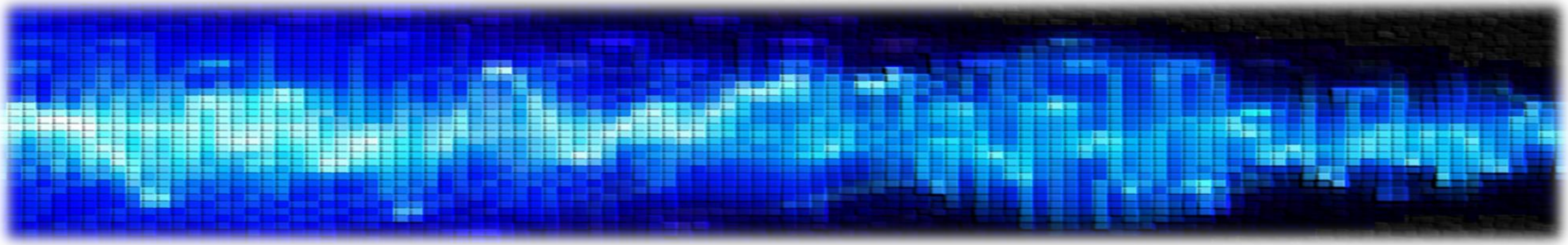
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 17^{Η}



- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

- **Συσχετίσεις (review…)**

REMINDER

- **Περιοδικά Σήματα**

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)y(t+\tau)dt\,, \qquad \phi_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- **Σήματα Ενέργειας**

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad , \qquad \phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- **Σήματα Ισχύος (απεριοδικά)**

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)y(t+\tau)dt\,, \qquad \phi_{yx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Αποτελούν τους μετασχηματισμούς Fourier των συσχετίσεων

$$\phi(\tau) \leftrightarrow \Phi(f)$$

- Θα δούμε ότι οι φασματικές πυκνότητες συνιστούν μια **περιγραφή της κατανομής της ενέργειας ή της ισχύος ενός σήματος (την από κοινού κατανομή της, αν έχουμε δυο σήματα) στο χώρο της συχνότητας**

- Ας προσπαθήσουμε να δούμε αν οι **φασματικές πυκνότητες σχετίζονται** με τους ***μετασχηματισμούς Fourier*** των σημάτων που εμπλέκονται στις συσχετίσεις τους
  - ...δηλ. των μετασχ. Fourier των σημάτων $x(t), y(t)$

- Πριν ξεκινήσουμε με τα σήματα ενέργειας πρώτα, ας κάνουμε έναν «περίπατο» στην έννοια της ενέργειας!

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- **<u>Ερώτηση</u>**: τι πρέπει να κάνουμε για να βρούμε την **ενέργεια** ενός σήματος $x(t)$?
- Ο Parseval μας έχει ήδη πει <u>μια</u> απάντηση
  - *«Ολοκληρώστε τη συνάρτηση $|X(f)|^2 = F\{x(t)\}$ ως προς f. Η τιμή που θα πάρετε αποτελεί την ενέργεια του σήματος»*

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

- Άρα η συνάρτηση $G(f) = |X(f)|^2$ παίζει μεγάλο ρόλο στην υπόθεση «ενέργεια»!
  - Η συνάρτηση αυτή μας πληροφορεί για το πως μεταβάλλεται η ποσότητα $|X(f)|^2$ ως προς τις διάφορες συχνότητες
  - Θα μπορούσε να πει κανείς ότι αν το παραπάνω ολοκλήρωμα μας δίνει τη **συνολική** ενέργεια του σήματος, ένα ολοκλήρωμα που περιλαμβάνει διαφορετικά άκρα ολοκλήρωσης θα μας δίνει μια **μερική** ενέργεια του σήματος
    - …ή εναλλακτικά, μας δίνει την ενέργεια σε μια συγκεκριμένη «μπάντα» συχνοτήτων που εμείς επιλέγουμε ως άκρα ολοκλήρωσης

$$E_{[f_1,f_2]} = \int_{f_1}^{f_2} |X(f)|^2 df$$

- Άρα η συνάρτηση $G(f) = |X(f)|^2$ μας πληροφορεί για το πως **κατανέμεται** η **ενέργεια** του σήματος **στις διάφορες (θετικές και αρνητικές) συχνότητες**!

- **Φασματικές Πυκνότητες**

- Αν θελήσουμε να απεικονίσουμε γραφικά τη συνάρτηση αυτή, $G(f) = |X(f)|^2$, τι πρέπει να κάνουμε?
  - …ώστε να έχουμε μια εικόνα της κατανομής της ενέργειας του σήματος $x(t)$ στο χώρο της συχνότητας

- Πρέπει να:
  1. Υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier $X(f)$ του σήματος $x(t)$
  2. Βρούμε το μέτρο του στο τετράγωνο, $|X(f)|^2 = X_R^2(f) + X_I^2(f)$

- Υπάρχει πιο εύκολος/εναλλακτικός τρόπος?

- Το φάσμα $G(f) = |X(f)|^2$ αντιστοιχεί σε κάποιο σήμα $g(t)$ στο χρόνο?
  - …έτσι ώστε ο μετασχ. Fourier του σήματος αυτού να μας δώσει κατευθείαν αυτό που θέλουμε?
  - Αν ναι, τι σχέση έχει το σήμα $g(t)$ με το σήμα $x(t)$ το οποίο μελετάμε ενεργειακά στο χώρο της συχνότητας?

- Οι ερωτήσεις αυτές θα απαντηθούν στη συνέχεια ☺
  - …τόσο για σήματα ενέργειας όσο και για σήματα ισχύος

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Ας ξεκινήσουμε με τα σήματα ενέργειας
- Ορολογία:
- Ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης **ενός** σήματος ενέργειας ονομάζεται **Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας** (Energy Spectral Density – ESD)
- Ο μετασχ. Fourier της ετεροσυσχέτισης **δυο** σημάτων ενέργειας ονομάζεται **Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας** (Energy Interspectral Density – EID)
- Μας πληροφορούν για την ***κατανομή*** της ενέργειας σημάτων στο χώρο της συχνότητας
  - Την κατανομή της ενέργειας του σήματος $x(t)$, ή
  - Την από κοινού κατανομή της ενέργειας των σημάτων $x(t), y(t)$

- **Φασματικές Πυκνότητες**

$$x(\tau + t_0) \leftrightarrow X(f)e^{j2\pi f t_0}$$

- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας
- Είναι

$$F\{\phi_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt\right)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau+t)\, e^{-j2\pi f\tau}d\tau\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\left(X(f)e^{j2\pi f t}\right)dt$$

$$= X(f)\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{j2\pi f t}dt = X(f)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt\right)^* = X(f)X^*(f) = |X(f)|^2$$

- Άρα ο **μετ. Fourier της αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ενέργειας** ισούται με $|X(f)|^2$

$$\boxed{\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2}$$

- Παρατηρήστε ότι πρόκειται για πραγματική, θετική συνάρτηση της συχνότητας, και ανεξάρτητη της αρχικής φάσης του σήματος
- Ιδιότητες

$$\Phi_x(f) = \Phi_x(-f), \qquad x(t) \in \Re$$

$$\Phi_x(f) \geq 0, \qquad \forall\, f$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2$$

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+0)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

- Ο αντίστροφος μετασχ. Fourier θα είναι

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df$$

- Αν θέσουμε $\tau = 0$, παίρνουμε

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = E_x$$

Parseval

- Άρα

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df = E_x = \phi_x(0)}$$

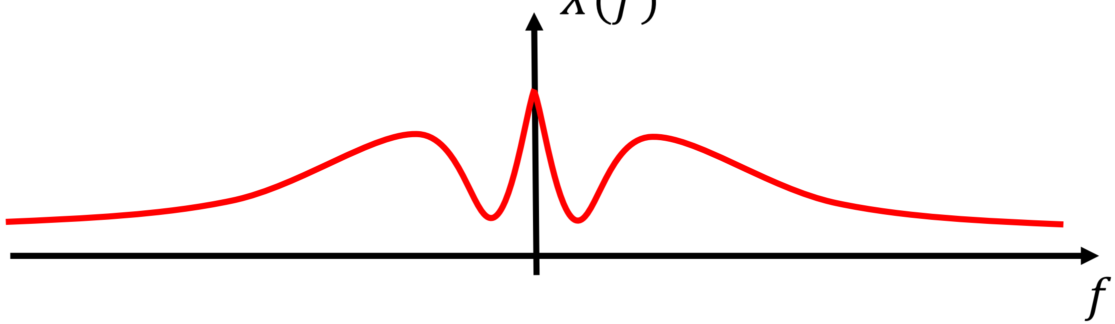
- **Επιβεβαιώνουμε ότι η φασματική πυκνότητα ενέργειας μας περιγράφει πράγματι πως κατανέμεται η ενέργεια του σήματος στο χώρο της συχνότητας**

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

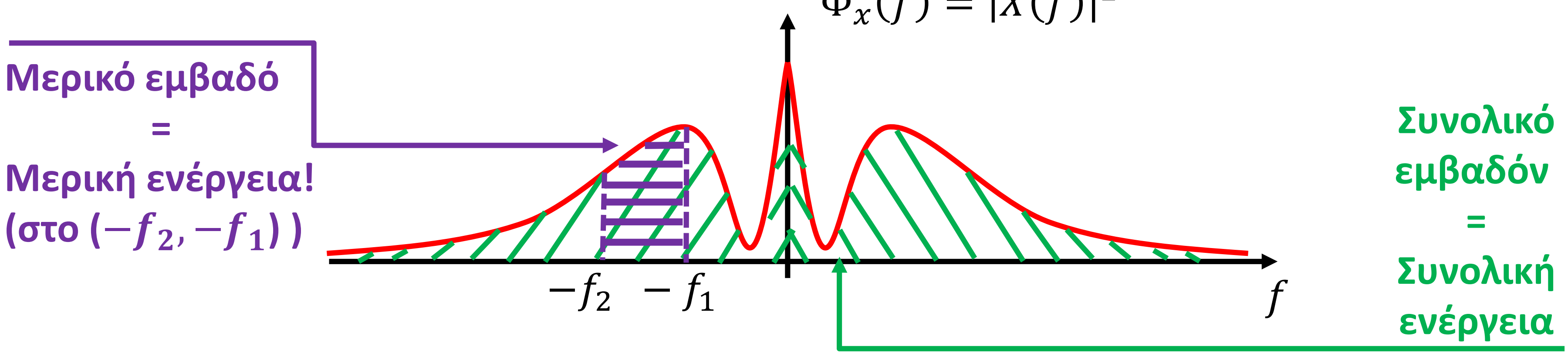
$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2$$

Συνάρτηση κατανομής ενέργειας ως προς f

- **Παράδειγμα:**
  Μετασχηματισμός Fourier ενός $x(t)$



- **Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας**



- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας
- Οι ετεροσυσχετίσεις σημάτων ενέργειας έχουν μετασχ. Fourier τις περίφημες **Διαφασματικές Πυκνότητες Ενέργειας**
- Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) \\ \phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = Y^*(f)X(f) \end{aligned}}$$

- Παρατηρήστε ότι αφού

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}(-\tau), \qquad x(t), y(t) \in \Re$$

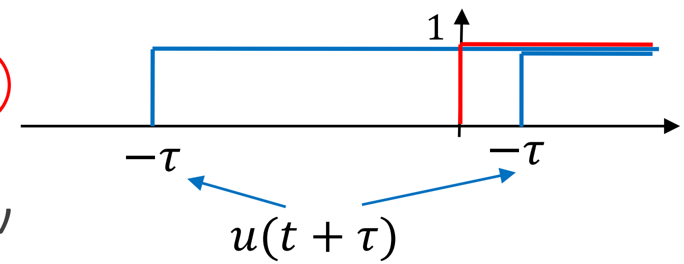
ισχύει ότι

$$\boxed{\Phi_{xy}(f) = \Phi^*_{yx}(f)}$$

όπως προβλέπεται από τις ιδιότητες του μετασχ. Fourier

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- **Παράδειγμα:**

1



○ Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων

$$x(t) = e^{-at}u(t), \qquad y(t) = e^{-2at}u(t), \qquad a > 0$$

(α) απ' ευθείας και (β) μέσω της διαφασματικής πυκνότητας ενέργειας τους, $\Phi_{xy}(f)$

(α) Είναι

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)\,dt$$

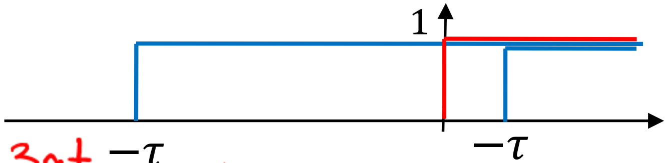
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)\cdot e^{-2a(t+\tau)}u(t+\tau)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\cdot e^{-2at}\cdot e^{-2a\tau}u(t)u(t+\tau)\,dt$$

$$= e^{-2a\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3at}u(t)u(t+\tau)\,dt \quad (1)$$

Είναι $u(t) = 1,\ \boxed{t>0,}$ ενώ $u(t+\tau) = 1,\ t+\tau>0 \Rightarrow \boxed{t>-\tau}$

- **Φασματικές Πυκνότητες**



- Παράδειγμα:

- $-\tau > 0 \Rightarrow \tau < 0$: $\varphi_{xy}(\tau) = e^{-2a\tau}\int_{-\tau}^{+\infty} e^{-3at}\cdot 1\cdot 1\,dt$

$$= e^{-2a\tau}\left(-\frac{1}{3a}e^{-3at}\right)\Big]_{-\tau}^{+\infty} = e^{-2a\tau}\left(-\frac{1}{3a}\left(\lim_{t\to+\infty} e^{-3at} - e^{3a\tau}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{3a}e^{-2a\tau}\left(0 - e^{3a\tau}\right) = \frac{1}{3a}e^{a\tau},\ \tau<0 = \frac{1}{3a}e^{a\tau}u(-\tau).$$

- $-\tau < 0 \Rightarrow \tau > 0$: $\varphi_{xy}(\tau) = e^{-2a\tau}\int_{0}^{+\infty} e^{-3at}\cdot 1\cdot 1\,dt$

$$= e^{-2a\tau}\left(-\frac{1}{3a}e^{-3at}\right)\Big]_{0}^{+\infty} = -\frac{1}{3a}e^{-2a\tau}\left(\lim_{t\to+\infty} e^{-3at} - 1\right)$$

$$= -\frac{1}{3a}e^{-2a\tau}(0-1) = \frac{1}{3a}e^{-2a\tau},\ \tau>0 = \frac{1}{3a}e^{-2a\tau}u(\tau).$$

Συνολικά, $\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3a}\left(e^{-2a\tau}u(\tau) + e^{a\tau}u(-\tau)\right).$

- **Φασματικές Πυκνότητες**

- Παράδειγμα:

$$X^*(f) = \frac{1}{a-j2\pi f}$$

(β) $\varphi_{xy}(\tau) \xleftrightarrow{F} \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)$

Είναι $x(t) = e^{-at}u(t),\ a>0 \xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f}$

$y(t) = e^{-2at}u(t),\ a>0 \xleftrightarrow{F} Y(f) = \frac{1}{2a+j2\pi f}$

Άρα $\Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) = \frac{1}{(a-j2\pi f)(2a+j2\pi f)} =$

$= \frac{A}{a-j2\pi f} + \frac{B}{2a+j2\pi f}$, μπορούμε να βρούμε ότι $A = \frac{1}{3a} = B$

Οπότε $\Phi_{xy}(f) = \frac{1}{3a}\cdot\frac{1}{a-j2\pi f} + \frac{1}{3a}\cdot\frac{1}{2a+j2\pi f}$, και από πίνακες

έχουμε $\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3a}\left(e^{a\tau}u(-\tau) + e^{-2a\tau}u(\tau)\right)$.

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Σύνοψη:
- Σήματα ενέργειας:

$$\boxed{\begin{aligned}\phi_x(\tau) &\leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2\\ \phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)\\ \phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = Y^*(f)X(f)\end{aligned}}$$

☺

- **Φασματικές Πυκνότητες**

$$\sum X_k e^{j2\pi k f_0 t} \leftrightarrow \sum X_k \delta(f - k f_0)$$

- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα

- Για τα **περιοδικά** σήματα, μπορούμε να δουλέψουμε όμοια με τη διαδικασία υπολογισμού του **μετασχ. Fourier των περιοδικών σημάτων**
  - Ας ξεκινήσουμε με την περιοδική αυτοσυσχέτιση

- Δείξαμε ότι

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)x(t+\tau)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

και σύμφωνα με όσα ξέρουμε, ο μετασχ. Fourier της θα είναι (από πίνακες)

$$\boxed{\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - k f_0)}$$

- **Ας επιβεβαιώσουμε ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος μας περιγράφει πράγματι πως κατανέμεται η ισχύς του σήματος στο χώρο της συχνότητας**

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα
- Ας θυμηθούμε αρχικά τον Parseval!

$$\phi_x(0) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)x(t+0)dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^2(t)dt = P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

- Άραγε, αν ολοκληρώσουμε τη φασματική πυκνότητα ισχύος, θα πάρουμε τη συνολική ισχύ?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f-kf_0) \right) df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f-kf_0)df$$

- Επειδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f-kf_0)df = 1$$

τότε

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f)df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = P_x}$$

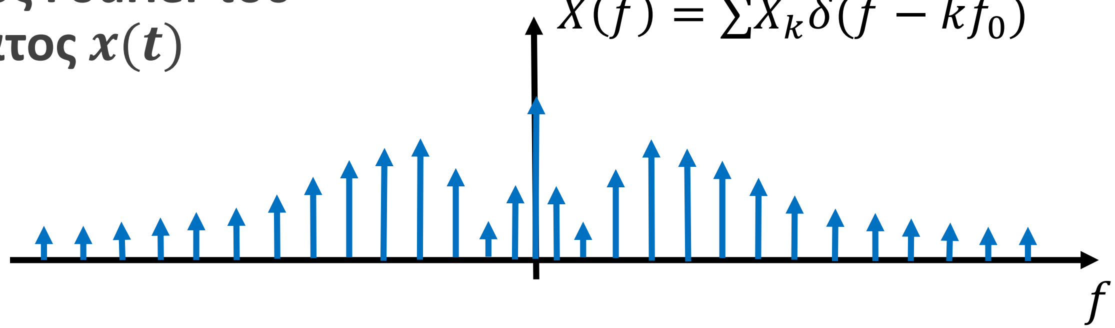
- **Επιβεβαιώθηκε!**

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα

$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

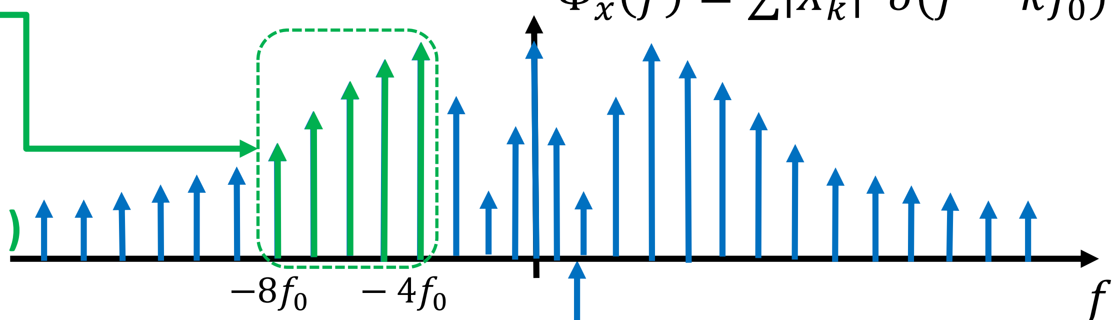
Συνάρτηση κατανομής ισχύος ως προς f

- **Παράδειγμα:**
Μετασχηματισμός Fourier του περιοδικού σήματος $x(t)$



- **Φασματική Πυκνότητα Ισχύος**

Μερικό «εμβαδό» = Μερική ισχύς! (στο $[-8f_0, -4f_0]$)



Συνολικό «εμβαδό» = Συνολική ισχύς

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα
- Θυμηθείτε ότι ένας τρόπος να υπολογίσουμε τους συντελεστές Fourier είναι μέσω του μετασχ. Fourier **μιας περιόδου** του περιοδικού σήματος!

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f, T_0) \Big|_{f=kf_0}$$

- Η αυτοσυσχέτιση $\phi_x(\tau)$ περιοδικών σημάτων είναι κι αυτή ένα περιοδικό σήμα!
- …και έχουμε δείξει ότι έχει συντελεστές Fourier $\Phi_k = |X_k|^2$!
- Μπορούμε άραγε αυτούς να τους βρούμε με παρόμοιο τρόπο όπως παραπάνω?
- **ΝΑΙ!** ☺
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι οι συντελεστές $\Phi_k = |X_k|^2$ μπορούν να προκύψουν δειγματοληπτώντας τη φασματική πυκνότητα *ενέργειας* $\Phi_x(f, T_0)$ **μιας περιόδου** του περιοδικού σήματος $x(t)$, δηλ.

$$\Phi_k = |X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2} \Phi_x(f, T_0) \Big|_{f=kf_0} = \frac{1}{T_0^2} |X(f, T_0)|^2 \Big|_{f=kf_0}$$

• Φασματικές Πυκνότητες

• Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα

Υπολογισμός Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος Περιοδικού Σήματος

1. Υπολογίζουμε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας $\Phi_x(f, T_0)$ μιας περιόδου $x(t, T_0)$ - που είναι σήμα ενέργειας - του περιοδικού σήματος $x(t)$:

$$\Phi_x(f, T_0) = |X(f, T_0)|^2 \tag{9.177}$$

2. Δειγματοληπτούμε την παραπάνω φασματική πυκνότητα ενέργειας ανά kf_0, και το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με $\frac{1}{T_0^2}$ για να λάβουμε τους συντελεστές Fourier της περιοδικής αυτοσυσχέτισης:

$$|X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2}\Phi_x(f, T_0)\Big|_{f=kf_0} \tag{9.178}$$

3. Η φασματική πυκνότητα ισχύος δίνεται ως

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0) \tag{9.179}$$

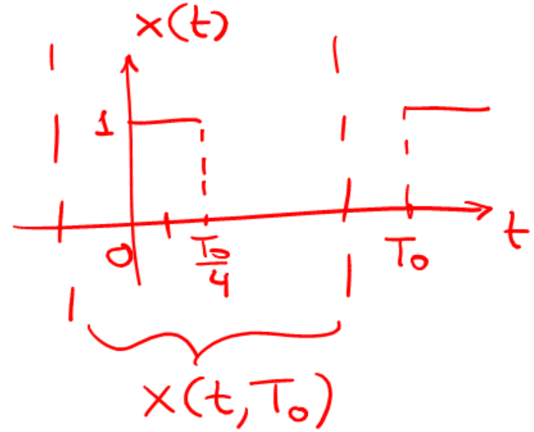
- **Φασματικές Πυκνότητες**

$$A\mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \leftrightarrow AT\mathrm{sinc}(fT)e^{-j2\pi f t_0}$$

- Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του περιοδικού σήματος που εκφράζεται σε μια περίοδο ως

$$x(t,T_0) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{T_0}{4} \\ 0, & \frac{T_0}{4} < t < T_0 \end{cases}$$



Θεωρούμε τη μια περίοδο του περιοδικού σήματος x(t), δηλ. την x(t, T_0). Είναι:

$$x(t,T_0) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T_0}{8}}{\frac{T_0}{4}}\right) \xleftrightarrow{F} X(f,T_0) = \frac{T_0}{4}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{T_0}{4}f\right)e^{-j\pi f\frac{T_0}{4}}$$

Άρα $\Phi_x(f,T_0) = |X(f,T_0)|^2 = \left(\frac{T_0}{4}\right)^2 \left|\mathrm{sinc}\left(\frac{T_0}{4}f\right)\right|^2 \cdot \cancel{\left|e^{-j\pi f\frac{T_0}{4}}\right|^2}^{\,1}$

$$= \frac{T_0^2}{16}\left|\mathrm{sinc}\left(\frac{T_0}{4}f\right)\right|^2 = \frac{T_0^2}{16}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{T_0}{4}f\right).$$

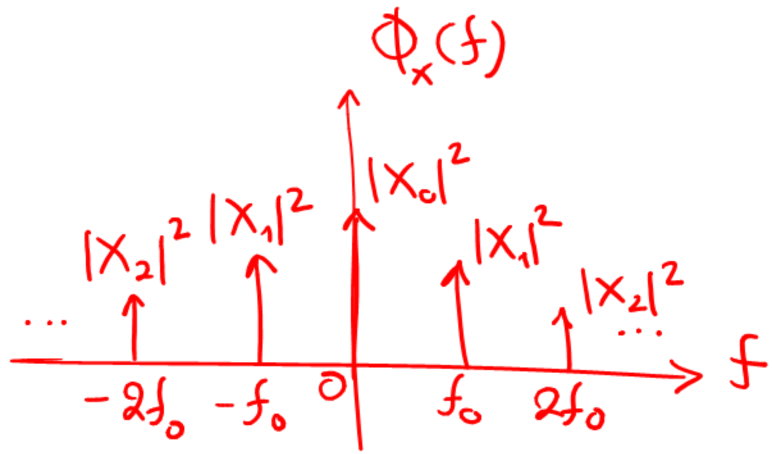
- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Παράδειγμα:

Άρα $$|X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2}\Phi_x(f,T_0)\Big|_{f=kf_0} = \frac{1}{\cancel{T_0^2}}\frac{\cancel{T_0^2}}{16}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{T_0}{4}f\right)\Big|_{f=kf_0}$$

$$= \frac{1}{16}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{T_0}{4}kf_0\right) \overset{f_0T_0=1}{=\!=} \frac{1}{16}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right) = |X_k|^2$$

Οπότε

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|X_k|^2\delta(f-kf_0) = \frac{1}{16}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T_0}\right)$$



Τι παρατηρούμε αριστερά?
Την κατανομή της ισχύος του περιοδικού σήματος στη συχνότητα

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος – Περιοδικά Σήματα
- Ευθέως ανάλογα, μπορούμε να δείξουμε ότι αφού η **διαφασματική πυκνότητα ισχύος** αποτελεί το μετασχ. Fourier της **ετεροσυσχέτισης** δυο περιοδικών σημάτων, μπορούμε να εξάγουμε αντίστοιχες με τη φασματική πυκνότητα εκφράσεις:

$$\Phi_{xy}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k \delta(f - kf_0)$$

$$\Phi_{yx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* \delta(f - kf_0)$$

- Όμως

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f, T_0) \Big|_{f=kf_0} = \boldsymbol{\frac{1}{T_0} X(kf_0, T_0)}$$

$$Y_k = \frac{1}{T_0} Y(f, T_0) \Big|_{f=kf_0} = \boldsymbol{\frac{1}{T_0} Y(kf_0, T_0)}$$

όπως ήδη γνωρίζουμε

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος – Περιοδικά Σήματα
- Άρα

$$\Phi_{xy}(f) = \frac{1}{T_0^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [X^*(kf_0, T_0)Y(kf_0, T_0)]\delta(f - kf_0)$$

$$\Phi_{yx}(f) = \frac{1}{T_0^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [X(kf_0, T_0)Y^*(kf_0, T_0)]\delta(f - kf_0)$$

- Καταφέραμε και σχετίσαμε και **τις (δια)φασματικές πυκνότητες ισχύος περιοδικών σημάτων** με τους **μετασχ. Fourier ΜΙΑΣ περιόδου** του/των περιοδικού/ών σήματος/ων

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Σύνοψη:
- Σήματα ενέργειας:

$$\boxed{\begin{aligned}\phi_x(\tau) &\leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2\\ \phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)\\ \phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = Y^*(f)X(f)\end{aligned}}$$

☺

- Σήματα ισχύος (περιοδικά):

$$\boxed{\begin{aligned}\phi_x(\tau) &\leftrightarrow \Phi_x(f) = \sum |X_k|^2\delta(f-kf_0)\\ \phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = \sum X_k^* Y_k\delta(f-kf_0)\\ \phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = \sum Y_k^* X_k\delta(f-kf_0)\end{aligned}}$$

☺

με

$$X_k = \frac{1}{T_0}X(kf_0, T_0)$$

$$Y_k = \frac{1}{T_0}Y(kf_0, T_0)$$

Συνεχίζεται... ☺