ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 13Η

- Μετασχηματισμός Laplace

- **Προς το μετασχ. Laplace**

- Στις επόμενες διαλέξεις θα συζητήσουμε για τον **μετασχ. Laplace**

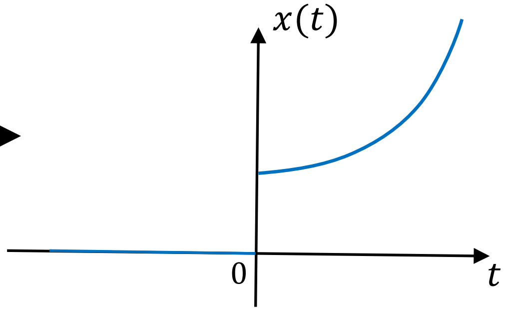
- Θα συζητήσουμε το **κίνητρο** πίσω από τη χρήση του…

- …καθώς και τις πολλαπλές διαισθητικές **ερμηνείες** που μπορεί να έχει

- Θα κατανοήσουμε τις **λεπτομέρειες** πίσω από τη θεωρία του και στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις **ιδιότητές** του

- Τέλος, θα δούμε πως θα χρησιμοποιούμε το μετασχ. Laplace για να **λύνουμε διαφορικές εξισώσεις** και να **αναλύουμε** – ΓΧΑ ή μη – **συστήματα**

- **Προς το μετασχ. Laplace**
- Μετασχ. Fourier: πανίσχυρο (!) εργαλείο ανάλυσης συστημάτων και σημάτων
- Σήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier (== δε συγκλίνει το ολοκλήρωμα)
  - Κάποια σήματα ισχύος
  - Κάποια σήματα ούτε ενέργειας ούτε ισχύος
- Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = e^{at}u(t), a > 0$
  - Δεν έχει μετασχ. Fourier
  - Τι θα έπρεπε να ισχύει για να έχει?



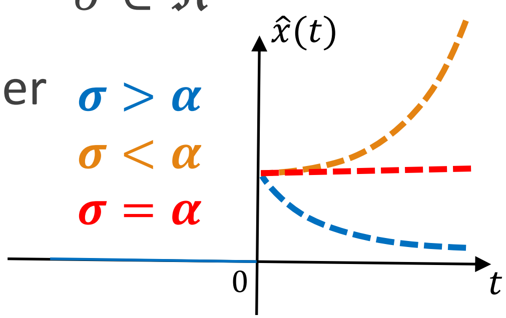
$$a < 0$$

- Ας το “κάνουμε να έχει”! ☺
- Δημιουργούμε ένα νέο σήμα

$$\hat{x}(t) = x(t)\boldsymbol{e^{-\sigma t}} = e^{at}\boldsymbol{e^{-\sigma t}}u(t) = e^{(a-\sigma)t}u(t), \qquad \sigma \in \Re$$

- Τώρα αν $a - \sigma < 0 \Rightarrow \sigma > a$, το σήμα $\hat{x}(t)$ έχει μετασχ. Fourier

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t)e^{-j2\pi ft}dt$$



- **Προς το μετασχ. Laplace**

- Δηλ.

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{(a-\sigma)t} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{(\sigma - a) + j2\pi f}, \sigma > a$$

- Ελέγχοντας έτσι την τιμή του σ μπορούμε να μετασχηματίζουμε το σήμα

- Όμως εμείς ενδιαφερόμαστε για το $x(t)$, όχι για το $\hat{x}(t)$! ☺

- Από την παραπάνω σχέση

$$\int_{0}^{+\infty} e^{at} e^{-\sigma t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{at} e^{-\overbrace{(\sigma + j2\pi f)}^{s} t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{e^{at} u(t)}^{x(t)} e^{-st} dt = X(s)$$

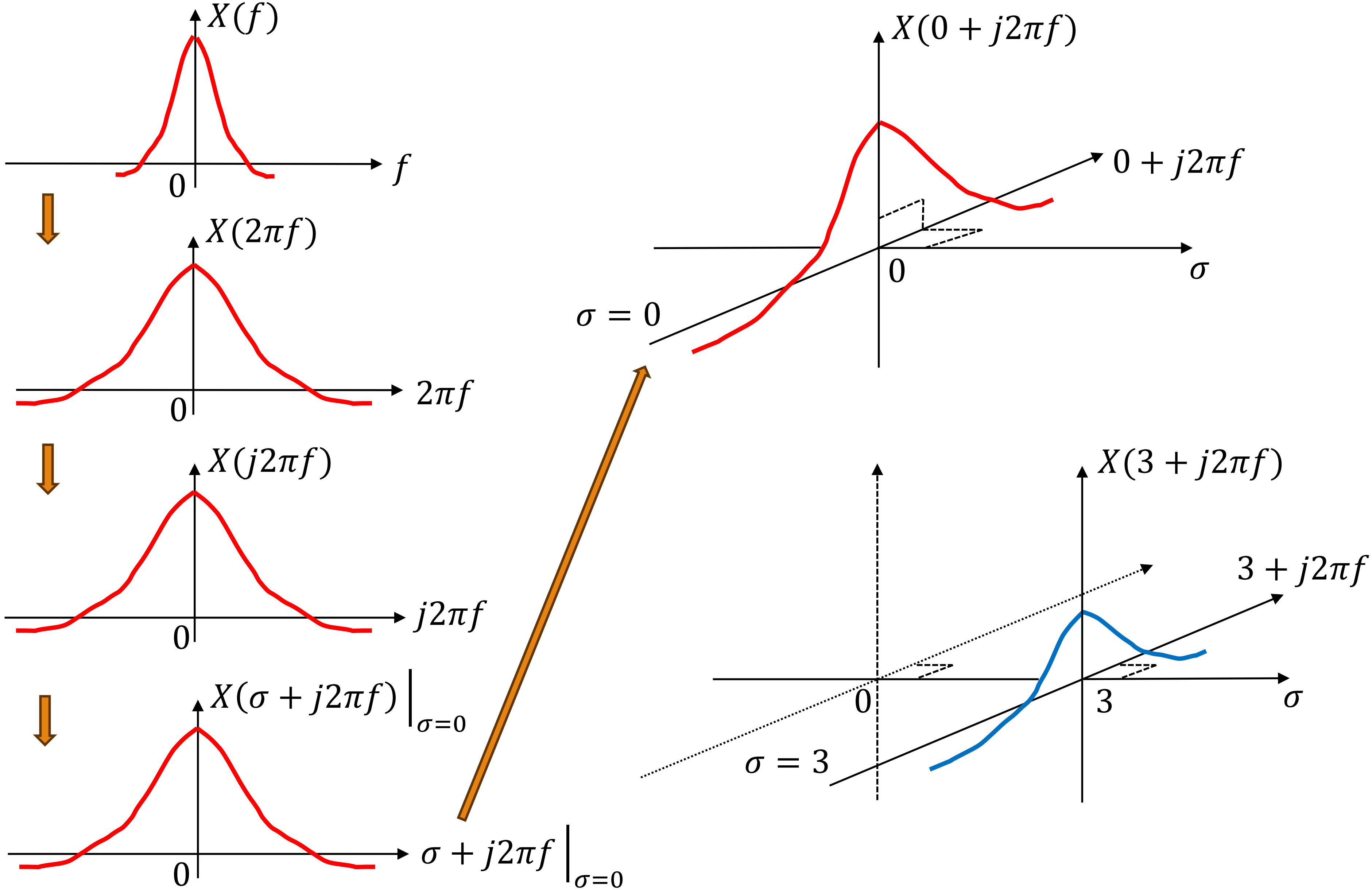
- Οπότε βρήκαμε έναν **άλλο μετασχηματισμό** ο οποίος προβάλλει το σήμα όχι στις γνωστές μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις αλλά σε κάποιες άλλες της μορφής e^{-st}

- Αν θεωρήσουμε ότι ο μετασχ. Fourier εξαρτιόταν από τη μεταβλητή $j2\pi f$, τώρα ο νέος μετασχηματισμός εξαρτάται από τη μεταβλητή $s = \sigma + j2\pi f$

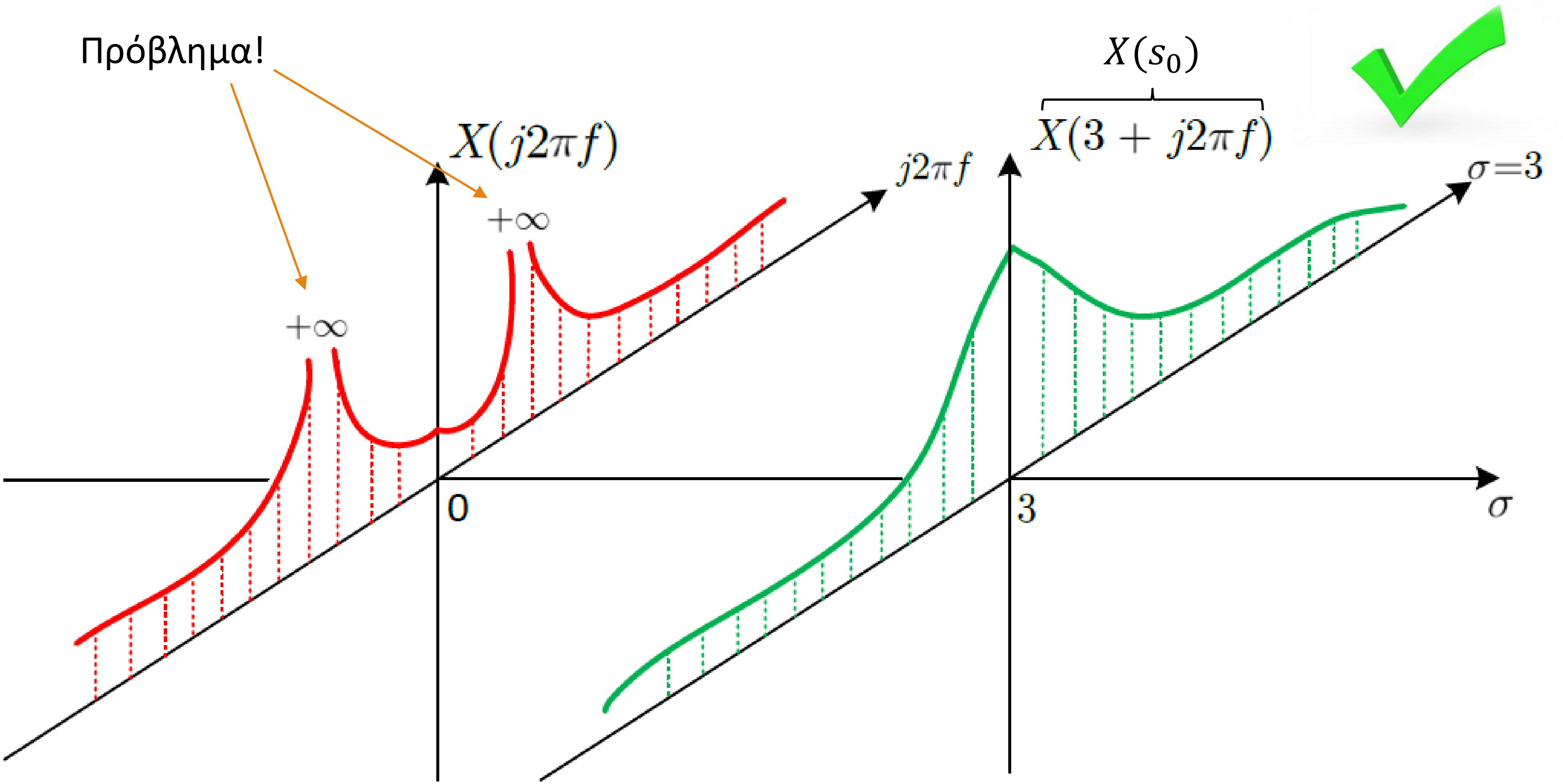
- Αυτός ο μετασχηματισμός ονομάζεται

μετασχηματισμός Laplace

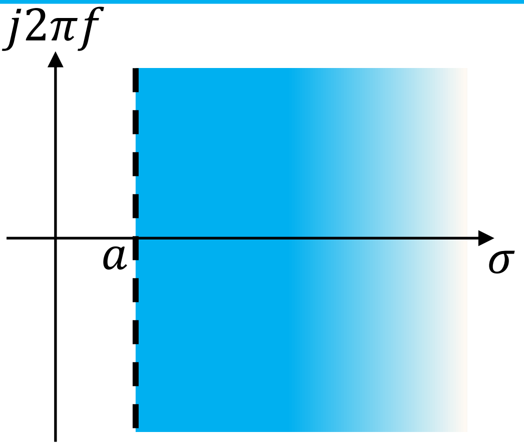
- **Προς το μετασχ. Laplace**



- **Προς το μετασχ. Laplace**



- **Προς το μετασχ. Laplace**



- Προφανώς καταλαβαίνετε ότι μπορούμε να επιλέξουμε άπειρα σ για να μετασχηματίσουμε το σήμα που συζητάμε
  - Αρκεί πάντα να έχουμε $\sigma > a$
  - Η περιοχή αυτή αποτελεί ένα **ημιεπίπεδο** από το $\sigma = \alpha$ (χωρίς να το περιλαμβάνει) ως το $\sigma = +\infty$

- Η περιοχή του μιγαδικού επιπέδου στην οποία συγκλίνει ο μετασχ. Laplace ονομάζεται **πεδίο σύγκλισης (region of convergence - ROC) και συμβολίζεται με R_x**
  - Μπορείτε να το φαντάζεστε σαν το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων μιας μεταβλητής

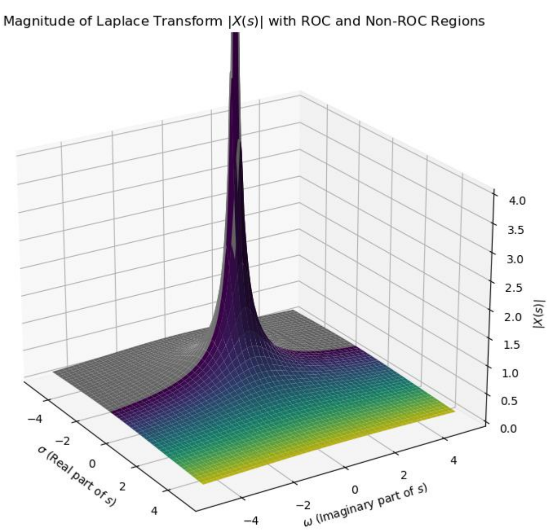
- Ορισμός Μετασχ. Laplace

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

- Αντίστροφος μετ. Laplace

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

  - Δε θα τον χρησιμοποιήσουμε…



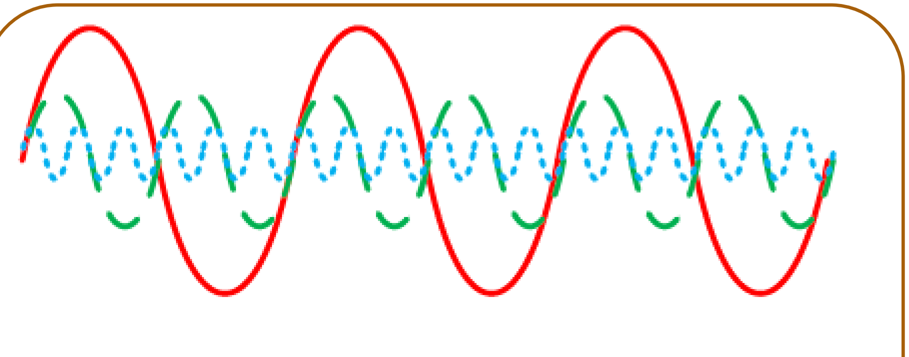
- **Προς το μετασχ. Laplace**
- Η χρήση μιγαδικών συχνοτήτων ξενίζει…
- Ας δούμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier στο σήμα $x(t)$ μέσω του $\hat{x}(t) = e^{(a-\sigma)t}u(t)$

$$x(t) = \hat{x}(t)e^{+\sigma t} = e^{+\sigma t}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{X}(f)e^{j2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\hat{X}(f)e^{\sigma t}\right)e^{j2\pi ft}df$$

- Θεωρώντας ότι αναλύουμε πραγματικά σήματα, ο μετασχ. Fourier έχει τις γνωστές συμμετρίες και το $x(t)$ μπορεί να γραφεί ως

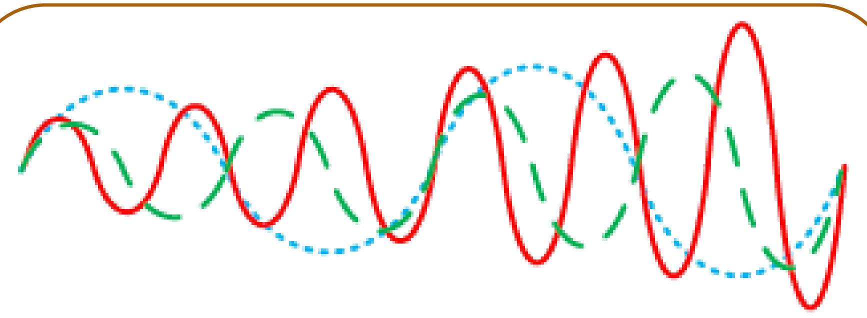
$$x(t) = \int_{0}^{+\infty} 2\left|\hat{X}(f)\right|\boldsymbol{e^{\sigma t}}\cos\left(2\pi ft + \hat{\phi}(f)\right)df$$

$\sigma = 0$



(α΄) Σταθερού πλάτους ημίτονα

$\sigma \neq 0$



(β΄) Μεταβλητού πλάτους ημίτονα

- **Πόλοι και Μηδενικά**

- Οι μετασχηματισμοί Laplace που θα δούμε θα αποτελούν κατά κανόνα ρητές συναρτήσεις του s

- Μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα δυο είδη σημείων του μιγαδικού επιπέδου

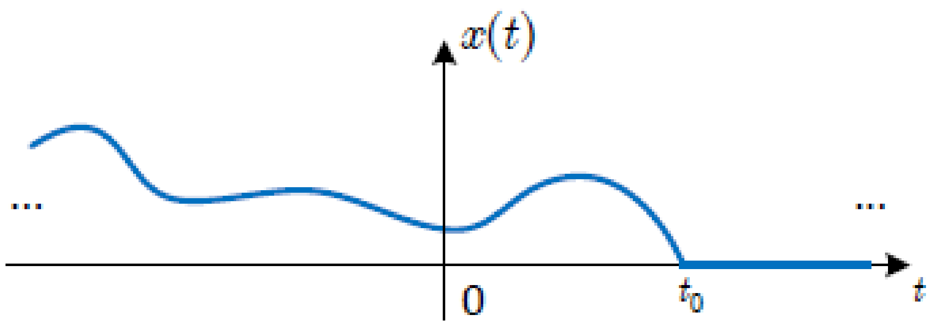
- 1. Οι **πόλοι** του μετασχηματισμού
  - Είναι οι θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που ο μετασχηματισμός Laplace απειρίζεται, δηλ. το σύνολο $S_p = \{s \in \mathbb{C} : X(s) \to \infty\}$
  - Ως εκ τούτου, οι πόλοι **δεν** ανήκουν στο πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού
  - Σε ρητές συναρτήσεις του s, οι ρίζες του παρονομαστή είναι πόλοι
  - Συμβολίζονται με ένα **X** στο μιγαδικό επίπεδο

- 2. Τα **μηδενικά** του μετασχηματισμού
  - Είναι οι θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που ο μετασχηματισμός Laplace μηδενίζεται, δηλ. το σύνολο $S_z = \{s \in \mathbb{C} : X(s) = 0\}$
  - Μπορούν να ανήκουν στο πεδίο σύγκλισης, δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα με αυτό
  - Σε ρητές συναρτήσεις του s, οι ρίζες του αριθμητή είναι μηδενικά
  - Συμβολίζονται με ένα **O** στο μιγαδικό επίπεδο

- **Πλευρικότητα και Αιτιατότητα**

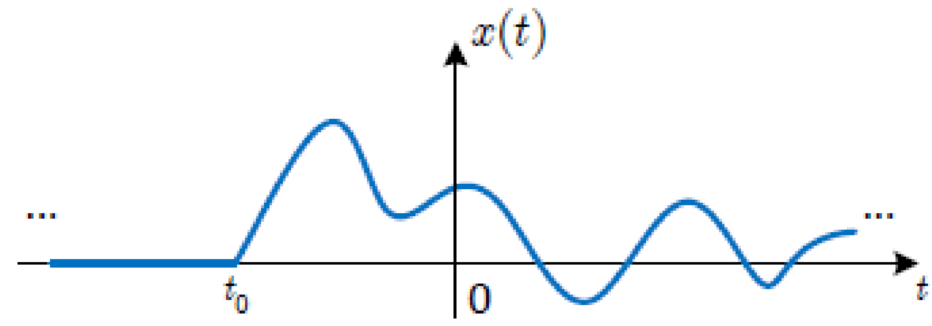
- Πλευρικότητα

$$x(t) = 0, \qquad t > t_0$$

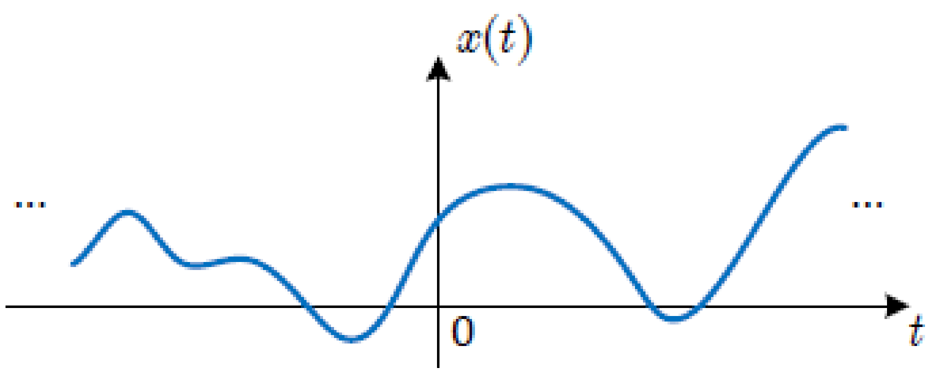


(α΄) Αριστερόπλευρο σήμα.

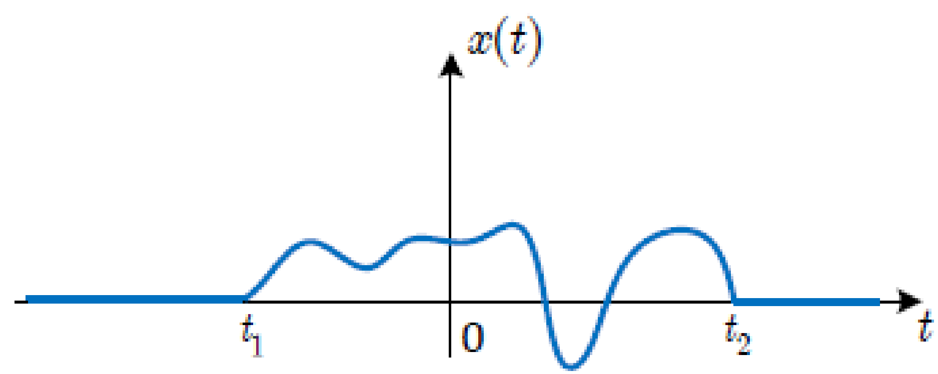
$$x(t) = 0, \qquad t < t_0$$



(β΄) Δεξιόπλευρο σήμα.



(γ΄) Αμφίπλευρο σήμα.



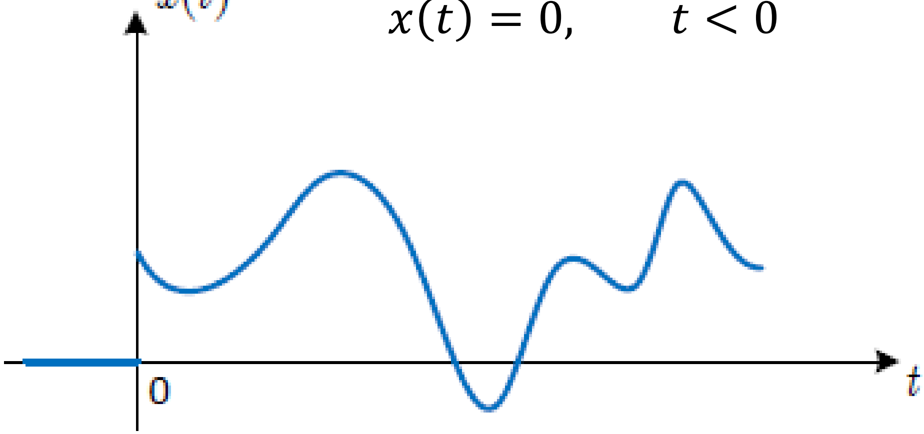
(δ΄) Πεπερασμένης διάρκειας σήμα.

$$x(t) = 0, \qquad t < t_1, t > t_2$$

- **Πλευρικότητα και Αιτιατότητα**

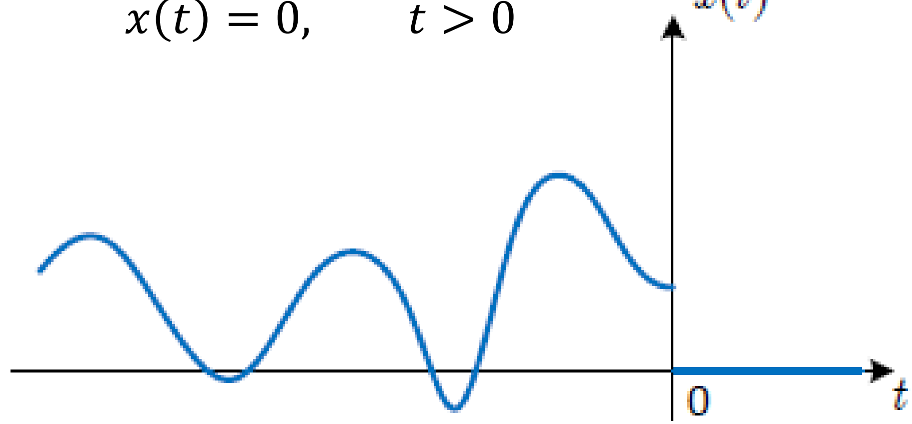
- Αιτιατότητα

$$x(t) = 0, \qquad t < 0$$

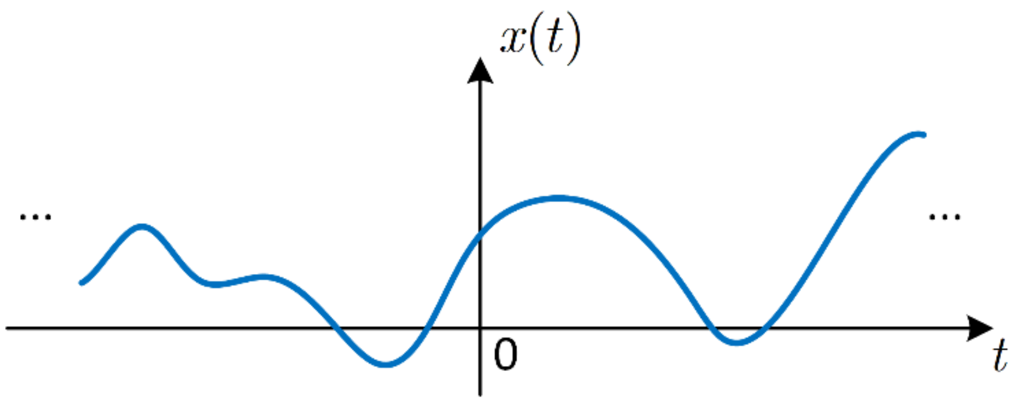


(α′) *Αιτιατό Σήμα.*

$$x(t) = 0, \qquad t > 0$$

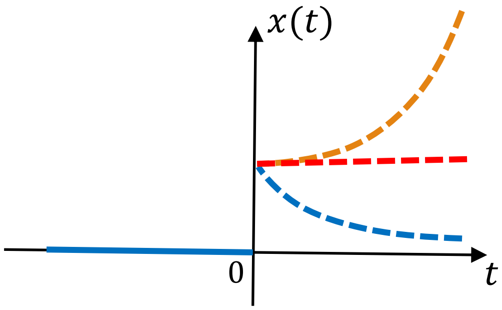


(β′) *Αντι-αιτιατό σήμα.*



(γ’) *Μη-αιτιατό σήμα*

- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα: Βρειτε το μετασχ. Laplace του σήματος $x(t) = e^{at}u(t), a \in \Re$



Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at} u(t) e^{-st} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{at} \cdot 1 \cdot e^{-st} dt$$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{a-s} \left(\lim_{t \to +\infty} e^{(a-s)t} - 1 \right) \quad (1)$$

$s = \sigma + j2\pi f$

Είναι $\lim_{t \to +\infty} e^{(a-s)t} = \lim_{t \to +\infty} e^{at} \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{-j2\pi f t} = \lim_{t \to +\infty} e^{(a-\sigma)t} \cdot e^{-j2\pi f t}$

• Μετασχηματισμός Laplace

Για $a-\sigma<0 \Rightarrow \sigma>a$, το $\lim_{t\to+\infty} e^{(a-s)t} = 0$ (2)

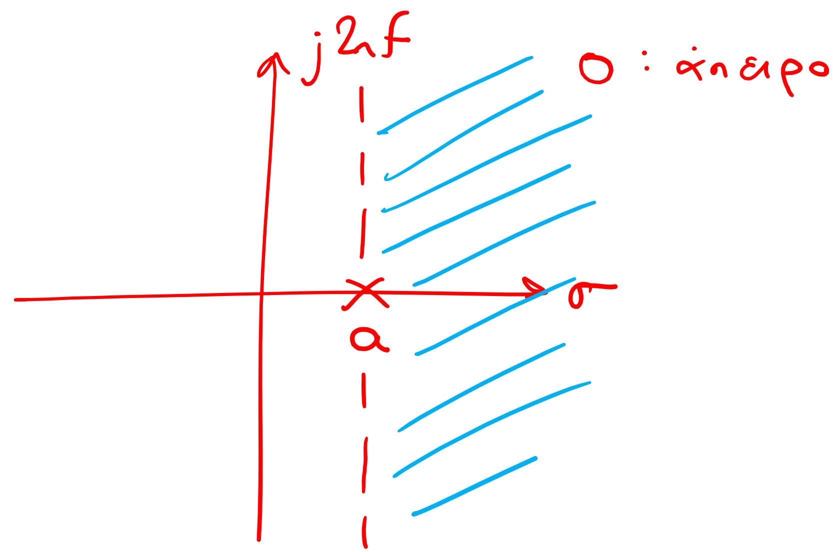
(1) $\overset{(2)}{\Rightarrow} X(s) = \frac{1}{a-s}(0-1) = \frac{1}{s-a}$, $\underbrace{\sigma>a \Leftrightarrow Re\{s\}>a}_{\text{Πεδίο Σύγκλισης}}$

Άρα

$$e^{at}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-a}, \quad \sigma>a$$

Πόλοι: $s=a$

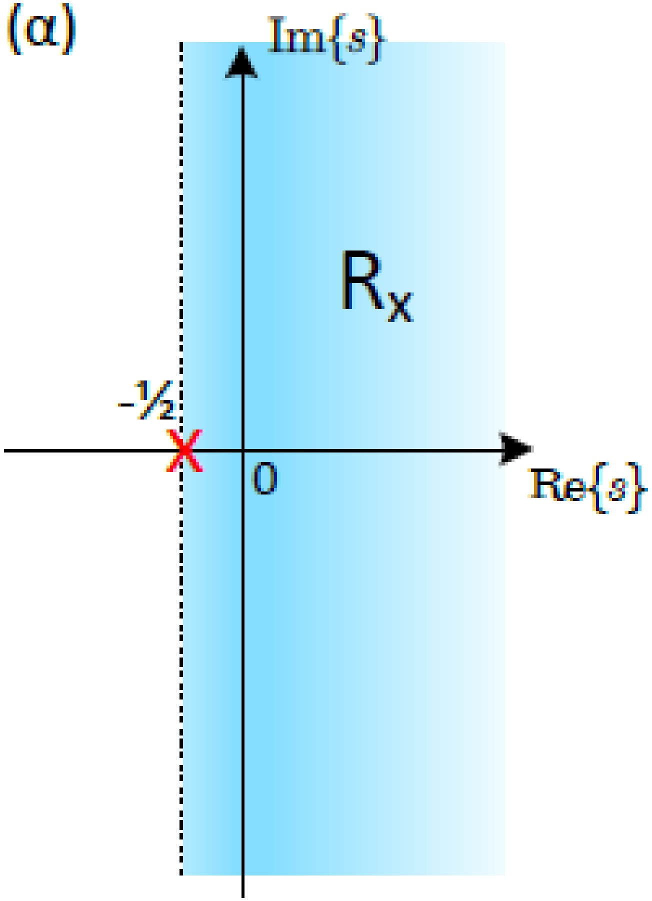
Μηδενικά: $s=\infty$

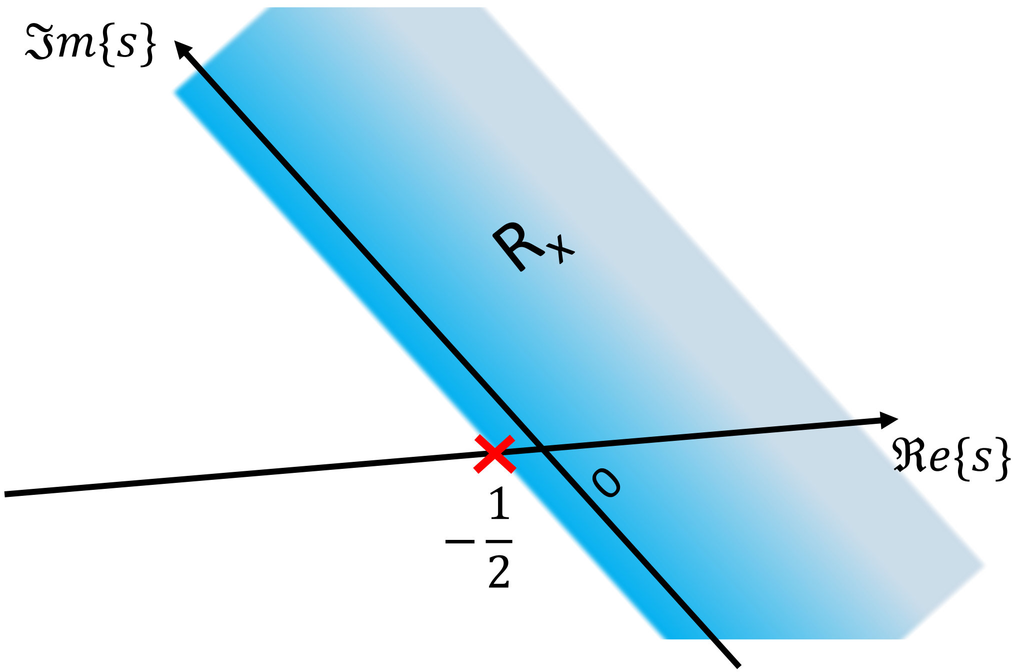


- **Μετασχηματισμός Laplace**

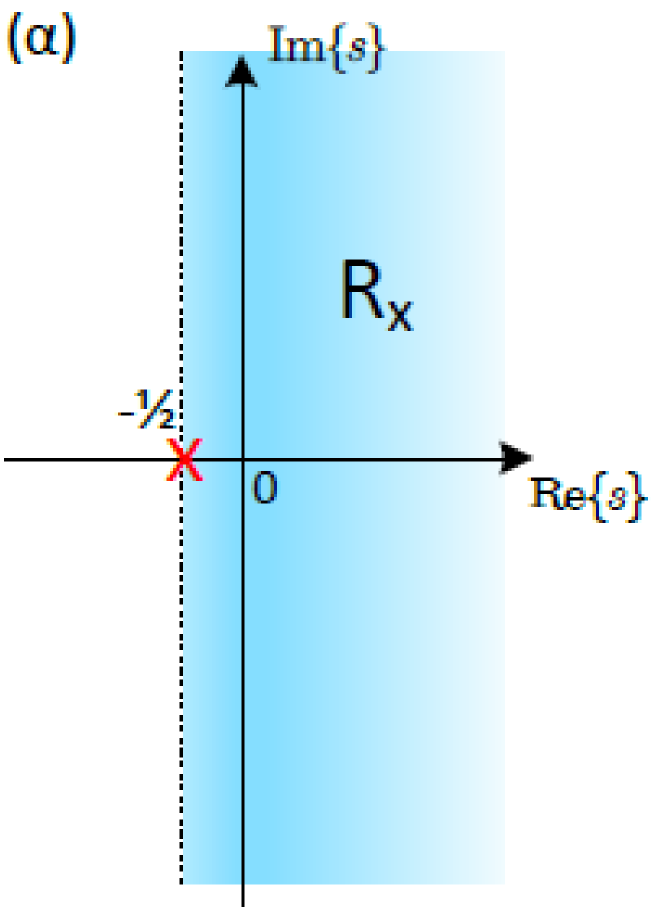
- Παράδειγμα για $a = -\frac{1}{2}$:

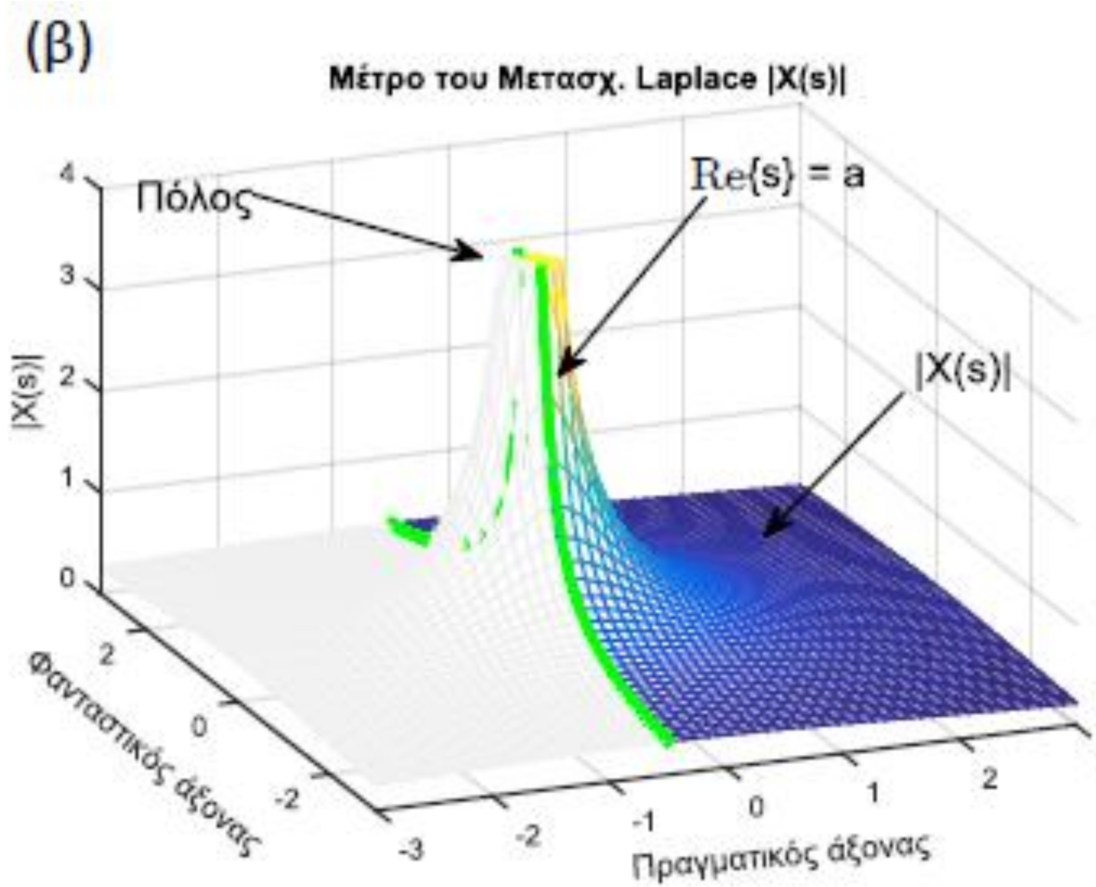
(α)





- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα:

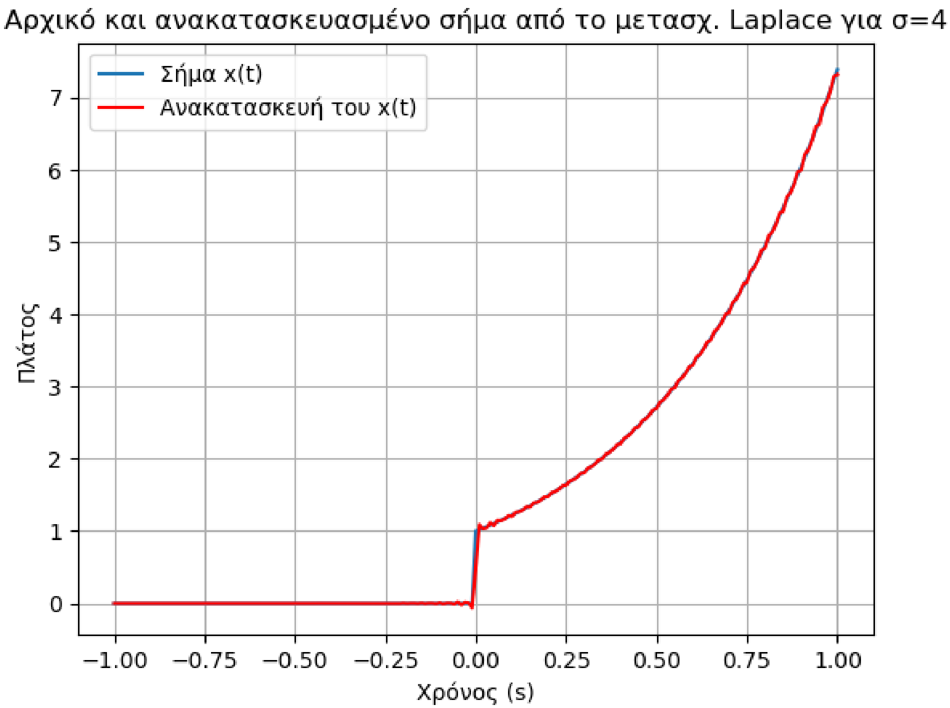




- **Μετασχηματισμός Laplace**

- Κώδικας:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Παράμετρος α
a = 2

# Βήμα στο χρόνο
dt = 0.01
# Άξονας χρόνου [-1,1] s
t = np.arange(-1, 1 + dt, dt)

# Βήμα στη συχνότητα
df = 0.01
# Άξονας συχνότητας [-40,40] Hz
f = np.arange(-40, 40 + df, df)

# Σήμα (0 για t < 0, exp(at) για t > 0)
x = np.where(t <= 0, 0, np.exp(a * t))

# Επιλογή μιας τιμής του σ (έστω 4)
sigma = 4

# Μετασχηματισμός Laplace
X = 1.0 / (sigma - a + 1j * 2 * np.pi * f)
```




```
# Δέσμευση μνήμης
x_est = np.zeros_like(t, dtype=complex)

# Σύνθεση του x(t) από ένα slice του μετασχ. Laplace
for i in range(len(f)):
    x_est += X[i] * np.exp((sigma + 1j * 2 * np.pi * f[i]) * t)

# Κανονικοποίηση
x_est = df * x_est

# Plotting
plt.plot(t, x, label='Σήμα x(t)')
plt.plot(t, x_est.real, 'r', label='Ανακατασκευή του x(t)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.title("Αρχικό και ανακατασκευασμένο σήμα από το μετασχ. Laplace για σ=4")
plt.xlabel("Χρόνος (s)")
plt.ylabel("Πλάτος")
plt.show()
```

Συνεχίζεται... ☺