Για να είναι αιτιατή η έξοδος, θα πρέπει το πεδίο σύγκλισης να είναι δεξιόπλευρο. Θα είναι $R_y \supseteq R_1 \cap R_2 \cap R_3$ με

$$R_1 = \{\mathrm{Re} > -2\} \tag{8.34}$$
$$R_2 = \{\mathrm{Re} > -3\} \tag{8.35}$$
$$R_3 = \{\mathrm{Re} > -4\} \tag{8.36}$$

τα πεδία σύγκλισης των επιμέρους μετασχηματισμών της Σχέσης (8.30). Άρα τελικά θα είναι $R_y = \{\mathrm{Re} > -2\}$ και

$$Y(s) = \frac{13}{2}\frac{1}{s+2} - 3\frac{1}{s+3} - \frac{3}{2}\frac{1}{s+4}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -2 \tag{8.37}$$

Οπότε επιστρέφοντας πίσω στο χρόνο με χρήση του Πίνακα 7.2, θα είναι

$$y(t) = \frac{13}{2}e^{-2t}u(t) - 3e^{-3t}u(t) - \frac{3}{2}e^{-4t}u(t) \tag{8.38}$$

που είναι και το ζητούμενο.

Παράδειγμα 8.2:

Έστω οτι ένα ΓΧΑ σύστημα $H(s)$ περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t) \tag{8.39}$$

(α΄) Υπολογίστε την κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος.

(β΄) Βρείτε την έξοδο, $y(t)$, του συστήματος όταν η είσοδος είναι της μορφής

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \tag{8.40}$$

Λύση:

(α΄) Μετασχηματίζοντας τη διαφορική εξίσωση στο χώρο του Laplace, έχουμε

$$s^2Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s) \tag{8.41}$$
$$Y(s)(s^2 - s - 2) = X(s) \tag{8.42}$$
$$H(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2} \tag{8.43}$$

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα

$$H(s) = \frac{1}{s^2-s-2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}$$

με

$$A = H(s)(s-2)\Big|_{s=2} = \frac{1}{s+1}\Big|_{s=2} = \frac{1}{3} \tag{8.44}$$
$$B = H(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s-2}\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{3} \tag{8.45}$$

και το πεδίο σύγκλισης θα είναι το $\{\mathrm{Re}\{s\} > 2\} = \{\mathrm{Re}\{s\} > 2\} \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > -1\}$. Άρα

$$H(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 2 \tag{8.46}$$

και με χρήση του Πίνακα 7.2, έχουμε

$$h(t) = \frac{1}{3}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t) \tag{8.47}$$

(β΄) Η έξοδος θα είναι της μορφής

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}X(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}\frac{1}{(s+2)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} \tag{8.48}$$

με

$$A = Y(s)(s-2)\Big|_{s=2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\Big|_{s=2} = \frac{1}{12} \tag{8.49}$$

$$B = Y(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{(s-2)(s+2)}\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{3} \tag{8.50}$$

$$C = Y(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{1}{(s-2)(s+1)}\Big|_{s=-2} = \frac{1}{4} \tag{8.51}$$

και άρα

$$Y(s) = \frac{1}{12}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+2} \tag{8.52}$$

Επειδή το σύστημα έχει πεδίο σύγκλισης

$$R_H = \{\mathrm{Re}\{s\} > 2\} \tag{8.53}$$

και η είσοδος

$$R_X = \{\mathrm{Re}\{s\} > -2\} \tag{8.54}$$

η έξοδος θα έχει πεδίο σύγκλισης

$$R_Y = \{\mathrm{Re}\{s\} > 2\} \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > -2\} = \{\mathrm{Re}\{s\} > 2\} \tag{8.55}$$

Έτσι, με χρήση του Πίνακα 7.2, και δεδομένου ότι το συνολικό σήμα εξόδου θα είναι δεξιόπλευρο,

$$y(t) = \frac{1}{12}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{4}e^{-2t}u(t) \tag{8.56}$$

■

Παρ΄ όλο που οι διαφορικές εξισώσεις δημιουργήθηκαν για να αναπαραστήσουν φυσικά συστήματα (και άρα αιτιατά), από μαθηματικής πλευράς μια διαφορική εξίσωση μπορεί να έχει και αντι-αιτιατή κρουστική απόκριση! Για παράδειγμα, η συνάρτηση μεταφοράς

$$H_1(s) = \frac{1}{s},\ \mathrm{Re}\{s\} > 0 \tag{8.57}$$

περιγράφει τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) = x(t) \tag{8.58}$$

αφού

$$H_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s} \Longleftrightarrow sY(s) = X(s) \tag{8.59}$$

και στο πεδίο του χρόνου

$$\frac{d}{dt}y(t) = x(t) \tag{8.60}$$

Το ίδιο όμως και η συνάρτηση μεταφοράς

$$H_2(s) = \frac{1}{s},\ \mathrm{Re}\{s\} < 0 \quad (!!!) \tag{8.61}$$

αφού ξανά ισχύουν τα παραπάνω! Οι αντίστοιχες κρουστικές αποκρίσεις των δυο αυτών συστημάτων δίνονται - όπως ξέρετε - ως

$$h_1(t) = u(t) \tag{8.62}$$

$$h_2(t) = -u(-t) \tag{8.63}$$

και είναι αιτιατό και αντι-αιτιατό σήμα, αντίστοιχα.

Όπως ήδη γνωρίζετε, για την αιτιατότητα ενός συστήματος απαιτείται επιπλέον πληροφορία (αυτή της *αρχικής ηρεμίας* του συστήματος). Σε κάθε περίπτωση, όταν αναφερόμαστε σε διαφορικές εξισώσεις (στην κρουστική τους απόκριση, ή στην έξοδό τους) θα υποθέτουμε πάντα ότι όλα αυτά είναι αιτιατά.

Εν γένει όμως, ένα ΓΧΑ σύστημα μπορεί να έχει αιτιατή, μη-αιτιατή, ή αντι-αιτιατή κρουστική απόκριση, καθώς η αιτιατότητα δεν είναι απαραίτητη για την υλοποίηση του συστήματος off-line, όπως π.χ. σε λογισμικό ενός υπολογιστή, όπου όλες οι τιμές ενός σήματος έχουν αποθηκευτεί εκ των προτέρων. Ας δούμε ένα τέτοιο παράδειγμα συστήματος.

Παράδειγμα 8.3:

Έστω το *μη-αιτιατό* ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+s-2} \tag{8.64}$$

Βρείτε την έξοδό του, $y(t)$, όταν στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα $x(t) = -e^{2t}u(-t)$.

Λύση:
Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί ως

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)} \tag{8.65}$$

δηλ. έχει δυο πόλους στις θέσεις $s = -2$ και $s = 1$. Ως μη-αιτιατό, θα είναι αμφίπλευρο σήμα στο χρόνο. Τα αμφίπλευρα σήματα έχουν πεδίο σύγκλισης που αναπαρίσταται ως μια ''λωρίδα'' στο μιγαδικό επίπεδο. Άρα το πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς θα είναι το $R_H = \{-2 < \mathrm{Re}\{s\} < 1\}$, το οποίο μπορεί να γραφεί και ως

$$R_H = \{\{-2 < \mathrm{Re}\{s\}\} \cap \{\mathrm{Re}\{s\} < 1\}\} \tag{8.66}$$

Η είσοδος έχει μετασχ. Laplace

$$x(t) = -e^{2t}u(-t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-2}, \ \ \mathrm{Re}\{s\} < 2 \tag{8.67}$$

Οπότε η έξοδος θα δίνεται ως

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-2)(s-1)} \tag{8.68}$$

$$= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1} \tag{8.69}$$

με A, B, C να δίνονται ως (υπολογίστε τα!)

$$Y(s) = -\frac{1}{12}\frac{1}{s+2} + \frac{3}{4}\frac{1}{s-2} - \frac{2}{3}\frac{1}{s-1} \tag{8.70}$$

Οι πόλοι του $Y(s)$ βρίσκονται στις θέσεις $s = -2$, $s = 2$, και $s = 1$, άρα το πεδίο σύγκλισης της εξόδου θα είναι

$$R_Y \supseteq R_H \cap R_X = \{-2 < \mathrm{Re}\{s\} < 1\} \cap \{\mathrm{Re}\{s\} < 2\} = \{-2 < \mathrm{Re}\{s\} < 1\} \tag{8.71}$$

Αν γράψουμε το πεδίο σύγκλισης ως τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης που αντιστοιχούν στους πόλους των μερικών κλασμάτων της εξόδου, θα είναι

$$R_Y = \{-2 < \mathrm{Re}\{s\} < 1\} = \{\mathrm{Re}\{s\} < 2\} \cap \{\mathrm{Re}\{s\} < 1\} \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > -2\} \tag{8.72}$$

και έτσι το σήμα εξόδου στο χρόνο θα είναι κι αυτό αμφίπλευρο σήμα. Πράγματι,

$$y(t) = -\frac{1}{12}e^{-2t}u(t) - \frac{3}{2}e^{2t}u(-t) + \frac{2}{3}e^{t}u(-t) \tag{8.73}$$

με χρήση των ζευγών του Πίνακα 7.2.

8.4 ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Laplace

Ας επικεντρώσουμε τώρα το ενδιαφέρον μας στα ΓΧΑ συστήματα, αυτή τη φορά από τη σκοπιά του μετασχηματισμού Laplace, όπως κάναμε και για τον μετασχ. Fourier. Τα ΓΧΑ συστήματα, όπως έχουμε δει, περιγράφονται με τρεις τρόπους:

1. με μια διαφορική εξίσωση
$$\sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dt^k} a_k y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \tag{8.74}$$
με μηδενικές αρχικές συνθήκες
2. με την κρουστική απόκρισή τους, $h(t)$
3. με τη συχνοτική απόκρισή τους, $H(f)$
4. πλέον, και με τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$

Εδώ, θα δούμε τα συστήματα από τη σκοπιά του χώρου του Laplace και θα δούμε πόσο πιο απλά γίνονται τα πράγματα στο χώρο αυτό. Στην ανάλυση που ακολουθεί, θα διαπιστώσετε μεγάλη ομοιότητα με τη αντίστοιχη του Κεφαλαίου 6, γι΄ αυτό και θα ακολουθήσουμε το ίδιο μοτίβο.

Ας συζητήσουμε για λίγο τη χρησιμότητα αναπαράστασης συστημάτων στο χώρο του Laplace. Ο κυριότερος λόγος μιας τέτοιας προσέγγισης είναι η *ευελιξία σχεδίασης ΓΧΑ συστημάτων*. Θυμίζουμε ότι τα συστήματα έχουν ως σκοπό την επεξεργασία (με οποιονδήποτε τρόπο) των σημάτων που παρουσιάζονται στην είσοδό τους. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα ΓΧΑ σύστημα που θα εκτελεί μια συγκεκριμένη τροποποίηση στο σήμα εισόδου του. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να το κατασκευάσουμε με βάση τα επιθυμητά για εμάς χαρακτηριστικά της απόκρισης σε συχνότητα του, $H(f)$ - προφανώς θα επεξεργαστούμε πραγματικό σήμα εισόδου, το οποίο θα αναλύεται σε πραγματικές συχνότητες μέσω του μετασχ. Fourier. Είδαμε νωρίτερα, και μέσω παραδειγμάτων, ότι η θέση των πόλων και των μηδενικών καθορίζει σχεδόν απόλυτα τη συμπεριφορά ενός σήματος στο χώρο του Laplace, και κατά συνέπεια τη μορφή του μετασχ. Fourier του μέσω της μορφής του μετασχηματισμού Laplace επάνω από το φανταστικό άξονα του μιγαδικού επιπέδου. Αν λοιπόν τοποθετήσουμε κατάλληλα τους πόλους ή/και τα μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο, μπορούμε να κατασκευάσουμε συστήματα με επιθυμητές συχνοτικές αποκρίσεις! Αυτές οι αποκρίσεις μπορούν να υπολογιστούν από το μετασχ. Laplace θέτοντας $s = j\omega = j2\pi f$, και με τις τεχνικές υπολογισμού αντιστρόφου μετασχηματισμού που γνωρίζουμε, να βρούμε την κρουστική απόκρισή τους. Είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι παρ΄ όλο που τέτοιες τεχνικές σχεδιάστηκαν με σκοπό την επεξεργασία σημάτων συνεχούς χρόνου, μπορεί κανείς με απλές σχετικά μεθόδους να μεταφέρει την τεχνογνωσία σχεδίασης τέτοιων συστημάτων γρήγορα και απλά στον "ψηφιακό" κόσμο, καθιστώντας τες δυνατές να επεξεργαστούν και σήματα διακριτού χρόνου!

Παρ΄ ότι ως τώρα συζητάμε την επιρροή του μετασχ. Laplace στο φάσμα πλάτους ενός σήματος, στην πραγματικότητα με όμοιο τρόπο επηρεάζεται και το φάσμα φάσης από την παρουσία των πόλων και των μηδενικών. Γνωρίζουμε ότι η φάση συνδέεται με τη θέση των επιμέρους συνιστωσών, ή αλλιώς τη *χρονική δομή* του σήματος ή της κρουστικής απόκρισης στο πεδίο του χρόνου. Σύντομα, θα αναπτύξουμε έννοιες και εργαλεία για τον κατάλληλο έλεγχο της φάσης μέσω της θέσης των πόλων και των μηδενικών.

Ένας άλλος λόγος είναι ότι μέσω του μετασχ. Laplace μπορούμε να αναλύσουμε σήματα και συστήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier. Με άλλα λόγια, μπορούμε να αναλύσουμε συστήματα που η συχνοτική τους απόκριση *δε* συγκλίνει, είναι δηλαδή *ασταθή*. Σίγουρα θα σκεφτήκατε ότι ασταθή συστήματα δεν έχουν κάποια πρακτική χρησιμότητα. Κι όμως, ασταθή συστήματα παρουσιάζονται πολύ συχνά στη μηχανική, και για να μπορούμε να χειριστούμε την αστάθειά τους (και να τη διορθώσουμε), πρέπει να μπορούμε να τα μελετήσουμε. Περισσότερα και για αυτό θα δούμε σύντομα.

Ας δούμε ένα απλό αλλά ιδιαίτερο παράδειγμα ενός ασταθούς συστήματος.

Παράδειγμα 8.4:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με τη μορφή διαφορικής εξίσωσης
$$y(t) = 17x(t) + 2\frac{d}{dt}x(t) + \frac{d^2}{dt^2}x(t) \tag{8.75}$$
και μας ζητείται να βρούμε την κρουστική απόκριση, $h(t)$, του συστήματος.

Λύση:
Μετασχηματίζοντας τη διαφορική εξίσωση στο χώρο του Laplace και λύνοντας ως προς $H(s)$, θα πάρουμε:

$$y(t) = 17x(t) + 2\frac{d}{dt}x(t) + \frac{d^2}{dt^2}x(t) \longleftrightarrow Y(s) = 17X(s) + 2sX(s) + s^2X(s) \tag{8.76}$$

$$= X(s)(s^2 + 2s + 17) \tag{8.77}$$

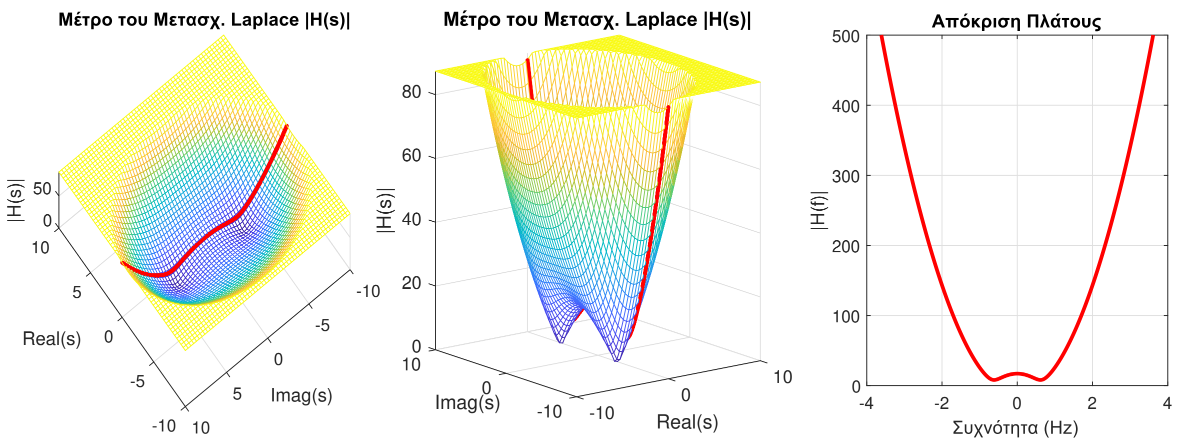
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = s^2 + 2s + 17 \tag{8.78}$$

$$H(s) = s^2 + 2s + 17 \tag{8.79}$$

Η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος μπορεί να βρεθεί από τους Πίνακες 7.1, 7.2, και είναι η:

$$h(t) = \frac{d^2}{dt^2}\delta(t) + 2\frac{d}{dt}\delta(t) + 17\delta(t) \tag{8.80}$$

Παρατηρήστε ότι το σύστημα είναι πεπερασμένης διάρκειας, και το πεδίο σύγκλισής του είναι όλο το $s-$επίπεδο, πλην προφανώς του $s = \infty$ (καταλαβαίνετε γιατί;). Επίσης, παραγοντοποιώντας τη συνάρτηση μεταφοράς, βλέπετε ότι έχει δυο μηδενικά στις θέσεις $s = -1 + 4j, s = -1 - 4j$. Ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε διαισθητικά και ποιοτικά τη συμπεριφορά του συστήματος αυτού, θεωρώντας την απόκριση πλάτους σε ένα μικρό διάστημα συχνοτήτων. Το μηδενικό στη θέση $s = -1 + 4j$ βρίσκεται στη συχνότητα $\omega = 4$ rad/s, δηλ. στη συχνότητα $f = 2/\pi$ Hz, οπότε θα έχει μια κάποια επίδραση στις συχνότητες κοντά στο $\omega = 4$ rad/s. Αντίθετα, το μηδενικό $s = -1 - 4j$ βρίσκεται στη συχνότητα $\omega = -4$ rad/s, δηλ. στη συχνότητα $f = -2/\pi$ Hz, άρα θα τείνει να χαμηλώσει το πλάτος της συχνότητας $\omega = -4$, όπως και αυτό των γειτονικών συχνοτήτων γύρω από αυτήν. Το Σχήμα 8.2 επιβεβαιώνει τα προηγούμενα.



Σχήμα 8.2: *Παράδειγμα 8.4: Μέτρο μετασχηματισμού Laplace συστήματος και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους.*

Παρατηρήστε ότι το σύστημα είναι ασταθές, κρίνοντας από τη μορφή της απόκρισης πλάτους του, αλλά και από το μέτρο του μετασχ. Laplace του.

■

Ίσως σας ξενίζει το γεγονός ότι ένα τόσο απλό σύστημα που απλώς παραγωγίζει μερικές φορές την είσοδό του και προσθέτει τα αποτελέσματα είναι ασταθές, ακόμα κι αν η είσοδός του είναι απολύτως φραγμένη. Μπορείτε να το αντιληφθείτε καλύτερα αν σκεφτείτε ότι το πρόβλημα σε τέτοια συστήματα είναι ο ορισμός της παραγώγου σε σημεία ασυνέχειας. Γνωρίζετε ότι μια ασυνέχεια μπορεί να μοντελοποιηθεί από μια βηματική συνάρτηση, και αν εμφανιστεί μια τέτοια συνάρτηση ως είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα όπως το παραπάνω, τότε γνωρίζουμε ότι

$$\frac{d^k}{dt^k}u(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\delta(t) \tag{8.81}$$

Για $k = 0$, έχουμε

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \tag{8.82}$$

το οποίο μας είναι ήδη γνωστή σχέση. Για $k = 1$, έχουμε

$$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t) \tag{8.83}$$

η οποία είναι επίσης γνωστή σχέση, αλλά στα πλαίσια του προηγούμενου παραδείγματος αποκαλύπτει ότι αν στην είσοδο του παραπάνω συστήματος εμφανιστεί, για παράδειγμα, μια βηματική συνάρτηση (η οποία είναι απολύτως φραγμένη), τότε μια συνιστώσα της εξόδου αποτελεί η $\delta(t)$, της οποίας η συμπεριφορά στο $t = 0$ είναι ''απροσδιόριστη'', το ίδιο κι αυτή των παραγώγων της!

Έτσι είναι εμφανές ότι συστήματα που καταλήγουν σε κρουστικές αποκρίσεις που περιλαμβάνουν *παραγώγους* της συνάρτησης Δέλτα δεν έχουν κάποιο ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς είναι ασταθή. Πρέπει να έχετε καταλάβει ότι αυτά τα συστήματα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με τάξη παραγώγου εισόδου γνήσια μεγαλύτερη αυτής της εξόδου, δηλ. αν

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{d^k}{dt^k} a_k y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \tag{8.84}$$

τότε $M > N$. Θα ασχοληθούμε πολύ λιγότερο στη συνέχεια με τέτοια συστήματα. Προσέξτε ότι αν $M = N$, τότε η κρουστική απόκριση θα περιλαμβάνει μια συνάρτηση Δέλτα, η οποία δε μας προξενεί πρόβλημα, καθώς - ως ουδέτερο στοιχείο της πράξης της συνέλιξης - απλώς αναπαράγει την είσοδο του συστήματος στην έξοδό του!

Τέλος, το παραπάνω παράδειγμα ήταν σχετικά απλό, και μπορούσε να λυθεί στο χώρο του χρόνου πιο εύκολα και γρήγορα. Πώς; Απλά θέτοντας $x(t) = \delta(t)$, και παίρνοντας $y(t) = h(t) = \frac{d^2}{dt^2}\delta(t) + 2\frac{d}{dt}\delta(t) + 17\delta(t)$. Απλά δείξαμε τον τρόπο που χρησιμοποιείται το πεδίο της συχνότητας και ο μετασχ. Laplace για να βρούμε την κρουστική απόκριση. Σε άλλα, πιο σύνθετα παραδείγματα συστημάτων, επιβάλλεται η χρήση του μετασχ. Laplace αν θέλουμε να γλιτώσουμε κόπο και χρόνο. Τέτοια παραδείγματα θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Παράδειγμα 8.5:

Έστω το αιτιατό σύστημα

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t) \tag{8.85}$$

του οποίου ζητούμε:

(α΄) τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$

(β΄) την κρουστική απόκριση $h(t)$

(γ΄) την έξοδό του για είσοδο $x(t) = -e^{2t}u(-t)$

Λύση:

(α΄) Κάνουμε μετασχ. Laplace στη διαφορική εξίσωση, έχουμε

$$sY(s) + 2Y(s) = X(s) \tag{8.86}$$
$$Y(s)(s+2) = X(s) \tag{8.87}$$
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+2} \tag{8.88}$$
$$H(s) = \frac{1}{s+2} \tag{8.89}$$

με πεδίο σύγκλισης $\mathrm{Re}\{s\} > -2$, λόγω αιτιατότητας, αφού η ρίζα του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι η $s = -2$. Ο πόλος βρίσκεται πάνω στον πραγματικό άξονα κι έτσι η συχνότητα $\omega = f = 0$ έχει μέγιστο. Παρατηρήστε επίσης ότι $\lim_{s\to\infty} H(s) = 0$. Δείτε το Σχήμα 8.3.

(β΄) Θα είναι

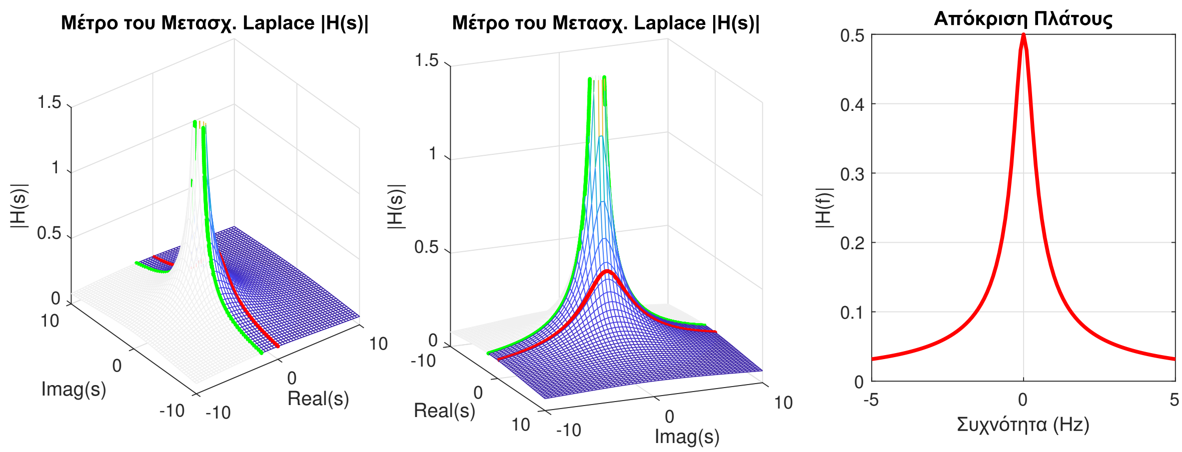
$$H(s) = \frac{1}{s+2}, \ \ \mathrm{Re}\{s\} > -2 \longleftrightarrow h(t) = e^{-2t}u(t) \tag{8.90}$$

(γ΄) Η είσοδος έχει μετασχ. Laplace

$$x(t) = -e^{2t}u(-t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-2}, \ \ \mathrm{Re}\{s\} < 2 \tag{8.91}$$

οπότε

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s+2}\frac{1}{s-2} = \frac{1}{(s+2)(s-2)} = \frac{1}{s^2-4}, \ \ -2 < \mathrm{Re}\{s\} < 2 \tag{8.92}$$



Σχήμα 8.3: *Παράδειγμα 8.5: Μέτρο μετασχηματισμού Laplace συστήματος και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους.*

το οποίο, με βάση τον Πίνακα 7.2, έχει αντίστροφο μετασχ. Laplace

$$y(t) = -\frac{1}{4}e^{-2|t|} \tag{8.93}$$

Παράδειγμα 8.6:

Έστω το αντι-αιτιατό σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2} - 4\frac{d}{dt}y(t) + 404y(t) = 80x(t) \tag{8.94}$$

του οποίου ζητούμε:

(α΄) τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$

(β΄) την κρουστική απόκριση, $h(t)$

Τι αλλάζει στα παραπάνω ερωτήματα αν το σύστημα που περιγράφει η διαφορική εξίσωση είναι αιτιατό;

Λύση:

(α΄) Κάνουμε μετασχ. Laplace στη διαφορική εξίσωση και έχουμε

$$s^2Y(s) - 4sY(s) + 404Y(s) = 80X(s) \tag{8.95}$$

$$Y(s)(s^2 - 4s + 404) = 80X(s) \tag{8.96}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{80}{s^2 - 4s + 404} \tag{8.97}$$

Οι ρίζες του πολυωνύμου είναι οι $s_1 = 2 + 20j, s_2 = s_1^* = 2 - 20j$, άρα το πεδίο σύγκλισης είναι $\mathrm{Re}\{s\} < 2$, αφού το σύστημα είναι αντι-αιτιατό.

(β΄) Ο παρονομαστής θα γραφεί ως

$$s^2 - 4s + 404 = (s - (2 + j20))(s - (2 - j20)) \tag{8.98}$$

Άρα

$$H(s) = \frac{80}{(s - (2 + j20))(s - (2 - j20))} \tag{8.99}$$

το οποίο μπορεί να γραφεί ως

$$H(s) = \frac{A}{s - (2 + j20)} + \frac{B}{s - (2 - j20)} \tag{8.100}$$

με

$$A = H(s)(s-(2+j20))\Big|_{s=(2+j20)} = \frac{80}{s-(2-j20)}\Big|_{s=(2+j20)} = \frac{80}{j40} = 2e^{-j\pi/2} \tag{8.101}$$

$$B = H(s)(s-(2-j20))\Big|_{s=(2-j20)} = \frac{80}{s-(2+j20)}\Big|_{s=(2-j20)} = \frac{80}{-j40} = 2e^{j\pi/2} \tag{8.102}$$

Οπότε η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ γράφεται ως

$$H(s) = 2e^{-j\pi/2}\frac{1}{s-(2+j20)} + 2e^{j\pi/2}\frac{1}{s-(2-j20)} \tag{8.103}$$

και συμβουλευόμενοι τον Πίνακα 7.2 και δεδομένου ότι το σύστημα είναι αντι-αιτιατό, θα είναι (μετά από λίγη άλγεβρα)

$$h(t) = -2e^{-j\pi/2}e^{(2+j20)t}u(-t) - 2e^{j\pi/2}e^{(2-j20)t}u(-t) = -4e^{2t}\cos\left(20t-\frac{\pi}{2}\right)u(-t) \tag{8.104}$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να αποφύγουμε την παραπάνω διαδικασία αν προσέξουμε ότι

$$H(s) = \frac{80}{s^2-4s+4+400} = \frac{80}{(s-2)^2+20^2},\ \ \mathrm{Re}\{s\} < 2 \longleftrightarrow h(t) = -4e^{2t}\sin(20t)u(-t) \tag{8.105}$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με της Σχέσης (8.104).

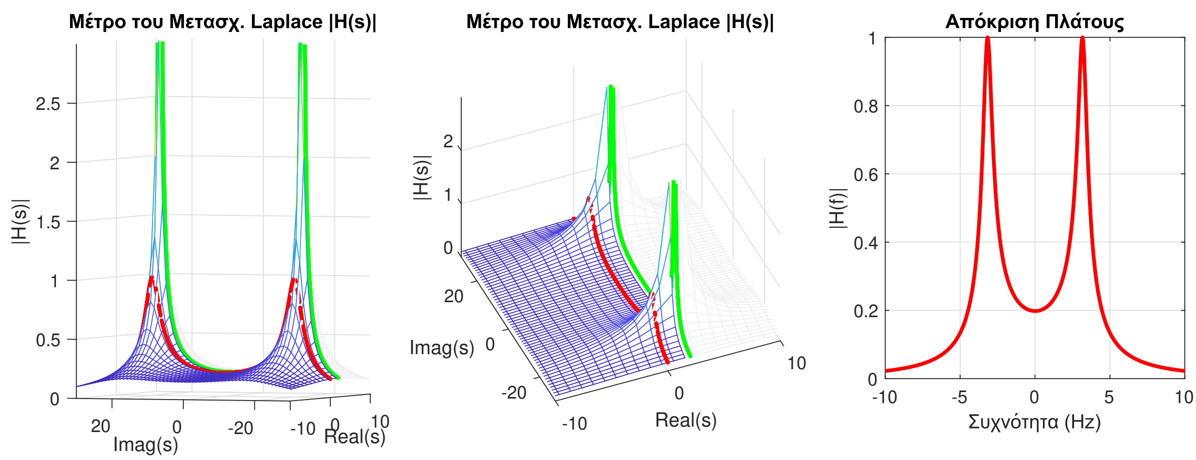
Αν το σύστημά μας ήταν αιτιατό, τότε η αλγεβρική μορφή της συνάρτησης μεταφοράς δε θα αλλάξει – θα αλλάξει όμως το πεδίο σύγκλισης, και θα γίνει $\mathrm{Re}\{s\} > 2$. Ως εκ τούτου, η κρουστική απόκριση θα είναι πλέον

$$h(t) = 4e^{2t}\sin(20t)u(t) \tag{8.106}$$

■

Πριν αφήσουμε το παράδειγμα, ας δούμε πως συμπεριφέρεται το σύστημά μας. Παρατηρήστε ότι (στο αρχικό ερώτημα) το πεδίο σύγκλισης είναι αριστερόπλευρο, και βλέπουμε ότι το σύστημα έχει δυο πόλους στις θέσεις $s = 2 + j20$, $s = 2 - j20$. Παρατηρήστε ότι $\lim_{s\to\infty} = 0$. Θεωρώντας την απόκριση πλάτους επάνω στο φανταστικό άξονα, παρατηρούμε ότι οι πόλοι βρίσκονται ‘‘σχετικά κοντά’’ σε αυτόν, και άρα η επιρροή τους θα είναι σημαντική: οι συχνότητες $\omega = \pm 20$ rad/s, δηλ. οι συχνότητες $f = \pm 10/\pi$ Hz, θα ενισχύονται σημαντικά σε σχέση με τις υπόλοιπες. Επίσης, λόγω του μηδενικού στη θέση $s = \infty$, οι τιμές της απόκρισης πλάτους θα ‘‘σβήνουν’’ όσο μεγαλώνουν οι συχνότητες κατά απόλυτη τιμή, αλλά δεν υπάρχει πλήρης καταστολή κάποιας συγκεκριμένης συχνότητας, καθώς δεν υπάρχει κάποιο μηδενικό στο πεπερασμένο μιγαδικό επίπεδο.

Το Σχήμα 8.4 επιβεβαιώνει την παρατήρησή μας.



Σχήμα 8.4: *Παράδειγμα 8.6: Μέτρο μετασχηματισμού Laplace συστήματος και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους.*

Παράδειγμα 8.7:

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 - 3s + 2} \tag{8.107}$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση $h(t)$ για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης.

Λύση:
Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα, έχουμε

$$H(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} \tag{8.108}$$

με

$$A = H(s)(s-2)\Big|_{s=2} = \frac{s+1}{s-1}\Big|_{s=2} = 3 \tag{8.109}$$

$$B = H(s)(s-1)\Big|_{s=1} = \frac{s+1}{s-2}\Big|_{s=1} = -1 \tag{8.110}$$

οπότε

$$H(s) = \frac{3}{s-2} - \frac{1}{s-1} \tag{8.111}$$

Δεδομένου ότι υπάρχουν δυο πόλοι, $s = 1$, $s = 2$, στη συνάρτηση μεταφοράς, το σύστημά μας μπορεί να είναι αιτιατό, με $\mathrm{Re}\{s\} > 2$, αντι-αιτιατό με $\mathrm{Re}\{s\} < 1$, και μη-αιτιατό με $1 < \mathrm{Re}\{s\} < 2$.
Από τον Πίνακα 7.2 έχουμε κατ΄ ευθείαν ότι αν το σύστημα είναι αιτιατό, τότε

$$h(t) = 3e^{2t}u(t) - e^t u(t) \tag{8.112}$$

αφού το πεδίο σύγκλισης $\mathrm{Re}\{s\} > 2$ αντιστοιχεί σε δεξιόπλευρο, και συγκεκριμένα αιτιατό, σήμα. Αν το σύστημα είναι αντι-αιτιατό, τότε

$$h(t) = -3e^{2t}u(-t) + e^t u(-t) \tag{8.113}$$

αφού το πεδίο σύγκλισης $\mathrm{Re}\{s\} < 1$ αντιστοιχεί σε αριστερόπλευρο, και συγκεκριμένα αντι-αιτιατό, σήμα. Τέλος, αν το σύστημα είναι μη αιτιατό, τότε

$$h(t) = -3e^{2t}u(-t) - e^t u(t) \tag{8.114}$$

αφού το πεδίο σύγκλισης $1 < \mathrm{Re}\{s\} < 2$ αντιστοιχεί σε αμφίπλευρο σήμα.

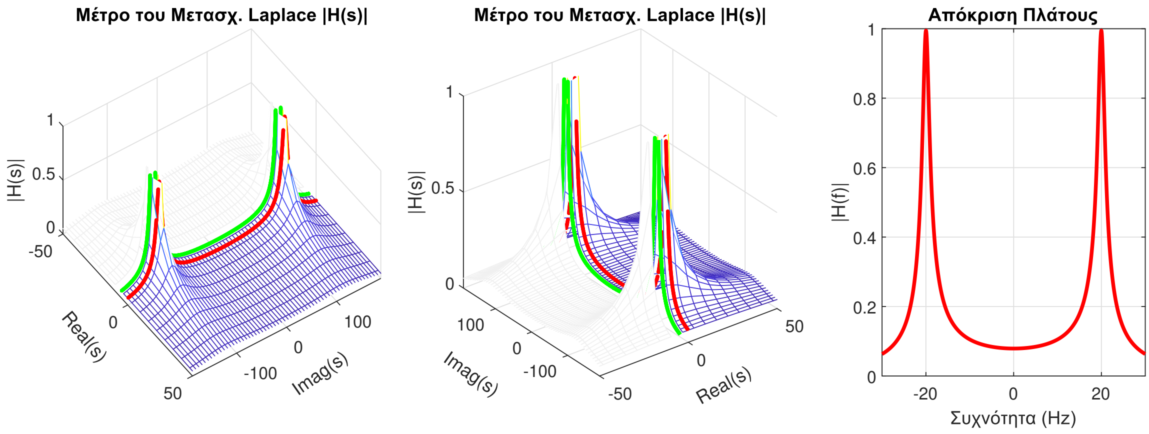
Παράδειγμα 8.8:

Έστω το *αιτιατό* σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ που δίνεται ως

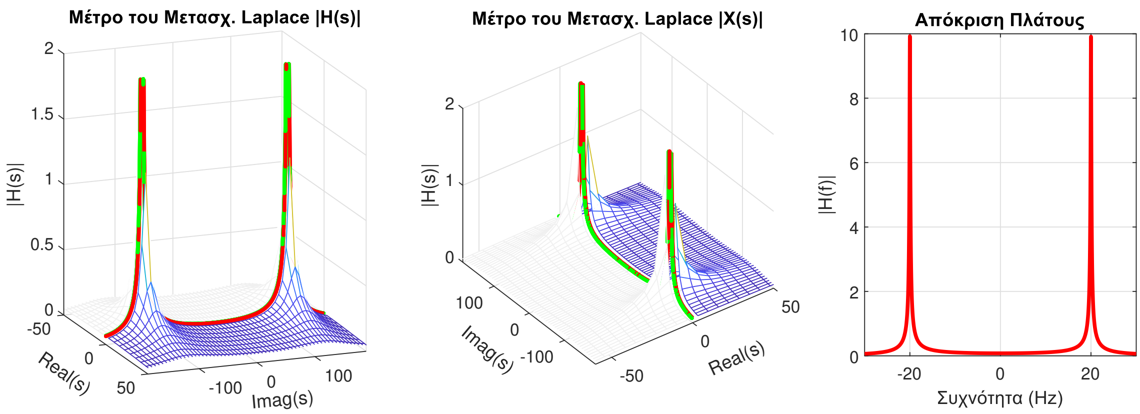
$$H(s) = \frac{1250}{(s - (\sigma_0 + j2\pi 20))(s - (\sigma_0 - j2\pi 20))} \tag{8.115}$$

Μελετήστε ποιοτικά τη συμπεριφορά της απόκρισης πλάτους του συστήματος για $\sigma_0 = -5$ και $\sigma_0 = -\frac{1}{2}$ και βρείτε την κρουστική του απόκριση $h(t)$.

Λύση:
Δείτε το Σχήμα 8.5, που παρουσιάζει το σύστημα για την τιμή $\sigma_0 = -5$. και εμφανώς έχει δυο συζυγείς πόλους στις θέσεις $s = -5 + \pm j2\pi 20$. Η παρουσία πόλων για $\omega = \pm 2\pi 20$ θα αυξήσει τις τιμές της απόκρισης πλάτους γύρω από αυτές τις συχνότητες. Στην περίπτωση που $\sigma_0 = -5$, η αύξηση θα είναι ‘‘μικρή’’ και πιο ομαλή, αφού οι πόλοι βρίσκονται ‘‘μακριά’’ από το φανταστικό άξονα, ενώ για $\sigma_0 = -1/2$ (Σχήμα 8.6), η αύξηση θα είναι μεγαλύτερη και πιο απότομη, αφού οι πόλοι βρίσκονται κοντύτερα στο φανταστικό άξονα. Με άλλα λόγια, το πραγματικό μέρος των πόλων, σ_0, ελέγχει το *εύρος ζώνης* των περιοχών γύρω από τα ± 20 Hz της απόκρισης πλάτους που ‘‘επωφελούνται’’ από την παρουσία των πόλων, καθώς και τις τιμές της απόκρισης πλάτους στις συχνότητες αυτές. Τα συμπεράσματα αυτά επιβεβαιώνονται από τα Σχήματα 8.5 και 8.6.



Σχήμα 8.5: *Παράδειγμα 8.8: Μέτρο μετασχηματισμού Laplace συστήματος και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους για* $\sigma_0 = -5$.



Σχήμα 8.6: *Παράδειγμα 8.8: Μέτρο μετασχηματισμού Laplace συστήματος και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους για* $\sigma_0 = -1/2$.

Η κρουστική απόκριση δίνεται αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα τη ρητή συνάρτηση μεταφοράς. Είναι

$$H(s) = \frac{A}{s-(\sigma_0 + j2\pi 20)} + \frac{B}{s-(\sigma_0 - j2\pi 20)} \tag{8.116}$$

με

$$A = H(s)(s-(\sigma_0 + j2\pi 20))\Big|_{s=\sigma_0+j2\pi 20} = \frac{1250}{2\pi 40}e^{-j\pi/2} \tag{8.117}$$

$$B = H(s)(s-(\sigma_0 - j2\pi 20))\Big|_{s=\sigma_0-j2\pi 20} = \frac{1250}{2\pi 40}e^{j\pi/2} \tag{8.118}$$

Άρα μέσω αντιστρόφου μετασχ. Laplace θα έχουμε

$$H(s) = \frac{1250}{2\pi 40}e^{-j\pi/2}\frac{1}{s-(\sigma_0 + j2\pi 20)} + \frac{1250}{2\pi 40}e^{j\pi/2}\frac{1}{s-(\sigma_0 - j2\pi 20)} \tag{8.119}$$

το οποίο, λόγω αιτιατότητας, δίνει την κρουστική απόκριση

$$h(t) = \frac{125}{8\pi}e^{-j\pi/2}e^{(\sigma_0+j2\pi 20)t}u(t) + \frac{125}{8\pi}e^{j\pi/2}e^{(\sigma_0-j2\pi 20)t}u(t) \tag{8.120}$$

$$= \left[\frac{125}{8\pi}e^{\sigma_0 t}e^{j(2\pi 20t-\pi/2)} + \frac{125}{8\pi}e^{\sigma_0 t}e^{-j(2\pi 20t-\pi/2)}\right]u(t) \tag{8.121}$$

$$= \frac{250}{8\pi}e^{\sigma_0 t}\cos\left(2\pi 20t - \frac{\pi}{2}\right)u(t) \tag{8.122}$$

$$= \frac{250}{8\pi} e^{\sigma_0 t} \sin(2\pi 20 t) u(t) \tag{8.123}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η κρουστική απόκριση είναι φθίνουσας ημιτονοειδούς μορφής και για τις δυο τιμές του σ_0 και προφανώς περιγράφει ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα. Παρατηρήστε ότι ο όρος σ_0, δηλ. το πραγματικό μέρος των συζυγών πόλων, ελέγχει το πόσο γρήγορα ή αργά φθίνει ο ημιτονοειδής όρος της κρουστικής απόκρισης.

■

Μπορούμε λοιπόν να πούμε εν γένει ότι

Κρουστική Απόκριση ΓΧΑ Συστήματος στο Χώρο του Μετασχηματισμού Laplace

Αν ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται ως ρητή συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

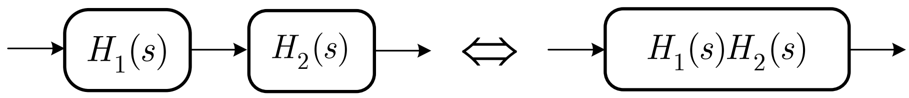
τότε χρησιμοποιούμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα για να αναλύσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ σε απλούς όρους και να βρούμε με χρήση πινάκων και ιδιοτήτων την κρουστική απόκριση $h(t)$.

8.4.1 Διατάξεις Συστημάτων

Ας δούμε μερικές γνωστές διατάξεις ΓΧΑ συστημάτων και πως αυτές αναπαρίστανται στο χώρο του Laplace.

8.4.1.1 Συστήματα σε Σειρά

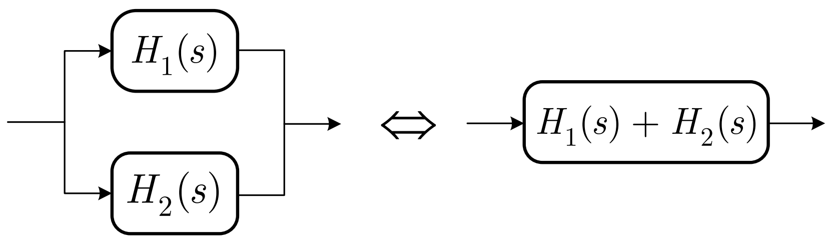
Ξέρουμε πολύ καλά ότι η συνέλιξη στο χρόνο γίνεται γινόμενο στη συχνότητα (δηλ. στο χώρο s, των μιγαδικών συχνοτήτων του μετασχ. Laplace). Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δυο συστήματα σε σειρά με επιμέρους συναρτήσεις μεταφοράς $H_1(s)$, $H_2(s)$, ισούνται με ένα σύστημα στο χώρο του Laplace, όπου περιγράφεται από το γινόμενο των επιμέρους συναρτήσεων μεταφοράς τους, όπως στο Σχήμα 8.7. Απαραίτητη προϋπόθεση αποτελεί ότι η τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης δεν πρέπει να είναι το κενό σύνολο, όπως επιτάσσει η ιδιότητα της συνέλιξης στο χρόνο.



Σχήμα 8.7: *Δυο συστήματα σε σειρά στο χώρο του Laplace και το ισοδύναμο σύστημα.*

8.4.1.2 Συστήματα σε Παραλληλία

Σε μια άλλη περίπτωση, όπως στο Σχήμα 8.8, γνωρίζουμε ότι ο μετασχ. Laplace είναι γραμμικός. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δυο συστήματα παράλληλα συνδεδεμένα, με επιμέρους συναρτήσεις μεταφοράς $H_1(s)$, $H_2(s)$, ισούνται με ένα σύστημα στο χώρο του Laplace, που περιγράφεται επίσης από το άθροισμα των συναρτήσεων μεταφοράς τους.

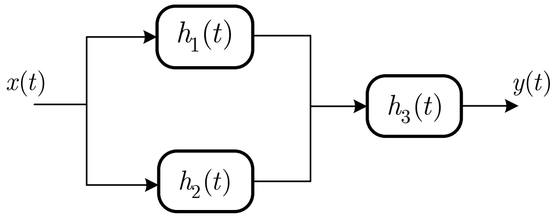


Σχήμα 8.8: *Δυο συστήματα σε παραλληλία στο χώρο του Laplace και το ισοδύναμο σύστημα.*

Φυσικά υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί συστημάτων σε σειρά και παράλληλα, αλλά η βασική αρχή ανάλυσης ακολουθεί την παραπάνω διαδικασία.

Παράδειγμα 8.9:

Έστω το αιτιατό σύστημα του Σχήματος 8.9.



Σχήμα 8.9: *Σύστημα Παραδείγματος 8.9.*

με

$$H_1(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)}, \quad H_2(s) = \frac{s}{s+2}, \quad H_3(s) = \frac{s-1}{s+1} \tag{8.124}$$

(α΄) Βρείτε το συνολικό σύστημα $H(s)$ και το πεδίο συγκλισής του.

(β΄) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος, $h(t)$.

Λύση:

(α΄) Προφανώς το συνολικό σύστημα θα έχει συνάρτηση μεταφοράς της μορφής

$$H(s) = (H_1(s) + H_2(s))H_3(s) = H_1(s)H_3(s) + H_2(s)H_3(s) \tag{8.125}$$

$$= \frac{1}{(s-2)(s+1)} + \frac{s(s-1)}{(s+2)(s+1)} = \frac{s+2+s(s-1)(s-2)}{(s-2)(s+2)(s+1)} \tag{8.126}$$

$$= \frac{s+2+s^3-2s^2-s^2+2s}{(s-2)(s+2)(s+1)} = \frac{s^3-3s^2+3s+2}{(s-2)(s+2)(s+1)} \tag{8.127}$$

Δεδομένου ότι το σύστημα είναι αιτιατό, και οι πόλοι στις θέσεις $s_1 = -2$, $s_2 = -1$, $s_3 = 2$, το πεδίο σύγκλισης δεν μπορεί να είναι άλλο από ένα δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης, και το μοναδικό τέτοιο είναι το $\mathrm{Re}\{s\} > 2$.

(β΄) Το σύστημα γράφεται ως

$$H(s) = \frac{s^3-3s^2+3s+2}{(s-2)(s+2)(s+1)} = \frac{s^3-3s^2+3s+2}{s^3+s^2-4s-4} \tag{8.128}$$

και επειδή ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι ίσος με αυτόν του παρονομαστή δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα πριν κάνουμε πρώτα διαίρεση των πολυωνύμων. Άρα:

$$H(s) = 1 + \frac{-4s^2+7s+6}{(s-2)(s+2)(s+1)} = 1 + G(s) \tag{8.129}$$

με

$$G(s) = \frac{-4s^2+7s+6}{(s-2)(s+2)(s+1)} \tag{8.130}$$

Σε αυτόν τον όρο μπορούμε να κάνουμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα, δηλ.

$$G(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+1} \tag{8.131}$$

με

$$A = G(s)(s-2)\Big|_{s=2} = \frac{-4s^2+7s+6}{(s+2)(s+1)}\Big|_{s=2} = \frac{1}{3} \tag{8.132}$$

$$B = G(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{-4s^2+7s+6}{(s-2)(s+1)}\Big|_{s=-2} = -6 \tag{8.133}$$

$$C = G(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{-4s^2+7s+6}{(s-2)(s+2)}\Big|_{s=-1} = \frac{5}{3} \tag{8.134}$$

Έτσι

$$G(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} - 6\frac{1}{s+2} + \frac{5}{3}\frac{1}{s+1} \tag{8.135}$$

οπότε συνολικά,

$$H(s) = 1 + G(s) = 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} - 6\frac{1}{s+2} + \frac{5}{3}\frac{1}{s+1} \tag{8.136}$$

Αφού έχουμε τρεις γνωστούς μετασχηματισμούς και το πεδίο σύγκλισης του συνολικού συστήματος είναι το $\mathrm{Re}\{s\} > 2$, συμπεραίνουμε ότι τα επιμέρους πεδία σύγκλισης για τους όρους της Σχέσης (8.135) είναι τα

- $\mathrm{Re}\{s\} > -2$
- $\mathrm{Re}\{s\} > -1$
- $\mathrm{Re}\{s\} > 2$

αφού η τομή των παραπάνω μας δίνει το συνολικό πεδίο σύγκλισης. Από τον Πίνακα 7.2, θα έχουμε

$$G(s) \longleftrightarrow g(t) = \frac{1}{3}e^{2t}u(t) - 6e^{-2t}u(t) + \frac{5}{3}e^{-t}u(t) \tag{8.137}$$

και συνολικά

$$H(s) = 1 + G(s) \longleftrightarrow h(t) = \delta(t) + g(t) = \delta(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t) - 6e^{-2t}u(t) + \frac{5}{3}e^{-t}u(t) \tag{8.138}$$

Βλέπετε ότι ένας όρος της κρουστικής απόκρισης (ποιός;) τείνει στο άπειρο όταν $t \to +\infty$; Τι σημαίνει αυτό για το σύστημα;

8.4.2 Πόλοι και Μηδενικά στο s-επίπεδο

Για να λάβουμε περισσότερη πληροφορία για τη συνάρτηση μεταφοράς, θα ηταν πολύ βολικό να τη γράψουμε σε μορφή παραγόντων, ως

$$H(s) = A\frac{\prod_{k=1}^{M}(s-c_k)}{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)} \tag{8.139}$$

με A μια σταθερά. Καταλαβαίνετε ότι οι αριθμοί c_k, d_k αποτελούν τα *μηδενικά* και τους *πόλους*, αντίστοιχα, της συνάρτησης μεταφοράς και προέρχονται από τις ρίζες του αριθμητή και του παρονομαστή της, αντίστοιχα. Γενικότερα, ονομάζουμε **πόλους** τα σημεία του s-επιπέδου που απειρίζουν τη συνάρτηση μεταφοράς. Αντίστοιχα, ονομάζουμε **μηδενικά** τα σημεία του s-επιπέδου που μηδενίζουν τη συνάρτηση μεταφοράς. Σε περιπτώσεις που ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι διαφορετικός από του παρονομαστή, μπορεί να υπάρχουν κι άλλα μηδενικά ή πόλοι, πέραν από τις ρίζες των πολυωνύμων. Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 8.10:

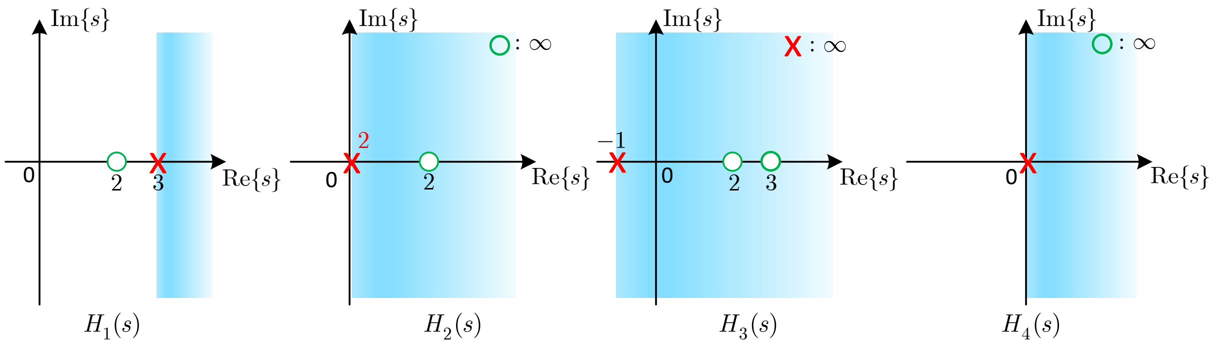
Θεωρήστε τις απλές αιτιατές συναρτήσεις μεταφοράς

$$H_1(s) = \frac{s-2}{s-3},\ \mathrm{Re}\{s\} > 3, \qquad H_2(s) = \frac{s-2}{s^2},\ \mathrm{Re}\{s\} > 0 \tag{8.140}$$

$$H_3(s) = \frac{(s-3)(s-2)}{s+1},\ \mathrm{Re}\{s\} > -1, \qquad H_4(s) = \frac{1}{s},\ \mathrm{Re}\{s\} > 0 \tag{8.141}$$

Βρείτε και σχεδιάστε τους πόλους και τα μηδενικά τους.

Λύση:
Το σύστημα $H_1(s)$ έχει έναν πόλο στο $s = 3$ και ένα μηδενικό στο $s = 2$. Το σύστημα $H_2(s)$ έχει έναν πόλο τάξης 2 στο $s = 0$ και ένα μηδενικό στο $s = 2$. Όμως, $\lim_{s\to\infty} H(s) = 0$, άρα υπάρχει ακόμα ένα μηδενικό στο άπειρο. Το σύστημα $H_3(s)$ έχει έναν πόλο στο $s = -1$, και δυο μηδενικά στο $s = 2$ και στο $s = 3$. Όμως, $\lim_{s\to\infty} H(s) = \infty$, άρα υπάρχει κι ένας ακόμη πόλος στο άπειρο. Το σύστημα $H_4(s)$ έχει έναν πόλο στο $s = 0$. Όμως, $\lim_{s\to\infty} H(s) = 0$, άρα υπάρχει ένα μηδενικό στο άπειρο.



Σχήμα 8.10: *Πόλοι, μηδενικά, και πεδία σύγκλισης των συστημάτων του Παραδείγματος 8.10.*

Το Σχήμα 8.10 δείχνει τη θέση των πόλων και μηδενικών για κάθε σύστημα, καθώς και το πεδίο σύγκλισης καθενός. Σημειώστε την ασυνήθιστη περίπτωση που το $H_3(s)$ έχει πόλο στο άπειρο κι ως εκ τούτου το άπειρο δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης.

■

Τα παραπάνω παραδείγματα μας προδίδουν ένα γενικό κανόνα: **σε μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$, υπάρχουν τόσοι πόλοι, οσα και μηδενικά**. Ας το αποδείξουμε.

Έστω μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ως

$$H(s) = A\frac{\prod_{k=1}^{M}(s-c_k)}{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)} \tag{8.142}$$

Τότε

$$H(s) = A\frac{s^M\prod_{k=1}^{M}(1-\frac{c_k}{s})}{s^N\prod_{k=1}^{N}(1-\frac{d_k}{s})} = As^{M-N}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-\frac{c_k}{s})}{\prod_{k=1}^{N}(1-\frac{d_k}{s})} \tag{8.143}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Έστω ότι $M > N$, άρα συνεπάγεται ότι έχουμε θετική δύναμη του s στον όρο μπροστά από το κλάσμα, άρα θα έχουμε $M-N$ **πόλους** στο άπειρο, αφού

$$\lim_{s\to\infty} H(s) = \lim_{s\to\infty} As^{M-N}\cdot\lim_{s\to\infty}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-\frac{c_k}{s})}{\prod_{k=1}^{N}(1-\frac{d_k}{s})} = \lim_{s\to\infty} As^{M-N}\cdot 1 = \infty \tag{8.144}$$

- Αν $M < N$, τότε ο όρος s^{M-N} γράφεται ως $s^{-(N-M)}$, με $N-M > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, το σύστημα θα έχει $N-M$ **μηδενικά** στο άπειρο, αφού

$$\lim_{s\to\infty} H(s) = \lim_{s\to\infty} As^{-(N-M)}\cdot\lim_{s\to\infty}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-\frac{c_k}{s})}{\prod_{k=1}^{N}(1-\frac{d_k}{s})} = \lim_{s\to\infty} As^{-(N-M)}\cdot 1 = 0 \tag{8.145}$$

- Στην τετριμμένη περίπτωση όπου $M = N$, δεν υπάρχουν πόλοι ή μηδενικά στο άπειρο, και οι πόλοι και τα μηδενικά δίνονται μόνο από τις ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή και του αριθμητή αντίστοιχα.

Αποδείξαμε λοιπόν κάτι πολύ σημαντικό.

Πόλοι και Μηδενικά Ρητής Συνάρτησης Μεταφοράς

Ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$, **το πλήθος των πόλων ισούται με το πλήθος των μηδενικών**, συμπεριλαμβάνοντας πιθανούς πόλους ή μηδενικά στο άπειρο.

8.4.3 Ευστάθεια Συστήματος στο Χώρο του Laplace

Ένα νέο στοιχείο που θα εισάγουμε τώρα είναι η έννοια της *ευστάθειας* με όρους μετασχ. Laplace. Θυμίζουμε ότι ένα σύστημα λέγεται ευσταθές όταν παράγει φραγμένη έξοδο για μια οποιαδήποτε φραγμένη είσοδο. Δηλ.

$$\text{Αν } |x(t)| < M_x \Longrightarrow |y(t)| < M_y \tag{8.146}$$

όπου M_x, M_y πραγματικοί θετικοί αριθμοί. Ας θυμηθούμε πως ''μεταφράζεται'' η ευστάθεια με όρους κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος. Είναι

$$|y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)|d\tau < M_x \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|d\tau \tag{8.147}$$

Αυτό σημαίνει ότι για να είναι φραγμένη η έξοδος $y(t)$, θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|d\tau < M_h < \infty \tag{8.148}$$

με $M_h \in \mathbb{R}_+$, που σημαίνει ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Όμως αυτό το ολοκλήρωμα μας θυμίζει ακριβώς τη συνθήκη ύπαρξης του μετασχ. Fourier της μέσω της σύγκλισης του ολοκληρώματός του, δηλ. η ύπαρξη της συχνοτικής απόκρισης $H(f)$! Άρα μπορούμε να πούμε γενικότερα ότι

Ευστάθεια Συστήματος στο Χώρο του Laplace

Κριτήριο ευστάθειας (και ύπαρξης της συχνοτικής απόκρισης) ενός οποιουδήποτε ΓΧΑ συστήματος είναι η συμπερίληψη του φανταστικού άξονα $j2\pi f$ ($\text{Re}\{s\} = \sigma = 0$) στο πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ που το περιγράφει.

Ας δούμε λίγο περισσότερο τι συμβαίνει σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις.

Έστω ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ για ένα αιτιατό σύστημα (χωρίς βλάβη της γενικότητας) εκφράζεται με χρήση του αντιστρόφου μετασχ. Laplace ως

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s-s_k} \longleftrightarrow h(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t}u(t), \quad \text{Re}\{s\} > \max\{\text{Re}\{s_k\}\} \tag{8.149}$$

όπου s_k οι πόλοι του μετασχηματισμού Laplace, οι οποίοι θεωρούμε ότι είναι απλοί (χωρίς πολλαπλότητα), χάριν απλούστευσης. Τότε θα είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{N} |A_k||e^{s_k t}u(t)|dt = \sum_{k=1}^{N} |A_k| \int_{0}^{\infty} |e^{\sigma_k t}||e^{j2\pi f t}|dt = \sum_{k=1}^{N} |A_k| \int_{0}^{\infty} |e^{\sigma_k t}|dt \tag{8.150}$$

Καταλήξαμε πλέον ότι για να είναι φραγμένη η έξοδος, και άρα το σύστημα να είναι ευσταθές, θα πρέπει να ισχύει ότι η συνάρτηση $e^{\sigma_k t}$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Αυτό προφανώς συμβαίνει *μόνον* όταν $\text{Re}\{s_k\} = \sigma_k < 0$! Πότε ισχύει όμως αυτό; Φυσικά όταν **όλοι** οι πόλοι s_k της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο!

Άρα μπορούμε να διατυπώσουμε ότι:

Ευστάθεια Αιτιατού Συστήματος στο Χώρο του Laplace

Ένα αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα υπάρχει η συχνοτική του απόκριση - όταν έχει **όλους τους πόλους του στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο**.

Σχήμα 8.11: *Προσοχή στην ευστάθεια των συστημάτων!!*

Με αντίστοιχη ανάλυση προκύπτει ότι:

Ευστάθεια Αντι-αιτιατού Συστήματος στο Χώρο του Laplace

Ένα αντι-αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα υπάρχει η συχνοτική του απόκριση - όταν έχει **όλους τους πόλους του στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο**.

και

Ευστάθεια Μη-αιτιατού Συστήματος στο Χώρο του Laplace

Ένα μη-αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα υπάρχει η συχνοτική του απόκριση - όταν έχει **τουλάχιστον έναν πόλο στο αριστερό και τουλάχιστον έναν στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο**, ώστε να μπορεί να σχηματιστεί πεδίο σύγκλισης "λωρίδα" που να περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 8.11:

Ένα *ευσταθές* ΓΧΑ σύστημα έχει τις παρακάτω εισόδους και εξόδους, $x(t)$ και $y(t)$, αντίστοιχα. Χρησιμοποιήστε το μετασχ. Laplace για να βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς και την κρουστική απόκριση του συστήματος.

(α΄) $x(t) = e^{-t}u(t)$, $y(t) = e^{-2t}\cos(t)u(t)$

(β΄) $x(t) = e^{-2t}u(t)$, $y(t) = -2e^{-t}u(t) + 2e^{-3t}u(t)$

(γ΄) $x(t) = e^{2t}u(-t)$, $y(t) = e^{-t}u(t)$

Λύση:
Η ευστάθεια μας βάζει έναν ισχυρό περιορισμό για το πεδίο σύγκλισης της εκάστοτε συνάρτησης μεταφοράς: πρέπει να περιλαμβάνεται σε αυτό ο φανταστικός άξονας $\sigma = 0$!

(α΄) Προφανώς

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \tag{8.151}$$

άρα αρκεί να βρούμε τα $X(s), Y(s)$. Έχουμε

$$x(t) = e^{-t}u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+1},\ \mathrm{Re}\{s\} > -1 \tag{8.152}$$

Επίσης

$$y(t) = e^{-2t}\cos(t)u(t) \longleftrightarrow Y(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+1},\ \mathrm{Re}\{s\} > -2 \tag{8.153}$$

και άρα

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}}{\frac{1}{s+1}} = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+2)^2+1} = \frac{s^2+3s+2}{s^2+4s+5} \tag{8.154}$$

Ο βαθμός πολυωνύμου του αριθμητή είναι ίσος με του παρονομαστή, άρα πρέπει πριν κάνουμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα, να κάνουμε διαίρεση των πολυωνύμων. Θα έχουμε

$$H(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^2+4s+5} = 1 - \frac{s+3}{(s+2)^2+1} \tag{8.155}$$

Όμως τώρα βλέπουμε ότι μπορούμε να ακολουθήσουμε ξανά μια διαφορετική προσέγγιση αντι του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα. Βλέπουμε οτι ο παρονομαστής μας θυμίζει δυο πολύ γνωστά ζεύγη μετασχ. Laplace, τα

$$e^{-at}\cos(2\pi f_0 t)u(t) \longleftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+(2\pi f_0)^2},\ \ \mathrm{Re}\{s\} > -a \tag{8.156}$$

$$e^{-at}\sin(2\pi f_0 t)u(t) \longleftrightarrow \frac{2\pi f_0}{(s+a)^2+(2\pi f_0)^2},\ \ \mathrm{Re}\{s\} > -a \tag{8.157}$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε τον αριθμητή με τέτοιο τρόπο ώστε να χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω σχέσεις. Δηλ.

$$H(s) = 1 - \frac{s+3}{(s+2)^2+1} = 1 - \frac{(s+2)}{(s+2)^2+1} - \frac{1}{(s+2)^2+1} \tag{8.158}$$

Επίσης, το πεδίο σύγκλισης για αυτά τα δυο σήματα είναι το $\mathrm{Re}\{s\} > -2$, το οποίο συμφωνεί με το χαρακτηριστικό της ευστάθειας του συστήματος που μας λέει η εκφώνηση. Έτσι,

$$h(t) = \delta(t) - e^{-2t}\cos(t)u(t) - e^{-2t}\sin(t)u(t) \tag{8.159}$$

(β΄) Όμοια, έχουμε

$$X(s) = \frac{1}{s+2},\ \ \mathrm{Re}\{s\} > -2\ \ ,\ \ Y(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+3},\ \ \mathrm{Re}\{s\} > -1 \tag{8.160}$$

άρα

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{-4(s+2)}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} \tag{8.161}$$

με

$$A = H(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \frac{-4(s+2)}{(s+3)}\Big|_{s=-1} = -2 \tag{8.162}$$

και

$$B = H(s)(s+3)\Big|_{s=-3} = \frac{-4(s+2)}{(s+1)}\Big|_{s=-3} = -2 \tag{8.163}$$

Το πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς θα είναι τέτοιο ώστε

$$\{\mathrm{Re}\{s\} > -1\} \supseteq R_H \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > -2\} \tag{8.164}$$

και δεδομένου ότι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται στις θέσεις $s=-1$, $s=-3$, το μόνο πιθανό πεδίο σύγκλισης είναι το

$$\mathrm{Re}\{s\} > -1 \tag{8.165}$$

Οπότε

$$H(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{-2}{s+3} \longleftrightarrow h(t) = -2e^{-t}u(t) - 2e^{-3t}u(t) \tag{8.166}$$

που είναι και το ζητούμενο.

(γ') Έχουμε

$$X(s) = -\frac{1}{s-2}, \quad \text{Re}\{s\} < 2 \tag{8.167}$$

και

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1 \tag{8.168}$$

Άρα

$$H(s) = -\frac{s-2}{s+1} \tag{8.169}$$

Διασπώντας το κλάσμα, έχουμε

$$H(s) = -\frac{s-2}{s+1} = -s\frac{1}{s+1} + 2\frac{1}{s+1} \tag{8.170}$$

Ο μοναδικός πόλος του συστήματος βρίσκεται στη θέση $s = -1$, άρα η μόνη επιλογή πεδίου σύγκλισης για να είναι το σύστημα ευσταθές είναι το $\text{Re}\{s\} > -1$. Οπότε, σύμφωνα με τους πίνακες ιδιοτήτων και ζευγών μετασχ. Laplace, θα έχουμε

$$h(t) = -\frac{d}{dt}e^{-t}u(t) + 2e^{-t}u(t) = -(-e^{-t}u(t) + e^{-t}\delta(t)) + 2e^{-t}u(t) = 3e^{-t}u(t) - \delta(t) \tag{8.171}$$

Επιβεβαιώστε την παραπάνω απάντηση κάνοντας διαίρεση των πολυωνύμων και ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα.

■

Ας δούμε κι ένα πιο "αφαιρετικό" παράδειγμα, με πολύ λιγότερες πράξεις αλλά που απαιτεί να γνωρίζετε καλά τις ιδιότητες των πεδίων σύγκλισης και την πλευρικότητα των σημάτων.

Παράδειγμα 8.12:

Ένα ΓΧΑ σύστημα με απολύτως ολοκληρώσιμη κρουστική απόκριση $h(t)$ έχει έναν πόλο στη θέση $s = 3$. Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι:

(α') πεπερασμένης διάρκειας;

(β') αριστερόπλευρη;

(γ') δεξιόπλευρη;

(δ') αμφίπλευρη;

Λύση:

Μια απολύτως ολοκληρώσιμη κρουστική απόκριση σημαίνει ότι έχει μετασχ. Fourier, δηλ. συχνοτική απόκριση, η οποία μπορεί να υπολογιστεί μέσω του ορισμού της. Αυτό συνεπάγεται ότι το σύστημα είναι ευσταθές. Όσον αφορά τον πόλο, στη γενικότερη περίπτωση μπορεί να μην είναι μοναδικός! Ας διαχωρίσουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

i. Ο πόλος στο $s = 3$ είναι μοναδικός.

ii. Ο πόλος στο $s = 3$ δεν είναι μοναδικός.

Στην πρώτη περίπτωση:

(α') Όχι, γιατί ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας έχει πεδίο σύγκλισης όλο το μιγαδικό επίπεδο, και άρα δεν μπορεί να έχει πόλους.

(β') Ναι, μπορεί να είναι αριστερόπλευρη αν ο πόλος είναι μοναδικός και το πεδίο σύγκλισης είναι το $\text{Re}\{s\} < 3$, που περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα.

(γ') Όχι, δεν μπορεί να είναι δεξιόπλευρη γιατί ένα δεξιόπλευρο σήμα έχει δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης, το οποίο στην περίπτωσή μας είναι $\text{Re}\{s\} > 3$. Ένα τέτοιο πεδίο δεν μπορεί να περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα, που είναι προαπαιτούμενο από την εκφώνηση.

(δ') Όχι, δεν μπορεί να είναι αμφίπλευρη, γιατί μια αμφίπλευρη κρουστική απόκριση έχει συνάρτηση μεταφοράς με πεδίο σύγκλισης μια "λωρίδα". Ένα τέτοιο πεδίο σύγκλισης χρειάζεται δυο πόλους για να οριστεί.

Στη δεύτερη περίπτωση:

(α') Όχι, γιατί ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας έχει πεδίο σύγκλισης όλο το μιγαδικό επίπεδο, και άρα δεν μπορεί να έχει πόλους.

(β΄) Αν υπάρχουν άλλοι πόλοι, θα πρέπει αυτοί να βρίσκονται στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, ώστε να μπορούμε να ορίσουμε ένα πεδίο σύγκλισης της μορφής $\mathrm{Re}\{s\} < \sigma_0$, με $\sigma_0 > 0$ ώστε να περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας. Αν υπάρχουν άλλοι πόλοι με $\sigma_0 > 3$ τότε με πεδίο σύγκλισης $\mathrm{Re}\{s\} < 3$ μπορούμε να έχουμε αριστερόπλευρη κρουστική απόκριση. Αν υπάρχει έστω ένας πόλος s_0 με $\sigma_0 < 0$ τότε δεν μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι αριστερόπλευρη και το σύστημα ευσταθές ταυτόχρονα.

(γ΄) Δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να είναι δεξιόπλευρη και απολύτως ολοκληρώσιμη (ευσταθές σύστημα) αφού ο πόλος $s = 3$ απαγορεύει την ύπαρξη ενός πεδίου σύγκλισης $\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0$, με $\sigma_0 < 0$, έτσι ώστε να περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας.

(δ΄) Για να είναι αμφίπλευρη η κρουστική απόκριση και ταυτόχρονα απολύτως ολοκληρώσιμη, θα πρέει να υπάρχει πεδίο σύγκλισης $\sigma_1 < \mathrm{Re}\{s\} < \sigma_2$, με $\sigma_1 < 0$ και $\sigma_2 \geq 3$, έτσι ώστε να έχουμε ''λωρίδα'' που να περιλαμβάνει ο φανταστικό άξονα. Άρα θέλουμε τουλάχιστον έναν πόλο με $\sigma_0 < 0$. Σε κάθε άλλη περίπτωση, η κρουστική απόκριση δεν μπορεί να είναι αμφίπλευρη.

8.4.4 Αιτιατότητα στο Χώρο του Laplace

Είναι ενδιαφέρον και σημαντικό να παρατηρήσει κανείς το εξής: αν η συνάρτηση μεταφοράς είναι *ρητή* συνάρτηση του s, τότε εγγυημένα το σύστημα μπορεί να είναι

(α΄) αιτιατό, αν το πεδίο σύγκλισης είναι δεξιόπλευρο,

(β΄) αντι-αιτιατό, αν το πεδίο σύγκλισης είναι αριστερόπλευρο,

(γ΄) μη-αιτιατό, αν το πεδίο σύγκλισης είναι αμφίπλευρο.

Πιο συγκεκριμένα, αν έχουμε μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^{M} b_l \frac{d^l}{dt^l} x(t) \tag{8.172}$$

με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \tag{8.173}$$

τότε, υποθέτοντας ότι $N > M$, η τελευταία μπορεί να γραφεί ως

$$H(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k} \tag{8.174}$$

αν οι ρίζες είναι απλές. Η ακριβής μορφή της κρουστικής απόκρισης εξαρτάται μοναδικά από το πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς. Για αιτιατό σύστημα με πεδίο σύγκλισης $\mathrm{Re}\{s\} > \max\{\mathrm{Re}\{s_k\}\}$, η κρουστική απόκριση δίνεται ως

$$h(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t} u(t) \tag{8.175}$$

ενώ για αντι-αιτιατό σύστημα με πεδίο σύγκλισης $\mathrm{Re}\{s\} < \min\{\mathrm{Re}\{s_k\}\}$, η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h(t) = -\sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t} u(-t) \tag{8.176}$$

Τέλος για μη αιτιατό σύστημα με πεδίο σύγκλισης $\mathrm{Re}\{s_i\} < \mathrm{Re}\{s\} < \mathrm{Re}\{s_j\}$ (το οποίο μπορεί να μην είναι μοναδικό), η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h(t) = \sum_{k=1}^{N_1} A_k e^{s_k t} u(t) - \sum_{m=N_1+1}^{N} A_m e^{s_m t} u(-t) \tag{8.177}$$

θεωρώντας αυθαίρετα ότι καθένας από τους πόλους s_k, $k = 1, \cdots, N_1$ ορίζει δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης, ενώ καθένας από τους πόλους s_m, $m = N_1 + 1, \cdots, N$ ορίζει αριστερόπλευρο πεδίο σύγκλισης.

Τι συμβαίνει στην περίπτωση που $M > N$; Τότε μπορείτε να δείξετε ότι θα υπάρχουν παράγωγοι της συνάρτησης Δέλτα στην κρουστική απόκριση, ή αλλιώς, όροι της μορφής s^n, $n \geq 1$ στη συνάρτηση μεταφοράς. Οι όροι αυτοί εισάγουν πόλους στο άπειρο και απαγορεύουν την αιτιατότητα του συστήματος! Άρα:

Αιτιατότητα ΓΧΑ Συστήματος στο Χώρο του Laplace

Ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^{M} b_l \frac{d^l}{dt^l} x(t)$$

μπορεί να είναι αιτιατό μόνον αν το πεδίο σύγκλισης είναι της μορφής $\mathrm{Re}\{s\} > \max\{\mathrm{Re}\{s_k\}\}$ και δεν περιέχει πόλους στο άπειρο. Το τελευταίο συμβαίνει αν και μόνο αν $N \geq M$.

Έχει ενδιαφέρον να δείτε την Άσκηση 8.44 για την τυπική απόδειξη. Για ΓΧΑ συστήματα που δεν περιγράφονται ακριβώς από το μοντέλο της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, τα πράγματα είναι λίγο διαφορετικά: αν, για παράδειγμα, ένα σύστημα είναι δεξιόπλευρο αλλά όχι αιτιατό, τότε μπορεί κάποιες τιμές της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ να βρίσκονται αριστερά του μηδενός στον άξονα του χρόνου, όπως π.χ. η

$$h(t) = e^{-(t+2)} u(t+2) \longleftrightarrow H(s) = \frac{1}{s+1} e^{2s}, \ \mathrm{Re}\{s\} > -1 \tag{8.178}$$

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση μεταφοράς του ***δεν είναι ρητή συνάρτηση του*** s, γιατί ο αριθμητής εμπεριέχει και μια εκθετική συνάρτηση με θετικό παράγοντα του s (τον αριθμό 2). Φυσικά, η ύπαρξη εκθετικής συνάρτησης του s δε σημαίνει πάντα ότι το σύστημα δεν είναι αιτιατό, αφού π.χ. το σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = e^{-(t-2)} u(t-2) \longleftrightarrow H(s) = \frac{1}{s+1} e^{-2s}, \ \mathrm{Re}\{s\} > -1 \tag{8.179}$$

είναι αιτιατό, παρ᾽ όλο που έχει στον αριθμητή μια εκθετική συνάρτηση – η οποία όμως έχει *αρνητικό* παράγοντα του s στον εκθέτη (τον αριθμό -2). Ποιές είναι οι διαφορικές εξισώσεις συστημάτων όπως τα δυο παραπάνω;

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+1} e^{\pm 2s} \tag{8.180}$$

$$Y(s)(s+1) = X(s) e^{\pm 2s} \tag{8.181}$$

$$sY(s) + Y(s) = X(s) e^{\pm 2s} \tag{8.182}$$

και τελικά

$$\frac{d}{dt} y(t) + y(t) = x(t \pm 2) \tag{8.183}$$

Καταλαβαίνετε λοιπόν από όλη την παραπάνω συζήτηση ότι μια **ρητή** συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ με $N \geq M$ και **δεξιόπλευρο πεδίο σύγκλισης** αντιστοιχεί σε ένα **αιτιατό** σύστημα. Μπορείτε να βγάλετε αντίστοιχα συμπεράσματα για αντι-αιτιατά και μη-αιτιατά συστήματα;