

Κεφάλαιο 7

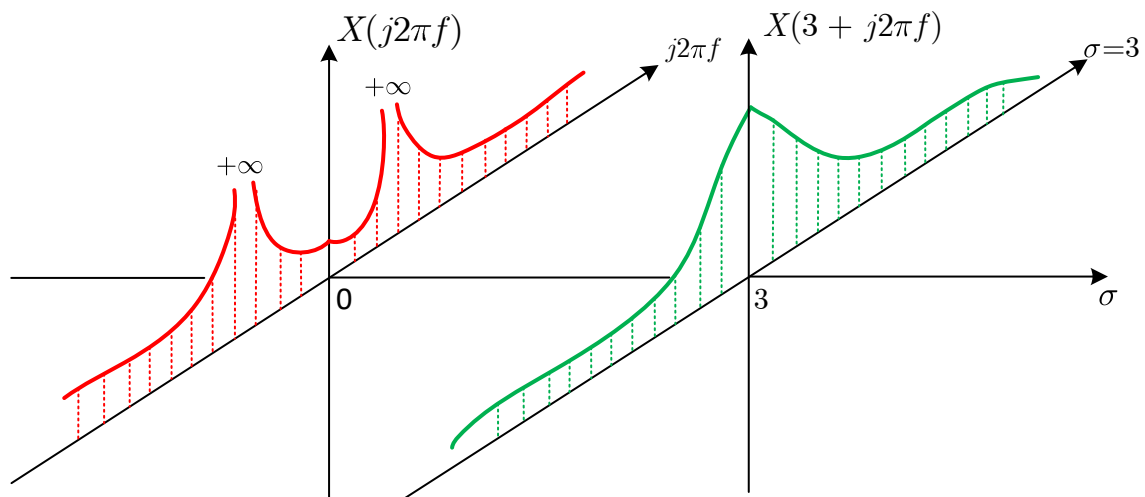
Ο Μετασχηματισμός Laplace

Έχουμε ήδη δει ότι ο μετασχ. Fourier είναι ένα μαθηματικό εργαλείο που μας επιτρέπει να αναπαριστούμε ένα σήμα $x(t)$ σαν ένα συνεχές άθροισμα (ολοκληρώμα) εκθετικών μιγαδικών σημάτων της μορφής $e^{j2\pi ft}$, δηλ.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (7.1)$$

που δεν είναι άλλη σχέση φυσικά παρά ο αντίστροφος μετασχ. Fourier.

Έστω λοιπόν ένα σήμα $x(t)$. Για λόγους ευκολίας, ας υποθέσουμε ότι το φάσμα του σήματος είναι πραγματικό και θετικό, δηλ. $X(f) \in \mathbb{R}$ και $X(f) > 0$, εκτός από κάποια σημεία όπου αυτό απειρίζεται. Με άλλα λόγια, ο μετασχ. Fourier δε συγκλίνει σε κάθε σημείο του, και όπως θα λέγαμε αλλιώς, δεν υπάρχει μέσω του ολοκληρώματος. Ένα τέτοιο φάσμα φαίνεται στο Σχήμα 7.1 αλλά κάπως περιέργα σχεδιασμένο. Ο άξονας πάνω στον οποίο ορίζεται ο μετασχηματισμός $X(f)$ είναι αυτός των γνωστών μας συχνοτήτων, που έχουμε απλά αντικαταστήσει το f με το $j2\pi f$, μια αυτό είναι το όρισμα των εκθετικών μας στο μετασχ. Fourier¹. Σε αυτό το σχήμα, έχουμε ορίσει ένα μιγαδικό χώρο, με τον άξονα των φανταστικών να έχει βαθμονομηθεί μέσω της κυκλικής συχνότητας $j\omega = j2\pi f$, και έναν άξονα πραγματικών που έχουμε ονομάσει σ . Μια τρίτη διάσταση είναι οι τιμές του μετασχ. Fourier - που όπως παραδεχτήκαμε χάριν ευκολίας, είναι θετικές και πραγματικές στο παράδειγμά μας ώστε να μη χρειάζεται να συζητάμε ξεχωριστά για φάσμα πλάτους και φάσης.



Σχήμα 7.1: Ο μετασχηματισμός Fourier στο μιγαδικό s -επίπεδο.

Βλέπετε λοιπόν ότι ο μετασχ. Fourier $X(f)$ ορίζεται πάνω στον άξονα των φανταστικών αριθμών $j2\pi f$ ενός μιγαδικού επιπέδου - μόνον εκεί όμως - το φάσμα φαίνεται σαν μια “φέτα” πάνω από το φανταστικό άξονα.

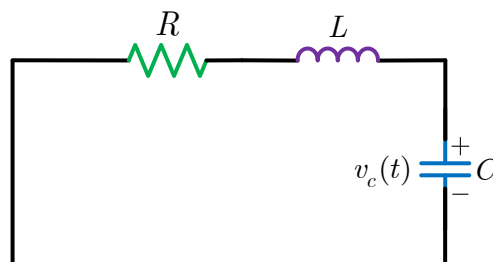
¹ Δεν είναι λάθος να πει κανείς ότι ο μετασχ. Fourier είναι μια συνάρτηση του $j2\pi f$. Η προσθήκη του j δεν συνιστά κάποια αλλαγή στο φάσμα καθώς αποτελεί τη φανταστική μονάδα, ενώ η προσθήκη του 2π συντελεί σε μια κλιμάκωση του άξονα των συχνοτήτων. Έτσι, το φάσμα ενός σήματος συναρτήσει της συχνότητας $2\pi f$ θα είναι μια κλιμακώμενη “έκδοση” του φάσματος συναρτήσει της συχνότητας f που έχετε συνηθίσει να βλέπετε/σχεδιάζετε.

Αυτή είναι μια οπτική που σκόπιμα “κρύβαμε” ως τώρα, καθώς δεν είχε κάποια πρακτική αξία και δυσκόλευε την κατανόηση και φυσικά τη σχεδίαση. Εδώ βλέπουμε όμως ότι ο μετασχ. Fourier μπορεί να ιδωθεί ως ορισμένος πάνω σε ένα νοητό φανταστικό άξονα! Καταλαβαίνετε βέβαια ότι οι φανταστικοί άξονες δεν τριγυρνούν μόνοι τους \ominus – κάπου πρέπει να υπάρχει ένα μιγαδικό επίπεδο στο οποίο ανήκουν, και πράγματι το βλέπετε στο σχήμα, ορισμένο μέσω και του πραγματικού άξονα σ . Το μιγαδικό αυτό επίπεδο έχει προφανώς κι άλλες ευθείες παράλληλες του φανταστικού άξονα, πάνω στις οποίες μπορούμε να ορίσουμε μετασχηματισμούς. Μια από αυτές φαίνεται στο Σχήμα 7.1, κι είναι η $\sigma = 3$. Αν το δούμε καθαρά από μαθηματική σκοπιά, ο μετασχ. Fourier χρησιμοποιεί τα μιγαδικά εκθετικά σήματα με εκθέτες $j2\pi f$, και ορίζεται πάνω στον φανταστικό άξονα $j2\pi f$, ή αλλιώς, τον άξονα $\sigma = 0$. Εντελώς ανάλογα, πάνω στον άξονα $\sigma = 3$ του σχήματος, είχαμε συχνότητες $s = \sigma + j2\pi f = 3 + j2\pi f$, $f \in \mathbb{R}$, και όποιος μετασχηματισμός ορίζαμε πάνω σε αυτόν, θα χρησιμοποιούσε εκθετικά της μορφής $e^{-st} = e^{-(3+j2\pi f)t}$!

Φυσικά υπάρχει ένας τέτοιος μετασχηματισμός και δε θα μπορούσαμε να μη δώσουμε ένα ξεχωριστό όνομα σε αυτόν: είναι ο μετασχηματισμός Laplace, αλλά ας μη βιαζόμαστε. Σταματάμε εδώ προσωρινά, αν και πρέπει ήδη να έχετε υποψιαστεί τι πρόκειται να συμβεί. \ominus Πέρα από αυτά όμως, υπάρχει κάτι χρήσιμο που κάνει αυτός ο νέος μετασχηματισμός;

7.1 Μια μικρή εφαρμογή-κίνητρο

Θεωρήστε ένα από τα δημοφιλέστερα κύκλωμα, το κύκλωμα RLC, δηλ. ένα κύκλωμα με έναν αντιστάτη, ένα πηνίο, και έναν πυκνωτή σε σειρά, όπως στο Σχήμα 7.2. Υποθέστε ότι η τάση στα άκρα του πυκνωτή συμβολίζεται



Σχήμα 7.2: Ένα κύκλωμα RLC.

ως $v_c(t)$, και το ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη ως $i(t)$. Το φορτίο του πυκνωτή είναι χρονικά μεταβαλλόμενο και δηλώνεται ως $q(t)$, κι έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$v_c(t) = \frac{q(t)}{C} \quad (7.2)$$

Ας θεωρήσουμε ότι το κύκλωμα δε δέχεται κάποια είσοδο – τότε όμως τι αξία έχει, τι ακριβώς συμβαίνει; Αν υποθέσουμε ότι το αρχικό φορτίο του πυκνωτή είναι $q(0^-) = q_0 = CV_0$ και το ρεύμα είναι αρχικά ίσο με $i(0^-) = I_0 = \left. \frac{d}{dt}q(t) \right|_{t=0^-}$, τότε το κύκλωμα περιγράφεται ως

$$L \frac{d^2}{dt^2}q(t) + R \frac{d}{dt}q(t) + \frac{1}{C}q(t) = 0 \quad (7.3)$$

Μπορείτε να λύσετε αυτή τη διαφορική εξίσωση – αλλά μόνο στο πεδίο του χρόνου! Ξέρετε ότι ο μετασχ. Fourier μπορεί να απλοποιήσει την κατάσταση, μετατρέποντας τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική, αλλά δε γνωρίζετε κάποιο τρόπο να χειρίζεστε εύκολα τις αρχικές συνθήκες που έχει το πρόβλημα. Με άλλα λόγια, δεν έχετε κάποιο τρόπο να κωδικοποιήσετε την αρχική κατάσταση του συστήματος η οποία, όπως γνωρίζετε, μπορεί να παράξει έξοδο (την απόκριση μηδενικής εισόδου). Αν όμως σας έλεγε κάποιος ότι υπάρχει τρόπος να χειριστείτε αυτήν την περίπτωση αλγεβρικά, θα ήσασταν εξαιρετικά χαρούμενος/η! Πράγματι, μπορεί ναδειχθεί – και θα μάθετε σε αυτό και στο επόμενο κεφάλαιο το πως – ότι ο μετασχ. Laplace μπορεί να μετατρέψει την παραπάνω διαφορική εξίσωση, συμπεριλαμβανομένων των αρχικών συνθηκών, στην αλγεβρική εξίσωση

$$V_c(s) = \frac{(Ls + R)V_0 + \frac{L}{C}I_0}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}} \quad (7.4)$$

Παρατηρήστε στον αριθμητή τις ποσότητες που εμφανίζονται: είναι οι αρχικές συνθήκες! Έχουμε στα χέρια μας μια ρητή συνάρτηση του s . Αν αυτός ο μετασχηματισμός έχει παρόμοιες ιδιότητες με το μετασχ. Fourier, τότε

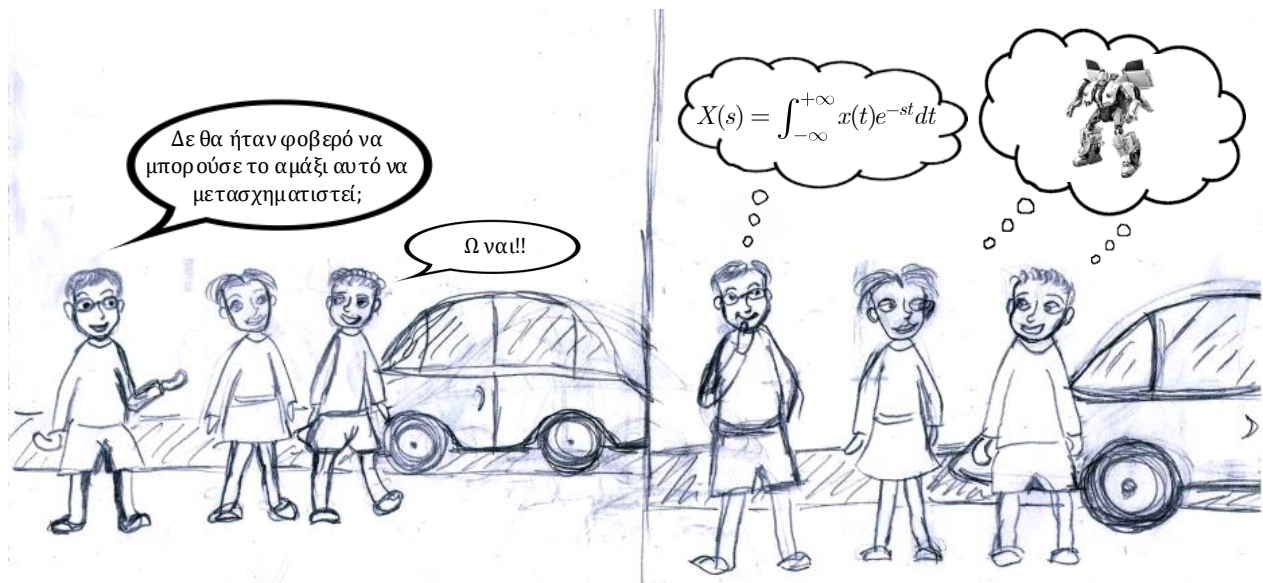
μπορούμε να βρούμε την τάση $v_c(t)$ απλά αντιστρέφοντας στο χρόνο την παραπάνω παράσταση! Είναι πράγματι τόσο καλά τα νέα; Ναι, γιατί και ο μετασχηματισμός αυτός έχει πολύ παρόμοιες ιδιότητες με το γνωστό σας μετασχ. Fourier, και γνωρίζετε τεχνικές που αντιστρέφουν στο χρόνο ρητές συναρτήσεις τέτοιας μορφής!

7.2 Προς το Μετασχηματισμό Laplace...

Επιστρέφουμε στο μετασχ. Fourier λοιπόν, μια πολύτιμη αναπαράσταση στην ανάλυση και επεξεργασία σημάτων. Όμως (παντού υπάρχει ένα “όμως” που μας χαλάει τη διάθεση ☹) είδαμε ότι ο μετασχ. Fourier υπάρχει μόνο για μια περιορισμένη κατηγορία σημάτων, π.χ. ο μετασχ. Fourier δεν ορίζεται για σήματα της μορφής

$$x(t) = e^{at}u(t), \quad a > 0 \quad (7.5)$$

δηλ. για εκθετικά σήματα που αυξάνουν στο άπειρο την τιμή τους όσο $t \rightarrow \infty$ (όπως το παραπάνω) ή όσο $t \rightarrow -\infty$.



Σχήμα 7.3: Δεν αντιλαμβάνονται τους μετασχηματισμούς όλοι με τον ίδιο τρόπο... ☹

Ο βασικός λόγος για τις δυσκολίες που προκύπτουν είναι ότι για τέτοια σήματα, όπως το προαναφερθέν, ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει επειδή τα συνήθη μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής $e^{j2\pi ft}$ είναι ανίκανα να συνθέσουν αύξοντα εκθετικά σήματα, όπως το παραπάνω - πολύ λογικό, αν σκεφτείτε ότι έχουν μοναδιαίο πλάτος. Αν αφήσουμε τη φαντασία μας ελεύθερη (πολύ ελεύθερη ☹), θα δούμε ότι το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί. Πώς;

Αν μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ως σήματα ανάλυσης και σύνθεσης εκθετικά της μορφής e^{st} , με $s = \sigma + j2\pi f$, έτσι ώστε αυτά να μην είναι μοναδιαίου πλάτους! Η παρουσία της μεταβλητής σ όμως ουσιαστικά μας “ξεκολλάει” από το φανταστικό άξονα, $\sigma = 0$, του μιγαδικού επιπέδου, επιτρέποντας να ορίσουμε μετασχηματισμούς και σε άλλους παράλληλους άξονες, $\sigma = \sigma_0$! Αυτό ακριβώς γίνεται στον περίφημο **μετασχηματισμό Laplace**. Σε αυτόν, οι συχνότητες είναι μιγαδικές (!!), της μορφής $s = \sigma + j2\pi f$, και αυτή η γενίκευση μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε αύξοντα εκθετικά μιγαδικά σήματα (και άρα ημίτονα με εκθετικά αυξανόμενο ή φθίνον πλάτος, όταν αναλύουμε πραγματικά σήματα) για να συνθέσουμε ένα σήμα $x(t)$, που με τον κλασικό μετασχ. Fourier δε θα μπορούσαμε. Ποιά είναι αυτά τα εκθετικά σήματα; Μα φυσικά τα $e^{\sigma t}e^{j2\pi ft}$! ☹ Πριν πάμε στα μαθηματικά, ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε διαισθητικά και με ένα απλό παράδειγμα τι ακριβώς κερδίζουμε με το μετασχηματισμό αυτό.

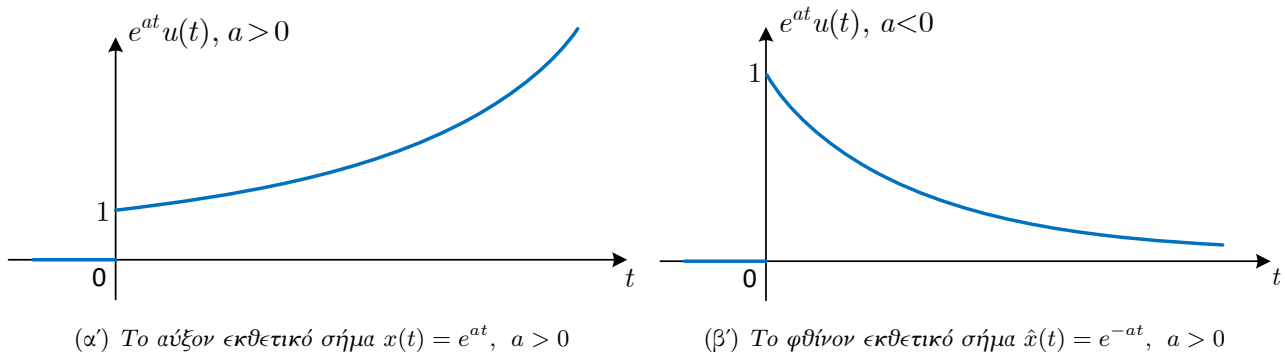
7.3 Ο Μετασχηματισμός Laplace

Αν ένα σήμα λοιπόν, όπως το $x(t) = e^{at}u(t)$, $a > 0$, στο Σχήμα 7.4α', δεν έχει μετασχ. Fourier, μπορούμε να το “κάνουμε να έχει”, πολλαπλασιάζοντάς το με ένα φθίνον εκθετικό σήμα, όπως το $e^{-\sigma t}$. Για παράδειγμα, το σήμα

$$x(t) = e^{2t}u(t) \quad (7.6)$$

μπορεί να γίνει “μετασχηματισμο” (!) κατά Fourier, απλά πολλαπλασιάζοντάς το με το $e^{-\sigma t}$, με $\sigma > 2$, ορίζοντας έτσι το

$$\hat{x}(t) = x(t)e^{-\sigma t} = e^{(2-\sigma)t}u(t) \quad (7.7)$$



Σχήμα 7.4: Εκθετικά πραγματικά σήματα.

Αυτό το νέο σήμα είναι σήμα ενέργειας πια, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.4β' – πάντα για $\sigma > 2$. Ο μετασχηματισμός θα είναι

$$\hat{X}(f) = \frac{1}{(\sigma - 2) + j2\pi f}, \quad \sigma > 2 \quad (7.8)$$

Άρα το σήμα $\hat{x}(t)$ έχει πλέον μετασχ. Fourier, $\hat{X}(f)$, και οι συνιστώσες του είναι της μορφής $\hat{X}(f)e^{j2\pi ft}$, με συχνότητες f που “τρέχουν” από $-\infty$ ως ∞ . Έστω ένα απειροστά μικρό εύρος συχνοτήτων Δf του συνεχούς φάσματος του σήματος $\hat{X}(f)$. Επειδή αναλύουμε πραγματικά σήματα, θα υπάρχει και το εύρος $-\Delta f$ και το πλάτος τους θα είναι $\hat{X}(\Delta f)\Delta f$ και $\hat{X}^*(\Delta f)\Delta f$ αντίστοιχα, λόγω των γνωστών ιδιοτήτων του μετασχ. Fourier για πραγματικά σήματα. Προσθέτοντάς τα, όπως επιτάσσει το ολοκλήρωμα, θα έχουμε:

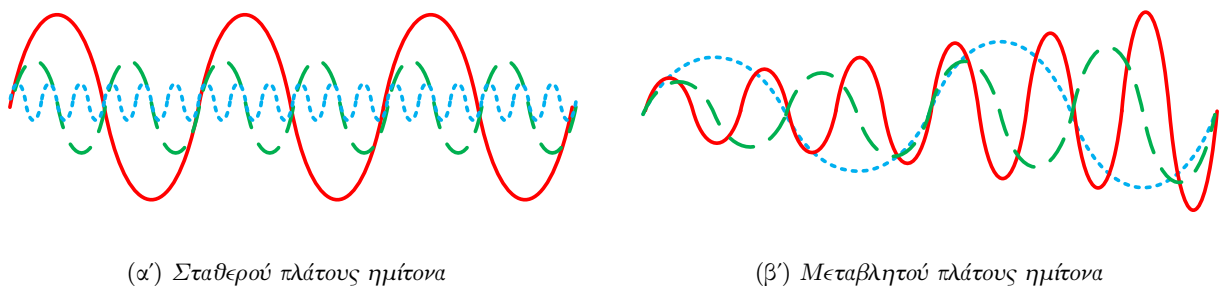
$$\hat{X}(\Delta f)e^{j2\pi\Delta ft}\Delta f + \hat{X}^*(\Delta f)e^{-j2\pi\Delta ft}\Delta f = |\hat{X}(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}}e^{j2\pi\Delta ft}\Delta f + (|\hat{X}(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}})^*e^{-j2\pi\Delta ft}\Delta f \quad (7.9)$$

$$= |\hat{X}(\Delta f)|e^{j\phi_{\Delta f}}e^{j2\pi\Delta ft}\Delta f + |\hat{X}(\Delta f)|e^{-j\phi_{\Delta f}}e^{-j2\pi\Delta ft}\Delta f \quad (7.10)$$

$$= |\hat{X}(\Delta f)|e^{j(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})}\Delta f + |\hat{X}(\Delta f)|e^{-j(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f})}\Delta f \quad (7.11)$$

$$= 2|\hat{X}(\Delta f)|\Delta f \cos(2\pi\Delta ft + \phi_{\Delta f}) \quad (7.12)$$

Το φάσμα περιέχει έναν άπειρο αριθμό από τέτοια ημίτονα, σταθερού πλάτους $2|\hat{X}(\Delta f)|\Delta f$ και ανεξάρτητου του χρόνου t . Θα ήταν χρονοβόρο να σχεδιάσουμε όλα αυτά τα ημίτονα, έτσι στο Σχήμα 7.5α' δείχνουμε μόνο τρία από αυτά. Η πρόσθεση όλων αυτών των συνιστωσών (άπειρων σε αριθμό) θα μας δώσει το αρχικό σήμα στο χρόνο, $\hat{x}(t)$. Είναι όμως προφανές ότι το επιθυμητό σήμα $x(t)$ – μην ξεχνάτε, το $x(t)$ θέλουμε να μετασχηματίσουμε! ☹–



Σχήμα 7.5: Ημίτονα των δυο μετασχηματισμών

μπορεί να συντεθεί από τον πολλαπλασιασμό του $\hat{x}(t)$ με τα σήματα $e^{+\sigma t}$, έτσι δεν είναι; Αυτό τι σημαίνει; Σημαίνει ότι πολλαπλασιάζουμε κάθε φασματική συνιστώσα $\hat{X}(f)e^{j2\pi ft}$ του $\hat{x}(t)$ με $e^{+\sigma t}$, και μετά τις προσθέτουμε. Ιδού:

$$x(t) = \hat{x}(t)e^{+\sigma t} = e^{+\sigma t} \int \hat{X}(f)e^{j2\pi ft} df = \int (e^{+\sigma t} \hat{X}(f)) e^{j2\pi ft} df = \int \hat{X}(f) (e^{+\sigma t} e^{j2\pi ft}) df \quad (7.13)$$

Αλλά μια τέτοια κίνηση σημαίνει επίσης ότι τα ημίτονα που προκύπτουν θα έχουν αύξοντα πλάτη! Η πρόσθεση όλων αυτών των “νέων” ημιτόνων θα μας δώσει το ζητούμενο σήμα $x(t)$! Γιατί; Ας κάνουμε το ίδιο με τη Σχέση (7.12), μόνο που τώρα ας υποθέσουμε ότι έχουμε πλάτη $\hat{X}(\Delta f)e^{\sigma t}$:

$$e^{\sigma t} \hat{X}(\Delta f) e^{j2\pi\Delta f t} \Delta f + e^{\sigma t} \hat{X}^*(\Delta f) e^{-j2\pi\Delta f t} \Delta f = 2|\hat{X}(\Delta f)| \Delta f e^{\sigma t} \cos(2\pi\Delta f t + \phi_{\Delta f}) \quad (7.14)$$

Είναι φανερό εδώ ότι τα πλάτη των ημιτόνων δεν είναι σταθερά συναρτήσεως του χρόνου, όπως στην περίπτωση του μετασχ. Fourier, αλλά μεταβάλλονται συναρτήσεως του χρόνου ως $2|\hat{X}(\Delta f)|e^{\sigma t} \Delta f$, όπως στο Σχήμα 7.5β!

Επίσης, από τη Σχέση (7.13) βλέπουμε ότι ο πολλαπλασιασμός των συνιστωσών του $\hat{x}(t)$ με το $e^{+\sigma t}$ θα μας δώσει συνιστώσες της μορφής $e^{(\sigma+j2\pi f)t}$, προσθέτοντας τους εκθετές μέσα στο ολοκλήρωμα! Άρα, κάθε συχνότητα της μορφής $j2\pi f$ του $\hat{x}(t)$ μετασχηματίζεται σε μια άλλη συχνότητα $\sigma + j2\pi f$ στο φάσμα του $x(t)$. Όμως πού θα βρίσκονται αυτές οι νέες συχνότητες; Πού αλλού, εκτός από πάνω σε μια νέα ευθεία στο μιγαδικό s -επίπεδο, στην ευθεία που περιλαμβάνει τις συχνότητες $\sigma + j2\pi f$!

Πλέον είναι ξεκάθαρο ότι το σήμα $x(t) = e^{2t}u(t)$ μπορεί να συντεθεί από μεταβαλλόμενου πλάτους, συναρτήσεως του χρόνου t , μιγαδικά εκθετικά σήματα που βρίσκονται στο ημιεπίπεδο $\sigma + j2\pi f$, $\sigma > 2$, του μιγαδικού επιπέδου, με το f να κυμαίνεται από $-\infty$ έως ∞ . Η τιμή του σ όμως είναι μεταβαλλόμενη. Για παράδειγμα, αν $x(t) = e^{4t}u(t)$, τότε το $\hat{x}(t) = x(t)e^{-\sigma t}$ μπορεί να γίνει “μετασχηματισμός” αν διαλέξουμε $\sigma > 4$. Καταλαβαίνετε ότι έχουμε άπειρες επιλογές για την τιμή του σ . Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός του $x(t)$ όπως παρουσιάστηκε παραπάνω δεν είναι μοναδικός, και ότι υπάρχουν άπειροι τρόποι να συνθέσουμε το $x(t)$ από μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής $e^{(\sigma+j2\pi f)t}$. Όμως κάθε μετασχηματισμός θα ορίζεται επάνω σε μια ευθεία $\sigma = c$, $c \in \mathbb{R}$ του μιγαδικού επιπέδου, η οποία εμφανώς είναι παράλληλη στο φανταστικό άξονα $\sigma = 0$. Όμως, το σ έχει μια ελάχιστη, συγκεκριμένη τιμή σ_0 για ένα δεδομένο $x(t)$ (όπως εδώ, $\sigma_0 = 4$, για $x(t) = e^{4t}u(t)$). Αυτή η περιοχή του μιγαδικού s -επιπέδου που ορίζονται άπειροι τρόποι σύνθεσης του $x(t)$ από τα αύξοντος πλάτους εκθετικά σήματα λέγεται **πεδίο ή περιοχή σύγκλισης - Region of Convergence (ROC)** του νέου αυτού μετασχηματισμού του $x(t)$, και συνήθως συμβολίζεται ως R_x .

Αυτός ο νέος μετασχηματισμός λοιπόν, που χρησιμοποιεί μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής $e^{(\sigma+j2\pi f)t}$ λέγεται **Μετασχηματισμός Laplace** και ορίζεται ως:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad R_x \quad (7.15)$$

ενώ ο αντίστροφός του ως:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (7.16)$$

ο οποίος όμως δε θα χρησιμοποιηθεί για τους σκοπούς μας, μια και υπάρχουν πιο εύκολοι τρόποι να βρει κανείς το σήμα στο χρόνο $x(t)$ από το μετασχ. Laplace του, αποφεύγοντας την επίλυση ενός ολοκληρώματος στο μιγαδικό επίπεδο.

Ο μετασχ. Laplace μπορεί να γραφεί ως

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} \sin(2\pi ft) dt \quad (7.17)$$

$$= \text{Re}\{X(s)\} + j \text{Im}\{X(s)\} = X_R(s) + jX_I(s) \quad (7.18)$$

με $X_R(s)$, $X_I(s)$ το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού, αντίστοιχα. Άρα ο μετασχ. Laplace είναι εν γένει μιγαδικό σήμα, με το πραγματικό και το φανταστικό του μέρος να υπολογίζεται ως

$$X_R(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} \cos(2\pi ft) dt \quad (7.19)$$

$$X_I(s) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} \sin(2\pi ft) dt \quad (7.20)$$

Μια εναλλακτική αναπαράσταση του μετασχ. Laplace είναι η πολική μορφή, δηλ.

$$X(s) = |X(s)|e^{j\phi_x(s)} \quad (7.21)$$

με

$$|X(s)| = \sqrt{X_R^2(s) + X_I^2(s)} \quad (7.22)$$

να είναι το μέτρο του μετασχηματισμού και

$$\phi_x(s) = \tan^{-1} \left(\frac{X_I(s)}{X_R(s)} \right) \quad (7.23)$$

η φάση του μετασχηματισμού.

Για αιτιατά σήματα, τέλος, ορίζεται ο μονόπλευρος μετασχ. Laplace ως:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (7.24)$$

που δε διαφέρει σε πολλά από τον δίπλευρο μετασχ. Laplace που συζητούσαμε ως τώρα, αλλά δε θα τον χρησιμοποιήσουμε παρά μόνο αργότερα, όταν συζητήσουμε για συστήματα στο χώρο του Laplace.

Συνοψίζοντας, ο μετασχ. Laplace μπορεί να ιδωθεί ως μια “επέκταση” του μετασχ. Fourier, για σήματα των οποίων το συχνοτικό περιεχόμενο δεν μπορεί να υπολογιστεί απ’ την κλασική θεωρία Fourier. Ο μετασχ. Fourier προβάλλει το σήμα πάνω σε μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις με συχνότητες που ορίζονται στο φανταστικό άξονα ($e^{-j2\pi ft}$). Αλλάζοντας τις συναρτήσεις βάσης $e^{-j2\pi ft}$ σε $e^{-(\sigma+j2\pi f)t}$ (που όμως δεν αποτελούν βάση πλέον κάποιου χώρου συναρτήσεων), προβάλλουμε το σήμα σε συχνότητες που βρίσκονται σε ευθείες παράλληλες με τον άξονα των φανταστικών αριθμών του μιγαδικού επιπέδου, πάνω στον οποίο “ζει” ο μετασχ. Fourier.

7.3.1 Ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace

Μια ικανή συνθήκη για την ύπαρξη του μετασχ. Laplace είναι η

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (7.25)$$

Όταν το παραπάνω ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάποιες τιμές του σ , τότε υπάρχει ο μετασχ. Laplace. Αποδεικνύεται ότι κάθε σήμα που αυξάνει όχι γρηγορότερα από το εκθετικό σήμα $Me^{\sigma_0 t}$, για κάποια $M, \sigma_0 \in \mathbb{R}$, ικανοποιεί τη συνθήκη (7.25). Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = e^{t^2}$ αυξάνει πιο γρήγορα από το $e^{\sigma_0 t}$, και άρα δεν έχει μετασχ. Laplace. Αν και το συγκεκριμένο σήμα είναι ιδιαίτερα δημοφιλές στα Μαθηματικά, δεν έχει μεγάλη πρακτική σημασία στην Επεξεργασία Σήματος.

Βέβαια, όπως και στο μετασχ. Fourier, αυτή η συνθήκη δεν είναι και αναγκαία. Για παράδειγμα, το σήμα

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} u(t) \quad (7.26)$$

απειρίζεται στο $t = 0^+$ και η Σχέση (7.25) δεν ικανοποιείται αλλά ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει και είναι ο

$$X(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad R_x = \{\sigma > 0\} \quad (7.27)$$

Δεν ασχολούμαστε με τέτοια σήματα, και πάντα όταν ζητείται ο μετασχ. Laplace θα υποθέτουμε ότι υπάρχει, δηλ. ότι το ολοκλήρωμα του μετασχ. Laplace συγκλίνει.

7.3.2 Πόλοι και Μηδενικά

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, οι μετασχ. Laplace που θα υπολογίσουμε θα είναι κατά κανόνα ρητές συναρτήσεις της μεταβλητής s , δηλ. της μορφής

$$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (7.28)$$

με $P(s), Q(s)$ πολυώνυμα του s . Μας ενδιαφέρουν δυο είδη σημείων του μιγαδικού επιπέδου που σχετίζονται με αυτά τα πολυώνυμα.

- i. Οι **πόλοι** του μετασχηματισμού: είναι οι μιγαδικοί αριθμοί, δηλ. σημεία στο μιγαδικό επίπεδο, που ο μετασχ. Laplace απειρίζεται. Με μαθηματικά,

$$S_p = \{s \in \mathbb{C} : X(s) \rightarrow \infty\} \quad (7.29)$$

Οι πόλοι **δεν ανήκουν στο πεδίο σύγκλισης** του μετασχηματισμού, αλλά παρ' όλα αυτά είναι πολύ χρήσιμοι στην κατανόηση της συμπεριφοράς του μετασχηματισμού. Σε ρητές συναρτήσεις του s , οι ρίζες του παρονομαστή αποτελούν πόλους του μετασχηματισμού και συμβολίζονται με ένα **X** στο μιγαδικό επίπεδο.

- ii. Τα **μηδενικά** του μετασχηματισμού: είναι οι μιγαδικοί αριθμοί, δηλ. σημεία στο μιγαδικό επίπεδο, που ο μετασχ. Laplace μηδενίζεται. Με μαθηματικά,

$$S_z = \{s \in \mathbb{C} : X(s) = 0\} \quad (7.30)$$

Τα μηδενικά **μπορούν να ανήκουν στο πεδίο σύγκλισης** του μετασχηματισμού. Σε ρητές συναρτήσεις του s , οι ρίζες του αριθμητή αποτελούν μηδενικά του μετασχηματισμού και συμβολίζονται με ένα **O** στο μιγαδικό επίπεδο.

7.3.3 Πλευρικότητα και Αιτιατότητα

Προτού εφαρμόσουμε το νέο μας μετασχηματισμό σε διάφορα σήματα, θα μας φανεί πολύ χρήσιμο να κατηγοριοποιήσουμε μερικά σήματα ανάλογα με τη χρονική διάρκεια τους. Αυτή η διάκριση θα μας βοηθήσει πολύ στη συνέχεια στο να ορίζουμε εύκολα και γρήγορα το περίφημο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace, για το οποίο θα αναφέρουμε περισσότερες λεπτομέρειες στην επόμενη παράγραφο. Πρώτα όμως ας δούμε τα είδη σημάτων όσον αφορά την **πλευρικότητα** και την **αιτιατότητά** τους:

- **Αριστερόπλευρο** λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (Σχήμα 7.6α')

$$x(t) = 0, \quad t > t_0 \quad (7.31)$$

- **Δεξιόπλευρο** λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (Σχήμα 7.6β')

$$x(t) = 0, \quad t < t_0 \quad (7.32)$$

- **Αμφίπλευρο (ή δίπλευρο)** λέγεται το σήμα το οποίο (Σχήμα 7.6γ') είναι ταυτόχρονα δεξιόπλευρο και αριστερόπλευρο, δηλ. παίρνει τιμές για κάθε χρονική στιγμή.

- **Πεπερασμένης διάρκειας** λέγεται το σήμα για το οποίο ισχύει (Σχήμα 7.6δ')

$$x(t) = 0, \quad t > t_2, \quad t < t_1 \quad (7.33)$$

Η διάκριση των σημάτων όσον αφορά την πλευρικότητά τους είναι σχετικά εύκολη υπόθεση, είτε από τον ορισμό τους είτε από τη γραφική τους παράσταση. Ας γνωρίσουμε όμως εδώ και μια νέα - αλλά και γνωστή μας - κατηγοριοποίηση σημάτων, που αφορά την **αιτιατότητά** τους:

- **Αιτιατά** λέγονται τα σήματα για τα οποία ισχύει

$$x(t) = 0, \quad t < 0 \quad (7.34)$$

όπως στο Σχήμα 7.7α'.

- **Αντί-αιτιατά** λέγονται τα σήματα για τα οποία ισχύει η σχέση

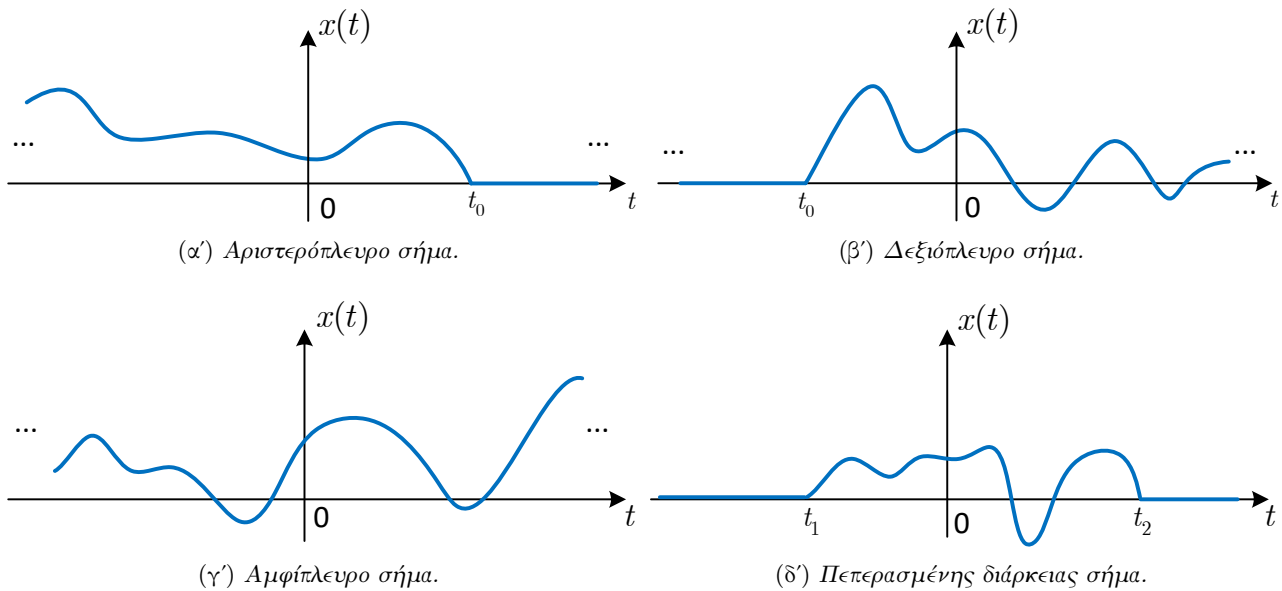
$$x(t) = 0, \quad t > 0 \quad (7.35)$$

όπως αυτό στο Σχήμα 7.7β'.

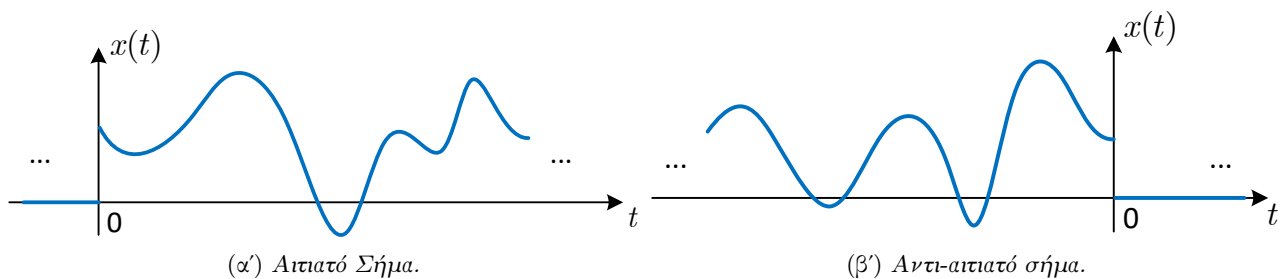
- Υπάρχουν και τα **μη αιτιατά** σήματα, τα οποία ουσιαστικά είναι τα αμφίπλευρα σήματα της προηγούμενης κατηγοριοποίησης.

7.3.4 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Τόσο ο μετασχ. Laplace όσο και το πεδίο σύγκλισης προκαλούν συχνά σύγχυση τόσο όσον αφορά την προέλευσή τους, όσο και τη χρήση τους και τη σημασία τους. Εδώ θα ξεκαθαρίσουμε όλα αυτά, χρησιμοποιώντας μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα.



Σχήμα 7.6: Είδη σημάτων σε σχέση με τη χρονική διάρκειά τους.



Σχήμα 7.7: Αιτιατό και αντι-αιτιατό σήμα.

Παράδειγμα 7.1:

Εστω το σήμα

$$x(t) = e^{at}u(t), \quad a \in \mathbb{R} \quad (7.36)$$

Βρείτε το μετασχ. Laplace του.

Λύση:

Γνωρίζετε ήδη ότι γι' αυτό το σήμα, δεν υπάρχει ο μετασχ. Fourier αν $a > 0$ γιατί το ολοκλήρωμά του θα αποκλίνει στο $+\infty$. Από την άλλη, αν $a < 0$, τότε ο μετασχ. Fourier υπάρχει, μια και το σήμα μας είναι σήμα ενέργειας. Θεωρούμε στο παράδειγμά μας ότι $a \in \mathbb{R}$, για περισσότερη γενικότητα. Προσέξτε ότι το σήμα μας είναι δεξιόπλευρο σε κάθε περίπτωση.

Ας δοκιμάσουμε να εφαρμόσουμε τον ορισμό του μετασχ. Laplace και να δούμε μερικά πράγματα:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a-s} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-s)t} - 1 \right) \quad (7.37)$$

Γνωρίζουμε όμως² ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(a+jb)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} e^{jbt} = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \infty, & a > 0 \end{cases} \quad (7.38)$$

²Πρέπει να έχετε καταλάβει τι πρόκειται να συμβεί από παρόμοια διαδικασία που είδαμε στο μετασχ. Fourier.

άρα ξέρουμε ότι η συνάρτηση $e^{-st} = e^{(a-\sigma)t}e^{-j2\pi ft}$ φθίνει στο 0 όταν $t \rightarrow +\infty$, αν και μόνο αν

$$a - \sigma < 0 \iff a < \sigma \iff \text{Re}\{s\} > a \tag{7.39}$$

Αυτή η σχέση αποτελεί το **πεδίο σύγκλισης**, γιατί αποτελεί την περιοχή του μιγαδικού επιπέδου για την οποία υπάρχει ο μετασχ. Laplace, δηλ. το σχετικό ολοκλήρωμα συγκλίνει!³

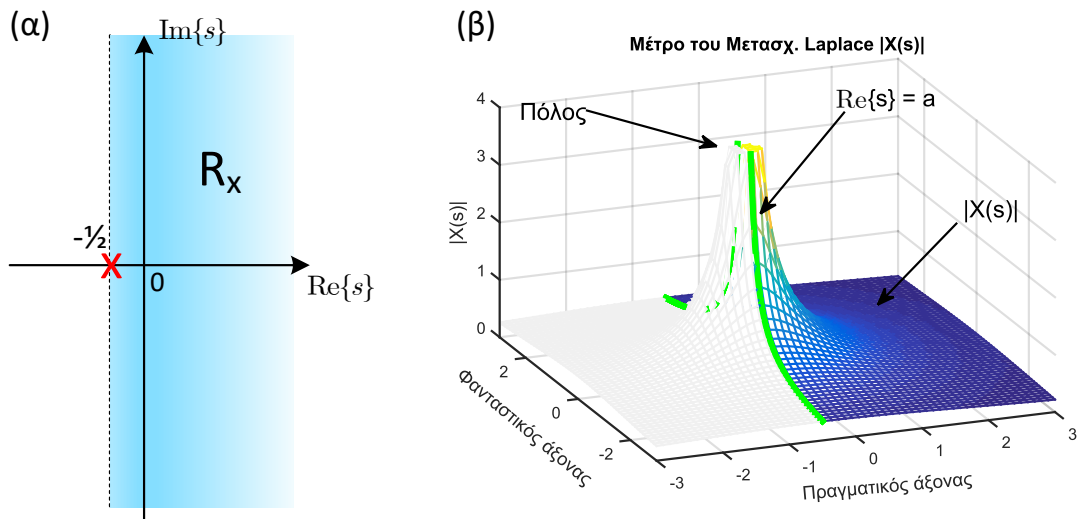
Οπότε δείξαμε ότι η συνάρτηση $e^{(a-s)t}$ γράφεται ως γινόμενο δυο συναρτήσεων και το γινόμενό τους συγκλίνει στο μηδέν όταν $t \rightarrow \infty$. Ας ολοκληρώσουμε τη λύση μας.

$$X(s) = \frac{1}{a-s} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(a-s)t} - 1 \right) = \frac{1}{a-s} (0 - 1) = \frac{1}{s-a}, \quad \text{Re}\{s\} > a \tag{7.40}$$

Άρα ο μετασχ. Laplace του σήματος $x(t) = e^{at}u(t)$, $a \in \mathbb{R}$, είναι

$$x(t) = e^{at}u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \text{Re}\{s\} > a \tag{7.41}$$

και το πεδίο σύγκλισης φαίνεται στο Σχήμα 7.8(α) για μια τυχαία τιμή του a . Θα μπορούσε ο αριθμός a να βρίσκεται στο δεξιό ημιεπίπεδο, αφού $a \in \mathbb{R}$. Δε μας ενδιαφέρει τώρα η θέση του, όσο η περιοχή που ορίζεται στα δεξιά του. Ο αριθμός a , που αποτελεί ρίζα του παρονομαστή του μετασχηματισμού, λέγεται **πόλος** του μετασχ. Laplace, και



Σχήμα 7.8: Παράδειγμα 7.1: (α) πεδίο σύγκλισης R_x , (β) Μέτρο μετασχηματισμού Laplace.

το πεδίο σύγκλισης για το δεξιόπλευρο σήμα μας είναι το ημιεπίπεδο δεξιά της κατακόρυφης ευθείας $\sigma = a$, όπως βρήκαμε παραπάνω, χωρίς να την περιλαμβάνει. Φυσικά, στο ημιεπίπεδο $\text{Re}\{s\} \leq a$, ο μετασχ. Laplace δε συγκλίνει!

Παρατηρήστε το Σχήμα 7.8(β), όπου φαίνεται το μέτρο του μετασχ. Laplace - εφ' όσον εν γένει δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε τον ίδιο το μετασχηματισμό: πρόκειται για συνάρτηση αντίστοιχη των πραγματικών συναρτήσεων τεσσάρων διαστάσεων. Δείτε ότι στην ευθεία $\text{Re}\{s\} = \sigma = a$ ανήκει το σημείο $s = a$ όπου ο μετασχηματισμός απειρίζεται. Αυτή η ευθεία αποτελεί το σύνορο του πεδίου σύγκλισης και φυσικά δεν ανήκει σε αυτό.

Όσον αφορά τους πόλους και τα μηδενικά του μετασχηματισμού, αναφέραμε ήδη ότι υπάρχει ένας πόλος στη θέση $s = a$, αλλά υπάρχει και ένα μηδενικό που δεν αποτελεί ρίζα του αριθμητή (καθώς αυτός είναι ένα σταθερό πολυώνυμο) και βρίσκεται στο ∞ , αφού

$$\lim_{s \rightarrow \infty} X(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s-a} = 0 \tag{7.42}$$

³Όμοια με το πεδίο ορισμού στις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Παράδειγμα 7.2:

Έστω το σήμα

$$x(t) = -e^{at}u(-t), \quad a \in \mathbb{R} \quad (7.43)$$

για το οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Laplace.

Λύση:

Αν $a \in \mathbb{R}_+$, τότε το σήμα είναι σήμα ενέργειας, και ο μετασχ. Fourier του υπάρχει. Αν όμως $a \in \mathbb{R}_-$, τότε δεν υπάρχει ο μετασχ. Fourier, και το ολοκλήρωμα του αποκλίνει στο ∞ . Στην εκφώνηση θεωρούμε ότι $a \in \mathbb{R}$, χωρίς περιορισμούς. Προσέξτε ότι το σήμα μας είναι *αριστερόπλευρο*. Ο μετασχ. Laplace θα είναι:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{(a-s)t} dt = - \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_{-\infty}^0 = - \frac{1}{a-s} \left(1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-s)t} \right) \quad (7.44)$$

Έχουμε ξανά την ίδια κατάσταση με το προηγούμενο παράδειγμα. Θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-s)t} \quad (7.45)$$

Σκεπτόμενοι ακριβώς όμοια, καταλήγουμε ότι το όριο αυτό φθίνει στο 0 *μόνο αν*

$$a - \sigma > 0 \iff a > \operatorname{Re}\{s\} \iff \operatorname{Re}\{s\} < a \quad (7.46)$$

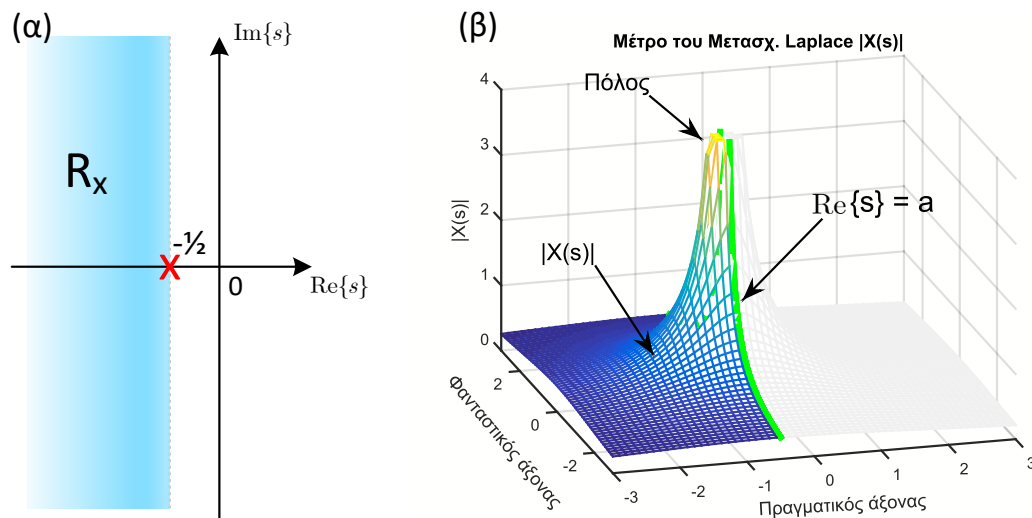
και αυτό είναι το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace. Στο πεδίο αυτό, το όριο φθίνει στο μηδέν, και άρα από τη Σχέση (7.44) έχουμε:

$$X(s) = - \frac{1}{a-s} (1 - 0) = \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re}\{s\} < a \quad (7.47)$$

Άρα τελικά, έχουμε ότι

$$x(t) = -e^{at}u(-t) \iff X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re}\{s\} < a \quad (7.48)$$

με το πεδίο σύγκλισης για ένα τυχαίο a (ίσο με $-1/2$) να φαίνεται στο Σχήμα 7.9(α). Και σε αυτό το παράδειγμα, θα μπορούσε ο αριθμός a να βρίσκεται στο δεξί ημιεπίπεδο, αλλά μας ενδιαφέρει μόνο το ημιεπίπεδο στα αριστερά του. Παρατηρήστε ότι το πεδίο σύγκλισης για το *αριστερόπλευρο* σήμα μας είναι το ημιεπίπεδο *αριστερά* της κατακόρυφης



Σχήμα 7.9: Παράδειγμα 7.2: (α) πεδίο σύγκλισης R_x , (β) Μέτρο μετασχηματισμού Laplace.

ευθείας $\sigma = a$, όπως βρήκαμε παραπάνω, χωρίς να την περιλαμβάνει. Παρατηρήστε επίσης το Σχήμα 7.9(β), όπου φαίνεται το μέτρο του μετασχ. Laplace. Δείτε ότι στην ευθεία $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma = a$ ανήκει το σημείο $s = a$ όπου ο μετασχηματισμός απειρίζεται. Αυτή η ευθεία αποτελεί το σύνορο του πεδίου σύγκλισης και φυσικά δεν ανήκει σε αυτό.

Όσον αφορά τους πόλους και τα μηδενικά του μετασχηματισμού, υπάρχει ένας πόλος στη θέση $s = a$, αλλά υπάρχει και ένα μηδενικό που δεν αποτελεί ρίζα του αριθμητή (καθώς αυτός είναι ένα σταθερό πολυώνυμο) και βρίσκεται στο ∞ , αφού

$$\lim_{s \rightarrow \infty} X(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s-a} = 0 \tag{7.49}$$

Παράδειγμα 7.3:

Ας ορίσουμε το σήμα

$$x(t) = e^{at}u(t) - e^{at}u(-t), \quad a \in \mathbb{R} \tag{7.50}$$

του οποίου ζητούμε το μετασχ. Laplace.

Λύση:

Δεν το αναφέραμε ως τώρα, αλλά δεν είναι και μυστικό, αφού αποδεικνύεται εύκολα - και θα το δούμε παρακάτω: ο μετασχ. Laplace είναι γραμμικός. Άρα το άθροισμα δυο σημάτων έχει μετασχ. Laplace το άθροισμα των επιμέρους μετασχηματισμών. Όσο για το πεδίο σύγκλισης, αυτό είναι - όπως θα δούμε σύντομα - ένα υπερσύνολο που περιλαμβάνει τουλάχιστον την τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης. Άρα λοιπόν,

$$X(s) = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-a} = \frac{2}{s-a}, \quad R_x = R_{x_1} \cap R_{x_2} = \{\sigma > a\} \cap \{\sigma < a\} = \emptyset \tag{7.51}$$

Βλέπουμε ότι παρ' όλο που μπορούμε να προσθέσουμε τους επιμέρους μετασχηματισμούς, ο συνολικός μετασχηματισμός Laplace δεν υπάρχει, γιατί δεν υπάρχει περιοχή στο s -επίπεδο στην οποία να συγκλίνει! Άρα βλέπουμε ότι δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει ο μετασχ. Laplace για ένα άθροισμα σημάτων τα οποία έχουν επιμέρους μετασχ. Laplace.

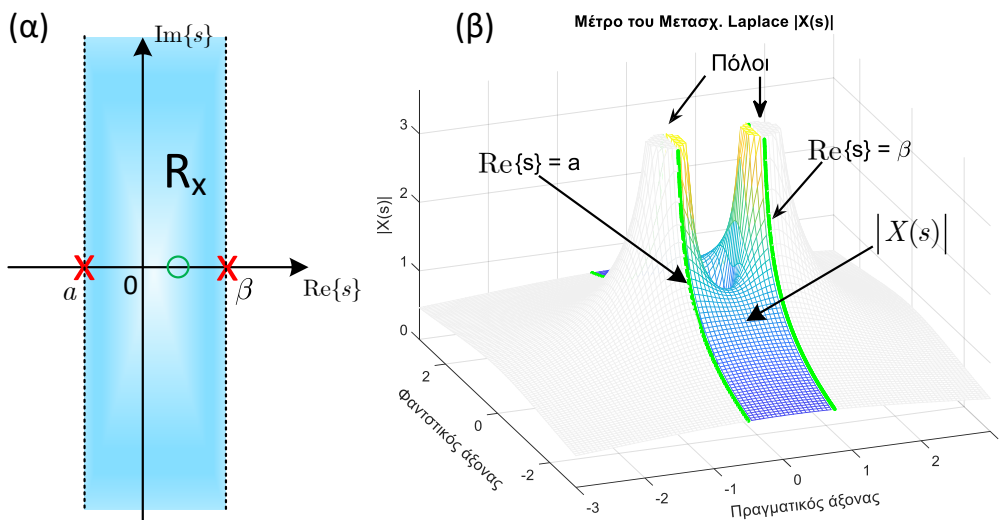
Ας δούμε όμως τι θα συνέβαινε αν είχαμε

$$x(t) = e^{at}u(t) - e^{\beta t}u(-t), \quad a, \beta \in \mathbb{R}, \quad a \neq \beta \tag{7.52}$$

Τότε

$$X(s) = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-\beta} = \frac{2s - (a + \beta)}{(s-a)(s-\beta)}, \quad R_x = R_{x_1} \cap R_{x_2} = \{\sigma > a\} \cap \{\sigma < \beta\} \tag{7.53}$$

το οποίο δεν είναι απαραίτητα το κενό σύνολο. Εξαρτάται από τις σχετικές θέσεις των a, β . Π.χ. αν $a < \beta$, τότε το πεδίο σύγκλισης είναι μια "λωρίδα" στο s -επίπεδο, η περιοχή $a < \text{Re}\{s\} < \beta$, όπως στο Σχήμα 7.10, ενώ αν $a > \beta$, τότε το πεδίο σύγκλισης είναι το κενό σύνολο. Άρα στη γενικότερη περίπτωση



Σχήμα 7.10: Παράδειγμα 7.3: (α) πεδίο σύγκλισης R_x , (β) Μέτρο μετασχηματισμού Laplace.

$$x(t) = e^{at}u(t) - e^{\beta t}u(-t), \quad a \neq \beta \in \mathbb{R} \iff X(s) = \frac{2s - (a + \beta)}{(s-a)(s-\beta)}, \quad a < \text{Re}\{s\} < \beta \tag{7.54}$$

Προσέξτε ότι εδώ, το συνολικό μας σήμα $x(t)$ είναι αμφίπλευρο, και έτσι το πεδίο σύγκλισης δεν προέκυψε ούτε δεξιόπλευρο ούτε αριστερόπλευρο, αλλά μια “λωρίδα” στο μιγαδικό επίπεδο. Επίσης, στο παράδειγμα αυτό το πολυώνυμο του αριθμητή δεν είναι σταθερό όπως στα προηγούμενα παραδείγματα. Οι ρίζες του πολυωνύμου του αριθμητή, που ονομάζονται μηδενικά, είναι η $s = (a + \beta)/2$ αλλά και η $s = \infty$, καθώς

$$\lim_{s \rightarrow \infty} X(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s - (a + \beta)}{(s - a)(s - \beta)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\left(2 - \frac{(a + \beta)}{s}\right)}{s \left(1 - \frac{a}{s}\right) \left(1 - \frac{\beta}{s}\right)} = 0 \quad (7.55)$$

Οι ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι οι $s = a$, $s = \beta$ και είπαμε ότι ονομάζονται πόλοι. Θα μιλήσουμε για τους πόλους, τα μηδενικά, και τη σημασία τους εκτενέστερα στη συνέχεια.

Παρατηρήστε το Σχήμα 7.10(β), όπου φαίνεται το μέτρο του μετασχ. Laplace. Δείτε ότι στις ευθείες $\text{Re}\{s\} = \sigma = a$ και $\text{Re}\{s\} = \sigma = \beta$ ο μετασχηματισμός απειρίζεται. Επίσης παρατηρήστε ότι το πεδίο σύγκλισης βρίσκεται ανάμεσα στον πόλο a και β , και συμβολίζεται με R_x , όπως στο Σχήμα 7.10(α).

Παράδειγμα 7.4:

Ας βρούμε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = u(t) \quad (7.56)$$

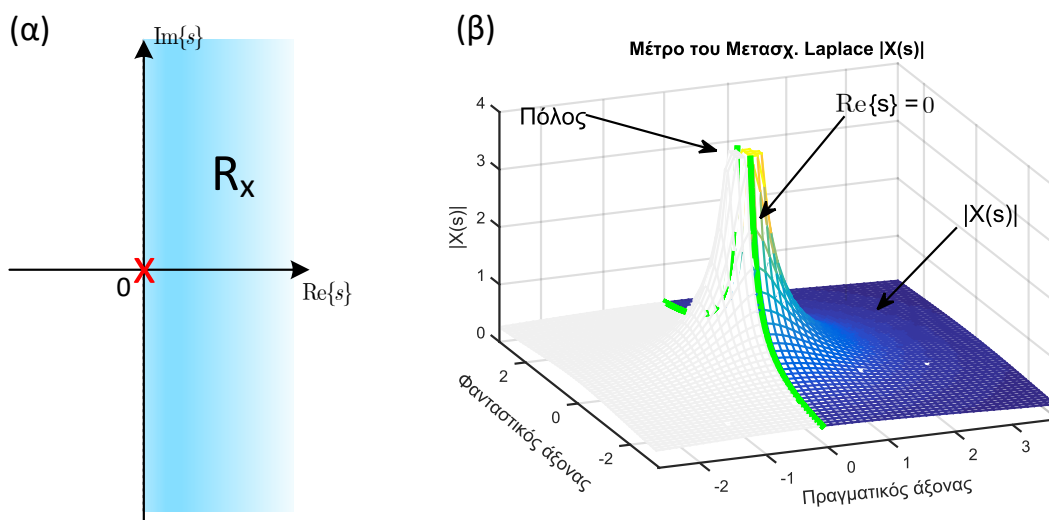
Λύση:

Η περίπτωση της βηματικής συνάρτησης είναι αρκετά ενδιαφέρουσα καθώς ο μετασχ. Fourier της δε συγχλίνει - είναι αναγκαία η χρήση γενικευμένων συναρτήσεων για να βρεθεί μια έκφραση της στη συχνότητα. Ο μετασχ. Laplace της είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s}e^{-st} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s} \quad (7.57)$$

με $\text{Re}\{s\} > 0$, ακολουθώντας παρόμοια συλλογιστική με τα προηγούμενα παραδείγματα. Οπότε

$$x(t) = u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s}, \text{Re}\{s\} > 0 \quad (7.58)$$



Σχήμα 7.11: Παράδειγμα 7.4: (α) πεδίο σύγκλισης R_x , (β) Μέτρο μετασχηματισμού Laplace.

Σημειώστε ότι ο πόλος του μετασχηματισμού βρίσκεται στη θέση $s = 0$, δηλ. επάνω στο φανταστικό άξονα $j2\pi f$, και συγκεκριμένα στη συμβολή των αξόνων. Το πεδίο σύγκλισης είναι το ημιεπίπεδο δεξιά της ευθείας $\sigma = 0$, κάτι αναμενόμενο αφού το σήμα μας είναι δεξιόπλευρο. Βλέπετε λοιπόν ότι ο μετασχ. Laplace είναι ένας καλώς

ορισμένος μετασχηματισμός για τη βηματική συνάρτηση, σε αντίθεση με το Μετασχ. Fourier αυτής. Περισσότερα για τη σύνδεση μεταξύ των δυο μετασχηματισμών θα πούμε σύντομα.

Το πεδίο σύγκλισης φαίνεται στο Σχήμα 7.11(α) – βρίσκεται δεξιά του πόλου $s = 0$. Παρατηρήστε επίσης το Σχήμα 7.11(β), όπου φαίνεται το μέτρο του μετασχ. Laplace. Δείτε ότι στην ευθεία $\text{Re}\{s\} = \sigma = 0$ ανήκει το σημείο $s = 0$ όπου ο μετασχηματισμός απειρίζεται. Αυτή η ευθεία αποτελεί το σύνορο του πεδίου σύγκλισης. Τέλος, ο μετασχηματισμός έχει ένα μηδενικό στο ∞ , καθώς

$$\lim_{s \rightarrow \infty} X(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} = 0 \tag{7.59}$$

Παράδειγμα 7.5:

Ας βρούμε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = \delta(t) \tag{7.60}$$

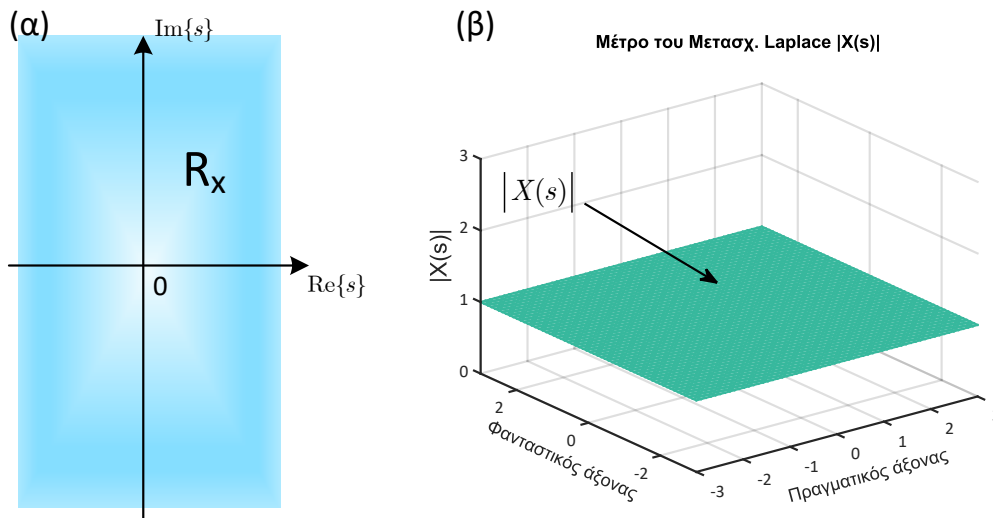
Λύση:

Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1 \tag{7.61}$$

από τη γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t) dt = x(0) \tag{7.62}$$



Σχήμα 7.12: Παράδειγμα 7.5: (α) πεδίο σύγκλισης R_x , (β) Μέτρο μετασχηματισμού Laplace.

Άρα

$$x(t) = \delta(t) \longleftrightarrow X(s) = 1, \forall s \tag{7.63}$$

Παρατηρήστε ότι δεν προέκυψε κανείς περιορισμός για το πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού, οπότε το τελευταίο είναι όλο το s -επίπεδο, όπως στο Σχήμα 7.12(α). Παρατηρήστε το Σχήμα 7.12(β), όπου φαίνεται το μέτρο του μετασχ. Laplace, το οποίο και είναι μοναδιαίο για κάθε s . Επίσης, δείτε ότι ο μετασχηματισμός δεν απειρίζεται και δε μηδενίζεται σε κανένα σημείο.

Ας ξεκινήσουμε τις παρατηρήσεις μας.

Παρατηρήσεις

(α') Η πιο σημαντική παρατήρηση έρχεται αν συγκρίνουμε τις Σχέσεις (7.41) και (7.48). Ας τις ξαναγράψουμε εδώ για ευκολία:

$$x(t) = e^{at}u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \operatorname{Re}\{s\} > a \quad (7.64)$$

$$x(t) = -e^{at}u(-t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}, \operatorname{Re}\{s\} < a \quad (7.65)$$

Θα μπορούσε κάποιος να πει ότι “παρατηρούμε ότι δυο εντελώς διαφορετικά σήματα στο χρόνο, έχουν τον ίδιο μετασχ. Laplace.” Αυτό όμως είναι λάθος! Τα σήματα αυτά έχουν την ίδια αλγεβρική έκφραση στο χώρο του μετασχ. Laplace. Ο μετασχηματισμός Laplace όμως περιλαμβάνει και το πεδίο σύγκλισης! Αυτό είναι που ξεχωρίζει τους δυο μετασχηματισμούς. Χωρίς το πεδίο σύγκλισης, δε θα μπορούσαμε να αποφασίσουμε σε ποιό σήμα στο χρόνο αντιστοιχεί ο μετασχηματισμός Laplace $X(s)$ που μας δίνεται!

(β') Είδατε παραπάνω ότι το πεδίο σύγκλισης δεν είναι κάτι τυχαίο. Προκύπτει απ' την ανάγκη να συγκλίνει το ολοκλήρωμα του μετασχ. Laplace! Κάθε μετασχ. Laplace έρχεται “μαζί” με το πεδίο σύγκλισης. Χωρίς αυτό, ο μετασχ. Laplace είναι χωρίς νόημα! Συνηθίστε λοιπόν να γράφετε το μετασχηματισμό μαζί με το εκάστοτε πεδίο σύγκλισης.

(γ') Ίσως παρατηρήσατε ότι όλοι οι μετασχ. Laplace που υπολογίσαμε μπορούν να γραφούν στη γενικότερη μορφή

$$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (7.66)$$

με $P(s)$, $Q(s)$ πολυώνυμα του s . Αναφέραμε νωρίτερα ότι οι ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή ονομάζονται πόλοι - απειρίζουν το μετασχ. Laplace - ενώ οι ρίζες του πολυωνύμου του αριθμητή ονομάζονται μηδενικά - προφανώς μηδενίζουν το μετασχ. Laplace.

(δ') Ο πόλος $s = a$ που είδαμε στα Παραδείγματα 7.1 και 7.2 θα μπορούσε να είναι μιγαδικός αριθμός. Γενικά, οι πόλοι δεν είναι απαραίτητο να είναι πάντα πραγματικοί - αντιθέτως, τα πράγματα είναι πολύ πιο ενδιαφέροντα όταν δεν είναι! Δεν αλλάζει τίποτα σε όσα είπαμε παραπάνω, παρά μόνον ότι πλέον τα πεδία σύγκλισης θα είναι στη μορφή

$$\operatorname{Re}\{s\} \geq \operatorname{Re}\{a\} \quad \text{ή} \quad \operatorname{Re}\{a\} < \operatorname{Re}\{s\} < \operatorname{Re}\{\beta\} \quad (7.67)$$

δηλ. χρησιμοποιούμε το πραγματικό μέρος του, κατάλληλου κάθε φορά, μιγαδικού πόλου στην περιγραφή του πεδίου σύγκλισης. Αυτό προκύπτει αναλυτικά από την εφαρμογή του ορισμού. Τα παραπάνω ισχύουν φυσικά και για τα μηδενικά ενός μετασχηματισμού, που όμως δεν παίζουν κάποιο ρόλο στο πεδίο σύγκλισης.

7.3.5 Ιδιότητες Πεδίου Σύγκλισης

Μπορεί κανείς να αποδείξει κάποιες πολύ σημαντικές ιδιότητες του πεδίου σύγκλισης του μετασχ. Laplace. Οι περισσότερες πρέπει να σας είναι εμφανείς διαισθητικά, με βάση τα παραδείγματα που είδαμε νωρίτερα, αλλά φυσικά σχεδόν όλες τους αποδεικνύονται και τυπικά.

1. Τα πεδία σύγκλισης δεν περιέχουν **ποτέ** πόλους, αφού εξ' ορισμού ένας πόλος είναι σημείο του μιγαδικού επιπέδου που απειρίζεται ο μετασχ. Laplace. Η συμπεριληψη ενός πόλου του στο πεδίο σύγκλισης δεν έχει νόημα.
2. Δεδομένου ότι η εμφάνιση ενός πόλου $s = a$ χωρίζει το μιγαδικό επίπεδο με μια ευθεία $\sigma = \operatorname{Re}\{a\}$ σε δυο μέρη, τα πεδία σύγκλισης οποιουδήποτε μετασχηματισμού Laplace θα είναι είτε
 - (α') μια περιοχή του επιπέδου αριστερά μιας κατακόρυφης ευθείας, η οποία θα ορίζεται από τον αριστερότερο πόλο, είτε
 - (β') μια περιοχή του επιπέδου δεξιά μιας κατακόρυφης ευθείας, η οποία θα ορίζεται από το δεξιότερο πόλο, είτε

(γ') μια “λωρίδα” μεταξύ δυο κατακόρυφων ευθειών, οι οποίες θα ορίζονται από δυο πόλους, είτε

(δ') όλο το μιγαδικό επίπεδο

3. Ένας μετασχ. Laplace μπορεί να έχει κανέναν, έναν, ή περισσότερους πόλους. Το ίδιο ισχύει και για τα μηδενικά του.
4. Αποδεικνύεται ότι αν το σήμα $x(t)$ είναι δεξιόπλευρο, το πεδίο σύγκλισης είναι “δεξιόπλευρο”, δηλ. μια περιοχή του μιγαδικού επιπέδου δεξιά μιας ευθείας $\sigma = \text{Re}\{a\}$, η οποία θα ορίζεται από τον πόλο με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος. Για παράδειγμα, ένα τέτοιο πεδίο θα είναι της μορφής $\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{a\}$, με a να είναι ο πόλος με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος από όλους τους πόλους του μετασχηματισμού. Αν και μπορείτε να δουλέψετε την τυπική απόδειξη στην Άσκηση 7.36, δεν είναι δύσκολο να κατανοήσετε διαισθητικά την ιδιότητα: ένα δεξιόπλευρο σήμα θα είναι της μορφής

$$x_{rs}(t) = \sum_{k=0}^N A_k e^{a_k t} u(t - t_k), \quad t_k \in \mathbb{R} \quad (7.68)$$

Η χρήση του ορισμού θα δώσει “δεξιόπλευρα” επιμέρους πεδία σύγκλισης για κάθε όρο του αθροίσματος, τα οποία θα είναι της μορφής $\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{a_k\}$. Έτσι, το συνολικό πεδίο σύγκλισης θα είναι, εν γένει, ένα υπερσύνολο της τομής των επιμέρους πεδίων. Όμως το πεδίο σύγκλισης που θα προκύψει θα είναι αναγκαστικά “δεξιόπλευρο”.

5. Αποδεικνύεται ότι αν το σήμα $x(t)$ είναι αριστερόπλευρο, το πεδίο σύγκλισης είναι “αριστερόπλευρο”, δηλ. μια περιοχή του μιγαδικού επιπέδου αριστερά μιας ευθείας $\sigma = \text{Re}\{a\}$, η οποία θα ορίζεται από τον πόλο με το μικρότερο πραγματικό μέρος. Για παράδειγμα, ένα τέτοιο πεδίο θα είναι της μορφής $\text{Re}\{s\} < \text{Re}\{a\}$, με a να είναι ο πόλος με το μικρότερο πραγματικό μέρος από όλους τους πόλους του μετασχηματισμού. Η τυπική απόδειξη μπορεί να εξαχθεί στην Άσκηση 7.37, ενώ για τη διαισθητική κατανόηση μπορείτε να ακολουθήσετε το παράδειγμα της προηγούμενης ιδιότητας.
6. Αποδεικνύεται ότι αν το σήμα $x(t)$ είναι αμφίπλευρο, δηλ. άθροισμα δεξιόπλευρων και αριστερόπλευρων σημάτων, το πεδίο σύγκλισης είναι είτε μια “λωρίδα” στο ημιεπίπεδο μεταξύ δυο πόλων (π.χ. $\text{Re}\{a\} < \text{Re}\{s\} < \text{Re}\{b\}$), είτε το κενό σύνολο (γιατί τα επιμέρους πεδία σύγκλισης δε θα επικαλύπτονται). Στην περίπτωση που το πεδίο σύγκλισης είναι το κενό σύνολο, προφανώς ο μετασχ. Laplace δεν ορίζεται.
7. Αν το σήμα $x(t)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας, το πεδίο σύγκλισης είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο. Αυτό μπορείτε εύκολα να το κατανοήσετε μια και το ολοκλήρωμα του μετασχ. Laplace θα έχει άκρα δυο συγκεκριμένες χρονικές τιμές, οπότε δε θα προκύψει κάποιος περιορισμός λόγω κάποιου ορίου στο $\pm\infty$, και κατά συνέπεια η εμφάνιση ενός πόλου - τέτοια όρια δεν υπάρχουν στην περίπτωση αυτή.
8. Ξαναδιαβάστε τις παραπάνω ιδιότητες! (μπορείτε να σταματήσετε μόνον όταν τις κατανοήσετε) ☺

7.4 Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

Στην εισαγωγή περιγράψαμε το μετασχ. Laplace ως μια “επέκταση” του μετασχ. Fourier κατάλληλη για σήματα που ο τελευταίος είναι προβληματικός. Όταν θέτουμε $\sigma = 0$ - ή εναλλακτικά $s = j2\pi f$ - στο ολοκλήρωμα του μετασχ. Laplace, αυτό που κάνουμε “σιωπηλά” είναι ότι εκτιμούμε το μετασχ. Laplace σε συχνότητες που βρίσκονται πάνω στην κατακόρυφη ευθεία $\sigma = 0$ του μιγαδικού επιπέδου, που δεν είναι άλλη απ' τον άξονα των φανταστικών αριθμών $j2\pi f$! Για να μπορούμε όμως να το κάνουμε αυτό, είναι υποχρεωτικό ο άξονας αυτός να περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace! Αλλιώς δεν έχει κανένα νόημα ο υπολογισμός του $X(s)|_{\sigma=0}$! Γι' αυτό λοιπόν, όταν προσπαθούμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier μέσω του μετασχ. Laplace, πρέπει να προσέχουμε πρώτα αν ο φανταστικός άξονας περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace. Αν αυτό συμβαίνει, αντικαθιστούμε $s = j2\pi f$ στην αλγεβρική έκφραση του μετασχ. Laplace και έχουμε το μετασχ. Fourier. Αν όχι, τότε ο μετασχ. Fourier δεν μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχ. Laplace! Ας προβάλλουμε την παραπάνω συζήτηση σε ένα παράδειγμα.

Ο ορισμός του μετασχ. Laplace

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (7.69)$$

μπορεί να δώσει τον ορισμό του μετασχ. Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (7.70)$$

αν στη Σχέση (7.69) θέσουμε $s = j2\pi f$. Είναι εύλογο να περιμένει κανείς ότι ο μετασχ. Laplace $X(s)$ ενός σήματος $x(t)$ είναι ίδιος με τον μετασχ. Fourier $X(f)$ του ίδιου σήματος, με το $j2\pi f$ να έχει αντικατασταθεί από το s . Για παράδειγμα, μάθαμε πριν λίγο ότι

$$e^{-at}u(t), a > 0 \xleftrightarrow{L} \frac{1}{a+s}, \operatorname{Re}\{s\} > -a \quad (7.71)$$

Αντικαθιστώντας το s με το $j2\pi f$, έχουμε ότι

$$X(s) \Big|_{s=j2\pi f} = \frac{1}{a+j2\pi f} = X(f) \quad (7.72)$$

που είναι ο μετασχ. Fourier, όπως είδαμε σε προηγούμενο Κεφάλαιο. Δυστυχώς αυτή η διαδικασία δεν ισχύει για κάθε σήμα $x(t)$. Μπορούμε να την χρησιμοποιούμε μόνο όταν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace περιέχει το φανταστικό άξονα του μιγαδικού επιπέδου.

Ως αντιπαράδειγμα, ο μετασχ. Fourier της βηματικής συνάρτησης $x(t) = u(t)$ είναι ο

$$x(t) = u(t) \xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (7.73)$$

Ο αντίστοιχος μετασχ. Laplace είναι ο

$$x(t) = u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s}, \operatorname{Re}\{s\} > 0 \quad (7.74)$$

και όπως βλέπουμε από το πεδίο σύγκλισης, δεν περιλαμβάνεται ο φανταστικός άξονας $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma = 0$. Άρα ο μετασχ. Laplace **δεν** μπορεί να μας δώσει το μετασχ. Fourier, αλλά ούτε και το αντίστροφο! Σε αυτές τις περιπτώσεις, η σχέση μεταξύ των δυο μετασχηματισμών δεν είναι τόσο απλή. Ο λόγος για αυτήν την περιπλοκή σχετίζεται με τη σύγκλιση του ολοκληρώματος του μετασχ. Fourier: το ολοκλήρωμα Fourier για τη βηματική συνάρτηση δε συγκλίνει. Χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε μια γενικευμένη συνάρτηση, τη $\delta(f)$, για τη σύγκλιση.

Αντιθέτως, το ολοκλήρωμα Laplace για τη βηματική συνάρτηση συγκλίνει αλλά μόνο για $\operatorname{Re}\{s\} > 0$, μια περιοχή που είναι “απαγορευμένη” για το μετασχ. Fourier! ☹ Ένα ακόμα ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι παρ’ όλο που ο μετασχ. Laplace είναι μια γενίκευση του μετασχ. Fourier, υπάρχουν σήματα (π.χ. περιοδικά σήματα), για τα οποία ο μετασχ. Laplace **δεν** υπάρχει, ενώ ο μετασχ. Fourier **υπάρχει** (αλλά δεν προκύπτει από απλή σύγκλιση του ολοκληρώματος)!

Οπότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

Σχέση Μετασχηματισμού Laplace και Μετασχηματισμού Fourier

Ο μετασχ. Fourier $X(f)$ μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχ. Laplace $X(s)$ θέτοντας $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma = 0$, δηλ.

$$X(f) = X(s) \Big|_{s=j2\pi f}$$

μόνον αν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα $j2\pi f$.

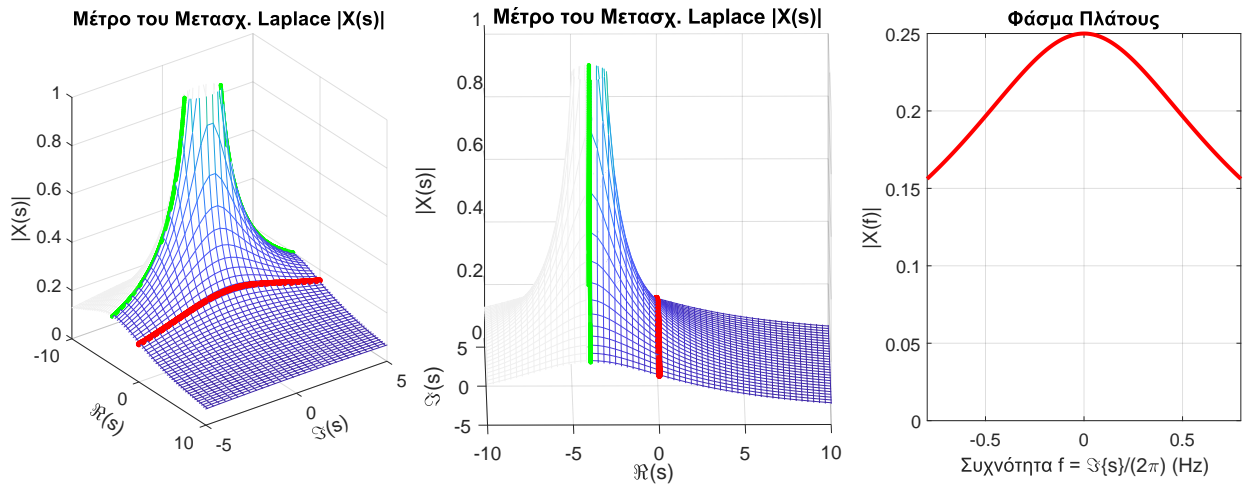
Ας δούμε μερικά παραδείγματα που θα επιβεβαιώσουν την παραπάνω συζήτηση.

Παράδειγμα 7.6:

Βρείτε το μετασχ. Laplace και το μετασχ. Fourier του σήματος

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad (7.75)$$

με $a = 4$ και $a = 2$. Τι παρατηρείτε;



Σχήμα 7.13: Παράδειγμα 7.6: Μέτρο μετασχηματισμού Laplace $|X(s)|$ και φανταστικός άξονας (σε δυο όψεις), και φάσμα πλάτους $|X(f)|$, για $a = 4$.

Λύση:

Είδαμε νωρίτερα ότι αυτό το σήμα έχει μετασχ. Laplace ως

$$X(s) = \frac{1}{s + a}, \text{Re}\{s\} > a \tag{7.76}$$

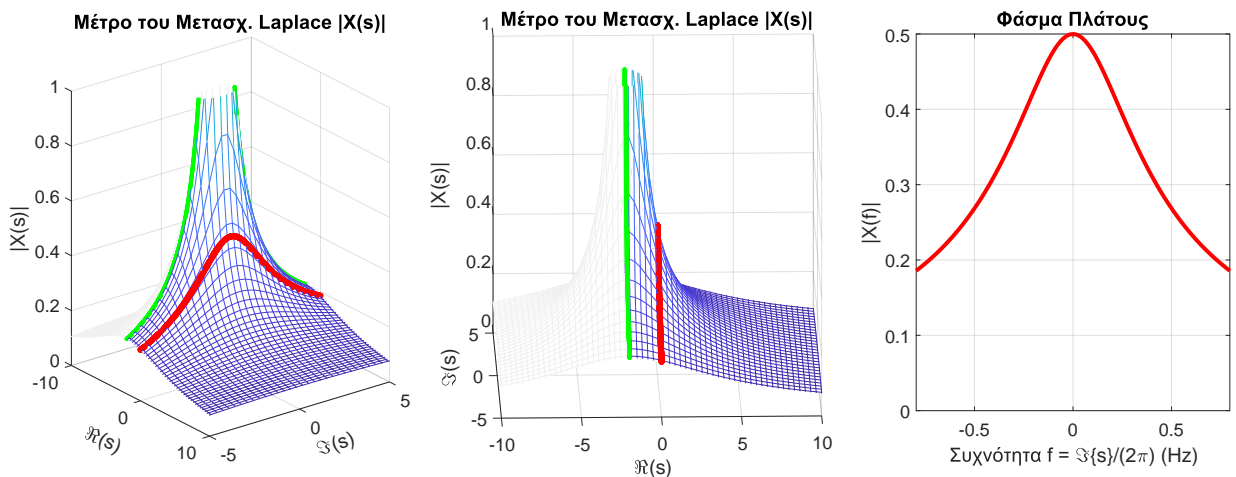
και γνωρίζουμε ότι έχει μετασχ. Fourier ως

$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f + a} \tag{7.77}$$

Στα Σχήματα 7.13, 7.14 βλέπετε το μέτρο του μετασχ. Laplace $|X(s)|$ για μερικές τιμές του s από δυο οπτικές γωνίες, και για $a = 4$ και $a = 2$ αντίστοιχα, καθώς και το μέτρο του Μετασχ. Fourier του ίδιου σήματος, το οποίο θυμίζεται ότι είναι

$$|X(f)| = \left| \frac{1}{j2\pi f + a} \right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}} \tag{7.78}$$

Παρατηρήστε στα τρισδιάστατα γραφήματα τις τιμές του μετασχηματισμού Laplace επάνω στο φανταστικό άξονα



Σχήμα 7.14: Παράδειγμα 7.6: Μέτρο μετασχηματισμού Laplace $|X(s)|$ και φανταστικός άξονας (σε δυο όψεις), και φάσμα πλάτους $|X(f)|$, για $a = 2$.

που έχουν σχεδιαστεί ως κόκκινη καμπύλη επάνω στο γράφημα του $|X(s)|$ - εκεί ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier, και ο άξονας αυτός έχει “απλωθεί” επάνω στο τρισδιάστατο γράφημα για να μας δώσει τις τιμές του φάσματος

πλάτους $|X(f)|$! Είναι σχεδόν οι ίδιες τιμές με το φάσμα $|X(f)|$ που είναι σχεδιασμένο ως δισδιάστατο σήμα και στα δύο Σχήματα: η μόνη διαφορά είναι ότι η κόκκινη καμπύλη επάνω στις τριδιάστατες επιφάνειες αποτελεί συνάρτηση της συχνότητας $\omega = 2\pi f$ αντί της f . Ακολουθήστε τις τιμές του φανταστικού άξονα από $-\infty$ ως $+\infty$ επάνω στο $|X(s)|$ και δείτε ότι ακολουθούν ακριβώς την ίδια μονοτονία με το φάσμα πλάτους $|X(f)|$, με τη μόνη διαφορά της συχνοτικής κλιμάκωσης κατά 2π . Το τελευταίο σημαίνει ότι η κόκκινη γραμμή επάνω στην επιφάνεια του $|X(s)|$ αποτελεί το φάσμα $|X(j2\pi f)|$ και όχι το φάσμα $|X(f)|$ - όμως εύκολα μπορεί κανείς να πάρει το ένα φάσμα, $|X(f)|$, από το άλλο, $|X(j2\pi f)|$, απλώς κάνοντας μια συχνοτική κλιμάκωση κατά $1/(2\pi)$. Επίσης, προσέξτε τους πόλους στις θέσεις $s = -4$ και $s = -2$, ο οποίος απειρίζεται το μέτρο του μετασχηματισμού Laplace, $|X(s)|$. Τέλος, το τελευταίο μηδενίζεται για $s \rightarrow \infty$, οπότε καταλαβαίνετε γιατί η γραφική παράσταση έχει αυτή τη μορφή όσο μεγαλώνουν οι συχνότητες κατά απόλυτη τιμή.

Συγκρίνετε το Σχήμα 7.13 με το Σχήμα 7.14. Καταλαβαίνετε γιατί άλλαξε το μέτρο του μετασχ. Fourier κατ' αυτόν τον τρόπο; Πώς επηρεάστηκε το μέτρο του φάσματος πλάτους όταν ο πόλος πλησίασε το φανταστικό άξονα; Μπορείτε να αντιληφθείτε τι θα συμβεί αν ο πόλος βρεθεί ακριβώς επάνω στο φανταστικό άξονα, δηλ. στη θέση $s = 0$;

Παράδειγμα 7.7:

Βρείτε το μετασχ. Laplace και Fourier της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t) = \delta(t) \quad (7.79)$$

Λύση:

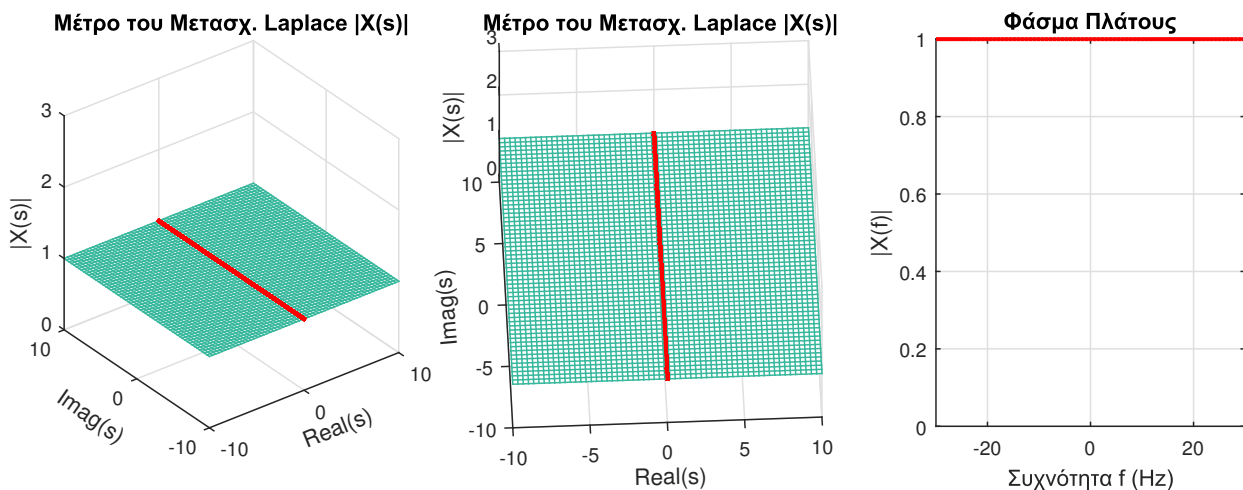
Νωρίτερα δείξαμε ότι

$$x(t) = \delta(t) \longleftrightarrow X(s) = 1, \quad \forall s \quad (7.80)$$

και γνωρίζουμε ότι

$$x(t) = \delta(t) \longleftrightarrow X(f) = 1 \quad (7.81)$$

Στο Σχήμα 7.15, βλέπουμε ακριβώς αυτό που περιμέναμε. Για κάθε τιμή του s , ο μετασχ. Laplace είναι σταθερός και ίσος με 1, το ίδιο και ο μετασχ. Fourier που ορίζεται επάνω στο φανταστικό άξονα.



Σχήμα 7.15: Παράδειγμα 7.7: Μέτρο μετασχηματισμού Laplace $|X(s)|$ και φανταστικός άξονας (σε δυο όψεις), και φάσμα πλάτους $|X(f)|$, της συνάρτησης $x(t) = \delta(t)$.

Μέχρι τώρα παρατηρούσαμε πόλους να κινούνται επάνω στον πραγματικό άξονα, για λόγους ευκολίας. Όμως τα περισσότερα πραγματικά συστήματα έχουν πόλους στο μιγαδικό επίπεδο, και μάλιστα συζυγείς. Ας δούμε ένα τέτοιο, πιο σύνθετο παράδειγμα.

Παράδειγμα 7.8:

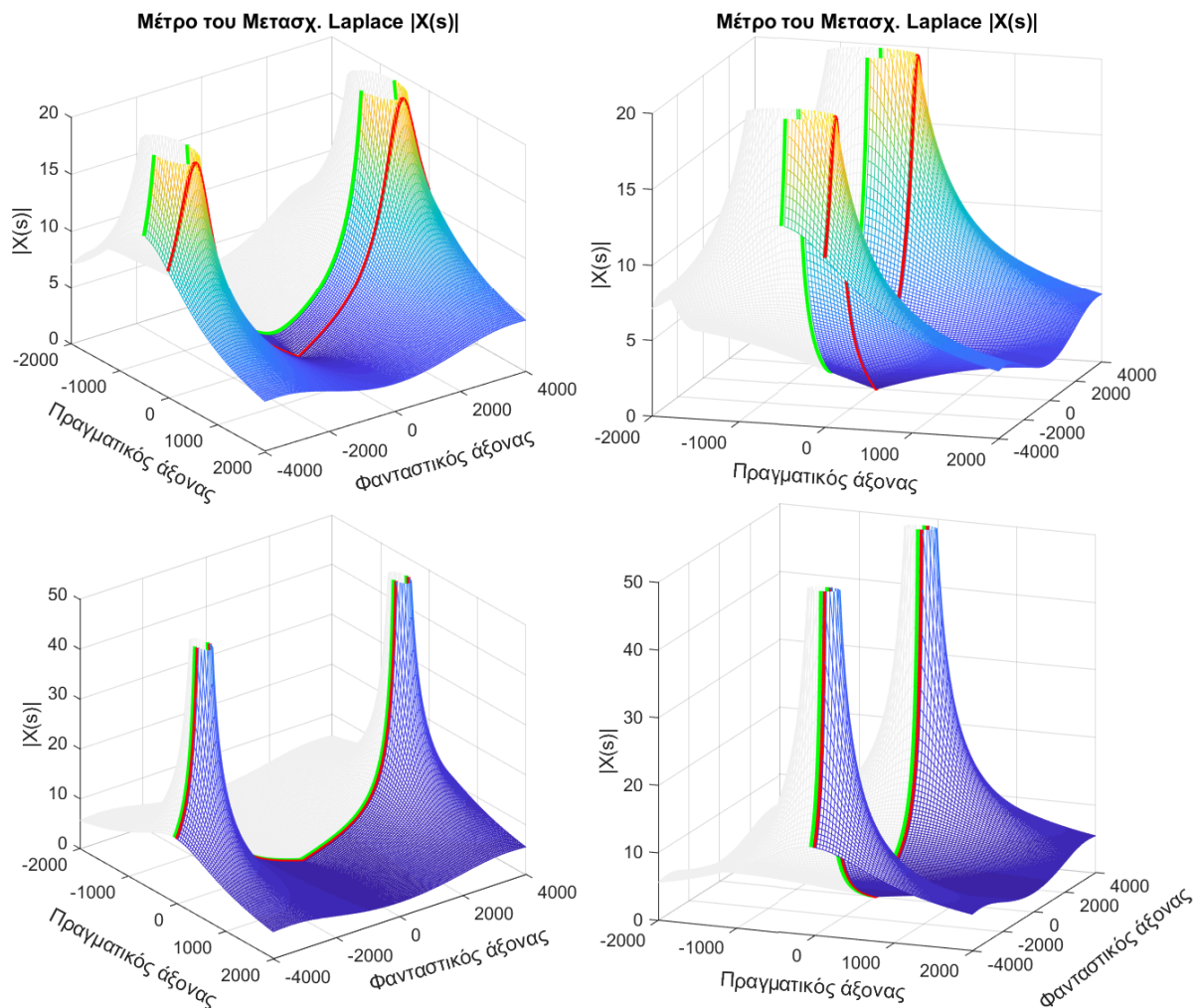
Απεικονίστε τους μετασχ. Laplace και Fourier του

$$X(s) = \frac{As}{(s - s_0)(s - s_0^*)} \quad (7.82)$$

για (α) $s_0 = -500 + j2\pi 500$ και (β) $s_0 = -50 + j2\pi 500$, με $A = 2 \cdot 10^5$.

Λύση:

Παρατηρούμε έχουμε έναν έτοιμο μετασχηματισμό και απλώς θέλουμε να δούμε πως αυτός μεταβάλλεται όταν κινούμε δυο μιγαδικούς πόλους, s_0, s_0^* προς το φανταστικό άξονα: όταν αρχικά οι πόλοι έχουν πραγματικό μέρος $\sigma = -500$ και στη συνέχεια μετατοπίζονται παράλληλα με τον άξονα των πραγματικών αριθμών, προς την ευθεία $\sigma = -50$, πλησιάζουν δηλ. περισσότερο το φανταστικό άξονα. Λόγω της θέσης των πόλων, αναμένουμε οι συχνότητες γύρω από τα ± 500 Hz (δηλ. οι περιοχές γύρω από τις συχνότητες $\pm 2\pi 500 \approx 3141.59$ rad/s στο φανταστικό άξονα) να έχουν σημαντική ενίσχυση, ενώ αναμένουμε και το πλήρη μηδενισμό του φάσματος πλάτους του σήματος στη συχνότητα $f = 0$, λόγω της παρουσίας του μηδενικού του μετασχηματισμού ακριβώς στη συμβολή των αξόνων. Το Σχήμα 7.16 δείχνει τα παραπάνω.



Σχήμα 7.16: Παράδειγμα 7.8: Μέτρο μετασχηματισμού Laplace $|X(s)|$ και φανταστικός άξονας (κόκκινη γραμμή), για δυο μιγαδικούς συζυγείς πόλους, s_0, s_0^* . Πρώτη γραμμή: συζυγείς πόλοι με $\text{Re}\{s_0\} = -500$. Δεύτερη γραμμή: συζυγείς πόλοι με $\text{Re}\{s_0\} = -50$.

7.5 Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace

Οι ιδιότητες του μετασχ. Laplace είναι εντυπωσιακά όμοιες με αυτές των σειρών και του μετασχ. Fourier - και δεν πρέπει αυτό να σας ξαφνιάζει ☺. Οι κυριότερες βρίσκονται στον Πίνακα 7.1, όπου ξεχωριστά εμφανίζονται μόνο οι ιδιότητες του μονόπλευρου μετασχ. Laplace που είναι διαφορετικές από αυτές του δίπλευρου - υπενθυμίζεται ότι ο μονόπλευρος μετασχ. Laplace θα μας απασχολήσει αργότερα στη μελέτη των συστημάτων.

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace			
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$x(t)$ $y(t)$	$X(s)$ $Y(s)$	R_x R_y
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(s) + BY(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(s)e^{-st_0}$	R_x
Μετατόπιση στο χώρο του s	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	Μετατόπιση του R_x
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-s)$	$-R_x$
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at), a \in \mathbb{R} - \{0\}$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$R \supseteq R_x$
n -οστή παραγωγή στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	$R \supseteq R_x$
Παραγωγή στη συχνότητα	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	R_x
n -οστη παραγωγή στη συχνότητα	$(-1)^n t^n x(t)$	$\frac{d^n X(s)}{ds^n}$	R_x
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$	$R \supseteq (R_x \cap \{\text{Re}\{s\} > 0\})$

Πίνακας Ιδιοτήτων Μονόπλευρου Μετασχηματισμού Laplace			
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at), a > 0$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$	$R \supseteq R_x$
n -οστή παραγωγή στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(t) \Big _{t=0}$	R_x
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau$	$R \supseteq (R_x \cap \{\text{Re}\{s\} > 0\})$

Πίνακας 7.1: Πίνακας ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace.

7.5.1 Αποδείξεις και Παραδείγματα

Παρακάτω ακολουθούν αποδείξεις των ιδιοτήτων του Πίνακα 7.1, μαζί με παραδείγματα εφαρμογής τους. Σε όλες τις ιδιότητες, θεωρούμε ότι ένα σήμα $x(t)$ έχει μετασχ. Laplace $X(s)$ με πεδίο σύγκλισης R_x , και - όπου χρειάζεται - ένα σήμα $y(t)$ έχει μετασχ. Laplace $Y(s)$ με πεδίο σύγκλισης R_y , ενώ θα χρησιμοποιήσουμε τη μεταβλητή σ αντί της $\text{Re}\{s\}$ για λόγους συντομίας.

7.5.1.1 Γραμμικότητα

Για ένα σήμα $z(t) = Ax(t) + By(t)$, με A, B σταθερές, ο μετασχ. Laplace του δίνεται ως

$$Z(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (Ax(t) + By(t))e^{-st} dt \quad (7.83)$$

$$= A \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt + B \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st} dt \quad (7.84)$$

$$= AX(s) + BY(s) \quad (7.85)$$

με $R_z \supseteq R_x \cap R_y \neq \emptyset$.
Άρα

$$\boxed{Ax(t) + By(t) \longleftrightarrow AX(s) + BY(s), \quad R \supseteq R_x \cap R_y} \quad (7.86)$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις, η εφαρμογή της γραμμικότητας είναι εύκολη και το πεδίο σύγκλισης αποτελείται από την τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης. Θα ήταν πιο ενδιαφέρον να δούμε ένα παράδειγμα όπου το πεδίο σύγκλισης του αθροίσματος είναι υπερσύνολο της τομής των επιμέρους πεδίων.

Παράδειγμα 7.9:

Έστω οι μετασχ. Laplace

$$X(s) = \frac{1}{s-2} \quad (7.87)$$

και

$$Y(s) = -\frac{1}{(s-1)(s-2)} \quad (7.88)$$

των οποίων τα επιμέρους πεδία σύγκλισης είναι $R_x = \{\sigma > 2\}$ και $R_y = \{\sigma > 2\}$. Ζητείται ο μετασχ. Laplace του αθροίσματος των δυο μετασχηματισμών.

Λύση:

Η τομή των δυο πεδίων είναι $R = \{\sigma > 2\}$. Όμως ο μετασχ. Laplace του αθροίσματος $x(t) + y(t)$ είναι

$$X(s) + Y(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)(s-1)} \quad (7.89)$$

$$= \frac{s-1}{(s-1)(s-2)} - \frac{1}{(s-1)(s-2)} \quad (7.90)$$

$$= \frac{s-2}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-1} \quad (7.91)$$

το οποίο έχει πεδίο σύγκλισης το $R_{x+y} = \{\sigma > 1\}$, που είναι υπερσύνολο του $\{\sigma > 2\}$. ■

Με το παράδειγμα αυτό βλέπουμε ότι σε ρητούς μετασχηματισμούς Laplace που προέρχονται από αθροίσματα επιμέρους μετασχηματισμών, το πεδίο σύγκλισης μπορεί να είναι υπερσύνολο της τομής των επιμέρους πεδίων μόνο αν υπάρχει αλληλοεξουδετέρωση πόλων με μηδενικά!

7.5.1.2 Χρονική Μετατόπιση

Για το σήμα $y(t) = x(t - t_0)$, με $t_0 \in \mathbb{R}$, ο μετασχ. Laplace δίνεται ως

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-s(u+t_0)} du = e^{-st_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-su} du \\ &= e^{-st_0} X(s) \end{aligned}$$

με το πεδίο σύγκλισης να παραμένει το $R_y = R_x$.

$$\boxed{x(t - t_0) \longleftrightarrow X(s)e^{-st_0}, \quad R = R_x} \quad (7.92)$$

Παράδειγμα 7.10:

Έστω το σήμα

$$y(t) = 3e^{-3t+6}u(t-2) \quad (7.93)$$

Ας βρούμε το μετασχ. Laplace του.

Λύση:

Παρατηρήστε ότι μπορούμε να γράψουμε το σήμα ως

$$y(t) = 3e^{-3t+6}u(t-2) = 3e^{-3(t-2)}u(t-2) = x(t-2) \quad (7.94)$$

με

$$x(t) = 3e^{-3t}u(t) \quad (7.95)$$

του οποίου ο μετασχ. Laplace είναι γνωστός ως

$$X(s) = 3\frac{1}{s+3}, \quad R_x = \{\sigma > -3\} \quad (7.96)$$

Άρα για το $y(t) = x(t-2)$ θα έχουμε

$$Y(s) = 3e^{-2s}\frac{1}{s+3}, \quad R_y = \{\sigma > -3\} \quad (7.97)$$

7.5.1.3 Μετατόπιση στο χώρο του s

Για το σήμα $Y(s) = X(s-s_0)$, με $s_0 \in \mathbb{C}$, ο αντίστροφος μετασχ. Laplace δίνεται ως

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s-s_0)e^{st} ds \quad (7.98)$$

Θέτοντας $u = s - s_0 \implies du = ds$, έχουμε

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-\text{Re}\{s_0\}-j\infty}^{\sigma-\text{Re}\{s_0\}+j\infty} X(u)e^{(u+s_0)t} du = e^{s_0 t} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-\text{Re}\{s_0\}-j\infty}^{\sigma-\text{Re}\{s_0\}+j\infty} X(u)e^{ut} du = e^{s_0 t} x(t) \quad (7.99)$$

με το πεδίο σύγκλισης να είναι το πεδίο R_x μετατοπισμένο κατά $\text{Re}\{s_0\} = \sigma_0$ στο μιγαδικό επίπεδο.

Άρα

$$e^{s_0 t} x(t) \longleftrightarrow X(s-s_0), \quad R = \text{μετατοπισμένο κατά } \sigma_0 \text{ } R_x \quad (7.100)$$

Παράδειγμα 7.11:

Για το αιτιατό σήμα με μετασχ. Laplace

$$X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad R_x = \{\sigma > -2\} \quad (7.101)$$

μπορούμε να ορίσουμε το ακόλουθο μετατοπισμένο σήμα στο χώρο του s

$$Y(s) = X(s-2) = \frac{1}{(s-2)+2} = \frac{1}{s} \quad (7.102)$$

Αναζητούμε το πεδίο σύγκλισης του τελευταίου και το σήμα στο χρόνο.

Λύση:

Το πεδίο σύγκλισης $R_x = \{\sigma > -2\}$ γίνεται $R_y = \{(\sigma-2) > -2\} = \{\sigma > 0\}$, που συμφωνεί με το αναμενόμενο πεδίο σύγκλισης του $Y(s)$, ενώ σύμφωνα με την ιδιότητα το σήμα στο χρόνο είναι

$$y(t) = e^{2t} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} = e^{2t} e^{-2t} u(t) = u(t) \quad (7.103)$$

με $R_y = \{\sigma > 0\}$.

7.5.1.4 Συζυγές σήμα στο χρόνο

Για το σήμα $y(t) = x^*(t)$, ο μετασχ. Laplace δίνεται ως

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-st} dt = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-s^*t} dt \right)^* = X^*(s^*) \quad (7.104)$$

με το πεδίο σύγκλισης να παραμένει ίδιο, $R_y = R_x$.

Άρα

$$\boxed{x^*(t) \longleftrightarrow X^*(s^*), R = R_x} \quad (7.105)$$

Παράδειγμα 7.12:

Έστω ένα πραγματικό σήμα $x(t)$ με μετασχ. Laplace $X(s)$. Σας δίνεται ότι το σήμα αυτό έχει έναν πόλο στη θέση $s = \frac{1}{2}e^{j\pi/3}$ και ένα μηδενικό στη θέση $s = -1$. Ο μετασχηματισμός δεν έχει άλλους πόλους ή μηδενικά στο s -επίπεδο. Επίσης σας δίνεται ότι $X(0) = 2$. Βρείτε όσα περισσότερα μπορείτε στοιχεία μπορείτε για το μετασχ. Laplace $X(s)$.

Λύση:

Αφού το σήμα είναι πραγματικό στο πεδίο του χρόνου, θα ισχύει $x(t) = x^*(t)$, και από την ιδιότητα της συζυγίας θα ισχύει

$$X(s) = X^*(s^*) \quad (7.106)$$

Αυτό σημαίνει ότι αν το $X(s)$ έχει πόλο στο $s = s_0$, υποχρεωτικά θα έχει πόλο και στο $s = s_0^*$! Άρα μια έκφραση για το μετασχηματισμό θα είναι

$$X(s) = \frac{A(s - s_1)}{(s - s_0)(s - s_0^*)} = \frac{A(s + 1)}{(s - \frac{1}{2}e^{j\pi/3})(s - \frac{1}{2}e^{-j\pi/3})} = \frac{A(s + 1)}{s^2 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}} \quad (7.107)$$

Η τιμή της σταθεράς A μπορεί να βρεθεί από τη σχέση $X(0) = 2$, αφού

$$X(0) = \left. \frac{A(s + 1)}{s^2 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{4}} \right|_{s=0} = \frac{A}{\frac{1}{4}} = 2 \iff A = \frac{1}{2} \quad (7.108)$$

Για το πεδίο σύγκλισης, δεδομένου ότι ορίζεται η τιμή $X(0)$, το $s = 0$ πρέπει να περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης, άρα αφού γνωρίζουμε τους πόλους, τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι τα $\sigma > 1/4$ και $\sigma < 1/4$, με το κατάλληλο πεδίο να είναι το δεύτερο

$$\sigma < \frac{1}{4} \quad (7.109)$$

καθώς είναι το μόνο που περιλαμβάνει το $s = 0$. ■

Η παραπάνω ιδιότητα μας αποκαλύπτει κάτι πολύ σημαντικό: **ότι ένα πραγματικό σήμα $x(t)$ στο πεδίο του χρόνου θα έχει:**

- πραγματικούς πόλους και μηδενικά ή/και
- συζυγείς μιγαδικούς πόλους και μηδενικά

7.5.1.5 Αντιστροφή στο χρόνο

Για το σήμα $y(t) = x(-t)$, ο μετασχ. Laplace δίνεται ως

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)e^{-st} dt \quad (7.110)$$

$$= - \int_{+\infty}^{-\infty} x(u)e^{su} du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-(-s)u} du \quad (7.111)$$

$$= X(-s) \quad (7.112)$$

με το πεδίο σύγκλισης να αντιστρέφεται, δηλ. $R_y = -R_x$ (δηλ. όλοι οι μιγαδικοί s που δεν ανήκουν στο R_x).

Άρα

$$\boxed{x(-t) \longleftrightarrow X(-s), R = -R_x} \quad (7.113)$$

Παράδειγμα 7.13:

Για το σήμα $x(t) = e^{at}u(t)$, ο μετασχ. Laplace είναι

$$X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad R_x = \{\sigma > a\} \quad (7.114)$$

Βρείτε το μετασχ. Laplace του σήματος $x(-t)$.

Λύση:

Σύμφωνα με την ιδιότητα, για το σήμα $y(t) = x(-t) = e^{-at}u(-t)$, ο μετασχ. Laplace είναι

$$Y(s) = \frac{1}{-s-a} = -\frac{1}{s+a}, \quad R_y = \{\sigma < -a\} \quad (7.115)$$

αποτέλεσμα που συμφωνεί με το Παράδειγμα 7.2 που είδαμε νωρίτερα.

7.5.1.6 Στάθμιση στο χρόνο

Για το σήμα $y(t) = x(at)$ με $a > 0$, ο μετασχ. Laplace δίνεται ως

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-st} dt \quad (7.116)$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-s\frac{u}{a}} du = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-\frac{s}{a}u} du \quad (7.117)$$

$$= \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad (7.118)$$

ενώ για $a < 0$, ο μετασχ. Laplace δίνεται ως

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-st} dt \quad (7.119)$$

$$= \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} x(u)e^{-s\frac{u}{a}} du = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)e^{-\frac{s}{a}u} du \quad (7.120)$$

$$= -\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad (7.121)$$

Άρα σε κάθε περίπτωση,

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad R = aR_x \quad (7.122)$$

Παράδειγμα 7.14:

Αν το σήμα $x(t) = e^{at}u(t)$ έχει μετασχ. Laplace

$$X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad R_x = \{\sigma > a\} \quad (7.123)$$

τότε βρείτε το μετασχ. Laplace του σήματος $y(t) = e^{2at}u(2t)$.

Λύση:

Το σήμα $y(t) = e^{2at}u(2t)$ θα έχει μετασχ. Laplace

$$Y(s) = \frac{1}{2} X\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{s}{2}-a} = \frac{1}{s-2a}, \quad R_y = \{\sigma > 2a\} \quad (7.124)$$

Ο αναγνώστης καλείται να το επιβεβαιώσει αναλυτικά (χρησιμοποιώντας τον ορισμό - είναι πολύ εύκολο!).

7.5.1.7 Συνέλιξη στο χρόνο

Για τα σήματα $x(t), y(t)$, που το καθένα έχει πεδίο σύγκλισης R_x, R_y αντίστοιχα, το σήμα $z(t) = x(t) * y(t)$ έχει μετασχ. Laplace ως

$$Z(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) * y(t))e^{-st} dt \quad (7.125)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)e^{-st} dt \right) d\tau \quad (7.126)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) (e^{-s\tau}Y(s)) d\tau = Y(s) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-s\tau} d\tau \quad (7.127)$$

$$= Y(s)X(s) \quad (7.128)$$

με πεδίο σύγκλισης $R_z \supseteq R_x \cap R_y$.

Άρα

$$x(t) * y(t) \longleftrightarrow X(s)Y(s), \quad R \supseteq R_x \cap R_y \quad (7.129)$$

Παράδειγμα 7.15:

Ας θεωρήσουμε δυο αιτιατά σήματα

$$x(t) = e^{at}u(t) \quad (7.130)$$

$$y(t) = e^{2at}u(t) \quad (7.131)$$

με $a > 0$. Βρείτε το μετασχ. Laplace της συνέλιξής τους.

Λύση:

Η συνέλιξή τους μας δίνει (δείξτε το!)

$$x(t) * y(t) = \frac{1}{a}(e^{2at} - e^{at})u(t) \quad (7.132)$$

Οι μετασχ. Laplace των δυο σημάτων είναι

$$X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad R_x = \{\sigma > a\} \quad (7.133)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s-2a}, \quad R_y = \{\sigma > 2a\} \quad (7.134)$$

Το γινόμενο $X(s)Y(s)$ δίνει

$$X(s)Y(s) = \frac{1}{(s-a)(s-2a)}, \quad R = R_x \cap R_y = \{\sigma > 2a\} \quad (7.135)$$

και μπορούμε, αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα, να βρούμε το αποτέλεσμα της συνέλιξης στο χώρο του Laplace ως

$$x(t) * y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-a)(s-2a)} \right\}, \quad R = \{\sigma > 2a\} \quad (7.136)$$

$$= L^{-1} \left\{ \frac{A}{(s-a)} + \frac{B}{(s-2a)} \right\}, \quad R = \{\sigma > 2a\} \quad (7.137)$$

με

$$A = \frac{1}{(s-a)(s-2a)}(s-a) \Big|_{s=a} = -\frac{1}{a} \quad (7.138)$$

$$B = \frac{1}{(s-a)(s-2a)}(s-2a) \Big|_{s=2a} = \frac{1}{a} \quad (7.139)$$

οπότε

$$x(t) * y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{A}{(s-a)} + \frac{B}{(s-2a)} \right\}, \quad R = \{\sigma > 2a\} \quad (7.140)$$

$$= L^{-1} \left\{ -\frac{1/a}{(s-a)} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{1/a}{(s-2a)} \right\}, \quad R = \{\sigma > 2a\} \cap \{\sigma > a\} \quad (7.141)$$

$$= -\frac{1}{a}e^{at}u(t) + \frac{1}{a}e^{2at}u(t) \quad (7.142)$$

$$= \frac{1}{a}(e^{2at} - e^{at})u(t) \quad (7.143)$$

που είναι και το ίδιο αποτέλεσμα που καταλήγουμε στο πεδίο του χρόνου.

7.5.1.8 Παραγωγή στο χρόνο

Για το σήμα $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, ο μετασχ. Laplace έχει ως

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}x(t)e^{-st}dt \quad (7.144)$$

$$= x(t)e^{-st} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{d}{dt}e^{-st}dt \quad (7.145)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)e^{-st} - \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)e^{-st} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-s)e^{-st}dt \quad (7.146)$$

$$= 0 - 0 + s \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt \quad (7.147)$$

$$= sX(s) \quad (7.148)$$

με πεδίο σύγκλισης το $R_y \supseteq R_x$, διότι ο όρος s πιθανόν να απαλείφει κάποιον πόλο (προφανώς στο $s = 0$) στον παρονομαστή του $X(s)$, με αποτέλεσμα το πεδίο σύγκλισης που θα προκύψει να είναι υπερσύνολο του αρχικού.

Άρα

$$\boxed{\frac{d}{dt}x(t) \longleftrightarrow sX(s), \quad R \supseteq R_x} \quad (7.149)$$

Παράδειγμα 7.16:

Η παράγωγος του σήματος $x(t) = e^{4at}u(t)$ είναι

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) = u(t) \frac{d}{dt}e^{4at} + e^{4at} \frac{d}{dt}u(t) = 4ae^{4at}u(t) + e^{4at}\delta(t) = 4ae^{4at}u(t) + \delta(t) \quad (7.150)$$

Βρείτε το μετασχ. Laplace του σήματος $y(t)$.

Λύση:

Ο μετασχ. Laplace του σήματος $y(t)$ είναι

$$Y(s) = L \left\{ \frac{d}{dt}x(t) \right\} = L \{ 4ae^{4at}u(t) + \delta(t) \} = 4a \frac{1}{s-4a} + 1, \quad R_y = \{\sigma > 4a\} \quad (7.151)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της παραγωγής στο χρόνο, έχουμε

$$Y(s) = sX(s) = s \frac{1}{s-4a} = \frac{s-4a+4a}{s-4a} = 4a \frac{1}{s-4a} + 1, \quad R_y = \{\sigma > 4a\} \quad (7.152)$$

που επιβεβαιώνει το προηγούμενο αποτέλεσμα.

7.5.1.9 n -οστή παραγώγιση στο χρόνο

Επαναλαμβάνοντας n φορές τη διαδικασία της Παραγράφου 7.5.1.8, έχουμε ότι

$$y(t) = \frac{d^n}{dt^n} x(t) \longleftrightarrow s^n X(s), \quad R_y \supset R_x \quad (7.153)$$

με το πεδίο σύγκλισης να δηλώνει ότι ο όρος s^n μπορεί να απαλείφει κάποιον/ους πόλο/ους (προφανώς στη θέση $s = 0$) στον παρονομαστή του μετασχ. $X(s)$, με αποτέλεσμα το πεδίο σύγκλισης που θα προκύψει να είναι υπερσύνολο του αρχικού.

Άρα

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n} x(t) \longleftrightarrow s^n X(s), \quad R \supseteq R_x} \quad (7.154)$$

Παράδειγμα 7.17:

Ας δούμε εδώ ένα παράδειγμα όπου το πεδίο σύγκλισης της παραγώγου είναι υπερσύνολο του πεδίου σύγκλισης του σήματος. Έστω το αιτιατό σήμα

$$x(t) = \left(-\frac{5}{36} + \frac{1}{6}t + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{9}e^{-3t} \right) u(t) \quad (7.155)$$

το οποίο έχει μετασχ. Laplace

$$X(s) = -\frac{5}{36} \frac{1}{s} + \frac{1}{6} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{s+2} - \frac{1}{9} \frac{1}{s+3} \quad (7.156)$$

$$= \frac{1}{s^2(s+2)(s+3)}, \quad R_x = \{\sigma > 0\} \quad (7.157)$$

Βρείτε το μετασχ. Laplace της δεύτερης παραγώγου του σήματος $x(t)$.

Λύση:

Η δεύτερη παράγωγος του σήματος $x(t)$ είναι (δείξτε το αναλυτικά)

$$y(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) = e^{-2t} u(t) - e^{-3t} u(t) \quad (7.158)$$

και ο μετασχ. Laplace της είναι

$$Y(s) = L \left\{ \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right\} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}, \quad R_y = \{\sigma > -2\} \quad (7.159)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της n -οστής παραγώγισης στο χρόνο καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα, και έχουμε

$$Y(s) = s^2 X(s) = s^2 \frac{1}{s^2(s+2)(s+3)} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}, \quad R_y = \{\sigma > -2\} \quad (7.160)$$

Παρατηρήστε ότι το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace της δευτέρας παραγώγου του σήματος είναι υπερσύνολο του πεδίου σύγκλισης του μετασχ. Laplace του σήματος.

7.5.1.10 Παραγώγιση στη συχνότητα

Αν παραγωγίσουμε τον ορισμό του μετασχ. Laplace, έχουμε

$$\frac{d}{ds} X(s) = \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{d}{ds} e^{-st} dt \quad (7.161)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) (-t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-tx(t)) e^{-st} dt \quad (7.162)$$

$$= L\{-tx(t)\} \quad (7.163)$$

Άρα η ιδιότητα της παραγωγίσης στη συχνότητα είναι η ακόλουθη

$$-tx(t) \longleftrightarrow \frac{d}{ds}X(s) \quad (7.164)$$

με το πεδίο σύγκλισης να παραμένει R_x .

Άρα

$$-tx(t) \longleftrightarrow \frac{d}{ds}X(s), \quad R = R_x \quad (7.165)$$

Παράδειγμα 7.18:

Ας υπολογίσουμε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = tu(t) \quad (7.166)$$

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι

$$e^{at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s-a}, \quad \sigma > a \quad (7.167)$$

και για $a = 0$ έχουμε

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}, \quad \sigma > 0 \quad (7.168)$$

Με την ιδιότητα της παραγωγίσης στη συχνότητα, θα έχουμε

$$x(t) = tu(t) \longleftrightarrow X(s) = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}, \quad R_x = \{\sigma > 0\} \quad (7.169)$$

7.5.1.11 n -οστή παραγωγή στη συχνότητα

Επαναλαμβάνοντας n φορές τη διαδικασία της Παραγράφου 7.5.1.10, έχουμε ότι

$$(-1)^n t^n x(t) \longleftrightarrow \frac{d^n}{ds^n} X(s) \quad (7.170)$$

με πεδίο σύγκλισης το R_x .

Άρα

$$(-1)^n t^n x(t) \longleftrightarrow \frac{d^n}{ds^n} X(s), \quad R = R_x \quad (7.171)$$

Παράδειγμα 7.19:

Ας υπολογίσουμε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = t^4 u(t) \quad (7.172)$$

Λύση:

Γνωρίζουμε από το προηγούμενο παράδειγμα ότι

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}, \quad \sigma > 0 \quad (7.173)$$

Με την ιδιότητα της n -οστής παραγωγίσης στη συχνότητα, θα έχουμε

$$x(t) = t^4 u(t) \longleftrightarrow X(s) = (-1)^4 \frac{d^4}{ds^4} \frac{1}{s} = \frac{24}{s^5}, \quad R_x = \{\sigma > 0\} \quad (7.174)$$

Σχεφτείτε πόσο κόπο θα χρειαζόταν να υπολογίσετε αυτό το μετασχηματισμό με χρήση του ορισμού!!

7.5.1.12 Ολοκλήρωση στο χρόνο

Για το σήμα $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$, το οποίο γράφεται ως

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)u(t-\tau)d\tau = x(t) * u(t) \quad (7.175)$$

θα έχουμε τον ακόλουθο μετασχ. Laplace

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) * u(t))e^{-st}dt \quad (7.176)$$

$$= X(s)U(s) = \frac{X(s)}{s} \quad (7.177)$$

λόγω της ιδιότητας της συνέλιξης στο χρόνο, η οποία και ορίζει το πεδίο σύγκλισης ως $R_y \supseteq \{R_x \cap \{\sigma > 0\}\}$.

Άρα

$$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{X(s)}{s}, \quad R \supseteq \{R_x \cap \{\sigma > 0\}\} \quad (7.178)$$

Παράδειγμα 7.20:

Ας βρούμε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = \int_{-\infty}^t e^{\tau} \sin(\tau)u(-\tau)d\tau \quad (7.179)$$

Λύση:
Το σήμα

$$y(t) = e^t \sin(t)u(-t) \quad (7.180)$$

έχει μετασχ. Laplace

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^0 e^t \sin(t)e^{-st}dt \quad (7.181)$$

$$= \int_{-\infty}^0 \sin(t)e^{(1-s)t}dt = \frac{e^{(1-s)t}}{(1-s)^2 + 1} ((1-s)\sin(t) - \cos(t)) \Big|_{-\infty}^0 \quad (7.182)$$

$$= -\frac{1}{(1-s)^2 + 1} \quad (7.183)$$

με $R_y = \{\sigma < 1\}$, ώστε τα όρια στο $-\infty$ στο ολοκλήρωμα να τείνουν στο μηδέν. Άρα ο μετασχ. Laplace του $x(t)$ θα είναι

$$X(s) = -\frac{1}{s((1-s)^2 + 1)} \quad (7.184)$$

με το πεδίο σύγκλισης να είναι

$$R_x = \{\sigma > 0\} \cap \{\sigma < 1\} = \{0 < \sigma < 1\} \quad (7.185)$$

Οι αποδείξεις των τεσσάρων ιδιοτήτων του μονόπλευρου μετασχ. Laplace που διαφέρουν από αυτές του δίπλευρου αφήνονται για εξάσκηση στον αναγνώστη (Άσκηση 7.54).

7.6 Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace

Ο Πίνακας 7.2 παραθέτει μερικά γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών που μπορείτε να χρησιμοποιείτε χωρίς απόδειξη.

Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace		
Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
$\delta(t)$	1	Όλο το s -επίπεδο
$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}	Όλο το s -επίπεδο
$\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{s^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{A}{s} \left(e^{s\frac{T}{2}} - e^{-s\frac{T}{2}} \right)$	Όλο το s -επίπεδο
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$-tu(-t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 - s^2}$	$a > \text{Re}\{s\} > -a$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}\{s\} < -a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\text{Re}\{s\} < -a$
$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(s+a)^2 + (2\pi f_0)^2}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$t \cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s^2 - (2\pi f_0)^2}{(s^2 + (2\pi f_0)^2)^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$t \sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2s2\pi f_0}{(s^2 + (2\pi f_0)^2)^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$

Πίνακας 7.2: Πίνακας ζευγών μετασχηματισμού Laplace.

7.7 Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Ο μετασχ. Laplace διαφέρει ελάχιστα στον τρόπο υπολογισμού του σε σχέση με το μετασχ. Fourier - είναι παρόμοια ολοκληρώματα και ως εκ τούτου χρησιμοποιούνται παρόμοιες τεχνικές για την εύρεση των μετασχηματισμών. Αντίθετα, ο αντίστροφος μετασχ. Laplace, ο οποίος υπενθυμίζεται ότι ορίζεται ως

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (7.186)$$

είναι λίγο περισσότερο περίπλοκος σε σχέση με τον αντίστροφο μετασχ. Fourier. Ο λόγος αυτής της διαφοράς βρίσκεται στο γεγονός ότι ο μετασχ. Laplace ορίζεται σε ένα τμήμα (ημιεπίπεδο ή λωρίδα) του μιγαδικού επιπέδου. Η αντιστροφή του μετασχηματισμού συνίσταται στην ολοκλήρωση πάνω στις ευθείες του μιγαδικού επιπέδου όπου ορίζεται ο μετασχ. Laplace. Παρατηρήστε το ολοκλήρωμα της Σχέσης (7.186): η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος της γραμμής $\text{Re}\{s\} = \sigma$ στο μιγαδικό επίπεδο. Η ολοκλήρωση στο μιγαδικό επίπεδο είναι εκτός των σκοπών αυτού του βιβλίου - για το θέμα αυτό μπορείτε να συμβουλευτείτε τα σχετικά εξαιρετικά συγγράμματα, είτε αμιγώς μαθηματικά είτε προσανατολισμένα σε επιστήμες μηχανικού: [88], [89], [90], [91], [92], [93]. Αντίθετα, για τις

ανάγκες μας θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του Πίνακα 7.1, τα ζεύγη του Πίνακα 7.2, και τη γνωστή μέθοδο του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα εύρεσης του αντίστροφου μετασχ. Laplace.

Παράδειγμα 7.21:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{s+7}{s^2-3s-10} \quad (7.187)$$

με $\sigma < -2$.

Λύση:

Μπορούμε να αναπτύξουμε το $X(s)$ σε μερικά κλάσματα ως

$$X(s) = \frac{s+7}{s^2-3s-10} = \frac{s+7}{(s+2)(s-5)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-5} \quad (7.188)$$

με

$$A = X(s)(s+2) \Big|_{s=-2} = \frac{s+7}{s-5} \Big|_{s=-2} = -\frac{5}{7} \quad (7.189)$$

$$B = X(s)(s-5) \Big|_{s=5} = \frac{s+7}{s+2} \Big|_{s=5} = \frac{12}{7} \quad (7.190)$$

και άρα

$$X(s) = \frac{s+7}{(s+2)(s-5)} = -\frac{5}{7} \frac{1}{s+2} + \frac{12}{7} \frac{1}{s-5} \quad (7.191)$$

Από τα δεδομένα μας, το πεδίο σύγκλισης είναι το $\sigma < -2$, που αντιστοιχεί σε αριστερόπλευρο σήμα στο χρόνο. Δεδομένου ότι οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις $s = -2$, $s = 5$, το πεδίο σύγκλισης μπορεί να γραφεί ως

$$\{\sigma < -2\} = \{\sigma < 5\} \cap \{\sigma < -2\} \quad (7.192)$$

Τα σύνολα της παραπάνω τομής αποτελούν τα πεδία σύγκλισης των όρων του αθροίσματος της Σχέσης (7.191). Οπότε από τον Πίνακα 7.2

$$x(t) = \frac{5}{7} e^{-2t} u(-t) - \frac{12}{7} e^{5t} u(-t) \quad (7.193)$$

Παράδειγμα 7.22:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{3s}{(s^2+1)^2} \quad (7.194)$$

με $\sigma > 0$.

Λύση:

Μπορούμε κι εδώ να αναπτύξουμε σε μερικά κλάσματα αλλά υπάρχει και διαφορετικός τρόπος. Προσέξτε ότι

$$\frac{3s}{(s^2+1)^2} = -\frac{3}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{s^2+1} \quad (7.195)$$

Από τους Πίνακες 7.1, 7.2, και από το γεγονός ότι το σήμα στο χρόνο θα είναι δεξιόπλευρο – εφ' όσον το πεδίο σύγκλισης είναι δεξιόπλευρο – βρίσκουμε ότι

$$x(t) = \frac{3}{2} t \sin(t) u(t) \quad (7.196)$$

Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει την παραπάνω λύση με χρήση αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα (Άσκηση 7.42).

Παράδειγμα 7.23:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4)} \quad (7.197)$$

με $\sigma > 0$.

Λύση:

Ο αναγνώστης μπορεί να εφαρμόσει ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα για να επιβεβαιώσει την παρακάτω λύση (Άσκηση 7.43). Από την ιδιότητα της ολοκλήρωσης στο χρόνο έχουμε

$$X(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{s^2 + 4} = \frac{X_1(s)}{s} \longleftrightarrow x(t) = \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau \quad (7.198)$$

με

$$x_1(t) = L^{-1}\{X_1(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4}\right\} \quad (7.199)$$

Από τον Πίνακα 7.2 έχουμε

$$\frac{1}{s^2 + 4}, \sigma > 0 \longleftrightarrow \frac{1}{2} \sin(2t)u(t) \quad (7.200)$$

Οπότε

$$x(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \sin(2\tau)u(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \sin(2\tau) d\tau = \frac{1}{4}(1 - \cos(2t)) \quad (7.201)$$

για $t > 0$, δηλ.

$$x(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos(2t))u(t) \quad (7.202)$$

Παράδειγμα 7.24:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{s^2 + 2}{s^3 - s} \quad (7.203)$$

με $0 < \sigma < 1$.

Λύση:

Δεδομένου ότι ο αριθμητής είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ενώ ο παρονομαστής τρίτου, εκφράζουμε το μετασχηματισμό ως

$$X(s) = \frac{s^2 + 2}{s^3 - s} = \frac{s^2 + 2}{s(s^2 - 1)} = \frac{s^2 + 2}{s(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1} \quad (7.204)$$

με

$$A = X(s)s \Big|_{s=0} = \frac{s^2 + 2}{(s-1)(s+1)} \Big|_{s=0} = -2 \quad (7.205)$$

$$B = X(s)(s-1) \Big|_{s=1} = \frac{s^2 + 2}{s(s+1)} \Big|_{s=1} = \frac{3}{2} \quad (7.206)$$

$$C = X(s)(s+1) \Big|_{s=-1} = \frac{s^2 + 2}{s(s-1)} \Big|_{s=-1} = \frac{3}{2} \quad (7.207)$$

Άρα

$$X(s) = -2\frac{1}{s} + \frac{3}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{s+1} \quad (7.208)$$

Με βάση τους πόλους των παραπάνω κλασμάτων, το πεδίο σύγκλισης μπορεί να γραφεί ως

$$\{0 < \sigma < 1\} = \{\sigma > 0\} \cap \{\sigma < 1\} \cap \{\sigma > -1\} \quad (7.209)$$

με τα επιμέρους πεδία σύγκλισης να αντιστοιχούν στους όρους του αθροίσματος της Σχέσης (7.208). Οπότε από τον Πίνακα 7.2

$$x(t) = -2u(t) - \frac{3}{2}e^t u(-t) + \frac{3}{2}e^{-t} u(t) \quad (7.210)$$

Το σήμα είναι πράγματι αμφίπλευρο, όπως υποδηλώνεται από το πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού.

7.8 Θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής

Σε κάποιες εφαρμογές είναι επιθυμητό να γνωρίζουμε τις τιμές ενός σήματος $x(t)$ όταν αυτό τείνει στο 0 και στο ∞ , μέσω του μετασχ. Laplace του, χωρίς δηλαδή να χρειαστεί να βρούμε ρητά το σήμα $x(t)$. Τα θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής μας βοηθούν σε αυτό.

Το *θεώρημα της αρχικής τιμής - Θ.Α.Τ.* δηλώνει ότι αν το σήμα $x(t)$ είναι αιτιατό, και αυτό κι η παράγωγός του, $dx(t)/dt$, έχουν μετασχ. Laplace, τότε

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad (7.211)$$

δεδομένου ότι το παραπάνω όριο υπάρχει.

Το *θεώρημα της τελικής τιμής - Θ.Τ.Τ.* δηλώνει ότι αν το σήμα $x(t)$ είναι αιτιατό, και αυτό κι η παράγωγός του, $dx(t)/dt$, έχουν μετασχ. Laplace, τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (7.212)$$

δεδομένου ότι το $sX(s)$ δεν έχει πόλους στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο ή πάνω στον φανταστικό άξονα.

Το Θ.Α.Τ. πρέπει να εφαρμόζεται μόνον αν το $X(s)$ έχει αυστηρά μεγαλύτερο βαθμό πολυωνύμου παρονομαστή απ' ότι αριθμητή, αλλιώς το όριο δεν υπάρχει, και το θεώρημα δεν εφαρμόζεται.

Αντίστοιχα, το Θ.Τ.Τ. εφαρμόζεται μόνον αν οι πόλοι του $sX(s)$ είναι όλοι στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Αν υπάρχει πόλος στο φανταστικό άξονα, το $\lim_{t \rightarrow 0} sX(s)$ δεν υπάρχει, ενώ αν υπάρχει πόλος στο δεξιό μιγαδικό ημιεπίπεδο, το $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ δεν υπάρχει.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 7.25:

Έστω το σήμα

$$x(t) = e^{-2t} u(t) + e^{-t} \cos(3t) u(t) \quad (7.213)$$

(α') Να βρεθεί ο μετασχ. Laplace.

(β') Να βρεθεί η αρχική συνθήκη $x(0^+)$ μέσω του μετασχ. Laplace.

(γ') Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ μέσω του μετασχ. Laplace.

(δ') Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματα των παραπάνω δυο ερωτημάτων υπολογίζοντας αναλυτικά τα όρια.

Λύση:

(α') Ο μετασχηματισμός δίνεται ως

$$X(s) = L\{e^{-2t} u(t)\} + L\{e^{-t} \cos(3t) u(t)\} = \frac{1}{s+2} + \frac{s+1}{(s+1)^2 + 9}, \quad \sigma > -1 \quad (7.214)$$

και κάνοντας λίγες πράξεις, έχουμε

$$X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 12}{s^3 + 5s^2 + 14s + 20} \quad (7.215)$$

(β') Είναι

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{2s^2 + 5s + 12}{s^3 + 5s^2 + 14s + 20} \quad (7.216)$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s^3 + 5s^2 + 12s}{s^3 + 5s^2 + 14s + 20} \quad (7.217)$$

$$(\text{De L' Hospital}) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{6s^2 + 10s + 12}{3s^2 + 10s + 14} \quad (7.218)$$

$$(\text{De L' Hospital}) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{12s + 10}{6s + 10} \quad (7.219)$$

$$(\text{De L' Hospital}) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{12}{6} = 2 \quad (7.220)$$

$$x(0^+) = 2 \quad (7.221)$$

(γ') Το όριο είναι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s^3 + 5s^2 + 12s}{s^3 + 5s^2 + 14s + 20} = 0 \iff \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (7.222)$$

(δ') Δικό σας. ☺