

## Κεφάλαιο 9

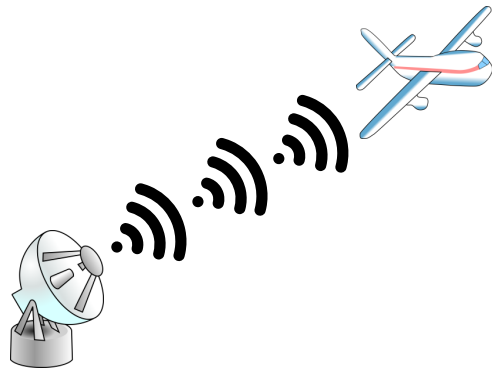
# Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

Στα προηγούμενα κεφάλαια, γνωρίσαμε τους μετασχηματισμούς Fourier και Laplace, καθώς και τις σπουδαίες ιδιότητές τους και τη χρησιμότητά τους στην ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων. Όπως είδαμε, ο μετασχ. Fourier μας αποκαλύπτει τις φασματικές συνιστώσες ενός σήματος, ενέργειας ή ισχύος. Όμως και οι σχέσεις μεταξύ σημάτων είναι το ίδιο σημαντικές με τα σήματα αυτά καθ' αυτά. Στο πεδίο του χρόνου, οι σχέσεις αυτές αποκαλύπτονται από τη μελέτη των περίφημων *Συναρτήσεων Συσχέτισης - Correlation Functions*, ενώ στο πεδίο της συχνότητας, οι μετασχηματισμοί Fourier τους, οι λεγόμενες *Φασματικές Πυκνότητες - Spectral Densities* αναλαμβάνουν να μας πληροφορήσουν για την κατανομή της ενέργειας ή της ισχύος ενός σήματος - ή από κοινού δυο σημάτων - ανά συχνότητες.

### 9.1 Μια μικρή εφαρμογή - κίνητρο

Ας θεωρήσουμε ένα μηχανισμό ανίχνευσης στόχου (radar), όπου σκοπός του είναι να ανιχνεύσει έναν πιθανό στόχο στέλνοντας προς αυτόν ένα σήμα, όπως στο Σχήμα 9.1.

Αν ο στόχος είναι παρών, το σήμα αντανακλάται σε αυτόν και επιστρέφει στον πομπό, ενώ αν όχι, ο πομπός λαμβάνει μόνο θόρυβο. Η παρουσία ή η απουσία του ανακλώμενου σήματος επιβεβαιώνει την παρουσία ή την απουσία του στόχου. Το κρίσιμο πρόβλημα σε αυτή τη διαδικασία είναι η ανίχνευση του ανακλώμενου σήματος απ' ενός, και απ' ετέρου η εύρεση της απόστασης του από τη θέση αναφοράς. Φυσικά, το ανακλώμενο σήμα που λαμβάνεται έχει αλλοιωθεί και εξασθενήσει σοβαρά λόγω απόστασης και θορύβου του περιβάλλοντος. Σε μια τέτοια περίπτωση, η πράξη που ονομάζεται **συσχέτιση** του ληφθέντος σήματος με το αρχικό μπορεί να μας βοηθήσει σημαντικά!

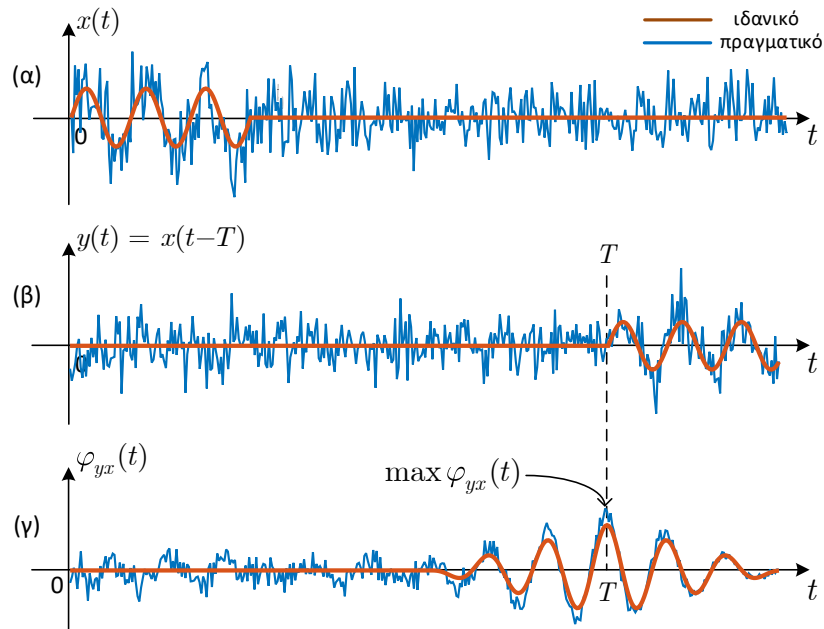


Σχήμα 9.1: Ανίχνευση στόχου από radar.

Αρχικά, ας εξηγήσουμε *διαισθητικά* πώς γίνεται η ανίχνευση του σήματος με χρήση της συσχέτισης. Μετρώντας τη χρονική καθυστέρηση μεταξύ του σήματος που στάλθηκε και αυτού που ελήφθη, μπορούμε να προσδιορίσουμε την απόσταση του στόχου. Έστω ότι το σήμα που στάλθηκε είναι το  $x(t)$  και αυτό που ελήφθη είναι το  $y(t)$ , όπως περιγράφονται στο Σχήμα 9.2(α-β), όπου για λόγους απλότητας έχουμε σχεδιάσει τόσο την ιδανική εκπομπή-λήψη όσο και μια πραγματική κατάσταση όπου το ληφθέν σήμα έχει εξασθενήσει και αλλοιωθεί λόγω της διέλευσής του μέσα από το κανάλι μετάδοσης. Πώς θα μπορούσαμε να συγκρίνουμε τα δυο σήματα; Θα μπορούσε να προτείνει κανείς να εφαρμόσουμε μια σχέση προβολής του ενός σήματος στο άλλο, όπως στους μετασχηματισμούς που έχουμε δει στα προηγούμενα κεφάλαια. Ας προβάλλουμε το ληφθέν σήμα επάνω στο εκπεμφθέν, ως

$$c_{yx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x(t)dt \quad (9.1)$$

τότε το αποτέλεσμα θα ήταν μηδέν, λόγω του ότι τα δυο σήματα είναι μη μηδενικά σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα. Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε μια διαφορετική σχέση, αυτή της συνάρτησης *συσχέτισης* του σήματος  $y(t)$



Σχήμα 9.2: (α) Εκπεμπόμενο σήμα  $x(t)$ , (β) ληφθέν σήμα  $y(t)$ , (γ) συσχέτιση των σημάτων  $\varphi_{yx}(\tau)$  σε ένα radar.

με το σήμα  $x(t)$ , η οποία ορίζεται ως

$$\phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x(t+\tau)dt \quad (9.2)$$

όπου βλέπετε ότι μετακινούμε το εκπεμπόμενο σήμα  $x(t)$  σε κάθε δυνατή χρονική μετατόπιση  $\tau$ . Βλέπετε ότι η συσχέτιση είναι συνάρτηση του χρόνου  $\tau$ . Αν για κάποιο  $\tau$  (που είναι οι διάφορες μετατοπίσεις του σήματος  $x(t)$ ) παρατηρηθεί ισχυρή συσχέτιση (που σημαίνει μεγάλη τιμή ως αποτέλεσμα του ολοκληρώματος), δεν ανιχνεύεται μόνο η παρουσία του σήματος αλλά και η σχετική χρονική μετατόπιση του  $x(t)$  σε σχέση με το  $y(t)$ . Έτσι, όχι μόνο μετράμε την παρουσία ενός στόχου αλλά και την απόστασή του από τη θέση αναφοράς. Το γράφημα του Σχήματος 9.2(γ) δείχνει το αποτέλεσμα της συσχέτισης. Βλέπετε ότι η συσχέτιση δουλεύει τόσο στην ιδανική όσο και στην πραγματική, γεμάτη θόρυβο, κατάσταση.

## 9.2 Συσχετίσεις

Οι συσχετίσεις μπορούν να χωριστούν σε δυο κατηγορίες: την **αυτοσυσχέτιση** και την **ετεροσυσχέτιση** σημάτων. Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη των συσχετίσεων στο πεδίο του χρόνου, εξετάζοντας αρχικά τη συσχέτιση περιοδικών σημάτων, γενικεύοντας στη συνέχεια για σήματα ισχύος, και ολοκληρώνοντας με σήματα ενέργειας.

### 9.2.1 Αυτοσυσχέτιση

Η αυτοσυσχέτιση ορίζεται ως η πράξη συσχέτισης ενός σήματος  $x(t)$  με τον εαυτό του, και μας δίνει πληροφορία που σχετίζεται με τη μεταβολή της αυτο-ομοιότητας του σήματος συναρτήσει του χρόνου.

#### 9.2.1.1 Περιοδική Αυτοσυσχέτιση

Για περιοδικά σήματα με περίοδο  $T_0$ , η αυτοσυσχέτιση ορίζεται ως

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t)x(t+\tau)dt \quad (9.3)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι ένα περιοδικό σήμα μπορεί να αναπτυχθεί σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (9.4)$$

με  $f_0 = \frac{1}{T_0}$  η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος. Αν αντικαταστήσουμε τη Σχέση (9.4) στη Σχέση (9.3) έχουμε

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right)^* \left( \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_l e^{j2\pi l f_0 (t+\tau)} \right) dt \quad (9.5)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} \right) \left( \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_l e^{j2\pi l f_0 t} e^{j2\pi l f_0 \tau} \right) dt \quad (9.6)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_k e^{j2\pi k f_0 \tau} + \sum_{k \neq l=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_l e^{j2\pi l f_0 \tau} e^{j2\pi (l-k) f_0 t} \right) dt \quad (9.7)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_k e^{j2\pi k f_0 \tau} \int_{T_0} dt + \sum_{k \neq l=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_l e^{j2\pi l f_0 \tau} \int_{T_0} e^{j2\pi (l-k) f_0 t} dt \right) \quad (9.8)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left( T_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau} + \sum_{k \neq l=-\infty}^{+\infty} X_k^* X_l e^{j2\pi l f_0 \tau} \int_{T_0} e^{j2\pi (l-k) f_0 t} dt \right) \quad (9.9)$$

Ο δεύτερος όρος της παραπάνω σχέσης ισούται με μηδέν, λόγω της γνωστής (πλέον) σχέσης της ορθογωνιότητας των σημάτων  $\mathbb{E} = \{e^{j2\pi k f_0 t}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ :

$$\int_{T_0} e^{j2\pi (k-l) f_0 t} dt = \begin{cases} 0, & l \neq k \\ T_0, & l = k \end{cases} \quad (9.10)$$

Άρα τελικά

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau} \quad (9.11)$$

Η παραπάνω σχέση μας πληροφορεί ότι αν το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier ενός περιοδικού σήματος με περίοδο  $T_0$  έχει συντελεστές Fourier  $X_k$ , τότε η περιοδική αυτοσυσχέτιση του σήματος είναι επίσης περιοδική με την ίδια περίοδο και μπορεί να αναπτυχθεί σε Σειρά Fourier με συντελεστές  $|X_k|^2$ . Μετατρέποντας αυτή τη σχέση σε τριγωνομετρική Σειρά Fourier, έχουμε ότι

$$\phi_x(\tau) = |X_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k|^2 \cos(2\pi k f_0 \tau) \quad (9.12)$$

Παρατηρήστε ότι αν οι συντελεστές Fourier του περιοδικού σήματος (και άρα και το αρχικό περιοδικό σήμα) είχαν κάποια φάση  $\phi_k$ , δηλ.

$$X_k = |X_k| e^{j\phi_k} \quad (9.13)$$

η περιοδική αυτοσυσχέτιση του σήματος δεν περιλαμβάνει αυτή τη φάση στους συντελεστές Fourier της. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η αυτοσυσχέτιση είναι “τυφλή” (phase-blind) όσον αφορά τη φάση του περιοδικού σήματος, αφού η πληροφορία φάσης του περιοδικού σήματος χάνεται δια παντός.

Ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού της περιοδικής αυτοσυσχέτισης, όπου φαίνεται ξεκάθαρα και η παραπάνω ιδιότητα.

### Παράδειγμα 9.1:

Βρείτε την περιοδική αυτοσυσχέτιση του σήματος

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta) \quad (9.14)$$

Λύση:

Από τον ορισμό, έχουμε

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)x(t+\tau)dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} A \cos(2\pi f_0 t + \theta) A \cos(2\pi f_0 (t+\tau) + \theta) dt \quad (9.15)$$

$$= \frac{A^2}{T_0} \int_{T_0} \cos(2\pi f_0 t + \theta) \cos(2\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau + \theta) dt \quad (9.16)$$

$$= \frac{A^2}{T_0} \int_{T_0} \left( \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau + 2\theta) + \frac{1}{2} \cos(-2\pi f_0 \tau) \right) dt \quad (9.17)$$

$$= \frac{A^2}{T_0} \left( \int_{T_0} \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau + 2\theta) dt + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \int_{T_0} dt \right) \quad (9.18)$$

$$= \frac{A^2}{T_0} \left( \int_{T_0} \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau + 2\theta) dt + \frac{1}{2} T_0 \cos(2\pi f_0 \tau) \right) \quad (9.19)$$

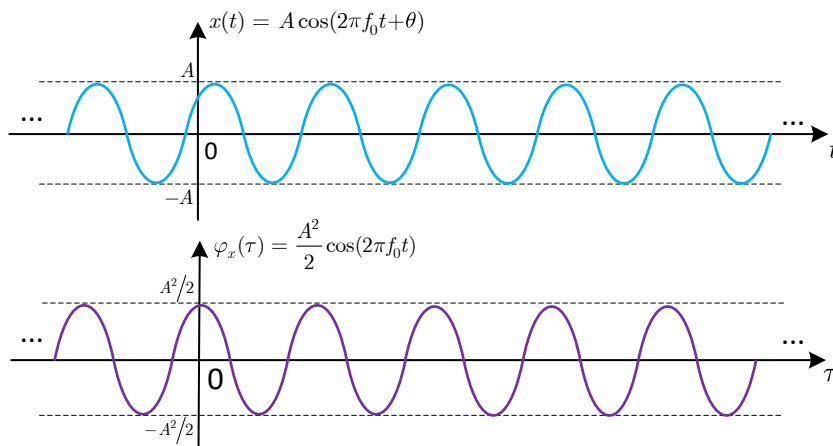
όπο χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} \cos(a + b) + \frac{1}{2} \cos(a - b) \quad (9.20)$$

Ο πρώτος όρος της Σχέσης (9.19) ισούται με μηδέν, ως ολοκλήρωμα ημιτόνου σε διάστημα πολλαπλάσιο μιας περιόδου. Άρα τελικά

$$\phi_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \quad (9.21)$$

Τα δυο σήματα φαίνονται στο Σχήμα 9.3. Παρατηρήστε ότι η αρχική φάση  $\theta$  δε διατηρείται στο αποτέλεσμα της



Σχήμα 9.3: (α) Ημίτονο και (β) περιοδική αυτοσυσχέτιση Παραδείγματος 9.1.

αυτοσυσχέτισης. Προσέξτε ότι η περιοδική αυτοσυσχέτιση παρουσιάζει περιοδικά μέγιστα και ελάχιστα, όπως ακριβώς η μορφή του  $\cos(2\pi f_0 \tau)$ . Αυτό σημαίνει ότι το περιοδικό σήμα  $x(t)$  έχει μέγιστη ομοιότητα με τον “μετατοπισμένο” κατά  $t = \tau$  εαυτό του τις χρονικές στιγμές  $t = kT_0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Αντίθετα, το περιοδικό σήμα  $x(t)$  έχει ελάχιστη ομοιότητα ή εντελώς αντίθετη μορφή με το “μετατοπισμένο” κατά  $t = \tau$  εαυτό του τις χρονικές στιγμές  $t = k\frac{T_0}{2}$ . Αυτό επιβεβαιώνεται ακριβώς από τη διαίσθησή μας.

Επίσης, το αρχικό περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta) = \frac{A}{2} e^{j\theta} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\theta} e^{-j2\pi f_0 t} = X_1 e^{j2\pi f_0 t} + X_1^* e^{-j2\pi f_0 t} \quad (9.22)$$

και άρα οι συντελεστές του είναι

$$X_1 = \frac{A}{2} e^{j\theta}, \quad X_1^* = \frac{A}{2} e^{-j\theta} \quad (9.23)$$

Η αυτοσυσχέτιση αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$\phi_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) = \frac{A^2}{4} e^{j2\pi f_0 \tau} + \frac{A^2}{4} e^{-j2\pi f_0 \tau} = X_{\phi_1} e^{j2\pi f_0 \tau} + X_{\phi_1}^* e^{-j2\pi f_0 \tau} \quad (9.24)$$

Παρατηρήστε ότι πράγματι

$$X_{\phi_1} = |X_1|^2, \quad X_{\phi_1}^* = |X_1^*|^2 \quad (9.25)$$

## 9.2.1.2 Αυτοσυσχέτιση Σημάτων Ισχύος

Η έννοια της αυτοσυσχέτισης μπορεί να γενικευθεί για σήματα ισχύος ως

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^*(t)x(t+\tau)dt \quad (9.26)$$

με  $T$  μια οποιαδήποτε τιμή χρονικού διαστήματος, για  $x(t)$  μιγαδικό, ενώ για πραγματικά σήματα ο ορισμός τροποποιείται ως

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (9.27)$$

Η διαδικασία υπολογισμού της αυτοσυσχέτισης σημάτων ισχύος έχει μεγάλες ομοιότητες με τον υπολογισμό της συνέλιξης - όχι τυχαία, αφού τα δυο ολοκληρώματα μοιάζουν. Ας υπολογίσουμε την αυτοσυσχέτιση δυο πολύ γνωστών μας σημάτων ισχύος.

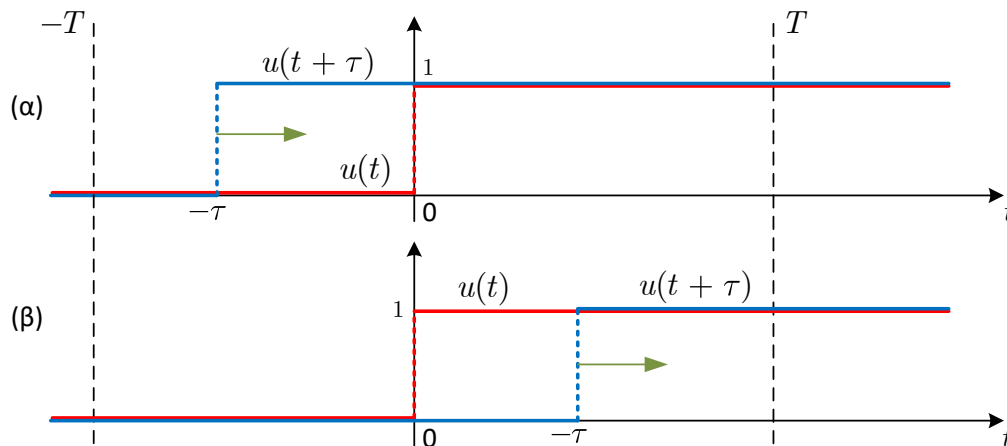
**Παράδειγμα 9.2:**

Να βρεθεί η αυτοσυσχέτιση του σήματος της βηματικής συνάρτησης

$$x(t) = u(t) \quad (9.28)$$

Λύση:

Κατασκευάζοντας το μετατοπισμένο σήμα θα πρέπει να διακρίνουμε τις περιπτώσεις για τις τιμές του  $\tau$ , όπως στο Σχήμα 9.4. Για την περίπτωση (α) του Σχήματος 9.4, ισχύει ότι  $-\tau < 0 \implies \tau > 0$ .



Σχήμα 9.4: Περιπτώσεις στον υπολογισμό της αυτοσυσχέτισης του Παραδείγματος 9.2.

Τότε

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)u(t+\tau)dt \quad (9.29)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} T = \frac{1}{2} \quad (9.30)$$

Αντίστοιχα, για την περίπτωση (β), ισχύει ότι  $-\tau > 0 \implies \tau < 0$ , και τότε

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)u(t+\tau)dt \quad (9.31)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\tau}^T dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} (T + \tau) = \frac{1}{2} \quad (9.32)$$

Άρα τελικά

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{2}, \quad \forall \tau \quad (9.33)$$

Παρατηρήστε ότι η αυτο-ομοιότητα της  $x(t) = u(t)$  δε μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου!

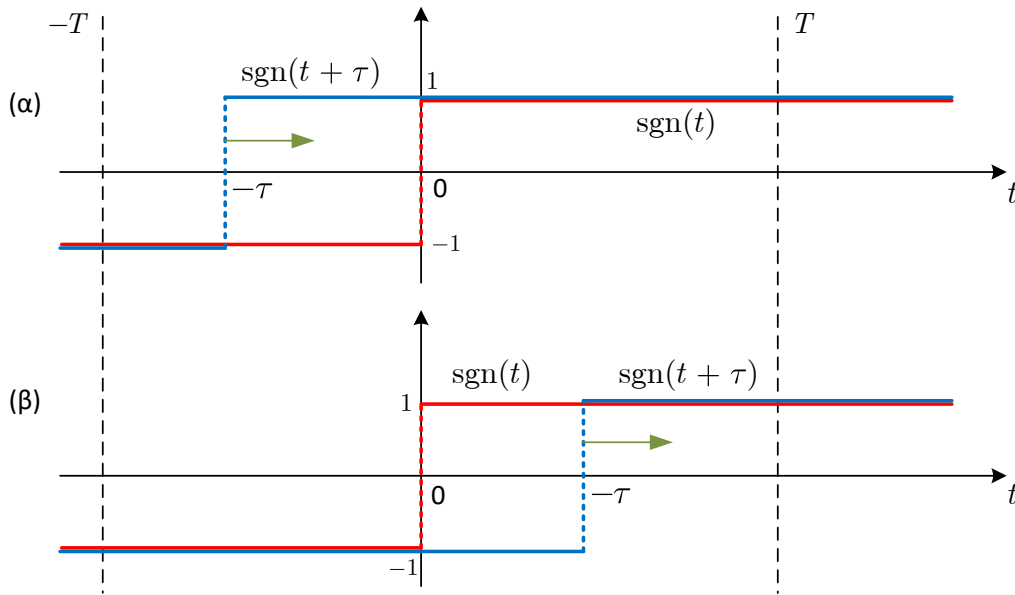
**Παράδειγμα 9.3:**

Να βρεθεί η αυτοσυσχέτιση του σήματος της συνάρτησης προσήμου

$$x(t) = \text{sgn}(t) \quad (9.34)$$

Λύση:

Κατασκευάζοντας το μετατοπισμένο σήμα θα πρέπει να διακρίνουμε τις περιπτώσεις για τις τιμές του  $\tau$ , όπως στο Σχήμα 9.5. Για την περίπτωση (α) του Σχήματος 9.5, ισχύει ότι  $-\tau < 0 \implies \tau > 0$ . Τότε



Σχήμα 9.5: Περιπτώσεις στον υπολογισμό της αυτοσυσχέτισης Παραδείγματος 9.3.

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \text{sgn}(t)\text{sgn}(t+\tau)dt \quad (9.35)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \left( \int_{-T}^{-\tau} (-1)^2 dt + \int_{-\tau}^0 (-1) dt + \int_0^T dt \right) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} (-2\tau + T) = 1 \quad (9.36)$$

Αντίστοιχα, για την περίπτωση (β), ισχύει ότι  $-\tau > 0 \implies \tau < 0$ . Τότε με όμοιο ακριβώς τρόπο (δείξτε το!) προκύπτει ότι

$$\phi_x(\tau) = 1 \quad (9.37)$$

Άρα τελικά

$$\phi_x(\tau) = 1 \quad \forall \tau \quad (9.38)$$

Παρατηρήστε ότι κι εδώ η αυτο-ομοιότητα του σήματος  $x(t) = \text{sgn}(t)$  δε μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου!

### 9.2.1.3 Αυτοσυσχέτιση Σημάτων Ενέργειας

Τέλος, η αυτοσυσχέτιση μιγαδικών σημάτων ενέργειας ορίζεται ως

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt \quad (9.39)$$

ενώ για πραγματικά σήματα, έχουμε την ίδια σχέση χωρίς συζυγία:

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt \quad (9.40)$$

Με μια πρώτη ανάγνωση των παραπάνω σχέσεων, σίγουρα έχετε παρατηρήσει ότι η αυτοσυσχέτιση ενός σήματος ενέργειας μοιάζει πολύ με τη συνέλιξη του σήματος ενέργειας με τον εαυτό του. Σύντομα θα δούμε τη σχέση

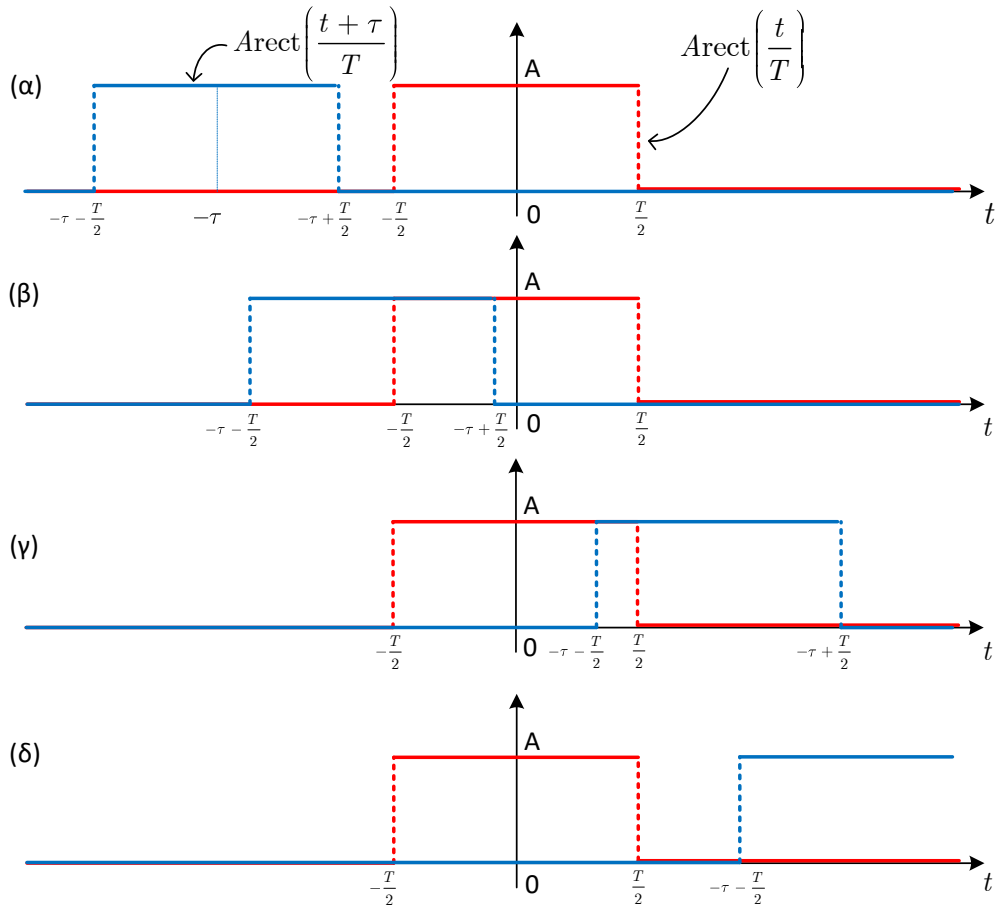
που τις συνδέει. Προς το παρόν ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού αυτοσυσχέτισης ενός πολύ γνωστού μας σήματος.

**Παράδειγμα 9.4:**

Υπολογίστε την αυτοσυσχέτιση του σήματος

$$x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \tag{9.41}$$

**Λύση:**  
 Το ολοκλήρωμα της αυτοσυσχέτισης περιλαμβάνει το σήμα  $x(t + \tau)$ , που αποτελεί μια μετατόπιση του σήματος  $x(t)$  κατά  $\tau$ . Η μετατόπιση αυτή μπορεί να είναι θετική ή αρνητική, όπως και στη συνέλιξη. Έχουμε λοιπόν τις ακόλουθες περιπτώσεις του Σχήματος 9.6. Για την περίπτωση (α), θα έχουμε



Σχήμα 9.6: Περιπτώσεις στον υπολογισμό της αυτοσυσχέτισης Παραδείγματος 9.4.

$$\phi_x(\tau) = 0 \tag{9.42}$$

το οποίο ισχύει για

$$-\tau + \frac{T}{2} < -\frac{T}{2} \iff \tau > T \tag{9.43}$$

Για την περίπτωση (β), είναι

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t + \tau)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{-\tau + \frac{T}{2}} A^2 dt = A^2 t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{-\tau + \frac{T}{2}} = A^2 T - A^2 \tau \tag{9.44}$$

το οποίο ισχύει για

$$-\tau + \frac{T}{2} > -\frac{T}{2} \text{ και } -\tau - \frac{T}{2} < -\frac{T}{2} \iff 0 < \tau < T \tag{9.45}$$

Στη συνέχεια, στην περίπτωση (γ), έχουμε

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt = \int_{-\tau-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = A^2 t \Big|_{-\tau-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = A^2 T + A^2 \tau \quad (9.46)$$

το οποίο ισχύει για

$$-\tau - \frac{T}{2} < \frac{T}{2} \text{ και } -\tau + \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \iff -T < \tau < 0 \quad (9.47)$$

ενώ για την περίπτωση (δ) είναι προφανές ότι

$$\phi_x(\tau) = 0 \quad (9.48)$$

για

$$-\tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \iff \tau < -T \quad (9.49)$$

Συνολικά, η αυτοσυσχέτιση του σήματος  $x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$  είναι

$$\phi_x(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -T \text{ και } \tau > T \\ A^2(T+\tau), & -T < \tau < 0 \\ A^2(T-\tau), & 0 < \tau < T \end{cases} = \begin{cases} 0, & \tau < -T \text{ και } \tau > T \\ A^2 T(1 + \frac{\tau}{T}), & -T < \tau < 0 \\ A^2 T(1 - \frac{\tau}{T}), & 0 < \tau < T \end{cases} \quad (9.50)$$

Το παραπάνω σήμα δεν είναι κανένα άλλο από το γνωστό μας τριγωνικό παλμό! Άρα

$$\phi_x(\tau) = A^2 T \text{tri}\left(\frac{\tau}{T}\right) \quad (9.51)$$

Παρατηρήστε ότι η αυτο-ομοιότητα του  $x(t)$  αυξάνει στο διάστημα  $[-T, 0]$ , φτάνοντας σε μέγιστη τιμή για  $\tau = 0$ , όταν το σήμα  $x(t)$  συμπίπτει με τη μετατοπισμένη “έκδοσή” του  $x(t+\tau)$ . Για  $\tau = 0$ , η αυτοσυσχέτιση γράφεται ως

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau) \Big|_{\tau=0} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = E_x \quad (9.52)$$

που είναι η ενέργεια του σήματος  $x(t)$ ! Αυτό είναι μια γενική ιδιότητα της αυτοσυσχέτισης και θα τη δούμε και παρακάτω, όταν θα αναφερθούμε σε κάποιες χρήσιμες ιδιότητες των συσχετίσεων. ■

Γενικότερα, η σχέση μεταξύ αυτοσυσχέτισης και του φασματικού περιεχομένου ενός σήματος ενέργειας μπορεί να ιδωθεί από τη σκοπιά της αυτο-ομοιότητας. Ένα σήμα συσχετίζεται “βέλτιστα” με τον εαυτό του για  $\tau = 0$ , όπως είδαμε, δηλ. για μηδενική μετατόπιση. Ξεκινώντας από  $\tau = 0$ , όσο μετατοπίζεται το σήμα προς τα αριστερά (δηλ. για  $\tau > 0$ ), η αυτο-ομοιότητα αρχίζει και φθίνει, άρα η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης πρέπει να είναι μια μη αύξουσα συνάρτηση του  $\tau$ , για  $\tau > 0$ . Τα αριβώς αντίστοιχα ισχύουν και για μετατόπιση προς τα δεξιά. Για ένα σήμα  $x(t)$  που αλλάζει αργά (και άρα είναι χαμηλής συχνότητας), η αυτοσυσχέτισή του θα αλλάζει αργά, αφού η αυτο-ομοιότητά του θα αλλάζει αργά. Αντίθετα, ένα σήμα υψηλής συχνότητας θα έχει αυτοσυσχέτιση που αλλάζει γρήγορα. Βλέπουμε λοιπόν ότι το σχήμα της αυτοσυσχέτισης  $\phi_x(\tau)$  έχει άμεση σχέση με το φασματικό περιεχόμενο του σήματος  $x(t)$ !

## 9.2.2 Ετεροσυσχέτιση

Η ετεροσυσχέτιση ορίζεται ως η πράξη συσχέτισης δυο σημάτων  $x(t), y(t)$ , και μας δίνει πληροφορία που σχετίζεται με την ομοιότητα του  $x(t)$  με το  $y(t)$  συναρτήσει του χρόνου. Πρέπει να τονιστεί εξ’ αρχής ότι η πράξη της ετεροσυσχέτισης δεν είναι αντιμεταθετική, όπως αυτή της αυτοσυσχέτισης. Για παράδειγμα, η ετεροσυσχέτιση του σήματος  $x(t)$  με το σήμα  $y(t)$  δεν είναι εν γένει ίδια συνάρτηση με την ετεροσυσχέτιση του σήματος  $y(t)$  με το σήμα  $x(t)$ . Σύντομα θα δούμε αυτές τις λεπτομέρειες.

### 9.2.2.1 Περιοδική Ετεροσυσχέτιση

Για περιοδικά σήματα με κοινή περίοδο  $T_0$ , η περιοδική ετεροσυσχέτιση  $\phi_{xy}(\tau)$  των σημάτων  $x(t), y(t)$  ορίζεται ως

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad (9.53)$$

ενώ η περιοδική ετεροσυσχέτιση  $\phi_{yx}(\tau)$ , ορίζεται ως

$$\phi_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} y^*(t)x(t+\tau)dt \quad (9.54)$$

με τη συζυγία να παραλείπεται όταν τα σήματα είναι πραγματικά.

Ακολουθώντας όμοιο σκεπτικό με την αυτοσυσχέτιση περιοδικών σημάτων, μπορούμε να αναπτύξουμε τα δυο σήματα σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}, \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (9.55)$$

Με αντικατάσταση των Σχέσεων (9.55) στις Σχέσεις (9.53,9.54) μπορούμε να εξάγουμε σχέσεις με αυτές για την αυτοσυσχέτιση. Θα δείξουμε αμέσως πώς αναπτύσσεται η ετεροσυσχέτιση  $\phi_{xy}(\tau)$  σε Σειρά Fourier, ενώ ο αναγνώστης μπορεί να εξάγει την αντίστοιχη σχέση για την ετεροσυσχέτιση  $\phi_{yx}(\tau)$ .

Έχουμε

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \right)^* \left( \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l e^{j2\pi l f_0 (t+\tau)} \right) dt \quad (9.56)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} \right) \left( \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l e^{j2\pi l f_0 t} e^{j2\pi l f_0 \tau} \right) dt \quad (9.57)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k e^{j2\pi k f_0 \tau} + \sum_{k \neq l=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_l e^{j2\pi l f_0 \tau} e^{j2\pi(l-k)f_0 t} \right) dt \quad (9.58)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k e^{j2\pi k f_0 \tau} \int_{T_0} dt + \sum_{k \neq l=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_l e^{j2\pi l f_0 \tau} \int_{T_0} e^{j2\pi(l-k)f_0 t} dt \right) \quad (9.59)$$

και ξανά λόγω της Σχέσης (9.10), ο δεύτερος όρος της παραπάνω σχέσης μηδενίζεται. Οπότε εν τέλει

$$\phi_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k e^{j2\pi k f_0 \tau} \quad (9.60)$$

Καταλήξαμε λοιπόν ότι αν δυο περιοδικά, με την ίδια περίοδο, σήματα  $x(t), y(t)$  έχουν συντελεστές Fourier  $X_k, Y_k$ , τότε η ετεροσυσχέτιση του  $x(t)$  με το  $y(t)$  μπορεί να αναπτυχθεί σε Σειρά Fourier με συντελεστές  $X_k^* Y_k$ .

### 9.2.2.2 Ετεροσυσχέτιση Σημάτων Ισχύος

Γενικότερα, για σήματα ισχύος η ετεροσυσχέτιση  $\phi_{xy}(\tau)$  των σημάτων  $x(t), y(t)$  ορίζεται ως

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^*(t)y(t+\tau)dt \quad (9.61)$$

ενώ η ετεροσυσχέτιση  $\phi_{yx}(\tau)$ , ορίζεται ως

$$\phi_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y^*(t)x(t+\tau)dt \quad (9.62)$$

με τη συζυγία να παραλείπεται όταν τα σήματα είναι πραγματικά.

Ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού ετεροσυσχέτισης δυο πολύ γνωστών σημάτων ισχύος που είδαμε ξεχωριστά νωρίτερα, της βηματικής συνάρτησης  $x(t) = u(t)$  και της συνάρτησης προσήμου,  $y(t) = \text{sgn}(t)$ .

**Παράδειγμα 9.5:**

Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση  $\phi_{xy}(\tau)$  των σημάτων

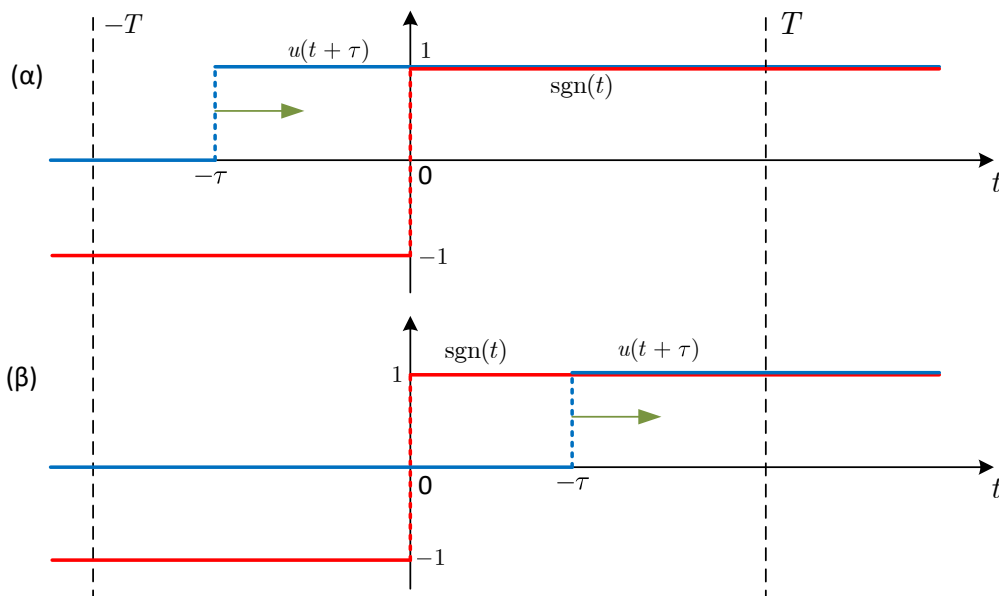
$$x(t) = \text{sgn}(t) \quad (9.63)$$

και

$$y(t) = u(t) \quad (9.64)$$

Λύση:

Κατασκευάζοντας το μετατοπισμένο σήμα  $u(t - \tau)$ , θα πρέπει να διακρίνουμε τις περιπτώσεις για τις τιμές του  $\tau$ , όπως στο Σχήμα 9.7. Για την περίπτωση (α) του Σχήματος 9.7, ισχύει ότι  $-\tau < 0 \implies \tau > 0$ .



Σχήμα 9.7: Περιπτώσεις στον υπολογισμό της ετεροσυσχέτισης Παραδείγματος 9.5.

Τότε

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_T^T x(t)y(t + \tau)dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \left( -\int_{-\tau}^0 dt + \int_0^T dt \right) \quad (9.65)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \left( -t \Big|_{-\tau}^0 + t \Big|_0^T \right) = \frac{1}{2} \quad (9.66)$$

ενώ για την περίπτωση (β) του ίδιου σχήματος, ισχύει ότι  $-\tau > 0 \implies \tau < 0$ , και τότε

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_T^T x(t)y(t + \tau)dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\tau}^T dt \quad (9.67)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} t \Big|_{-\tau}^T = \frac{1}{2} \quad (9.68)$$

Οπότε η ετεροσυσχέτιση  $\phi_{xy}(\tau)$  των σημάτων  $x(t) = \text{sgn}(t)$  και  $y(t) = u(t)$  είναι

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} \quad \forall \tau \quad (9.69)$$

### 9.2.2.3 Ετεροσυσχέτιση Σημάτων Ενέργειας

Τέλος, η ετεροσυσχέτιση  $\phi_{xy}(\tau)$  μιγαδικών σημάτων ενέργειας  $x(t), y(t)$  ορίζεται ως

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t + \tau)dt \quad (9.70)$$

ενώ η ετεροσυσχέτιση  $\phi_{yx}(\tau)$ , ορίζεται ως

$$\phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)x(t+\tau)dt \quad (9.71)$$

παραλείποντας τη συζυγία όταν τα  $x(t), y(t)$  είναι πραγματικά.

Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι η ετεροσυσχέτιση μοιάζει πολύ με τη συνέλιξη δυο σημάτων, αλλά προφανώς δεν είναι ταυτόσημες πράξεις – σύντομα θα δούμε τη σχέση που τις συνδέει. Ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού ετεροσυσχέτισης σημάτων.

### Παράδειγμα 9.6:

Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση  $\phi_{xy}(\tau)$  των σημάτων

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \quad (9.72)$$

και

$$y(t) = e^{-2\alpha t}u(t) \quad (9.73)$$

με  $\alpha > 0$ .

Λύση:

Ας χρησιμοποιήσουμε την αλγεβρική μέθοδο, μια και τα δυο σήματα είναι άπειρης διάρκειας. Είναι

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)dt \quad (9.74)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-2\alpha(t+\tau)}u(t)u(t+\tau)dt \quad (9.75)$$

Το γινόμενο  $u(t)u(t+\tau)$  αναλύεται ως

$$u(t)u(t+\tau) = \begin{cases} 1, & t > 0 \text{ και } t > -\tau \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (9.76)$$

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

- Για  $-\tau < 0 \implies \tau > 0$ , το ολοκλήρωμα της Σχέσης (9.75) γίνεται

$$\phi_{xy}(\tau) = e^{-2\alpha\tau} \int_0^{+\infty} e^{-3\alpha t} dt = e^{-2\alpha\tau} \frac{1}{-3\alpha} e^{-3\alpha t} \Big|_0^{+\infty} \quad (9.77)$$

$$= -\frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} (0 - 1) = \frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} \quad (9.78)$$

- Για  $-\tau > 0 \implies \tau < 0$ , το ίδιο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\phi_{xy}(\tau) = e^{-2\alpha\tau} \int_{\tau}^{+\infty} e^{-3\alpha t} dt = -\frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} e^{-3\alpha t} \Big|_{\tau}^{+\infty} = \quad (9.79)$$

$$= -\frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} (0 - e^{3\alpha\tau}) = \frac{1}{3\alpha} e^{\alpha\tau} \quad (9.80)$$

Συνολικά

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3\alpha} (e^{-2\alpha\tau}u(\tau) + e^{\alpha\tau}u(-\tau)) \quad (9.81)$$

Μπορούμε να καταγράψουμε τώρα μερικές ιδιότητες επάνω στις συσχετίσεις. ■

1. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι άρτια συνάρτηση:

$$\phi_x(\tau) = \phi_x(-\tau) \quad (9.82)$$

Μπορείτε να το επιβεβαιώσετε σε όλα τα σχετικά παραδείγματα που έχουμε δει ως τώρα.

2. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης συμβαίνει τη χρονική στιγμή  $\tau = 0$ , δηλ. για μηδενική μετατόπιση του  $x(t + \tau)$ . Τότε τα δυο σήματα  $x(t)$  και  $x(t + \tau)$  ταυτίζονται. Για πραγματικά σήματα ενέργειας, ισχύει

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = E_x \quad (9.83)$$

με  $E_x$  την ενέργεια του σήματος  $x(t)$ . Για πραγματικά σήματα ισχύος η σχέση που προκύπτει είναι η

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt = P_x \quad (9.84)$$

με  $P_x$  τη μέση ισχύ του σήματος  $x(t)$ . Τέλος, για πραγματικά περιοδικά σήματα, έχουμε

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^2(t) dt = P_x \quad (9.85)$$

με  $P_x$  τη μέση ισχύ του περιοδικού σήματος  $x(t)$ , αφού τα περιοδικά σήματα είναι και αυτά σήματα ισχύος.

3. Αν το σήμα  $x(t)$  είναι περιοδικό με περίοδο  $T_0$ , η περιοδική αυτοσυσχέτιση  $\phi_x(\tau)$  έχει κι αυτή την ίδια περίοδο  $T_0$ .
4. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $\phi_x(\tau)$  δεν περιέχει πληροφορία για την αρχική φάση του σήματος  $x(t)$ .
5. Η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης  $\phi_{xy}(\tau)$  δεν είναι απαραίτητα άρτια συνάρτηση:

$$\phi_{xy}(\tau) \neq \phi_{xy}(-\tau) \quad (9.86)$$

Όμως μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}^*(-\tau) \quad (9.87)$$

με τη συζυγία να παραλείπεται όταν τα σήματα  $x(t), y(t)$  είναι πραγματικά.

6. Αν η ετεροσυσχέτιση δυο σημάτων  $\phi_{xy}(\tau)$  είναι μηδενική για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ , τότε τα σήματα  $x(t), y(t)$  ονομάζονται ασυσχέτιστα.
7. Οι ορισμοί των συσχετίσεων πραγματικών περιοδικών σημάτων και σημάτων ενέργειας έχουν μεγάλη ομοιότητα με τον ορισμό της συνέλιξης. Δείτε:

$$c_{xy}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau)y(t - \tau) d\tau \quad \phi_{xy}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(\tau)y(\tau + t) d\tau \quad (9.88)$$

$$c_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t - \tau) d\tau \quad \phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(\tau + t) d\tau \quad (9.89)$$

με  $c_{xy}(t)$  τη συνέλιξη των σημάτων  $x(t), y(t)$ . Στις παραπάνω σχέσεις, αλλάξαμε τις μεταβλητές  $t, \tau$  μεταξύ τους στα ολοκληρώματα των συσχετίσεων, για να αναδειχθεί καλύτερα η ομοιότητα με την πράξη της συνέλιξης.

Μπορεί κανείς να δείξει ότι, στη γενικότερη μορφή τους, οι συναρτήσεις συσχέτισης μπορούν να γραφούν με την πράξη της συνέλιξης ως

$$\phi_x(\tau) = x^*(-\tau) * x(\tau) \quad (9.90)$$

$$\phi_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) * y(\tau) \quad (9.91)$$

$$\phi_{yx}(\tau) = y^*(-\tau) * x(\tau) \quad (9.92)$$

όπου προφανώς ο τελεστής της συζυγίας παραλείπεται όταν τα σήματα  $x(t), y(t)$  είναι πραγματικά. Καταλαβαίνετε λοιπόν ότι η συσχέτιση είναι μια συνέλιξη χωρίς τη χρονική αντιστροφή του σήματος!

### 9.2.3 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Στην Παράγραφο αυτή παραθέτουμε μερικά χρήσιμα παραδείγματα που εμπλέκουν συσχετίσεις.

**Παράδειγμα 9.7:**

Υπολογίστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0 \quad (9.93)$$

Λύση:

Θα προσπαθήσουμε να λύσουμε αυτό το παράδειγμα χωρίς τη χρήση σχήματος. Από το ορισμό της αυτοσυσχέτισης, έχουμε

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt \quad (9.94)$$

Το σήμα  $x(t) = e^{-at}u(t)$  ξεκινά από το  $t > 0$  και εκτείνεται ως το  $+\infty$ . Το σήμα  $x(t+\tau)$  δίνεται ως

$$x(t+\tau) = e^{-a(t+\tau)}u(t+\tau), \quad a > 0 \quad (9.95)$$

Άρα

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-a(t+\tau)}u(t+\tau)dt \quad (9.96)$$

Έχουμε

$$u(t)u(t+\tau) = 1, \quad t > 0 \text{ και } t > -\tau \quad (9.97)$$

Η μετατόπιση  $\tau$  μπορεί να είναι θετική ή αρνητική.

- Στην περίπτωση που  $\tau < 0$ :

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-at}e^{-a(t+\tau)}dt = e^{-a\tau} \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-2at}dt = \frac{1}{2a}e^{a\tau}, \quad \tau < 0 \quad (9.98)$$

- Στην περίπτωση που  $\tau > 0$ :

$$\phi_x(\tau) = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-a(t+\tau)}dt = e^{-a\tau} \int_0^{+\infty} e^{-2at}dt = \frac{1}{2a}e^{-a\tau}, \quad \tau > 0 \quad (9.99)$$

Συνολικά

$$\phi_x(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2a}e^{a\tau}, & \tau < 0 \\ \frac{1}{2a}e^{-a\tau}, & \tau > 0 \end{cases} \quad (9.100)$$

και πιο συνοπτικά μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{2a}e^{-a|\tau|}, \quad a > 0 \quad (9.101)$$

**Παράδειγμα 9.8:**

Χρησιμοποιώντας της ανισότητα Schwarz

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2dt \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2dt \quad (9.102)$$

δείξτε ότι

$$(\alpha') |\phi_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{\phi_x(0)\phi_y(0)} \quad (\beta') |\phi_x(\tau)| \leq |\phi_x(0)|$$

Σε ποιά περίπτωση ισχύει η ισότητα στη Σχέση (9.102);

Λύση:

(α) Είναι

$$|\phi_{xy}(\tau)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \phi_x(0)\phi_y(0) \quad (9.103)$$

οπότε

$$|\phi_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{\phi_x(0)\phi_y(0)} \quad (9.104)$$

(β) Είναι

$$|\phi_x(\tau)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \phi_x^2(0) \quad (9.105)$$

κι άρα

$$|\phi_x(\tau)| \leq |\phi_x(0)| \quad (9.106)$$

Η ισότητα στην ανισότητα Schwarz ισχύει στην περίπτωση που  $y(t) = ax(t)$ . Επιβεβαιώστε το! ☺

### Παράδειγμα 9.9:

Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση  $\phi_{yx}(\tau)$  των δυο παρακάτω σημάτων.

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t - \frac{1}{2}}{1}\right) \quad (9.107)$$

$$y(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (9.108)$$

Βρείτε την ετεροσυσχέτιση  $\phi_{xy}(\tau)$  χωρίς να κάνετε ξανά πράξεις.

Λύση:

Κάνουμε την μετατροπή  $x(t) \rightarrow x(t+\tau)$  όπως στο Σχήμα 9.8. Άρα θα έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

• Περίπτωση (α):

$$1 - \tau < 0 \implies \tau > 1, \text{ με } \phi_{yx}(\tau) = 0 \quad (9.109)$$

• Περίπτωση (β):

$$1 - \tau > 0 \text{ και } -\tau < 0 \iff 0 < \tau < 1 \quad (9.110)$$

με

$$\phi_{yx}(\tau) = \int_0^{1-\tau} (1-t)dt = t - \frac{t^2}{2} \Big|_0^{1-\tau} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tau^2 \quad (9.111)$$

• Περίπτωση (γ):

$$1 - \tau > 1 \text{ και } -\tau < 1 \iff -1 < \tau < 0 \quad (9.112)$$

με

$$\phi_{yx}(\tau) = \int_{-\tau}^1 (1+t)dt = t + \frac{t^2}{2} \Big|_{-\tau}^1 = \frac{1}{2} + \tau + \frac{1}{2}\tau^2 \quad (9.113)$$

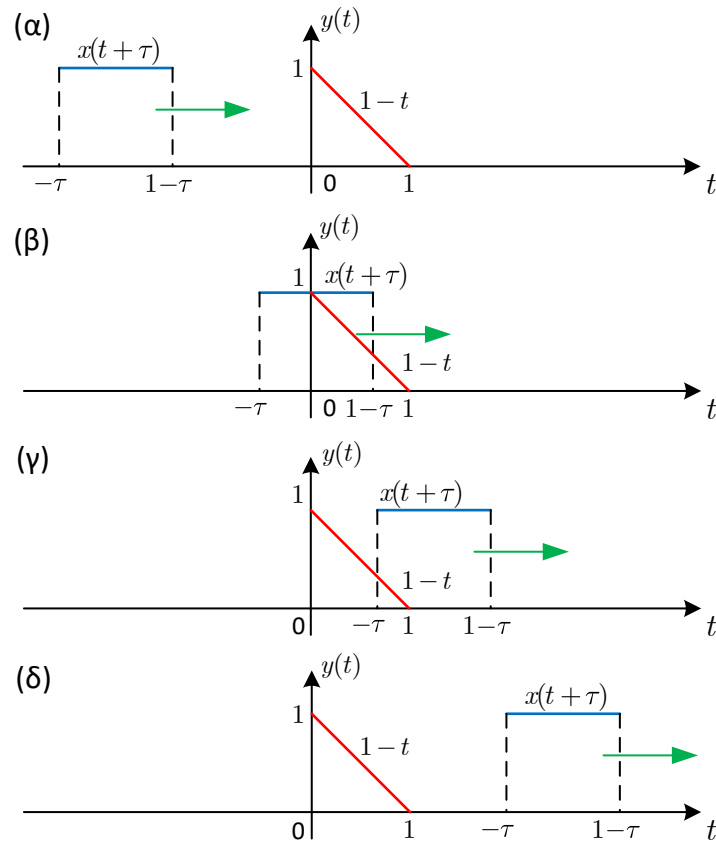
• Περίπτωση (δ):

$$\tau < -1, \text{ με } \phi_{yx}(\tau) = 0 \quad (9.114)$$

Άρα

$$\phi_{yx}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tau^2, & 0 < \tau < 1 \\ \frac{1}{2} + \tau + \frac{1}{2}\tau^2, & -1 < \tau < 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (9.115)$$

Από γνωστές ιδιότητες,  $\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}(-\tau)$



Σχήμα 9.8: Ετεροσυσχέτιση Παραδείγματος 9.9.

### 9.3 Φασματικές Πυκνότητες

Έχουμε δει σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι τα σήματα ισχύος δεν μπορούν να μελετηθούν με τον ορισμό του μετασχ. Fourier, καθώς το σχετικό ολοκλήρωμα δε συγκλίνει. Για την εύρεση του μετασχηματισμού, χρησιμοποιήσαμε έννοιες όπως αυτή της συνάρτησης Δέλτα. Ακόμα και τότε όμως, ένα σήμα δεν είναι βέβαιο ότι έχει μετασχ. Fourier. Αυτό προφανώς θέτει προβλήματα όταν θέλει κανείς να μελετήσει το φασματικό περιεχόμενο τέτοιων σημάτων ή αν θέλει να μελετήσει την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος όταν στην είσοδό του παρουσιάζεται ένα σήμα ισχύος. Σε αυτές τις περιπτώσεις – αλλά όχι μόνο σε αυτές – καταφεύγουμε σε εναλλακτικούς τρόπους υπολογισμού του φασματικού περιεχομένου, και αυτοί οι τρόποι περιλαμβάνουν τη μελέτη των μετασχ. Fourier των συναρτήσεων συσχέτισης, οι οποίοι ονομάζονται **Φασματικές Πυκνότητες**. Οι Φασματικές Πυκνότητες σχετίζονται άμεσα με την **κατανομή της ενέργειας ή ισχύος** των αντίστοιχων σημάτων, όπως θα δούμε άμεσα.

#### 9.3.1 Φασματικές Πυκνότητες Ενέργειας

Ας ξεκινήσουμε θέτοντας ένα ερώτημα του οποίου την απάντηση ήδη ξέρουμε: **τι πρέπει να κάνουμε για να βρούμε την ενέργεια ενός σήματος;** Ο Parseval μας έχει ήδη δώσει την απάντηση: “ολοκληρώστε τη συνάρτηση  $|X(f)|^2$  ως προς  $f$ . Η τιμή που θα πάρετε αποτελεί την ενέργεια του σήματος”. Φαίνεται ξεκάθαρα λοιπόν ότι η συνάρτηση

$$G(f) = |X(f)|^2 \quad (9.116)$$

παίζει μεγάλο ρόλο στην υπόθεση “ενέργεια” – και γι’ αυτό άλλωστε ονομάζεται **φάσμα ενέργειας**! Η συνάρτηση αυτή μας πληροφορεί για το πως μεταβάλλεται η ποσότητα αυτή ως προς τις διάφορες συχνότητες. Μάλιστα, αφού το ολοκλήρωμα Parseval μας δίνει τη συνολική ενέργεια, θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι το

$$\int_{-f_1}^{f_1} G(f) df \quad (9.117)$$

μας δίνει την ενέργεια σε ένα συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων  $[-f_1, f_1]$ . Πράγματι, αυτό ισχύει! Η συνάρτηση  $G(f)$  μας πληροφορεί για το πως κατανέμεται η ενέργεια ενός σήματος στις διάφορες συχνότητες!

Αν θέλουμε λοιπόν να απεικονίσουμε γραφικά αυτή τη συνάρτηση  $G(f)$ , ώστε να έχουμε μια εικόνα της κατανομής της ενέργειας του σήματος ανά συχνότητα, τι πρέπει να κάνουμε; Μόλις δυο βήματα:

- Να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier  $X(f)$  του σήματος  $x(t)$
- Να βρούμε το μέτρο του στο τετράγωνο,  $|X(f)|^2 = X_R^2(f) + X_I^2(f)$

Μήπως όμως υπάρχει κάποια συνάρτηση  $g(t)$  της οποίας ο μετασχ. Fourier είναι το φάσμα  $G(f)$ ; Κι αν υπάρχει, τι σχέση έχει η συνάρτηση  $g(t)$  με το σήμα  $x(t)$ , τόσο στο χώρο του χρόνου όσο και σε αυτόν της συχνότητας;

Ας υπολογίσουμε λοιπόν τον αντίστροφο μετασχ. Fourier της συνάρτησης  $G(f)$ ! Είναι

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi ft}df \quad (9.118)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)X^*(f)e^{j2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \right)^* e^{j2\pi ft}df \quad (9.119)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau)e^{j2\pi f\tau}d\tau \right) e^{j2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi f(t+\tau)}df \right) d\tau \quad (9.120)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau)x(t+\tau)d\tau = \phi_x(t) \quad (9.121)$$

Σπουδαίο αποτέλεσμα! Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του φάσματος ενέργειας  $G(f) = |X(f)|^2$  είναι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $\phi_x(\tau)$ , κι αυτός ονομάζεται **Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας - Energy Spectral Density!**

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η φασματική πυκνότητα ενέργειας ενός σήματος είναι

- πραγματική συνάρτηση
- θετική για κάθε  $f \in \mathbb{R}$
- εξαρτώμενη μόνο από το μετασχ. Fourier του σήματος ενέργειας  $x(t)$  - που είμαστε σίγουροι/ες ότι υπάρχει.

Δείτε ότι η φασματική πυκνότητα ενέργειας είναι ανεξάρτητη του φάσματος φάσης του σήματος. Αυτό σημαίνει ότι η όποια μετακίνηση του σήματος στο χρόνο είναι άνευ σημασίας για την κατανομή της ενέργειας του: λογικό, αν σκεφτεί κανείς ότι αν μετατοπίσει κανείς στο χρόνο ένα σήμα, αυτό δεν αλλάζει την ενέργειά του.

Πλέον, ας αφήσουμε το συμβολισμό  $g(t) \longleftrightarrow G(f)$  κι ας συμβολίσουμε το ζεύγος αυτοσυσχέτισης - φασματικής πυκνότητας ενέργειας ως

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2 = F\{\phi_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \quad (9.122)$$

Αντιστρόφως, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μπορεί να βρεθεί μέσω της φασματικής πυκνότητας ενέργειας ως

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f)e^{j2\pi f\tau}df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau}df \quad (9.123)$$

Αν θέσουμε  $\tau = 0$  στην παραπάνω σχέση, έχουμε

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = E_x \quad (9.124)$$

λόγω του Θεωρήματος του Parseval. Η τελευταία σχέση υποστηρίζει ακριβώς την πρότασή μας σχετικά με το ρόλο της φασματικής πυκνότητας ενέργειας ως αναπαράσταση της κατανομής της ενέργειας ενός σήματος ανά συχνότητα.

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα, αν υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier της ετεροσυσχέτισης  $\phi_{xy}(\tau)$  δυο σημάτων ενέργειας  $x(t), y(t)$ , θα καταλήξουμε στη σχέση

$$\Phi_{xy}(f) = F\{\phi_{xy}(\tau)\} = X^*(f)Y(f) \quad (9.125)$$

η οποία - αντίστοιχα με πριν - ονομάζεται **Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας - Interspectral Energy Density**. Αντίστοιχα, για την ετεροσυσχέτιση  $\phi_{yx}(\tau)$ , θα είναι

$$\Phi_{yx}(f) = F\{\phi_{yx}(\tau)\} = Y^*(f)X(f) \quad (9.126)$$

και ονομάζεται ακριβώς όμοια - οι δείκτες καθορίζουν για ποιά διαφασματική πυκνότητα ενέργειας μιλάμε κάθε φορά.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

### Παράδειγμα 9.10:

Στην Παράγραφο 9.2.1.3, υπολογίσαμε την αυτοσυσχέτιση του τετραγωνικού παλμού και δείξαμε ότι

$$\phi_x(\tau) = A^2 T \text{tri}\left(\frac{\tau}{T}\right) \quad (9.127)$$

Βρείτε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας του τετραγωνικού παλμού.

Λύση:

Η φασματική πυκνότητα ενέργειας  $\Phi_x(f)$  δίνεται εύκολα ως

$$\Phi_x(f) = A^2 T^2 \text{sinc}^2(fT) \quad (9.128)$$

γιατί γνωρίζουμε ότι

$$\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow X(f) = AT \text{sinc}(fT) \quad (9.129)$$

και

$$|X(f)|^2 = (AT \text{sinc}(fT))^2 = A^2 T^2 \text{sinc}^2(fT) = \Phi_x(f) \quad (9.130)$$

που είναι και το ζητούμενο.

### Παράδειγμα 9.11:

Έστω τα γνωστά σας σήματα

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0 \quad (9.131)$$

$$y(t) = e^{-2at}u(t), \quad a > 0 \quad (9.132)$$

(α') Υπολογίστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $\phi_{xx}(\tau)$  του σήματος  $x(t)$ .

(β') Υπολογίστε τη φασματική πυκνότητα ενέργειάς του,  $\Phi_x(f)$ .

(γ') Υπολογίστε τη συνάρτηση ετεροσυσχέτισης  $\phi_{xy}(\tau)$  και τη διαφασματική πυκνότητα ενέργειας,  $\Phi_{xy}(f)$ .

Λύση:

α') Είναι

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-a(t+\tau)}u(t+\tau)dt = e^{-a\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}e^{-at}u(t)u(t+\tau)dt \quad (9.133)$$

$$= e^{-a\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2at}u(t)u(t+\tau)dt \quad (9.134)$$

Είναι

$$u(t)u(t+\tau) = \begin{cases} 1, & t > 0 \text{ και } t > -\tau \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (9.135)$$

Έχουμε δύο περιπτώσεις:

- $-\tau < 0 \implies \tau > 0$ , τότε

$$\phi_x(\tau) = e^{-\alpha\tau} \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt = e^{-\alpha\tau} \frac{1}{-2\alpha} e^{-2\alpha t} \Big|_0^{+\infty} \quad (9.136)$$

$$= -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha\tau} (0 - 1) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha\tau}, \quad \tau > 0 \quad (9.137)$$

- $-\tau > 0 \implies \tau < 0$ , τότε

$$\phi_x(\tau) = e^{-\alpha\tau} \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt = e^{-\alpha\tau} \frac{1}{-2\alpha} e^{-2\alpha t} \Big|_{-\tau}^{+\infty} \quad (9.138)$$

$$= -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha\tau} (0 - e^{2\alpha\tau}) = \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha\tau}, \quad \tau < 0 \quad (9.139)$$

Οπότε συνολικά

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{2\alpha} (e^{-\alpha\tau} u(\tau) + e^{\alpha\tau} u(-\tau)) \quad (9.140)$$

β') Είναι

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2 = \left| \frac{1}{\alpha + j2\pi f} \right|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} \quad (9.141)$$

γ') Είναι

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t} u(t) e^{-2\alpha(t+\tau)} u(t+\tau) dt = e^{-2\alpha\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3\alpha t} u(t) u(t+\tau) dt \quad (9.142)$$

Όμοια με πριν διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Στην πρώτη περίπτωση

$$-\tau < 0 \implies \tau > 0 : \phi_{xy}(\tau) = e^{-2\alpha\tau} \int_0^{+\infty} e^{-3\alpha t} dt = e^{-2\alpha\tau} \frac{1}{-3\alpha} e^{-3\alpha t} \Big|_0^{+\infty} \quad (9.143)$$

$$= -\frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} (0 - 1) = \frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau}, \quad \tau > 0 \quad (9.144)$$

- Στη δεύτερη περίπτωση

$$-\tau > 0 \implies \tau < 0 : \phi_{xy}(\tau) = e^{-2\alpha\tau} \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-3\alpha t} dt = -\frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} e^{-3\alpha t} \Big|_{-\tau}^{+\infty} \quad (9.145)$$

$$= -\frac{1}{3\alpha} e^{-2\alpha\tau} (0 - e^{3\alpha\tau}) = \frac{1}{3\alpha} e^{\alpha\tau}, \quad \tau < 0 \quad (9.146)$$

Συνολικά

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3\alpha} (e^{-2\alpha\tau} u(\tau) + e^{\alpha\tau} u(-\tau)) \quad (9.147)$$

Η διαφασματική πυκνότητα ενέργειας δίνεται ως

$$\Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) = \left( \frac{1}{\alpha + j2\pi f} \right)^* \frac{1}{2\alpha + j2\pi f} = \frac{1}{(\alpha - j2\pi f)(2\alpha + j2\pi f)} \quad (9.148)$$

### Παράδειγμα 9.12:

Η διαφασματική πυκνότητα ενέργειας ενός σήματος δίνεται ως

$$\Phi_{xy}(f) = \frac{2\text{sinc}(2f)}{2 + j2\pi f} \quad (9.149)$$

Βρείτε τις ετεροσυσχετίσεις των σημάτων,  $\phi_{xy}(\tau)$ ,  $\phi_{yx}(\tau)$ .

Λύση:

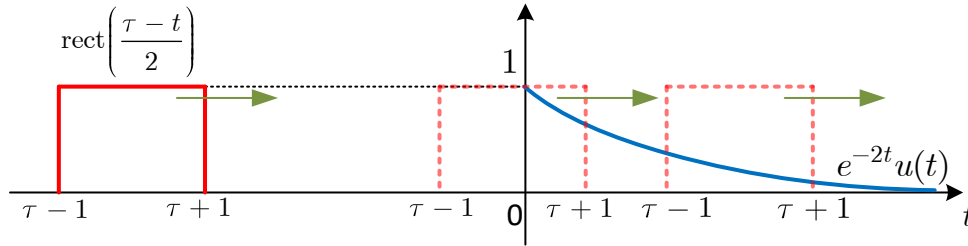
Γνωρίζουμε ότι

$$\Phi_{xy}(f) \longleftrightarrow \phi_{xy}(\tau) \quad (9.150)$$

οπότε αρκεί να βρούμε τον αντίστρ. μετασχ. Fourier της διαφασματικής πυκνότητας ενέργειας. Είναι

$$\Phi_{xy}(f) = 2\text{sinc}(2f) \frac{1}{2 + j2\pi f} \longleftrightarrow \phi_{xy}(\tau) = \text{rect}\left(\frac{\tau}{2}\right) * e^{-2\tau} u(\tau) \quad (9.151)$$

Υπολογίζοντας τη συνέλιξη με τις περιπτώσεις του Σχήματος 9.9 έχουμε



Σχήμα 9.9: Ετεροσυσχέτιση Παραδείγματος 9.12.

$$\phi_{xy}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 - e^{-2(\tau+1)}), & -1 < \tau < 1 \\ \frac{1}{2} (e^{-2(\tau-1)} - e^{-2(\tau+1)}), & \tau > 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (9.152)$$

Γνωρίζοντας ότι  $\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}(-\tau)$ , έχουμε

$$\phi_{yx}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 - e^{-2(1-\tau)}), & -1 < \tau < 1 \\ \frac{1}{2} (e^{2(1+\tau)} - e^{-2(1-\tau)}), & \tau < -1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (9.153)$$

### 9.3.2 Φασματικές Πυκνότητες Ισχύος

Για σήματα ισχύος, μπορούν να οριστούν αντίστοιχες έννοιες. Στη συζήτηση που ακολουθεί, θα διαχωρίσουμε τις περιπτώσεις σημάτων ισχύος σε περιοδικά και μη.

#### 9.3.2.1 Φασματικές Πυκνότητες Ισχύος Περιοδικών Σημάτων

Για περιοδικά σήματα με περίοδο  $T_0$ , η αυτοσυσχέτισή τους δίνεται ως

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t)x(t+\tau)dt \quad (9.154)$$

η οποία είναι περιοδική με την ίδια περίοδο, όπως είδαμε. Ως τέτοια, αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau} \quad (9.155)$$

και έχει μετασχ. Fourier ως

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - k f_0) \quad (9.156)$$

Όμοια με τη συζήτηση της προηγούμενης παραγράφου, η παραπάνω **Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Power Spectral Density** μας περιγράφει πως κατανέμεται η ισχύς ενός περιοδικού σήματος στο χώρο της συχνότητας. Άραγε, αν ολοκληρώσουμε από  $-\infty$  ως  $+\infty$  στη συχνότητα τη φασματική πυκνότητα ισχύος, θα πάρουμε τη συνολική ισχύ του περιοδικού σήματος, όπως υπαγορεύει το θεώρημα του Parseval;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - k f_0) \right) df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - k f_0) df \quad (9.157)$$

κι επειδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0) df = 1 \quad (9.158)$$

θα είναι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = P_x \quad (9.159)$$

πράγμα που επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό μας!

Ας δούμε όμως έναν ακόμα τρόπο υπολογισμού της περιοδικής αυτοσυσχέτισης και της φασματικής πυκνότητας ισχύος. Ας ορίσουμε το σήμα

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t, T_0) x(t + \tau) dt \quad (9.160)$$

όπου το σήμα  $x(t, T_0)$  αποτελεί μια μόνο περίοδο του περιοδικού σήματος - άρα είναι ένα σήμα *ενέργειας*. Είδαμε ωστόσο ότι για σήματα ενέργειας, η αυτοσυσχέτισή τους μπορεί να γραφεί με χρήση της πράξης της συνέλιξης ως

$$\phi_x(\tau) = x^*(-\tau) * x(\tau) \quad (9.161)$$

Έτσι, η Σχέση (9.160) μπορεί να γραφεί ως

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} x^*(-\tau, T_0) * x(\tau) \quad (9.162)$$

Το σήμα  $x(\tau)$  της παραπάνω σχέσης παραμένει ένα περιοδικό σήμα, και γνωρίζουμε ότι ένα περιοδικό σήμα μπορεί να γραφεί ως η συνέλιξη της βασικής περιόδου του με μια σειρά από συναρτήσεις Δέλτα. Άρα το σήμα  $x(\tau)$  μπορεί να γραφεί ως

$$x(\tau) = x(\tau, T_0) * \delta_{T_0}(\tau) = x(\tau, T_0) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - kT_0) \quad (9.163)$$

Αντικαθιστώντας στη Σχέση (9.162), έχουμε

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} x^*(-\tau, T_0) * (x(\tau, T_0) * \delta_{T_0}(\tau)) \quad (9.164)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left( \underbrace{x^*(-\tau, T_0) * x(\tau, T_0)}_{\phi_x(\tau, T_0)} \right) * \delta_{T_0}(\tau) \quad (9.165)$$

$$= \frac{1}{T_0} \phi_x(\tau, T_0) * \delta_{T_0}(\tau) \quad (9.166)$$

όπου  $\phi_x(\tau, T_0)$  συμβολίζει την αυτοσυσχέτιση της βασικής περιόδου του σήματος (η οποία, υπενθυμίζουμε, είναι σήμα ενέργειας).

Πώς ερμηνεύει κανείς την παραπάνω σχέση; Ως ότι η αυτοσυσχέτιση ενός περιοδικού σήματος μπορεί να υπολογιστεί σε δυο βήματα:

#### Υπολογισμός Αυτοσυσχέτισης Περιοδικού Σήματος

1. Υπολογίζουμε την αυτοσυσχέτιση  $\phi_x(\tau, T_0)$  μιας περιόδου  $x(t, T_0)$  του περιοδικού σήματος  $x(t)$ .
2. Επαναλαμβάνουμε το αποτέλεσμα σε ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου και πολλαπλασιάζουμε με  $1/T_0$ , δηλ.

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \phi_x(\tau, T_0) * \delta_{T_0}(\tau) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_x(\tau - kT_0, T_0) \quad (9.167)$$

Δείξαμε όμως ωστόσο ότι η αυτοσυσχέτιση ενός περιοδικού σήματος αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi f_0 k \tau} \quad (9.168)$$

της οποίας ο μετασχ. Fourier είναι

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0) \quad (9.169)$$

Είναι η παραπάνω σχέση ισοδύναμη με το μετασχ. Fourier της Σχέσης (9.166); Ας το δούμε.

$$F\{\phi_x(\tau)\} = \frac{1}{T_0} F\{\phi_x(\tau, T_0) * \delta_{T_0}(\tau)\} \quad (9.170)$$

$$= \frac{1}{T_0} F\{\phi_x(\tau, T_0)\} F\{\delta_{T_0}(\tau)\} \quad (9.171)$$

$$= \frac{1}{T_0} \Phi_x(f, T_0) \Delta_{\frac{1}{T_0}}(f) \quad (9.172)$$

με

$$\Delta_{\frac{1}{T_0}}(f) = F\{\delta_{T_0}(\tau)\} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0) \quad (9.173)$$

το μετασχ. Fourier μιας σειράς από συναρτήσεις Δέλτα που απέχουν  $T_0$  μεταξύ τους. Εν τέλει η Σχέση (9.172) γράφεται

$$F\{\phi_x(\tau)\} = \frac{1}{T_0} \Phi_x(f, T_0) \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_0) \quad (9.174)$$

$$= \frac{1}{T_0^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_x(kf_0, T_0) \delta(f - kf_0) \quad (9.175)$$

με  $\Phi_x(f, T_0) = |X(f, T_0)|^2$  τη φασματική πυκνότητα ενέργειας του σήματος  $x(t, T_0)$ , δηλ. του σήματος της βασικής περιόδου.

Συγκρίνοντας τις Σχέσεις (9.169,9.175) βλέπουμε ότι

$$|X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2} \Phi_x(f, T_0) \Big|_{f=kf_0} \quad (9.176)$$

που μας δίνει μια πολύ σπουδαία εναλλακτική προσέγγιση. Οι συντελεστές Fourier της αυτοσυσχέτισης και η φασματική πυκνότητα ισχύος ενός περιοδικού σήματος μπορούν να υπολογιστούν σε τρία βήματα:

#### Υπολογισμός Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος Περιοδικού Σήματος

1. Υπολογίζουμε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας  $\Phi_x(f, T_0)$  μιας περιόδου  $x(t, T_0)$  - που είναι σήμα ενέργειας - του περιοδικού σήματος  $x(t)$ :

$$\Phi_x(f, T_0) = |X(f, T_0)|^2 \quad (9.177)$$

2. Δειγματοληπτούμε την παραπάνω φασματική πυκνότητα ενέργειας ανά  $kf_0$ , και το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με  $\frac{1}{T_0^2}$  για να λάβουμε τους συντελεστές Fourier της περιοδικής αυτοσυσχέτισης:

$$|X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2} \Phi_x(f, T_0) \Big|_{f=kf_0} \quad (9.178)$$

3. Η φασματική πυκνότητα ισχύος δίνεται ως

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0) \quad (9.179)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

**Παράδειγμα 9.13:**

Δείξαμε στην Παράγραφο 9.2.1.1 ότι για το περιοδικό σήμα  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ , η αυτοσυσχέτισή του δίνεται ως

$$\phi_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \quad (9.180)$$

Υπολογίστε τη φασματική πυκνότητα ισχύος.

Λύση:

Η φασματική πυκνότητα ισχύος του δίνεται εύκολα ως

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = \frac{A^2}{4} \delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4} \delta(f + f_0) \quad (9.181)$$

**Παράδειγμα 9.14:**

Δίνεται το περιοδικό σήμα  $x(t)$  που περιγράφεται σε μια περίοδο του ως

$$x(t, T_0) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & T < t < T_0 \end{cases} \quad (9.182)$$

με  $T = T_0/4$ . Υπολογίστε τη φασματική πυκνότητα ισχύος του.

Λύση:

Μπορούμε να βρούμε το ζητούμενο βρίσκοντας πρώτα την φασματική πυκνότητα ενέργειας του σήματος μιας περιόδου,  $x(t, T_0)$ , και στη συνέχεια να δειγματοληπτήσουμε το αποτέλεσμα ανά  $kf_0$ . Τέλος, πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με τη σταθερά  $1/T_0^2$  και θα έχουμε τότε τους συντελεστές Fourier της αυτοσυσχέτισης του περιοδικού σήματος. Για το σήμα  $x(t, T_0)$  έχουμε

$$\Phi_x(f, T_0) = |X(f, T_0)|^2 = \left| \frac{T_0}{4} \operatorname{sinc}\left(f \frac{T_0}{4}\right) e^{-j2\pi f \frac{T_0}{8}} \right|^2 = \frac{T_0^2}{16} \operatorname{sinc}^2\left(f \frac{T_0}{4}\right) \quad (9.183)$$

Δειγματοληπτώντας ανά  $f = kf_0 = \frac{k}{T_0}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  και πολλαπλασιάζοντας με τη σταθερά  $1/T_0^2$ , έχουμε

$$|X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2} \frac{T_0^2}{16} \operatorname{sinc}^2\left(f \frac{T_0}{4}\right) \Big|_{f=\frac{k}{T_0}} = \frac{1}{16} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right) \quad (9.184)$$

Οπότε τελικά

$$\Phi_x(f) = \frac{1}{16} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right) \delta(f - kf_0) \quad (9.185)$$

■  
Αν ακολουθήσουμε τον ίδιο συλλογισμό για την ετεροσυσχέτιση  $\phi_{xy}(\tau)$  περιοδικών σημάτων, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\Phi_{xy}(f) = \frac{1}{T_0^2} \Phi_{xy}(f, T_0) \Delta_{\frac{1}{T_0}}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k \delta(f - kf_0) \quad (9.186)$$

όπου

$$\Phi_{xy}(f, T_0) = X^*(f, T_0) Y(f, T_0) \quad (9.187)$$

η διαφασματική πυκνότητα ενέργειας,  $X^*(f, T_0)$  ο συζυγής μετασχ. Fourier του σήματος μιας περιόδου  $x(t, T_0)$ , και  $Y(f, T_0)$  ο αντίστοιχος του σήματος μιας περιόδου  $y(t, T_0)$ . Η παραπάνω σχέση μας δίνει ότι

$$X_k^* = \frac{1}{T_0} X^*(kf_0, T_0) \quad (9.188)$$

$$Y_k = \frac{1}{T_0} Y(kf_0, T_0) \quad (9.189)$$

Φυσικά, για την ετεροσυσχέτιση  $\phi_{yx}(\tau)$  τα πράγματα είναι αντίστοιχα, και τα παραθέτουμε εδώ για πληρότητα:

$$\Phi_{yx}(f) = \frac{1}{T_0^2} \Phi_{yx}(f, T_0) \Delta_{\frac{1}{T_0}}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y_k^* X_k \delta(f - kf_0) \quad (9.190)$$

όπου

$$x\Phi_{yx}(f, T_0) = Y^*(f, T_0)X(f, T_0) \quad (9.191)$$

η διαφασματική πυκνότητα ενέργειας,  $Y^*(f, T_0)$  ο συζυγής μετασχ. Fourier του σήματος μιας περιόδου  $y(t, T_0)$ , και  $X(f, T_0)$  ο αντίστοιχος του σήματος μιας περιόδου  $x(t, T_0)$ . Η παραπάνω σχέση μας δίνει ότι

$$Y_k^* = \frac{1}{T_0} Y^*(kf_0, T_0) \quad (9.192)$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(kf_0, T_0) \quad (9.193)$$

Είναι πολύ σημαντικό να σταματήσουμε εδώ και να σκεφτούμε το εξής: έχουμε καταφέρει να σχετίσουμε τις φασματικές πυκνότητες ενέργειας και ισχύος (για περιοδικά σήματα) όχι μόνο με το μετασχ. Fourier των συναρτήσεων συσχέτισής τους (που ήταν λίγο-πολύ προφανές) αλλά και με το μετασχ. Fourier των σημάτων αυτών! Με άλλα λόγια, **όλες οι φασματικές πυκνότητες που βρήκαμε μπορούν να υπολογιστούν από το μετασχ. Fourier των σημάτων που αυτές αφορούν!** Έμεινε μόλις μια κατηγορία για την οποία επιθυμούμε να κάνουμε το ίδιο: τα απεριοδικά σήματα ισχύος! Άραγε θα το καταφέρουμε;

### 9.3.2.2 Φασματικές Πυκνότητες Ισχύος Απεριοδικών Σημάτων

Ας δούμε, φτάνοντας στο τέλος αυτής της συζήτησής μας, τις σχέσεις που συνδέουν τις συσχετίσεις απεριοδικών σημάτων ισχύος με το χώρο της συχνότητας. Όπως νωρίτερα, ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης σημάτων ισχύος θα ονομάζεται *Φασματική Πυκνότητα Ισχύος*, ενώ ο αντίστοιχος της ετεροσυσχέτισης θα ονομάζεται *Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος*, δηλ.

$$\phi_x(\tau) \longleftrightarrow \Phi_x(f) \quad (9.194)$$

$$\phi_{xy}(\tau) \longleftrightarrow \Phi_{xy}(f) \quad (9.195)$$

$$\phi_{yx}(\tau) \longleftrightarrow \Phi_{yx}(f) \quad (9.196)$$

Όμως, μια πολύ σημαντική διαφορά σε σχέση με τα σήματα ενέργειας είναι ότι ο μετασχ. Fourier των συσχετίσεων σημάτων ισχύος δε σχετίζεται απαραίτητα με το μετασχ. Fourier τους. Ακολουθώντας όμως το γεγονός ότι η μέση ισχύς ενός σήματος είναι η χρονική μέση τιμή της ενέργειας ενός τμήματος του σήματος, όσο το τμήμα αυτό μεγαλώνει, δηλ.

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{E_T}{T} \quad (9.197)$$

με

$$E_T = \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (9.198)$$

μπορεί κανείς να δείξει ότι για τα σήματα ισχύος

$$\Phi_x(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} |X(f, T)|^2 \quad (9.199)$$

με

$$X(f, T) = F \left\{ x(t) \text{rect} \left( \frac{t}{T} \right) \right\} \quad (9.200)$$

δηλ. ο όρος  $X(f, T)$  συμβολίζει το μετασχ. Fourier του παραθυροποιημένου σήματος  $x(t)$ . Το παραπάνω όριο μπορεί όμως να μην υπάρχει. Αυτό μας οδηγεί στη διαπίστωση ότι η μελέτη απεριοδικών σημάτων ισχύος στο χώρο της συχνότητας πρέπει να γίνει μέσω του μετασχ. Fourier των συσχετίσεων.

Ας δούμε δυο απλά παραδείγματα.

**Παράδειγμα 9.15:**

Στην Παράγραφο 9.2.1.2 δείξαμε ότι η αυτοσυσχέτιση  $\phi_x(\tau)$  του σήματος ισχύος  $x(t) = \text{sgn}(t)$  είναι

$$\phi_x(\tau) = 1 \quad \forall \tau \quad (9.201)$$

Υπολογίστε τη φασματική πυκνότητα ισχύος.

Λύση:

Η φασματική πυκνότητα ισχύος δίνεται εύκολα ως

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = F\{1\} = \delta(f) \quad (9.202)$$

**Παράδειγμα 9.16:**

Στην ίδια Παράγραφο δείξαμε ότι η αυτοσυσχέτιση  $\phi_x(\tau)$  του σήματος ισχύος  $x(t) = u(t)$  είναι

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{2} \quad \forall \tau \quad (9.203)$$

Υπολογίστε τη φασματική πυκνότητα ισχύος.

Λύση:

Η φασματική πυκνότητα ισχύος δίνεται εύκολα ως

$$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\} = F\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\delta(f) \quad (9.204)$$

**9.3.3 Ιδιότητες Φασματικών Πυκνοτήτων**

Οι φασματικές πυκνότητες έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες.

(α)  $\Phi_x(f) = \Phi_x(-f)$ , για πραγματικά σήματα.

(β)  $\Phi_x(f) \geq 0, \forall f$ .

(γ)  $\Phi_{xy}(f) = \Phi_{yx}^*(f)$

**9.4 Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ Συστήματα**

Η μελέτη συσχετίσεων και φασματικών πυκνοτήτων σε σχέση με ΓΧΑ συστήματα είναι πολύ σημαντική γιατί μας πληροφορεί για την μεταβολή του φάσματος ενέργειας ή ισχύος ενός σήματος κατά το πέρασμά του από ένα ΓΧΑ σύστημα. Σε πολλές εφαρμογές μας είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε όχι μόνο το ποσό/ποσοστό της ενέργειας ή ισχύος της εισόδου που παραμένει στην έξοδο αλλά και το πώς έχει ανακαταμεληθεί αυτή η ενέργεια ή ισχύς στην έξοδο.

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την χροστική απόκριση  $h(t)$  και τη συχνотική απόκριση  $H(f)$ , με είσοδο  $x(t)$  και έξοδο  $y(t)$ . Ας συμβολίσουμε με  $\phi_x(\tau)$ ,  $\phi_y(\tau)$  τις αυτοσυσχετίσεις εισόδου και εξόδου αντίστοιχα, και με  $\Phi_x(f)$ ,  $\Phi_y(f)$  τις αντίστοιχες φασματικές πυκνότητες. Ας υποθέσουμε ότι τα σήματα που αναλύουμε είναι πραγματικά κι ας προσπαθήσουμε να βρούμε μια σχέση των φασματικών πυκνοτήτων της εξόδου του ΓΧΑ συστήματος και του μετασχηματισμού Fourier τους.

Γνωρίζουμε ότι η πράξη της συσχέτισης μπορεί να γραφεί ως πράξη συνέλιξης ως

$$\phi_{xy}(\tau) = x(-\tau) * y(\tau) \quad (9.205)$$

κι έτσι η αυτοσυσχέτιση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος γράφεται ως

$$\phi_y(\tau) = y(\tau) * y(-\tau) = (x(\tau) * h(\tau)) * (x(-\tau) * h(-\tau)) \quad (9.206)$$

$$= (x(\tau) * x(-\tau)) * (h(\tau) * h(-\tau)) \quad (9.207)$$

$$= \phi_x(\tau) * \phi_h(\tau) \quad (9.208)$$

λόγω της σχέσης

$$x(at) * y(at) = \frac{1}{|a|} c_{xy}(at) \quad (9.209)$$

Στο χώρο του μετασχ. Fourier η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) \quad (9.210)$$

Αντίστοιχα για την ετεροσυσχέτιση της εισόδου με την έξοδο, θα έχουμε

$$\phi_{xy} = x(-\tau) * y(\tau) = x(-\tau) * (x(\tau) * h(\tau)) \quad (9.211)$$

$$= (x(\tau) * x(-\tau)) * h(\tau) \quad (9.212)$$

$$= \phi_x(\tau) * h(\tau) \quad (9.213)$$

Στο χώρο του μετασχ. Fourier θα έχουμε

$$\Phi_{xy}(f) = \Phi_x(f)H(f) \quad (9.214)$$

Αντίστοιχα ακριβώς μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\phi_{yx} = x(\tau) * y(-\tau) = \phi_x(\tau) * h(-\tau) \longleftrightarrow \Phi_{yx}(f) = \Phi_x(f)H^*(f) \quad (9.215)$$

#### 9.4.1 Σήματα Ενέργειας

Θεωρώντας πως η κρουστική απόκριση και η είσοδος είναι σήματα ενέργειας, η Σχέση (9.210) γράφεται ως

$$\Phi_y(f) = |X(f)|^2|H(f)|^2 = |Y(f)|^2 \quad (9.216)$$

όπως ακριβώς αναμενόταν αφού η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος στο χώρο της συχνότητας δίνεται ως

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (9.217)$$

Αντίστοιχα, η Σχέση (9.214) γράφεται

$$\Phi_{xy}(f) = |X(f)|^2H(f) \quad (9.218)$$

και η Σχέση (9.215) δίνει

$$\Phi_{yx}(f) = |X(f)|^2H^*(f) \quad (9.219)$$

#### 9.4.2 Περιοδικά Σήματα

Θεωρώντας πως η κρουστική απόκριση είναι σήμα ενέργειας αλλά η είσοδος είναι περιοδικό σήμα που αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier, η Σχέση (9.210) γράφεται ως

$$\Phi_y(f) = |H(f)|^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |H(kf_0)|^2 |X_k|^2 \delta(f - kf_0) \quad (9.220)$$

πράγμα που περιμέναμε, αφού ξέρουμε ότι οι συντελεστές Fourier της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος όταν σε αυτό παρουσιάζεται μια περιοδική είσοδος δίνονται ως

$$Y_k = X_k H(kf_0) \quad (9.221)$$

Όμοια ακριβώς μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\Phi_{xy}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0) |X_k|^2 \delta(f - kf_0) \quad (9.222)$$

και

$$\Phi_{yx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H^*(kf_0) |X_k|^2 \delta(f - kf_0) \quad (9.223)$$

## 9.4.3 Απεριοδικά Σήματα Ισχύος

Αν τέλος η είσοδος είναι απεριοδικό σήμα ισχύος, τότε

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)|H(f)|^2 \quad (9.224)$$

μια και δεν υπάρχει πάντα σχέση των αυτοσυσχετίσεων των σημάτων ισχύος με το μετασχ. Fourier τους. Όμοια μπορούμε να γράψουμε

$$\Phi_{xy}(f) = \Phi_x(f)H(f) \quad (9.225)$$

και

$$\Phi_{yx}(f) = \Phi_x(f)H^*(f) \quad (9.226)$$

Ας δούμε δυο παραδείγματα.

**Παράδειγμα 9.17:**

Το σήμα

$$x(t) = \text{tri}\left(\frac{t-2}{2}\right) \quad (9.227)$$

περνά από ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση  $h(t) = \text{sinc}(2t)$ . Υπολογίστε και σχεδιάστε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας της εξόδου,  $\Phi_y(f)$ .

Λύση:

Το σήμα  $x(t)$  είναι σήμα ενέργειας με μετασχ. Fourier ως

$$X(f) = 2\text{sinc}^2(2f)e^{-j2\pi f} \quad (9.228)$$

Η φασματική πυκνότητα ενέργειας της εισόδου θα είναι

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2 = 4\text{sinc}^4(2f) \quad (9.229)$$

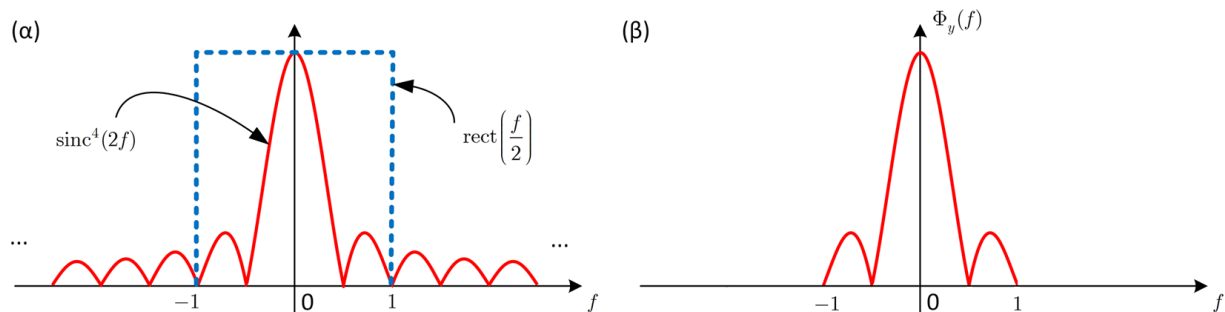
Το σύστημα έχει συχνοτική απόκριση

$$H(f) = \frac{1}{2}\text{rect}\left(\frac{f}{2}\right) \quad (9.230)$$

δηλ. είναι ένα χαμηλοπερατό φίλτρο με πλάτος 0.5 και συχνότητα αποκοπής  $f_c = 1$  Hz. Άρα στην έξοδο θα περάσουν μόνο οι συχνότητες που ανήκουν στο διάστημα  $(-1, 1)$ . Η φασματική πυκνότητα ενέργειας της εξόδου θα είναι

$$\Phi_y(f) = |H(f)|^2\Phi_x(f) = \frac{1}{4}\text{rect}^2\left(\frac{f}{2}\right) \cdot 4\text{sinc}^4(2f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2}\right)\text{sinc}^4(2f) \quad (9.231)$$

Τα σημεία μηδενισμού της συνάρτησης  $\text{sinc}^4(2f)$  είναι ίδια με της  $\text{sinc}(2f)$ , τα οποία γνωρίζουμε, και βρίσκονται στις θέσεις  $f = k/2$  για  $k \in \mathbb{Z}$ . Άρα το φίλτρο  $H(f)$  θα κόβει το σήμα  $\text{sinc}^4(2f)$  στο δεύτερο σημείο μηδενισμού εκατέρωθεν του  $f = 0$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.10(α). Οπότε η παραπάνω φασματική πυκνότητα θα είναι της μορφής του Σχήματος 9.10(β).



Σχήμα 9.10: Σχήμα Άσκησης 9.17.

**Παράδειγμα 9.18:**

Θεωρήστε ένα περιοδικό σήμα ως

$$x(t) = 3 \cos(2\pi 5t) + 2 \cos(2\pi 15t + \pi/3) + \cos(2\pi 25t) \quad (9.232)$$

Αυτό το σήμα εισάγεται σε ένα ΓΧΑ σύστημα με συχνοτική απόκριση

$$H(f) = \frac{j2\pi f}{10 + j2\pi f} \quad (9.233)$$

Έστω ότι το σήμα εξόδου συμβολίζεται ως  $y(t)$ .

(α') Υπολογίστε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της εισόδου.

(β') Βρείτε την φασματική πυκνότητα ισχύος  $\Phi_x(f)$  του σήματος εισόδου.

(γ') Υπολογίστε τη μέση ισχύ του σήματος  $x(t)$ .

(δ') Βρείτε την φασματική πυκνότητα ισχύος  $\Phi_y(f)$  του σήματος εξόδου και υπολογίστε τη μέση ισχύ του.

(ε') Υπολογίστε την διαφασματική πυκνότητα ισχύος  $\Phi_{xy}(f)$  μεταξύ εισόδου και εξόδου. Ποια είναι η φυσική ερμηνεία της φάσης του  $\Phi_{xy}(f)$ ;

Λύση:

(α') Η είσοδος είναι περιοδική με περίοδο  $T_0 = 1/5$  και αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (9.234)$$

για την οποία ξέρουμε ότι έχει αυτοσυσχέτιση

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau} \quad (9.235)$$

Έτσι, για το σήμα  $x(t)$

$$\phi_x(\tau) = \frac{9}{2} \cos(2\pi 5\tau) + 2 \cos(2\pi 15\tau) + \frac{1}{2} \cos(2\pi 25\tau) \quad (9.236)$$

(β') Η φασματική πυκνότητα ισχύος θα δίνεται ως

$$\Phi_x(f) = \frac{9}{2} [\delta(f-5) + \delta(f+5)] + 2 [\delta(f-15) + \delta(f+15)] + \frac{1}{2} [\delta(f-25) + \delta(f+25)] \quad (9.237)$$

(γ') Γνωρίζουμε ότι

$$P_x = \phi_x(0) = \frac{9}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 7 \quad (9.238)$$

(δ') Για τη φασματική πυκνότητα ισχύος της εξόδου, έχουμε

$$\Phi_y(f) = |H(f)|^2 \Phi_x(f) \quad (9.239)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{9}{2} |H(5)|^2 [\delta(f-5) + \delta(f+5)] + 2 |H(15)|^2 [\delta(f-15) + \delta(f+15)] \\ &+ \frac{1}{2} |H(25)|^2 [\delta(f-25) + \delta(f+25)] \end{aligned} \quad (9.240)$$

ενώ για τη μέση ισχύ της εξόδου

$$P_y = \frac{9|H(5)|^2}{2} + 2|H(15)|^2 + \frac{|H(25)|^2}{2} \approx 6.57 \quad (9.241)$$

(ε') Η διαφασματική πυκνότητα ισχύος  $\Phi_{xy}(f)$  θα είναι

$$\Phi_{xy}(f) = H(f)\Phi_x(f) \quad (9.242)$$

κι αφού  $\Phi_x(f) \geq 0, \forall f$ , η φάση του φάσματος  $\Phi_{xy}(f)$  στη συχνότητα  $f_k$  ισούται με  $\angle H(f_k)$ , που αντιπροσωπεύει την καθυστέρηση που εισάγει το σύστημα σε κάθε όρο συχνότητας  $f_k$ .