ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 15Η

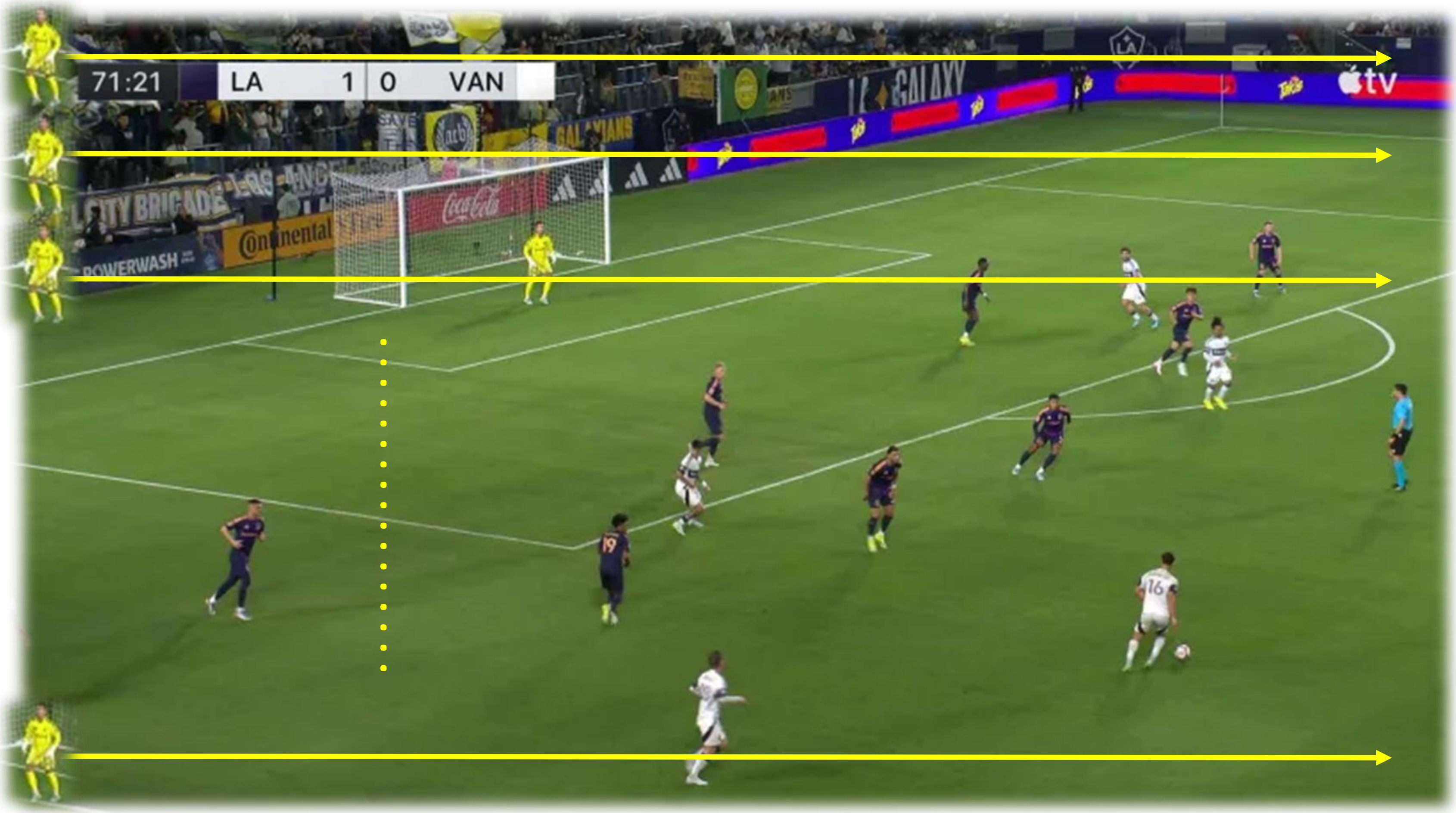
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**

- **Quiz:**

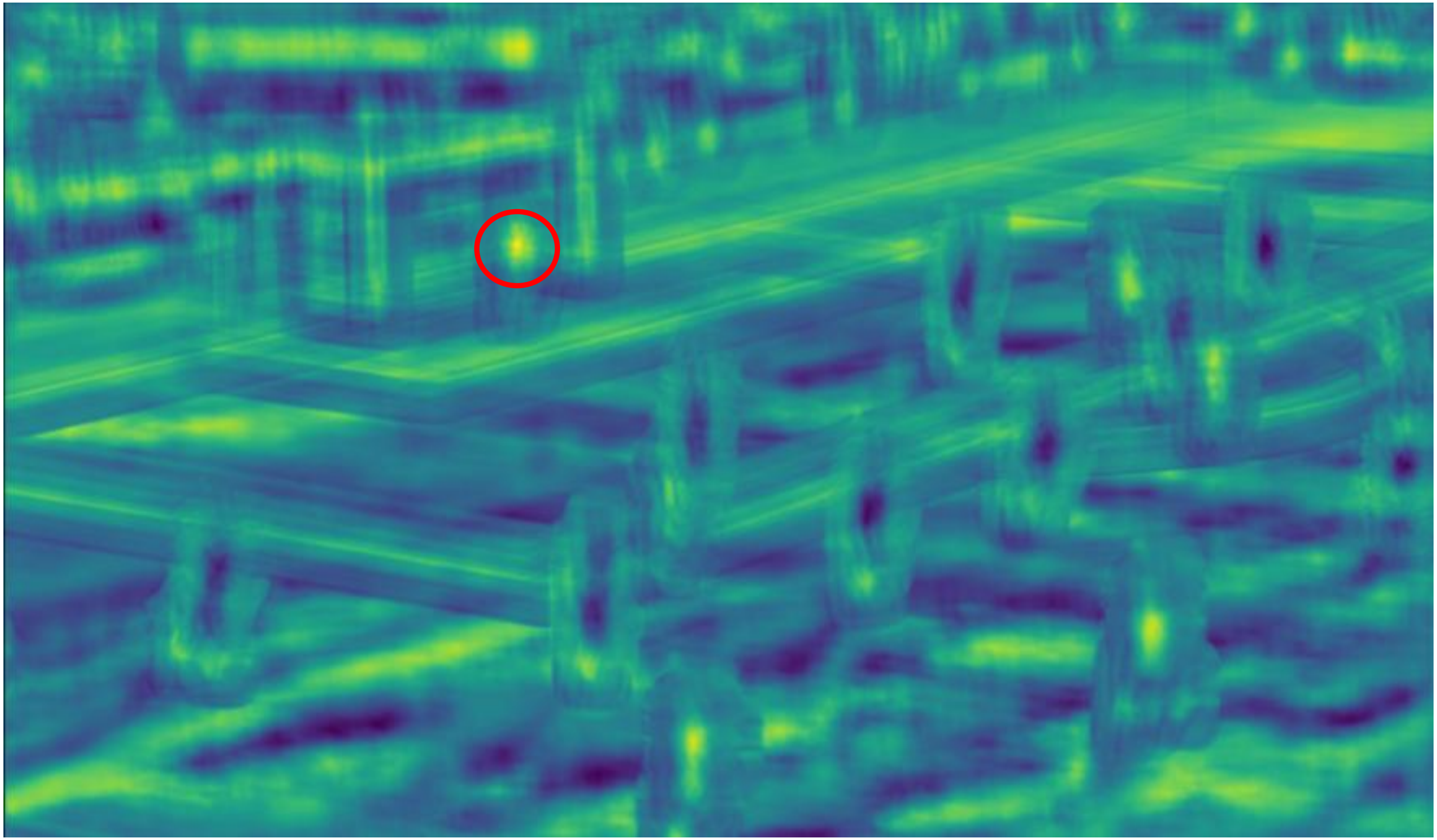
Πώς μπορείτε να εντοπίσετε τον τερματοφύλακα στην εικόνα με αυτόματο τρόπο, χρησιμοποιώντας μια φωτογραφία του?

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- **Quiz:**

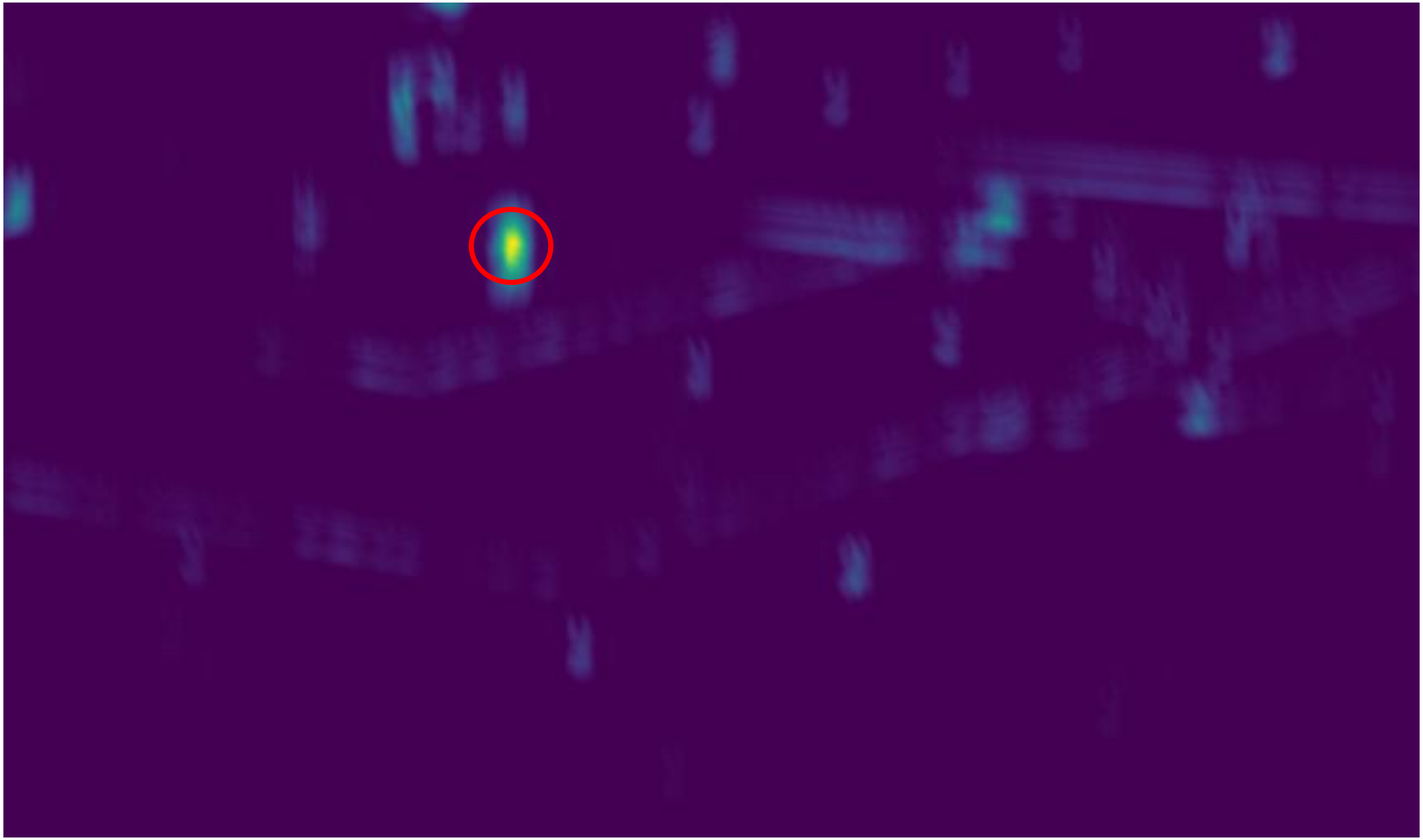


Πώς μπορείτε να εντοπίσετε τον τερματοφύλακα στην εικόνα με αυτόματο τρόπο, χρησιμοποιώντας μια φωτογραφία του?

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- **Quiz:**

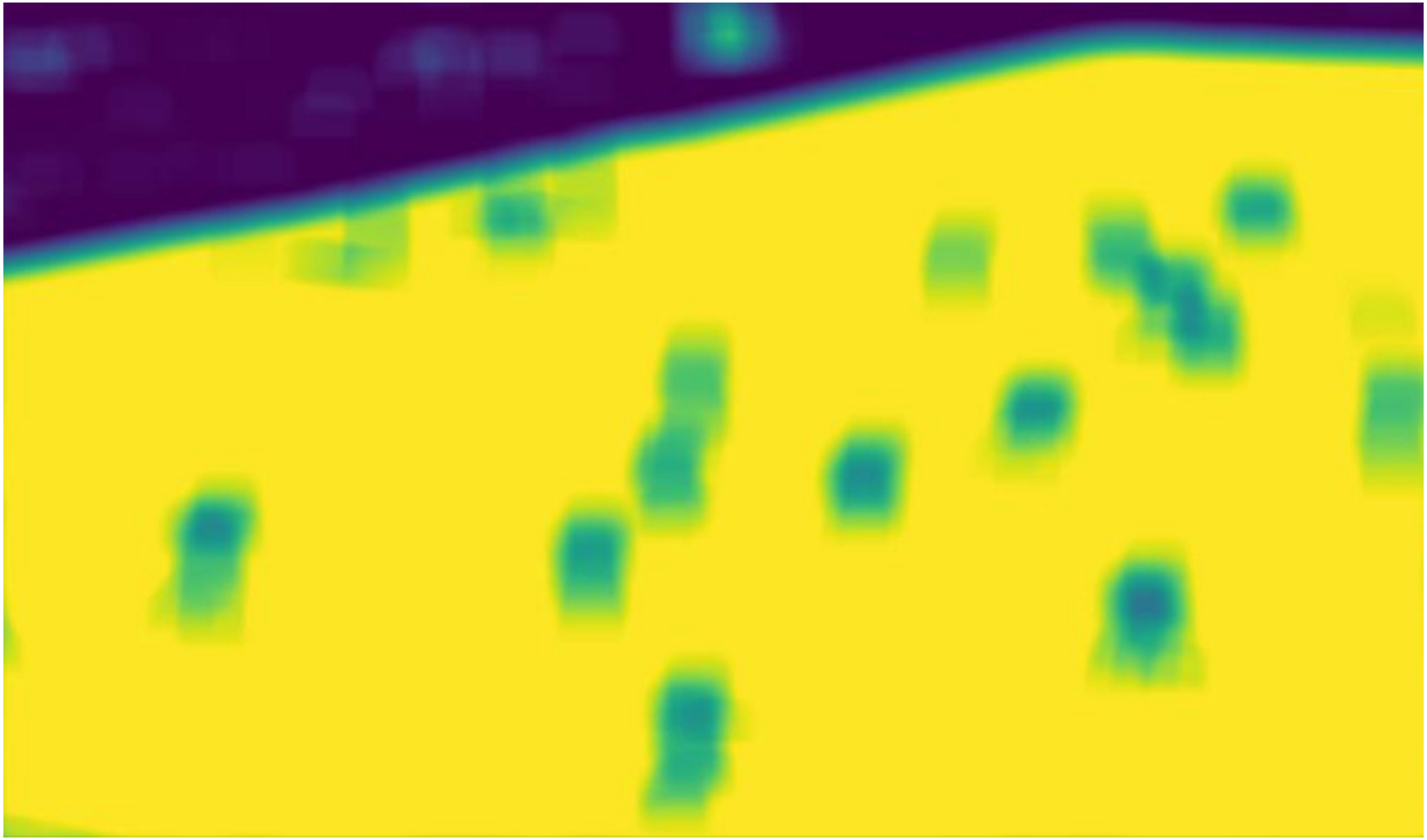


- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- **Quiz:**

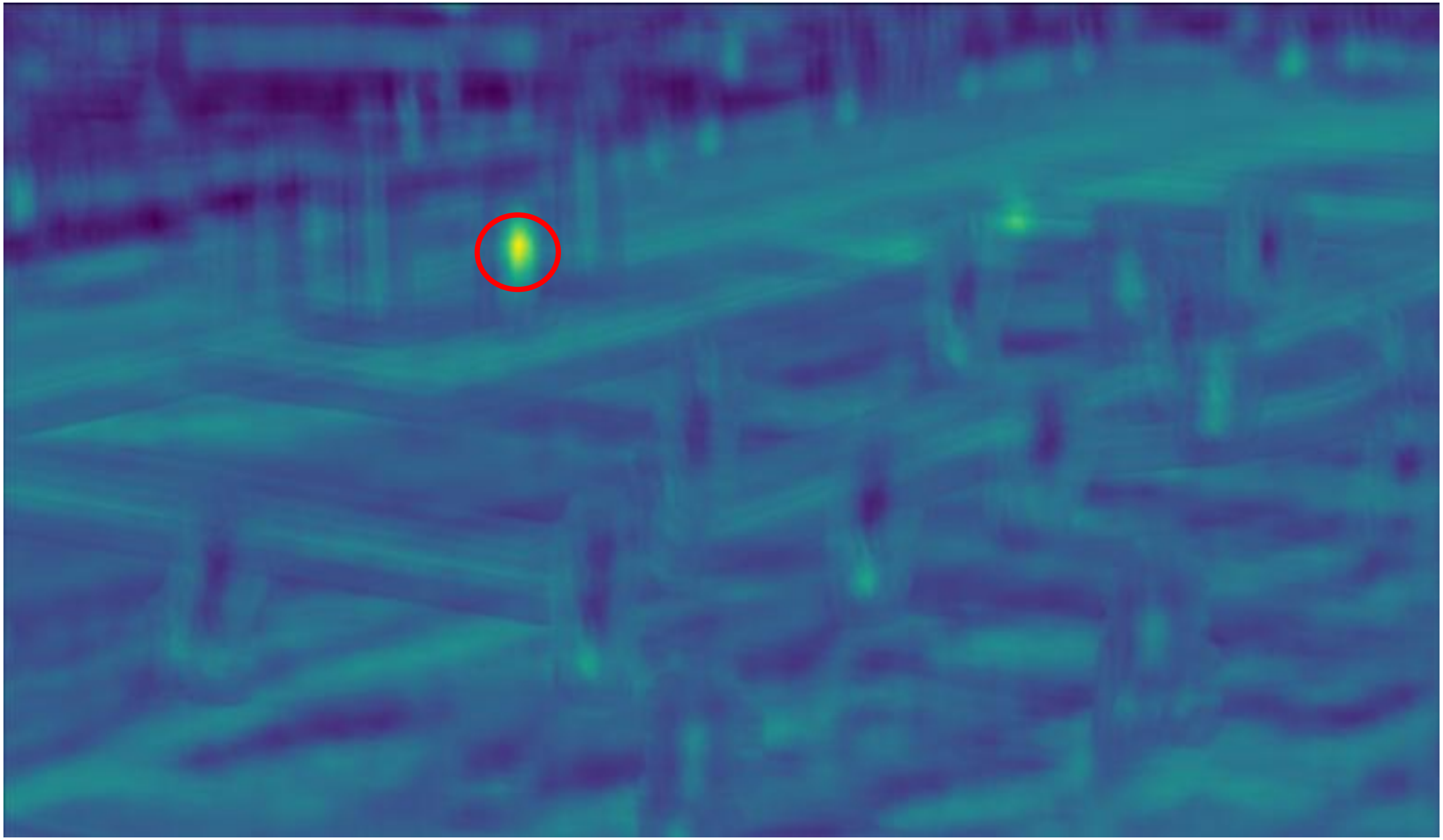


- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**

- **Quiz:**



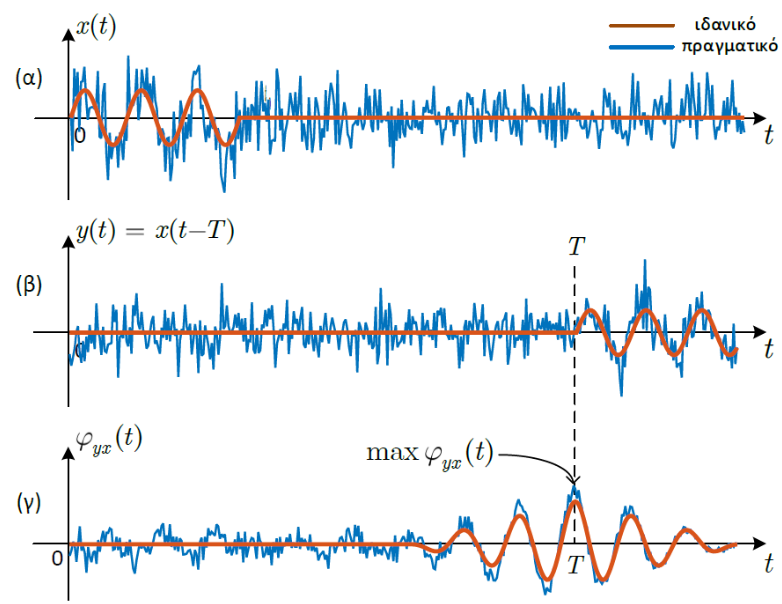
- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- **Quiz:**



$$S(x,y) = 0.55A(x,y) + 0.35B(x,y) + 0.10C(x,y)$$

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**
- Ως τώρα μελετήσαμε σήματα και την επίδραση των συστημάτων επάνω τους
  - Μελετήσαμε *μεμονωμένα* σήματα και συστήματα
- Θα ήταν ενδιαφέρον να μελετήσουμε και τις *ομοιότητες* μεταξύ σημάτων

- Παράδειγμα εφαρμογής
  - Ανίχνευση απόστασης στόχου
- Έννοια της ***συσχέτισης***
  - Το ανακλώμενο σήμα πρέπει να συσχετιστεί με το εκπεμφθέν για βρεθεί τόσο η παρουσία ενός στόχου όσο και η απόστασή του από τη θέση αναφοράς
  - Βρίσκει την ***ομοιότητα*** των δυο σημάτων στο πεδίο του χρόνου
- Έννοια της ***φασματικής πυκνότητας***
  - Αποτελεί την εικόνα των συσχετίσεων στο χώρο του Fourier
  - Δείχνει την ***κατανομή της ενέργειας ή ισχύος ενός σήματος ή την από κοινού κατανομή δυο σημάτων*** ανά συχνότητα



- **Συσχετίσεις**
- **Αυτοσυσχέτιση και Ετεροσυσχέτιση**
- Η **αυτοσυσχέτιση** συσχετίζει ένα σήμα (περιοδικό ή μη, ενέργειας ή ισχύος) *με τον εαυτό του*
  - Συνάρτηση του χρόνου (**μετατόπισης**) που εκφράζει την ομοιότητα του σήματος σε σχέση με **μετατοπισμένες** «εκδόσεις» (καθυστερήσεις) του εαυτού του
  - Η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή εκεί που η ομοιότητα είναι «μέγιστη»
- Η **ετεροσυσχέτιση** συσχετίζει δυο σήματα (περιοδικά ή μη, ενέργειας ή ισχύος) *μεταξύ τους*
  - Συνάρτηση του χρόνου (**μετατόπισης**) που εκφράζει την ομοιότητα ενός σήματος σε σχέση με **μετατοπισμένες** «εκδόσεις» ενός άλλου σήματος
  - Η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή εκεί που η ομοιότητα είναι «μέγιστη»
- Είναι βολικό να μελετήσουμε τις συσχετίσεις ανάλογα με το είδος του σήματος

❑ Περιοδικά σήματα

❑ Σήματα ισχύος

❑ Σήματα ενέργειας

- **Συσχετίσεις**
- **Περιοδική Αυτοσυσχέτιση**
- Ορισμός:

$\tau :=$ μετατόπιση

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Γνωρίζουμε το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier ενός σήματος ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$X_k = |X_k|e^{j\phi_k}$

- Αντικαθιστώντας και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

- Περιοδική συνάρτηση με την ίδια περίοδο!
- «Τυφλή» ως προς την αρχική φάση του περιοδικού σήματος (οι συντελεστές Fourier είναι πραγματικοί αριθμοί - $|X_k|^2$)

- **Συσχετίσεις**

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$

Έχουμε

$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,x(t+\tau)\,dt = \dots$$

Όμως

?

$$\varphi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau} \quad (1)$$

Είναι

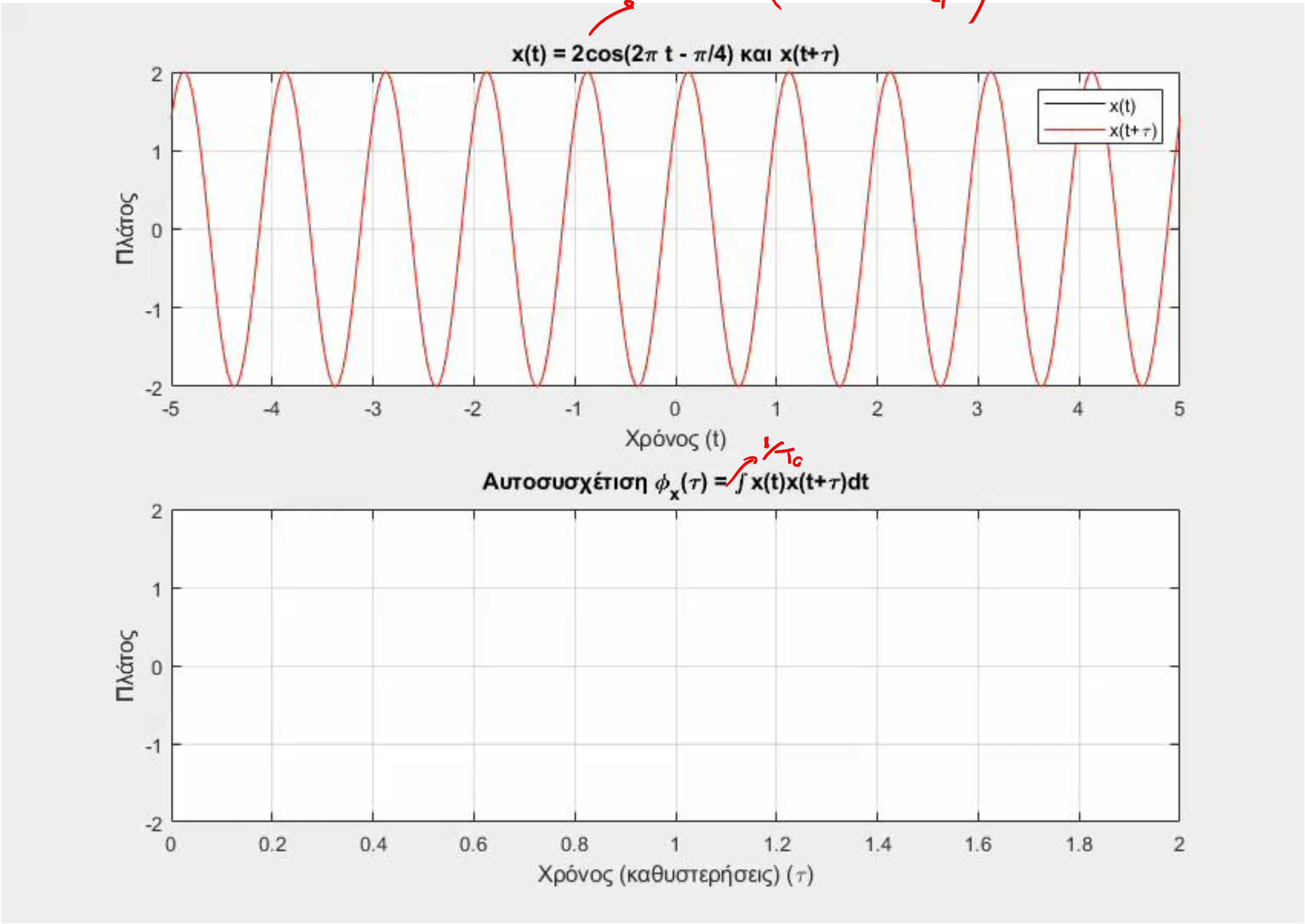
$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta) \underset{\text{Euler}}{=} \underbrace{\frac{A}{2}e^{j\theta}}_{X_1} \cdot e^{j2\pi f_0 t} + \underbrace{\frac{A}{2}e^{-j\theta}}_{X_{-1}} \cdot e^{-j2\pi f_0 t}$$

Άρα $|X_k|^2 = \frac{A^2}{4}$, $k = 1, -1$.

Οπότε $\varphi_x(\tau) \overset{(1)}{=} \frac{A^2}{4}e^{j2\pi f_0 \tau} + \frac{A^2}{4}e^{-j2\pi f_0 \tau} \underset{\text{Euler}}{=} \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$.

• **Συσχετίσεις**

$2\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$



- **Συσχετίσεις**
- **Περιοδική Ετεροσυσχέτιση**
- Ορισμός:

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad , \qquad \phi_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Γνωρίζουμε το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier ενός σήματος ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad , \qquad y(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l e^{j2\pi l f_0 t}$$

- Αντικαθιστώντας και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\phi_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k e^{j2\pi k f_0 \tau} \quad , \qquad \phi_{yx}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

- Περιοδική συνάρτηση με την ίδια περίοδο!
- Προφανώς αν $y(t) = x(t)$ παίρνουμε τις σχέσεις της αυτοσυσχέτισης

- **Συσχετίσεις**
- **Σήματα Ενέργειας**

Μεταβλητή μας το t!

- Αυτοσυσχέτιση:

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Ετεροσυσχέτιση:

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad , \quad \phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Η συσχέτιση αποτελείται από το ολοκλήρωμα ενός γινομένου, που μοιάζει πολύ με τη συνέλιξη! ☺
- Πριν τις συγκρίνουμε, ας δούμε πως κατασκευάζουμε το σήμα που μετατοπίζεται:

$$x(t+\tau)$$

ή

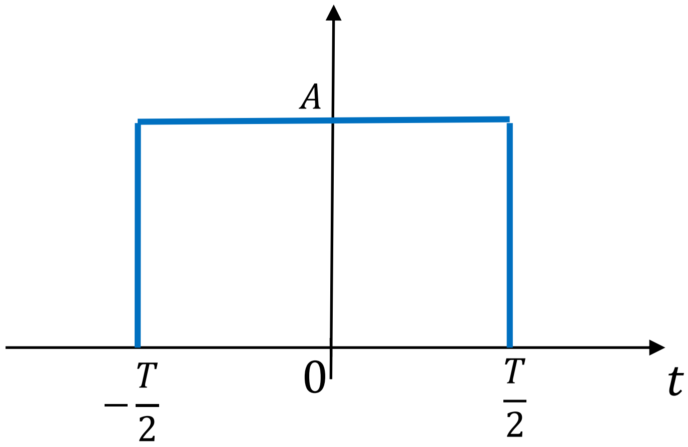
$$y(t+\tau)$$

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**

○ Έστω $x(t) = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$, βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος αυτού.

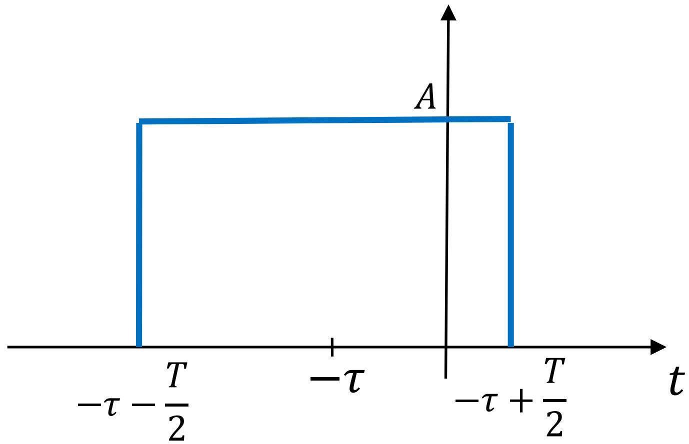
Πρέπει να κατασκευάσουμε το σήμα $x(t+\tau)$

$$x(t) = \begin{cases} A, & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

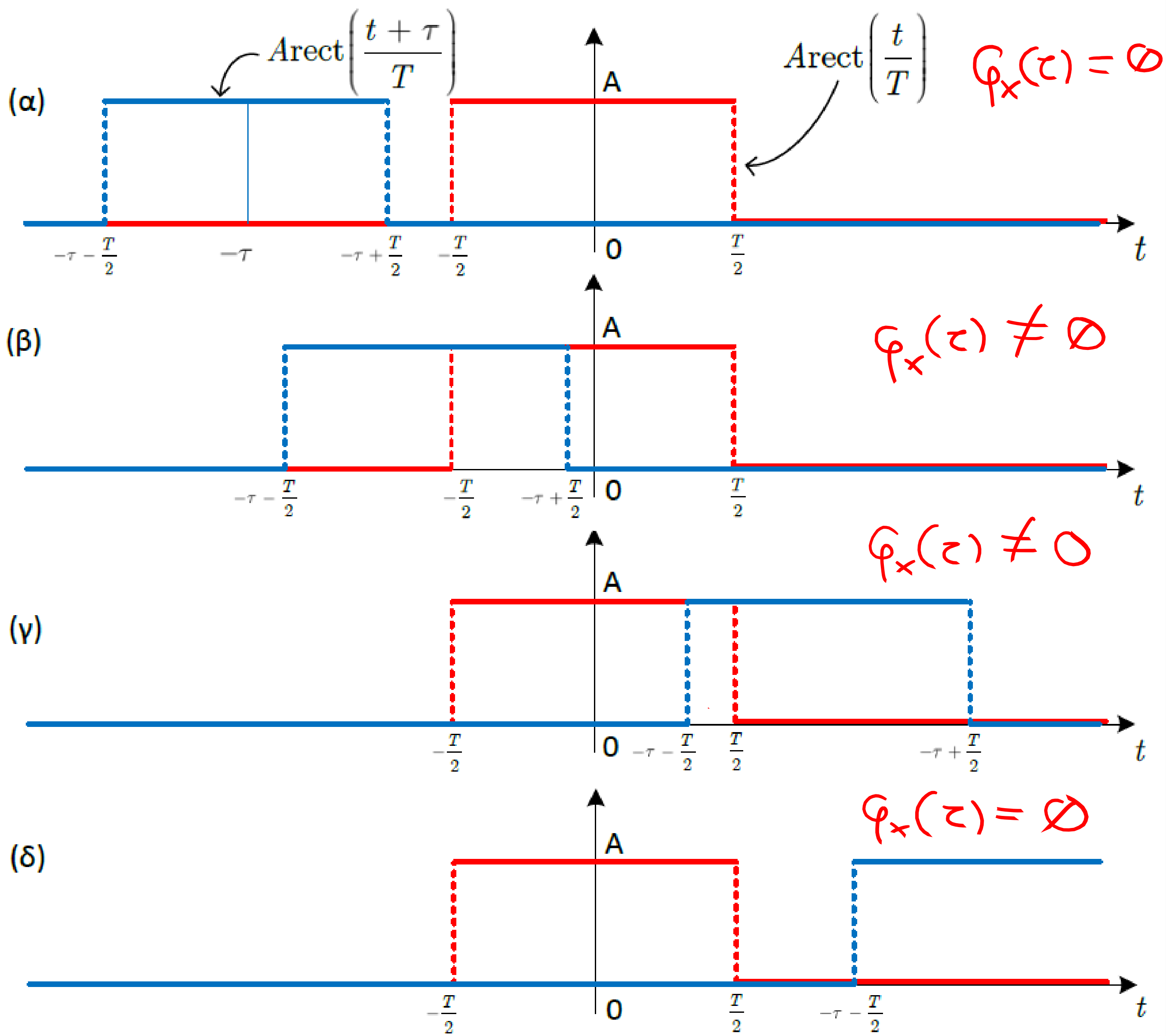


$$x(t+\tau) = \begin{cases} A, & -\frac{T}{2} < t+\tau < \frac{T}{2} \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} A, & -\tau-\frac{T}{2} < t < -\tau+\frac{T}{2} \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

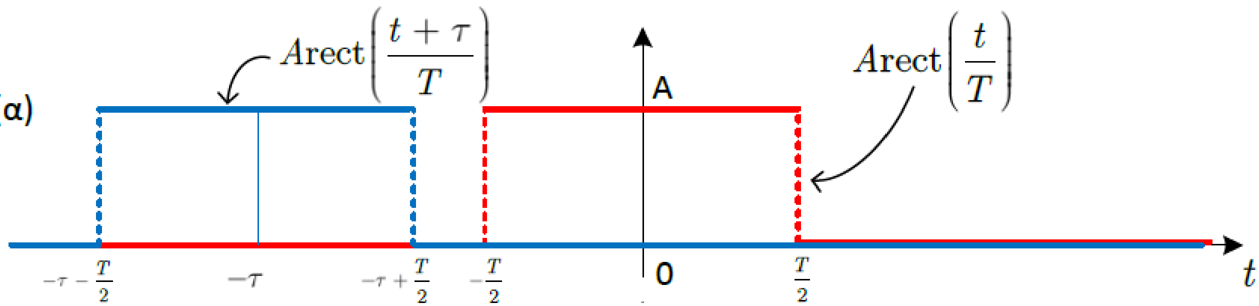


- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**
  - Έστω $x(t) = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$, βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος αυτού.



- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**

(α)

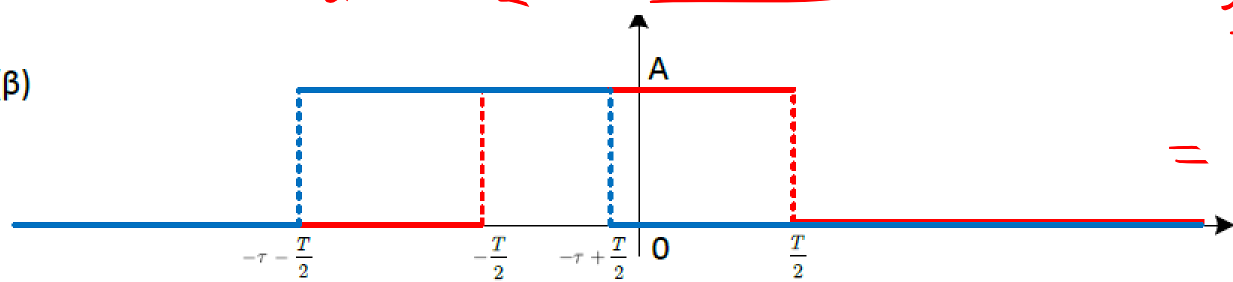


$\varphi_x(\tau) = 0$, όσο $-\tau + \frac{T}{2} < -\frac{T}{2}$ δηλ. $\boxed{\tau > T}$

- $-\frac{T}{2} < -\tau + \frac{T}{2} \Leftrightarrow \boxed{\tau < T}$ *
- $-\tau - \frac{T}{2} < -\frac{T}{2} \Leftrightarrow \boxed{\tau > 0}$

$$\varphi_x(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{-\tau+\frac{T}{2}} A\,A\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{-\tau+\frac{T}{2}} A^2\,dt$$

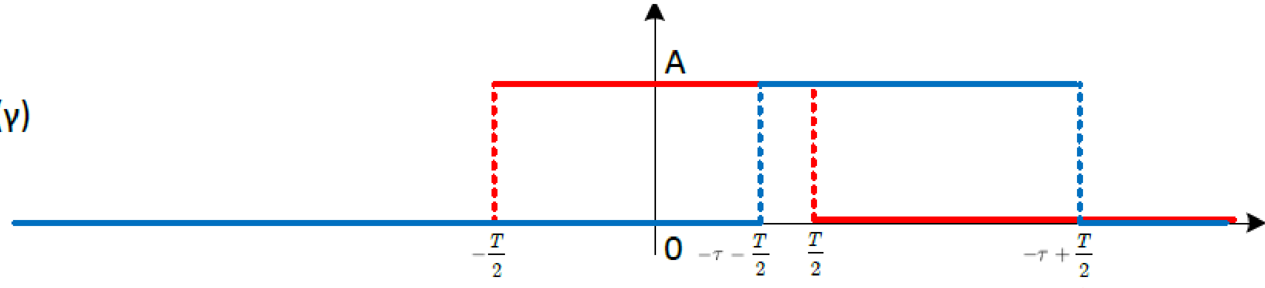
(β)



$$= A^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{-\tau+\frac{T}{2}} dt = A^2\, t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{-\tau+\frac{T}{2}} = A^2(T-\tau), \quad * \; \boxed{0 < \tau < T}$$

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**

(γ)

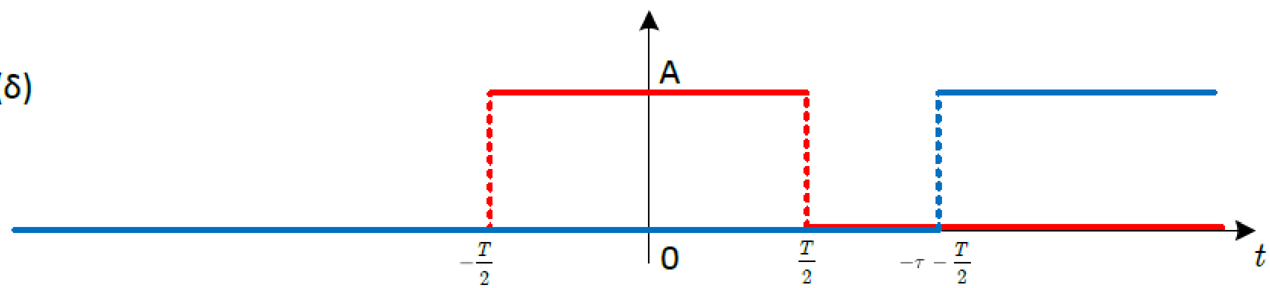


$$\varphi_x(\tau) = \int_{-\tau-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \cdot A \cdot dt = \int_{-\tau-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = A^2 \int_{-\tau-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = A^2 (T+\tau), *$$

- $-\tau + \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \Leftrightarrow \boxed{\tau < 0}$
- $-\tau - \frac{T}{2} < \frac{T}{2} \Leftrightarrow \boxed{\tau > -T}$

$*$ $\boxed{-T < \tau < 0}$

(δ)



$\varphi_x(\tau) = 0,$

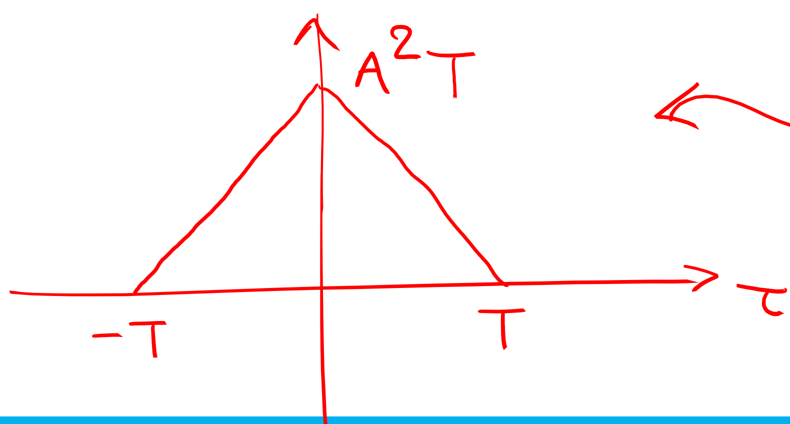
$-\tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{\tau < -T}$

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**

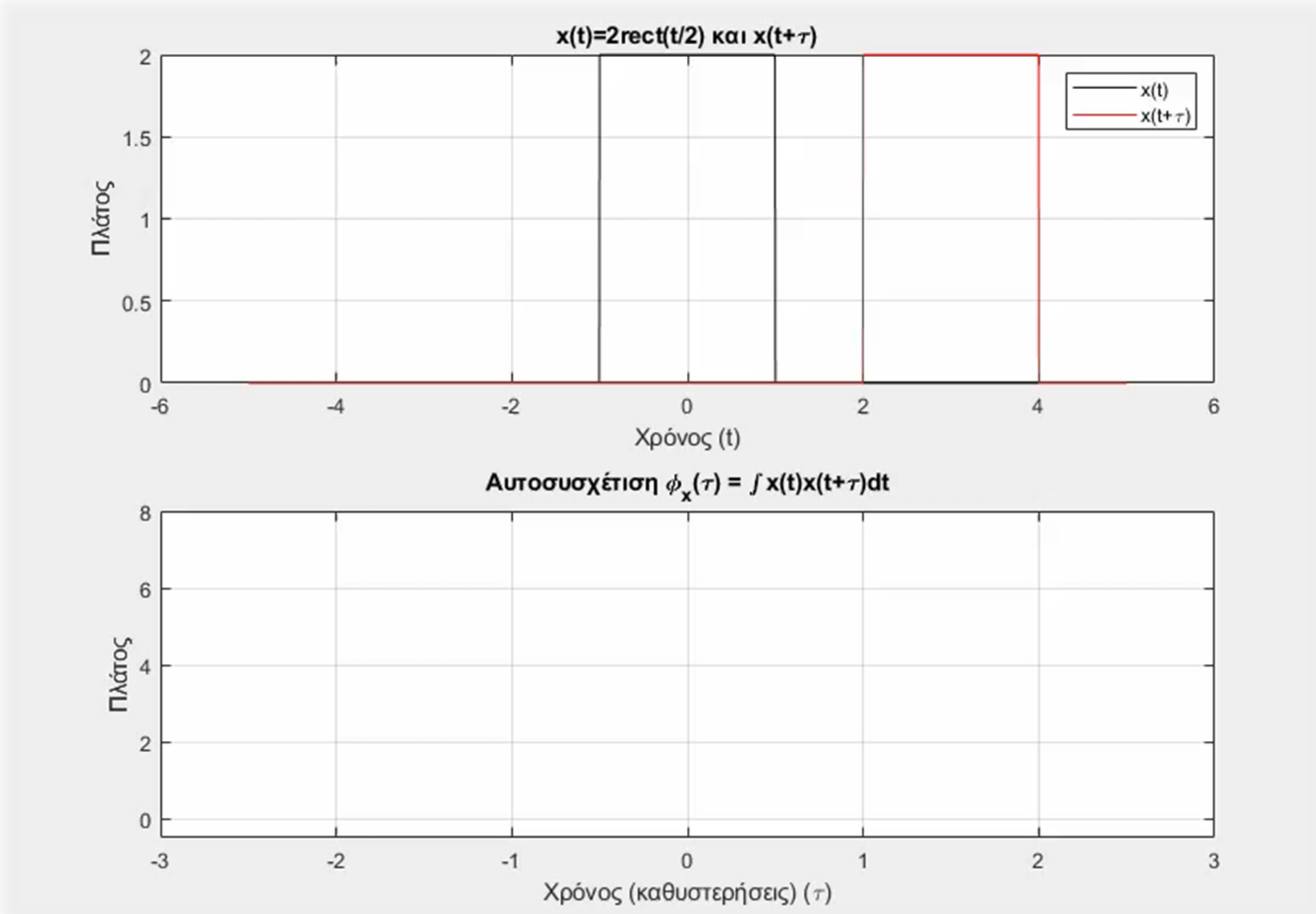
Άρα τελικά,

$$\varphi_x(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau > T, \ \tau < -T \\ A^2(T-\tau), & 0 < \tau < T \\ A^2(T+\tau), & -T < \tau < 0 \end{cases}$$

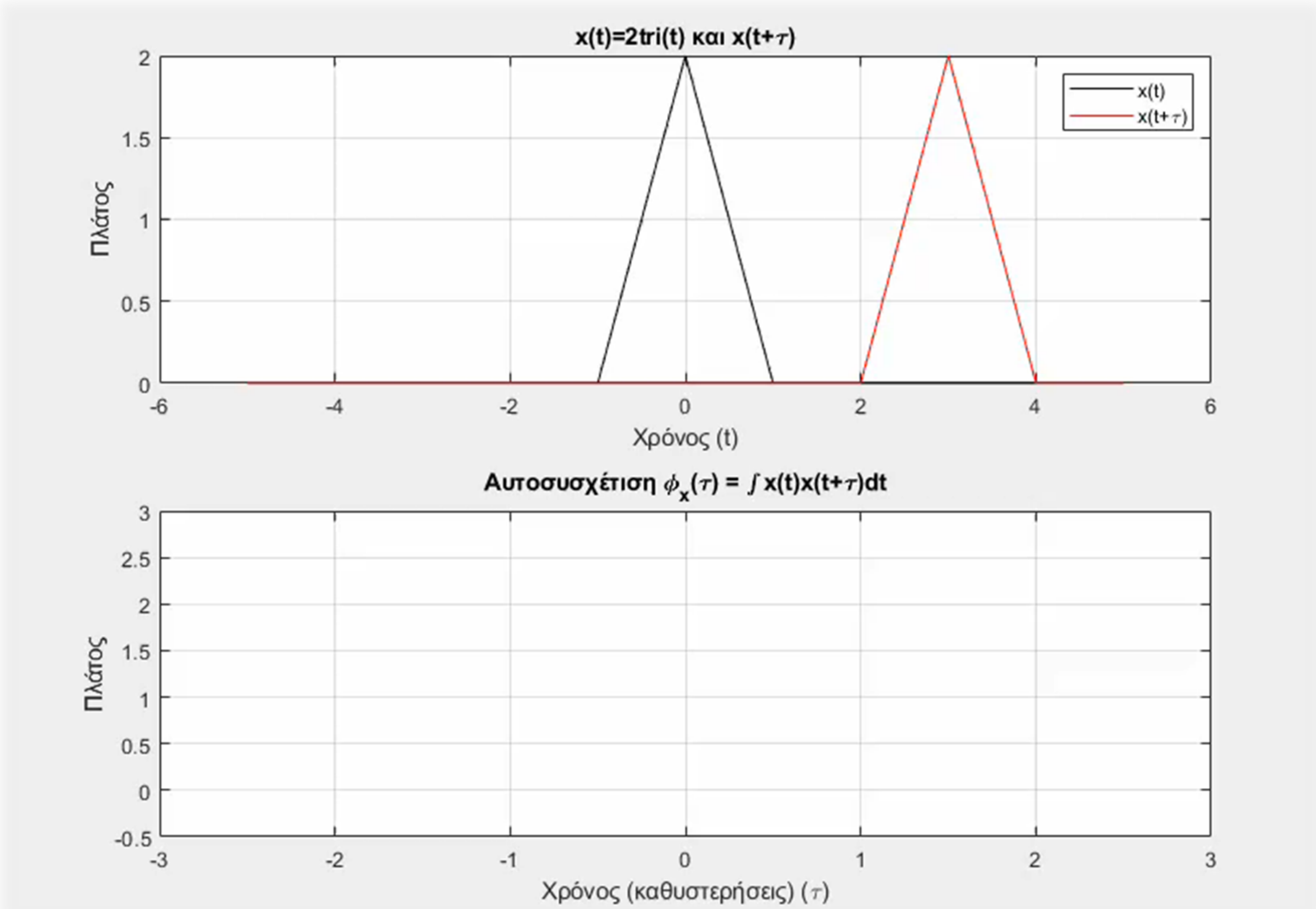


$$\varphi_x(\tau) = A^2 T \,\mathrm{tri}\left(\frac{\tau}{T}\right).$$

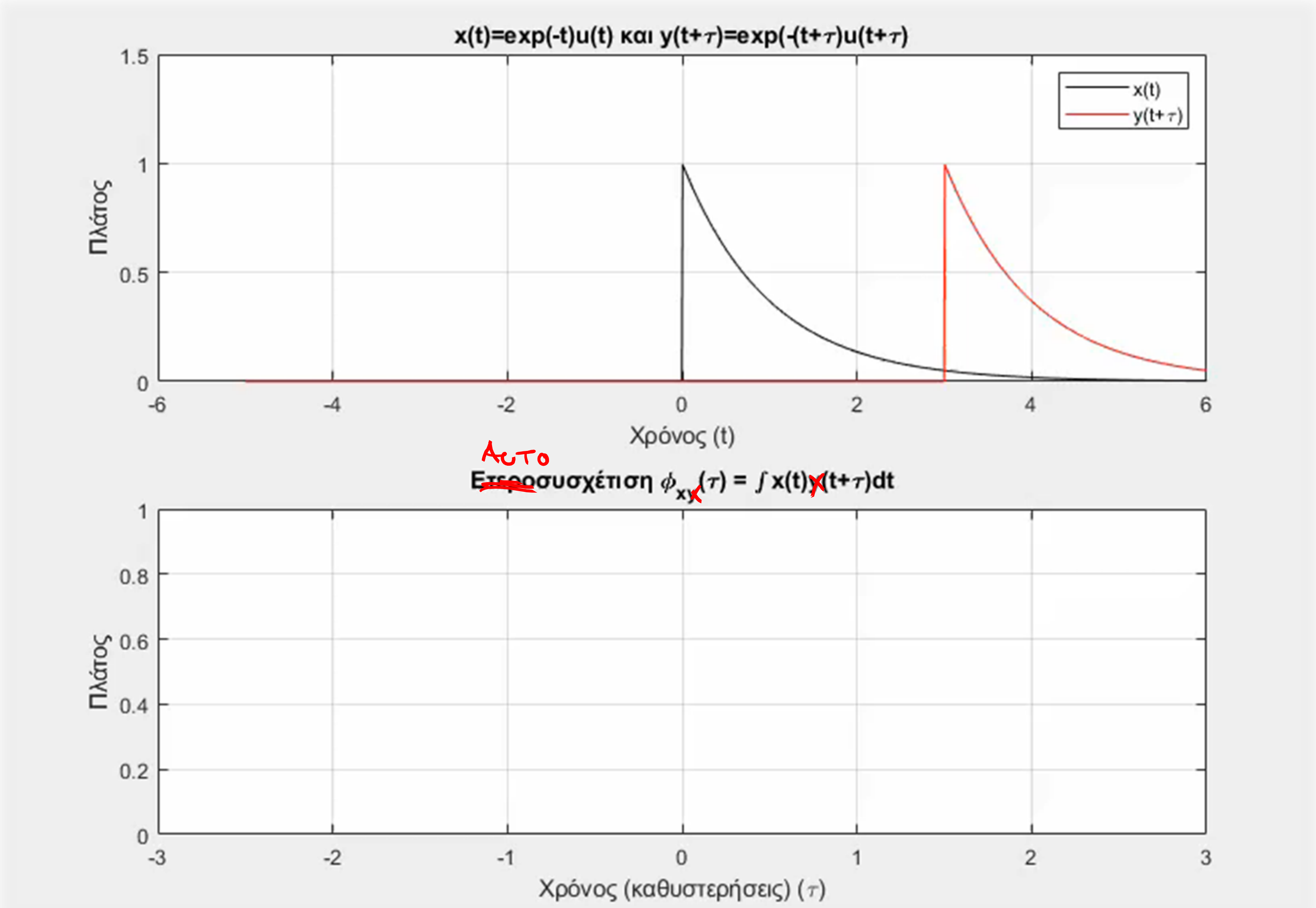
- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**



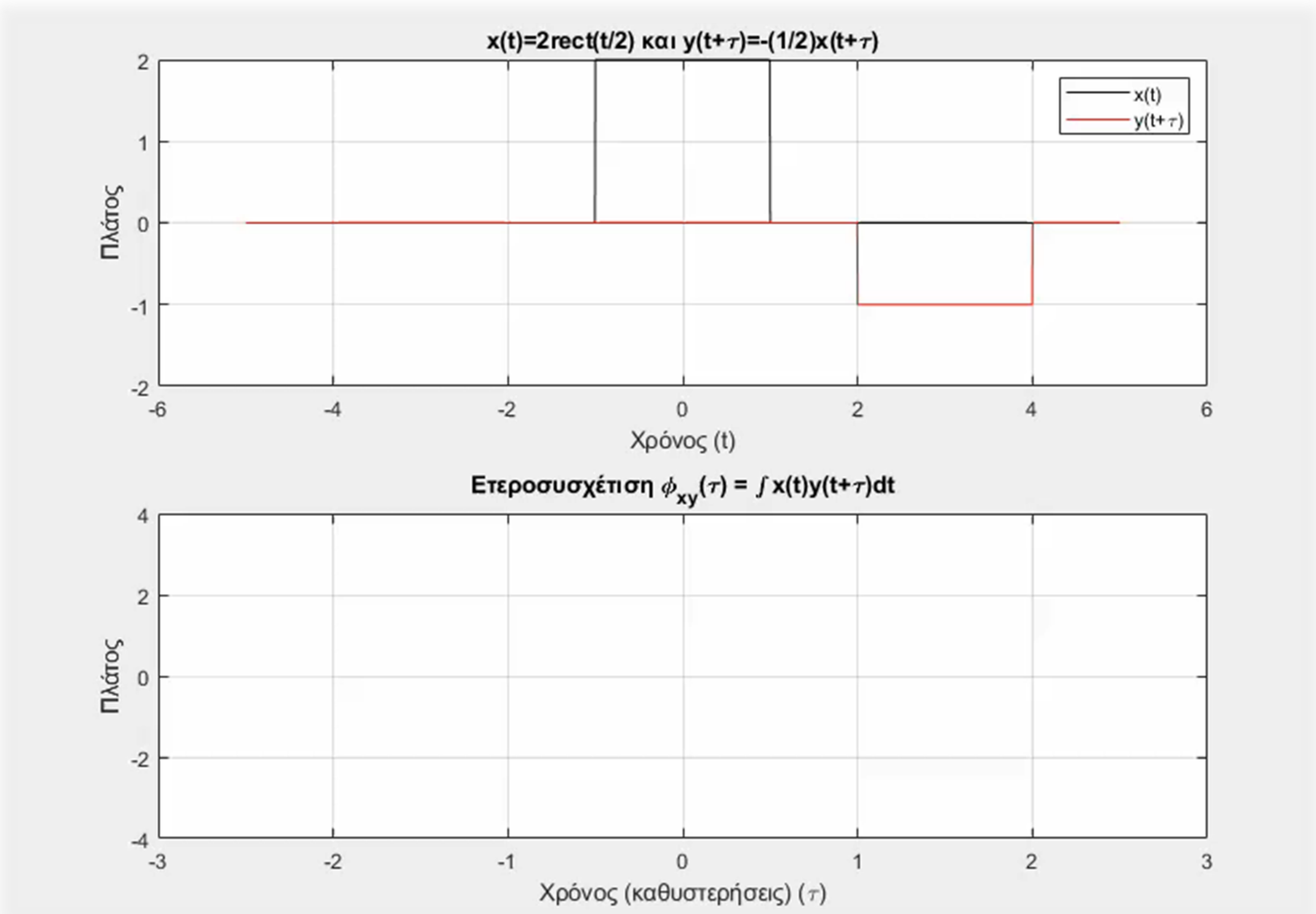
- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**



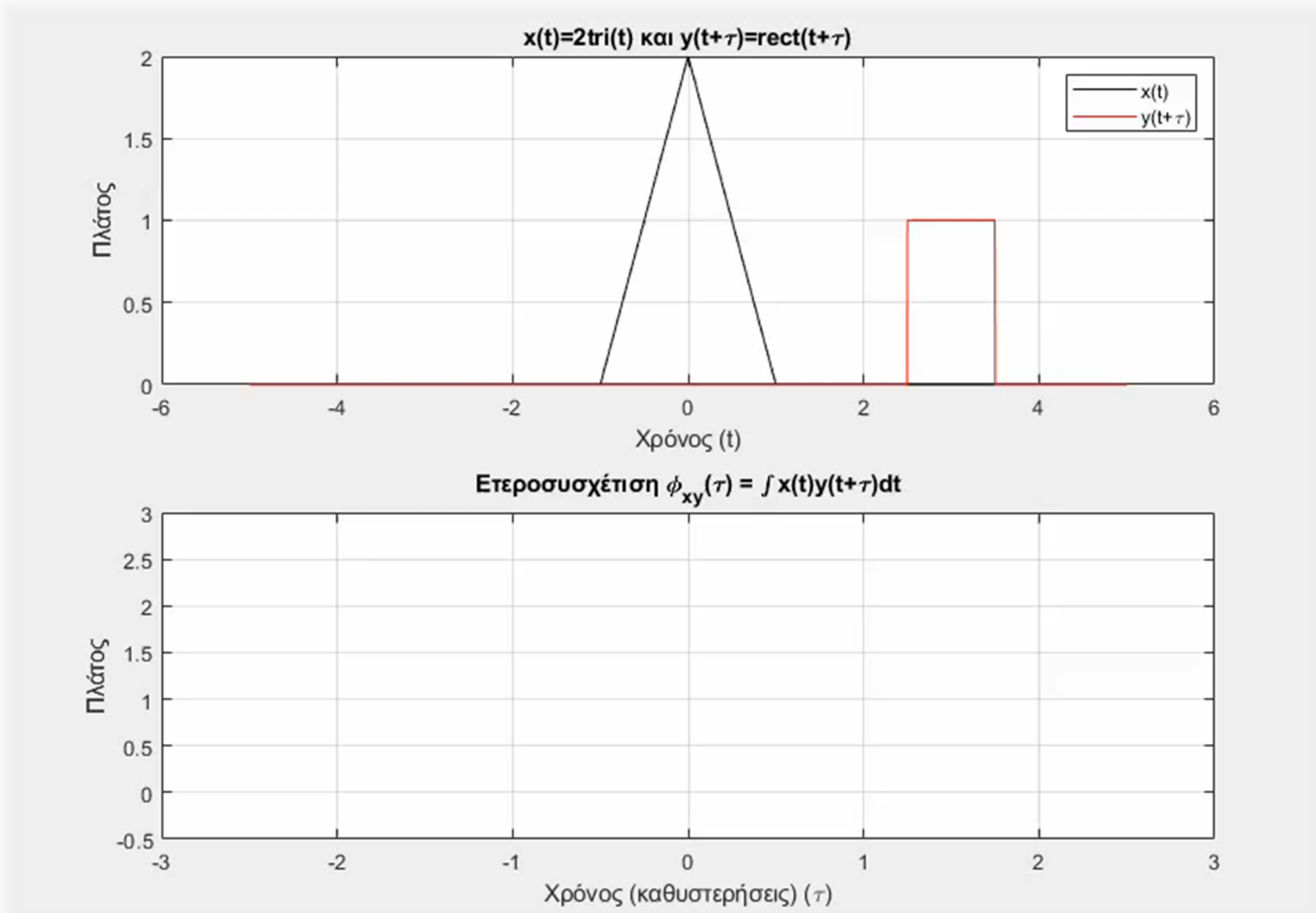
- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**



- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**



- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**



- **Συσχετίσεις**
- **Σήματα Ενέργειας**
- Είναι εμφανές ότι ο ορισμός της συσχέτισης για σήματα ενέργειας μοιάζει πολύ με τον ορισμό της συνέλιξης (ελαφρώς «πειραγμένο» για λόγους εμφάνισης):

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(\tau - t)dt = x(\tau) * y(\tau)$$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\left.\begin{aligned} \phi_x(\tau) &= x^*(-\tau) * x(\tau) \\ \phi_{xy}(\tau) &= x^*(-\tau) * y(\tau) \\ \phi_{yx}(\tau) &= y^*(-\tau) * x(\tau) \end{aligned}\right\}$$

Η συσχέτιση είναι μια συνέλιξη **χωρίς** τη χρονική αντιστροφή του ενός σήματος

- Προφανώς αν τα σήματα είναι πραγματικά, $x^*(\tau) = x(\tau)$

- **Συσχετίσεις**
- **Σήματα Ισχύος (απεριοδικά)**
- Αυτοσυσχέτιση:

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Ετεροσυσχέτιση:

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)y(t+\tau)dt$$

$$\phi_{yx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Προφανώς το T εδώ είναι μια οποιαδήποτε (μεγάλη) διάρκεια
- Ξανά η συζυγία παραλείπεται όταν έχουμε να κάνουμε με πραγματικά σήματα
- Το ολοκλήρωμα επιλύεται επιλέγοντας **ένα τμήμα του γινομένου**, διάρκειας T, εκτελώντας το ολοκλήρωμα, και στέλνουμε στο τέλος το T στο άπειρο

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**

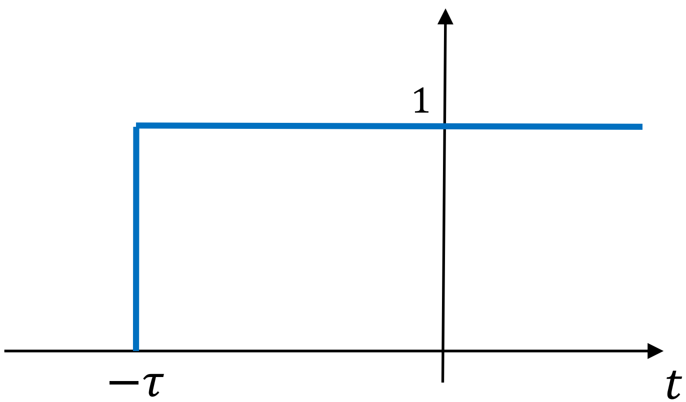
○ Έστω $x(t) = u(t)$, βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος αυτού.

Πρέπει να κατασκευάσουμε το σήμα $x(t+\tau) = u(t+\tau)$

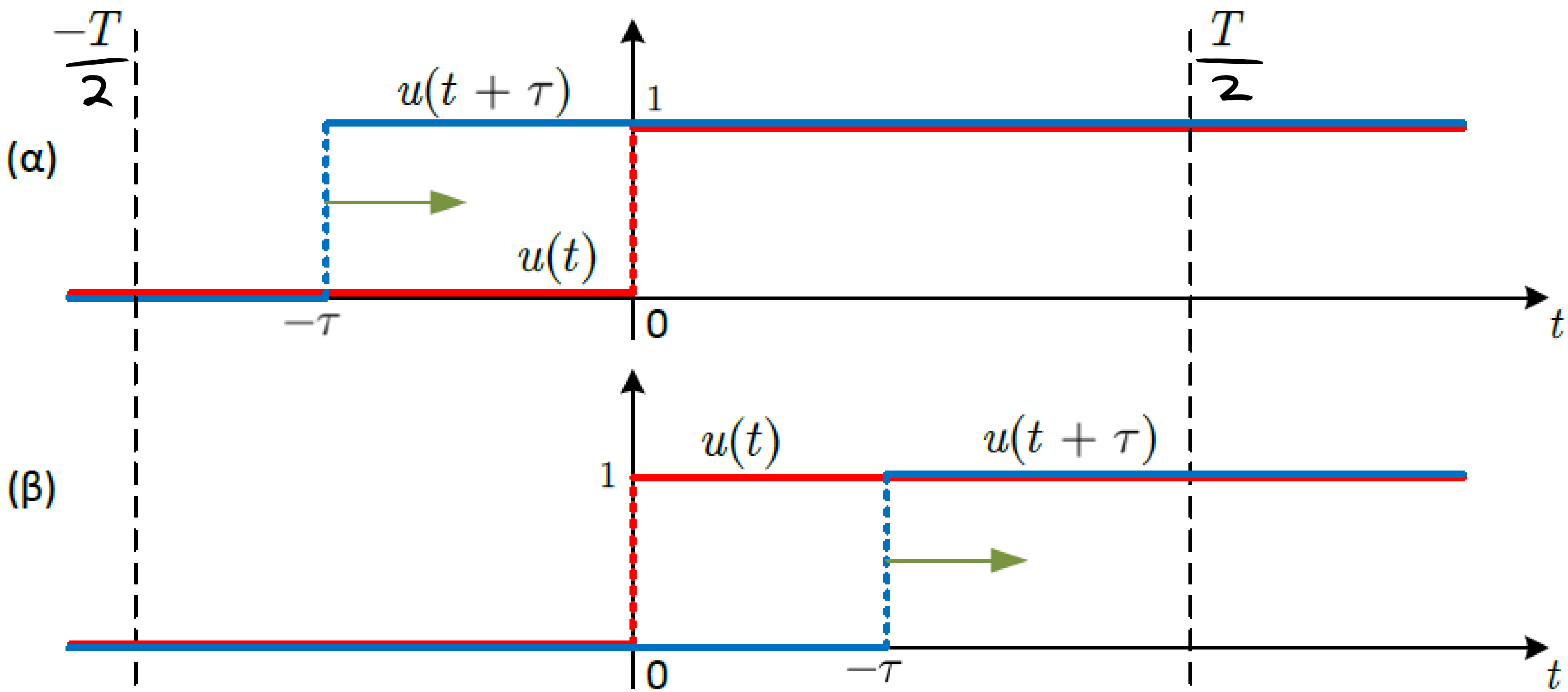
$$x(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

$$x(t+\tau) = \begin{cases} 1, & t+\tau > 0 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

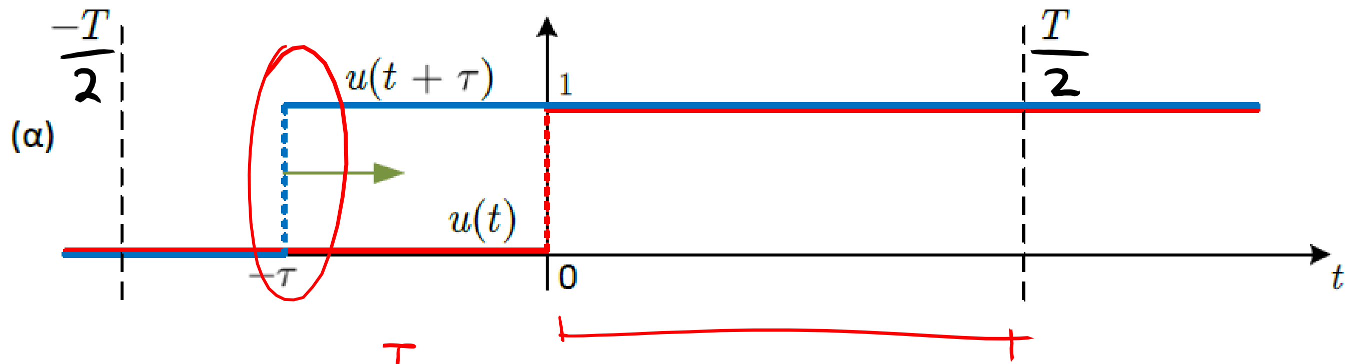
$$= \begin{cases} 1, & t > -\tau \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$



- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**
  - Έστω $x(t) = u(t)$, βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος αυτού.



- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**



Είναι

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\,u(t+\tau)\,dt$$

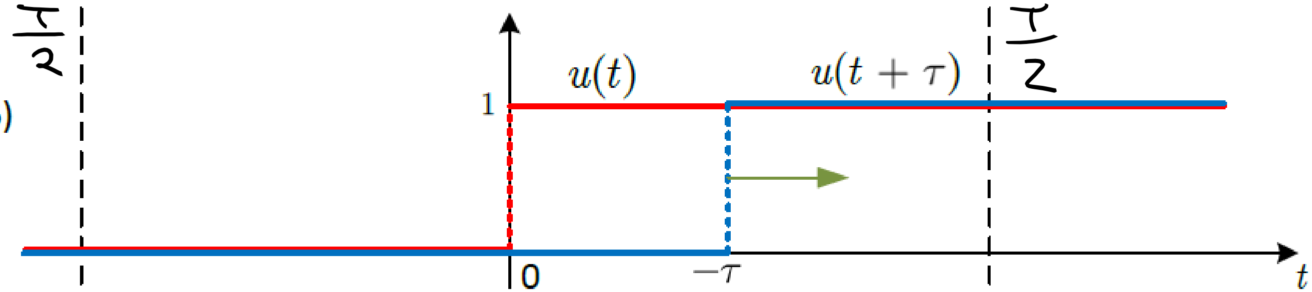
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} 1\cdot 1\cdot dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\, t\Big|_{0}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}$$

για $-\tau < 0 \Leftrightarrow \boxed{\tau > 0}$

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**

(β)



Είναι

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\,u(t+\tau)\,dt$$

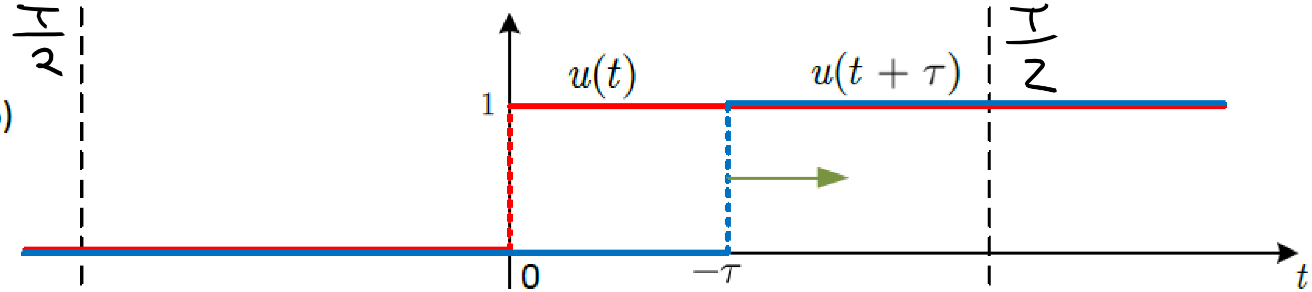
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\tau}^{\frac{T}{2}} 1\cdot 1\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\, t\Big|_{-\tau}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}+\tau\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2} + \cancel{\lim_{T\to\infty} \frac{\tau}{T}}^{\,0} = \frac{1}{2},$$

για $-\tau > 0 \Leftrightarrow \boxed{\tau < 0}$

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**

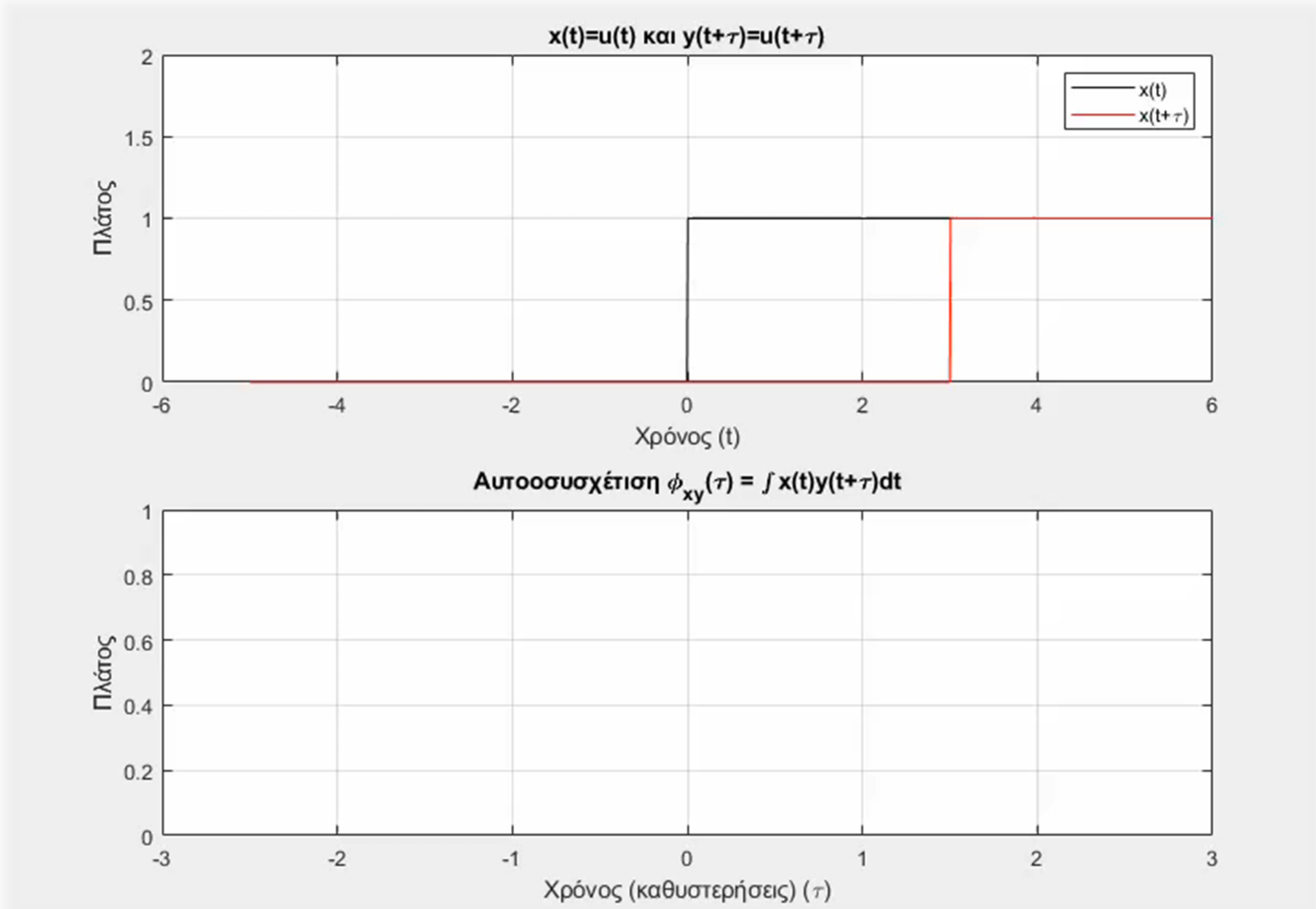
(β)



Άρα συνολικά

$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{2}, \quad \forall \tau.$$

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**



- **Συσχετίσεις**
- **Ιδιότητες**

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+0)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

1) Ισχύει ότι

$$\phi_x(\tau) = \phi_x(-\tau)$$

$$\phi_x(kT_0) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)x(t+kT_0)dt$$
$$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)x(t)dt$$
$$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = P_x$$

2) Ισχύει ότι

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = E_x$$

για σήματα ενέργειας

3) Ισχύει ότι

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = P_x$$

για σήματα ισχύος

4) Αν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό, το ίδιο είναι και η αυτοσυσχέτισή του (με την ίδια περίοδο) και μάλιστα

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(kT_0) = P_x, \qquad k \in Z$$

5) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δεν περιέχει πληροφορία για τη φάση του σήματος

6) Ισχύει ότι

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}^*(-\tau)$$

7) Αν η ετεροσυσχέτιση είναι μηδενική για κάθε $\tau \in \Re$, τα σήματα λέγονται ασυσχέτιστα

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ