ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 12Η

- Συστήματα στο χώρο του Fourier

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Έστω ότι έχουμε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$

- Αν στην είσοδο εμφανιστεί το σήμα $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}, \quad A > 0, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$ τότε η έξοδος θα είναι

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = A\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j(2\pi f_0(t-\tau)+\varphi)}d\tau$$

$$= Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau}d\tau}_{H(f_0)} = AH(f_0)e^{j(2\pi f_0 t+\phi)}$$

$$= H(f_0)x(t)$$

- Προφανώς ο συντελεστής $H(f_0)$ της εξόδου δεν είναι άλλος από το **μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής απόκρισης** για την τιμή f_0 του μετασχηματισμού

- Η είσοδος περνά αυτούσια στην έξοδο και “απλά” πολλαπλασιάζεται με έναν μιγαδικό αριθμό!!

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Το σήμα $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}$ ονομάζεται **ιδιοσυνάρτηση** (eigenfunction) του συστήματος
- Η τιμή $H(f_0)$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος
- Ο μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης ενός συστήματος ονομάζεται

απόκριση σε συχνότητα

ή

συχνοτική απόκριση

- Αν τη γράψουμε σε πολική μορφή

$$H(f) = |H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

τότε ονομάζουμε:

- **Απόκριση πλάτους** : $|H(f)|$
- **Απόκριση φάσης** : $\phi_h(f)$

- **Η απόκριση πλάτους περιγράφει πως το σύστημα επηρεάζει το πλάτος της εισόδου**
- **Η απόκριση φάσης περιγράφει πως το σύστημα επηρεάζει τη φάση της εισόδου**

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- **Η απόκριση πλάτους περιγράφει *πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα πλάτους της εισόδου***
- **Η απόκριση φάσης περιγράφει *πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα φάσης της εισόδου***

- Ας το δούμε:
- Έξοδος ΓΧΑ συστήματος: $y(t) = x(t) * h(t)$
- Στο χώρο της συχνότητας: $Y(f) = X(f)H(f)$
- Πολική μορφή:

$$|Y(f)|e^{j\phi_y(f)} = |X(f)|e^{j\phi_x(f)}|H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

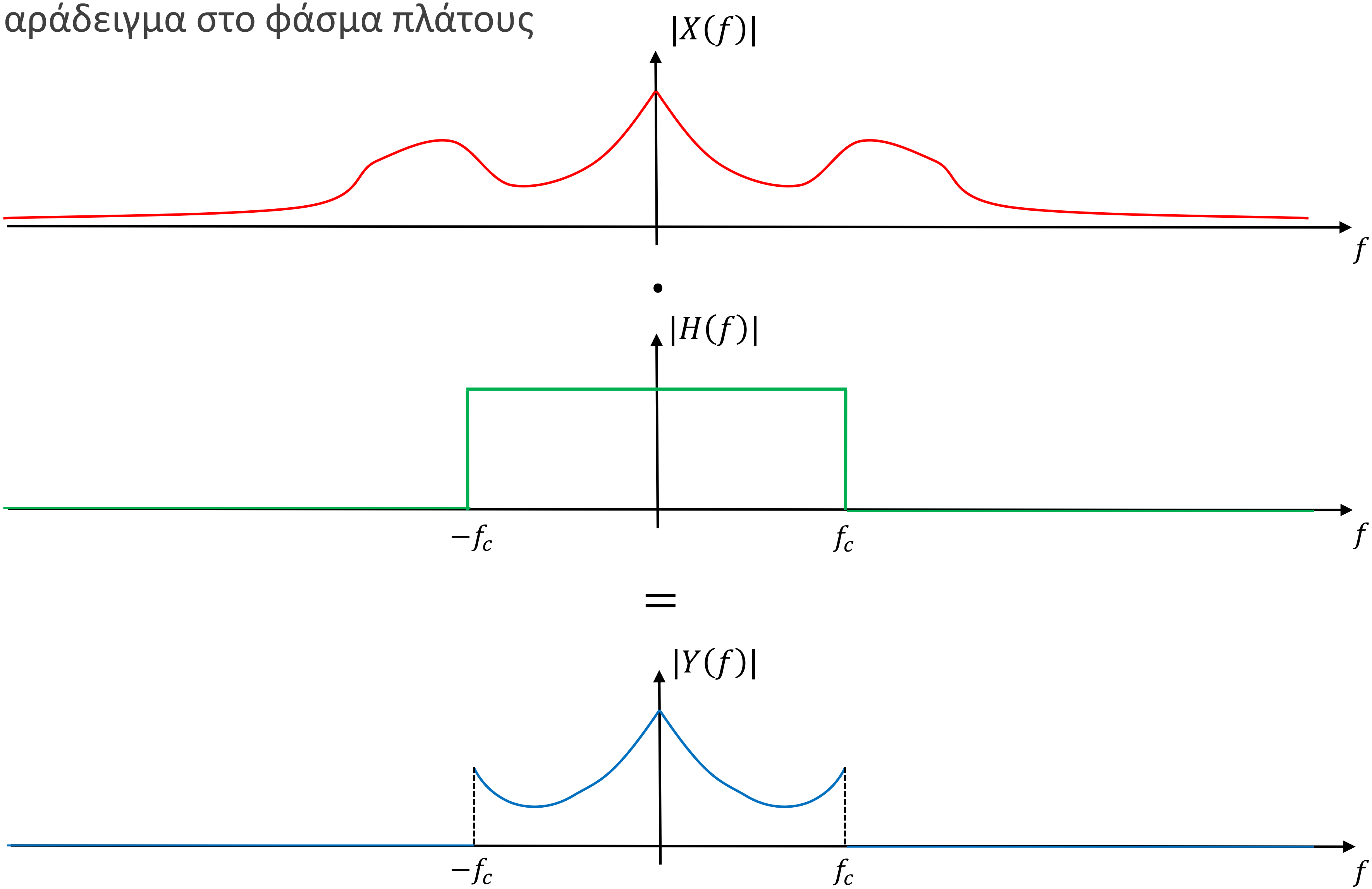
$$= |X(f)||H(f)|e^{j(\phi_x(f)+\phi_h(f))}$$

- Προφανώς

$$\boxed{\begin{aligned} |Y(f)| &= |X(f)||H(f)| \\ \phi_y(f) &= \phi_x(f) + \phi_h(f) \end{aligned}}$$

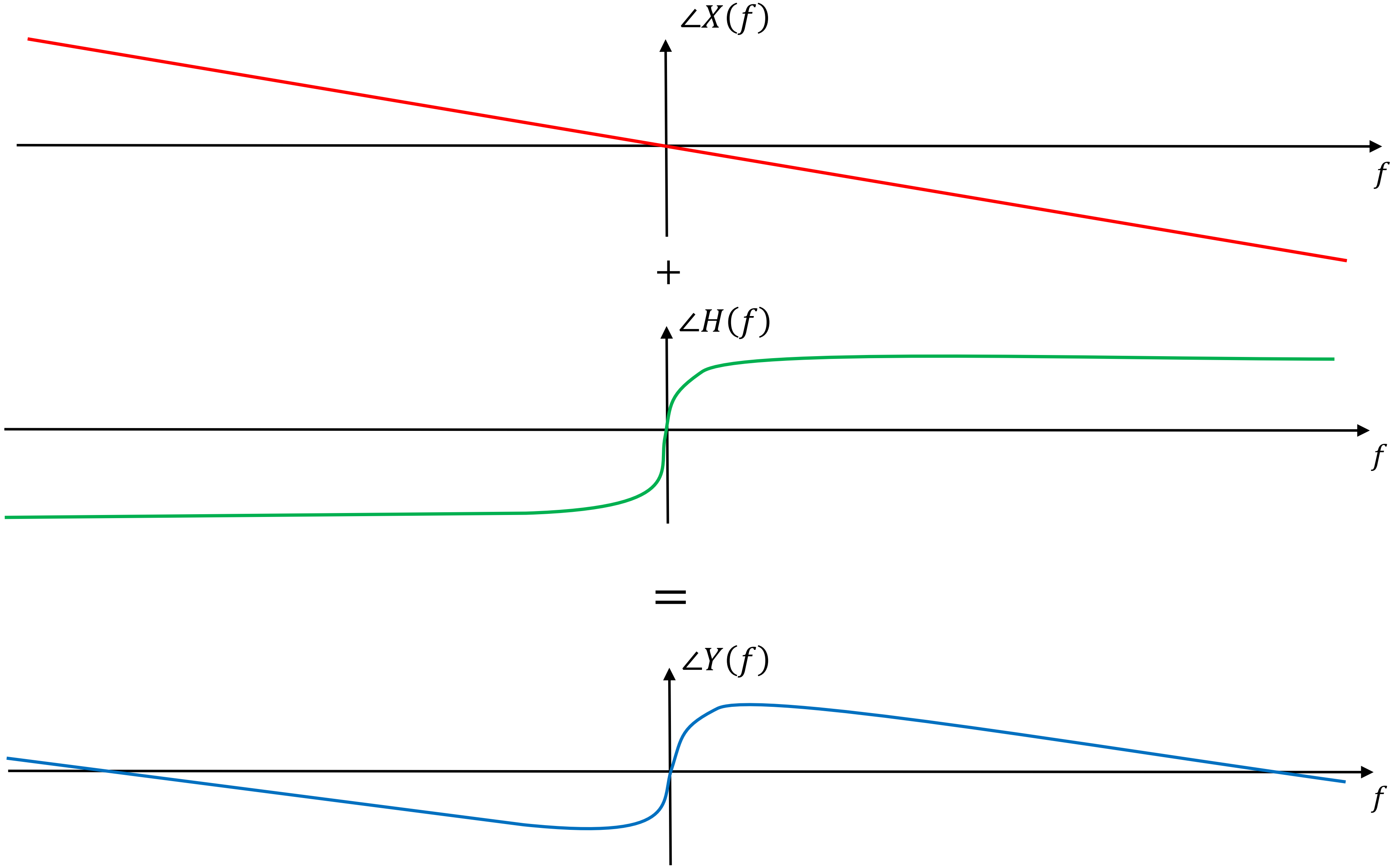
- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα στο φάσμα πλάτους



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα στο φάσμα φάσης



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)|$$

$$\phi_y(f) = \phi_x(f) + \phi_h(f)$$

- Η απόκριση πλάτους επηρεάζει το φάσμα πλάτους της εισόδου **πολλαπλασιαστικά**
- Η απόκριση φάσης επηρεάζει το φάσμα φάσης της εισόδου **αθροιστικά**

Ένα σύστημα μπορεί να μειώνει/ενισχύει το πλάτος κάποιων συχνοτήτων και να αλλάζει τη φάση τους

- Για μια **πραγματική** κρουστική απόκριση, η απόκριση συχνότητας της έχει τις γνωστές ιδιότητες συμμετρίας πραγματικού και φανταστικού μέρους καθώς και αποκρίσεων πλάτους και φάσης
  - **Άρτιο πραγματικό μέρος – Άρτια απόκριση πλάτους**
  - **Περιττό φανταστικό μέρος – Περιττή απόκριση φάσης**

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$$

- Η σχέση

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την εύρεση της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος δεδομένης μιας εισόδου και μιας εξόδου, ως

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

- Δοθείσας μιας διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα, μπορούμε να βρούμε γρήγορα και εύκολα την απόκριση συχνότητας
  - ...και αν θέλουμε στη συνέχεια την κρουστική απόκριση

- Ας δούμε πως:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \leftrightarrow \sum_{i=0}^{N} (j2\pi f)^i a_i Y(f) = \sum_{l=0}^{M} (j2\pi f)^l b_l X(f)$$

$$Y(f) \sum_{i=0}^{N} (j2\pi f)^i a_i = X(f) \sum_{l=0}^{M} (j2\pi f)^l b_l \Leftrightarrow \frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i}$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Η σχέση

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i}$$

αποτελείται από πολυώνυμα του $(j2\pi f)$ και μπορεί – υποθέτοντας απλές ρίζες – να παραγοντοποιηθεί ως

$$H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i} = \frac{\prod_{l=1}^{M} (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^{N} (j2\pi f + \kappa_i)}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα (<u>μόνο αν</u> $M < N$) να καταλήξουμε στο

$$H(f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{\kappa_i + j2\pi f}$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να βρει, τέλος, την κρουστική απόκριση, μέσω πινάκων:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{-\kappa_i t} u(t)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 3x(t) - 6\frac{d}{dt}x(t)$$

Δείξτε ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ δίνεται ως

$$h(t) = 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t)$$

Είναι

$$y'(t) + 2y(t) = -6x'(t) + 3x(t)$$

$$\Big\updownarrow \mathcal{F}$$

$$(j2\pi f)Y(f) + 2Y(f) = -6 \cdot j2\pi f X(f) + 3X(f)$$

$$Y(f)(2 + j2\pi f) = X(f)(3 - 6j2\pi f)$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{3 - 6j2\pi f}{2 + j2\pi f}$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

Διαιρώντας τα πολυώνυμα

$$\begin{array}{r|l} -\cancel{6j2\pi f} + 3 & j2\pi f + 2 \\ \cline{2-2} -(-\cancel{6j2\pi f} - 12) & -6 \\ \hline 15 & \end{array}$$

Άρα

$$H(f) = -6 + \frac{15}{2 + j2\pi f}$$

$$\Big\updownarrow F^{-1}$$

$$h(t) = -6\,\delta(t) + 15\,e^{-2t}u(t)$$

από πίνακες έτοιμων ζευγών Μετασχ. Fourier.

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα – **εναλλακτική λύση**:

Όμοια με πριν, καταλήξαμε στο $H(f) = \dfrac{3 - 6j2\pi f}{2 + j2\pi f}$.

Είναι $H(f) = \dfrac{3}{2+j2\pi f} - j2\pi f \dfrac{6}{2+j2\pi f}$ (1)

Ξέρουμε ότι $\dfrac{3}{2+j2\pi f} \xleftrightarrow{F^{-1}} 3e^{-2t}u(t)$ (3) αλλά πως θα βρούμε τον

A.M.F. του $j2\pi f \dfrac{6}{2+j2\pi f}$? Από την ιδιότητα της παραγώγισης!

Έστω $Y(f) = j2\pi f \dfrac{6}{2+j2\pi f} = j2\pi f\, Z(f) \xleftrightarrow{F^{-1}} y(t) = \dfrac{d}{dt} z(t)$

με $z(t) = F^{-1}\left\{ \dfrac{6}{2+j2\pi f} \right\} = 6e^{-2t}u(t)$. Άρα $y(t) = \dfrac{d}{dt} 6e^{-2t}u(t)$

$= 6\cdot(e^{-2t})' u(t) + 6e^{-2t}u'(t) = -12e^{-2t}u(t) + 6e^{-2t}\delta(t)$

$= -12e^{-2t}u(t) + 6\delta(t)$ (2)

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα – **εναλλακτική λύση**:

Από τις 1, 2, 3 θα έχουμε

$$H(f) = \frac{3}{2+j2\pi f} - j2\pi f \frac{6}{2+j2\pi f}$$

$$\Big\updownarrow F^{-1}$$

$$h(t) = 3e^{-2t}u(t) - \left(-12e^{-2t}u(t) + 6\delta(t)\right)$$

$$= 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα.

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Ας πούμε ότι ένα πραγματικό απεριοδικό σήμα $x(t)$ εμφανίζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος
  - Μπορούμε να βρούμε την έξοδο?

- Η έξοδος δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση

Συνέλιξη στο χρόνο ⟷ Γινόμενο στη συχνότητα

- Οπότε αν η απόκριση συχνότητας είναι $H(f)$ πολύ εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

- Αν η είσοδος και η απόκριση συχνότητας μπορούν να γραφούν ως ρητές συναρτήσεις του $j2\pi f$, τότε (υποθέτοντας απλές ρίζες)

$$Y(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i} \frac{\sum_{l=0}^{K} d_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{L} c_i (j2\pi f)^i}$$

$$= \frac{\prod_{l=1}^{M} (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^{N} (j2\pi f + \kappa_i)} \frac{\prod_{l=1}^{K} (j2\pi f + m_l)}{\prod_{i=1}^{L} (j2\pi f + q_i)}$$

και αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα:**
- Έστω το σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-3t}u(t)$, στο οποίο παρουσιάζεται η είσοδος $x(t) = (2e^{-t} + e^{-2t})u(t)$. Βρείτε την έξοδο $y(t)$.

Είναι

$$h(t) = e^{-3t}u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} H(f) = \frac{1}{3+j2\pi f}$$

$$x(t) = (2e^{-t} + e^{-2t})u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(f) = \frac{2}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f}$$

$$= \frac{5+3j2\pi f}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)}.$$

Οπότε

$$Y(f) = X(f)\cdot H(f) = \frac{5+3\overbrace{j2\pi f}^{\omega}}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}$$

1ου β.

3ου β.

$$= \frac{A}{1+j2\pi f} + \frac{B}{2+j2\pi f} + \frac{\Gamma}{3+j2\pi f}, \text{ κ.τ.ε.}$$

$$A = Y(f)(1+j2\pi f)\Big|_{j2\pi f=-1} = \frac{5+3j2\pi f}{(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}\Big|_{j2\pi f=-1} = \frac{5-3}{2} = 1$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

Όμοια, $B = 1$, $\Gamma = -2$. Άρα

$$e^{-at}u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a+j2\pi f}, \quad a>0$$

$$Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f} + \frac{-2}{3+j2\pi f}$$

Από πίνακες έτοιμων μετασχηματισμών Fourier

$$y(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) - 2e^{-3t}u(t)$$

$$= \left(e^{-t} + e^{-2t} - 2e^{-3t}\right)u(t).$$

- **Συστήματα και Σειρές Fourier**

- Ας πούμε ότι ένα πραγματικό περιοδικό σήμα $x(t)$ εμφανίζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος
  - Μπορούμε να βρούμε την έξοδο?

- Το περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{X_k e^{j2\pi k f_0 t}} = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

- Αναπτύσσεται δηλαδή σε άθροισμα $\boxed{\text{ιδιοσυναρτήσεων}}$ του ΓΧΑ συστήματος! ☺

- Οπότε αν η απόκριση συχνότητας είναι $H(f)$ πολύ εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0) X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

και αν το σύστημα $h(t)$ είναι πραγματικό τότε

$$y(t) = H(0)X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|H(kf_0)||X_k| \cos\left(2\pi k f_0 t + \varphi_k + \phi_h(kf_0)\right)$$

- **Συστήματα και Σειρές Fourier**

- **Παράδειγμα:**

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = x(t)$$

$f_0 = \frac{2}{\pi}$ Hz

Βρείτε την έξοδό του όταν στην είσοδό του παρουσιαστεί το σήμα

$$x(t) = 3 + 2\cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) = 3 + 2\cos\left(2\pi \cdot \frac{2}{\pi}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Ας υπολογίσουμε πρώτα το H(f).

Είναι

$$y'(t) + 3y(t) = x(t)$$

$$\Big\updownarrow F$$

$$j2\pi f\, Y(f) + 3Y(f) = X(f)$$

$$Y(f)(3 + j2\pi f) = X(f)$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{1}{3 + j2\pi f} \xleftrightarrow{F^{-1}} h(t) = e^{-3t}u(t).$$

- **Συστήματα και Σειρές Fourier**
- Παράδειγμα:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$$

Άρα $H\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{1}{3 + j2\pi \cdot \frac{2}{\pi}} = \frac{1}{3+j4}$ και $H(0) = \frac{1}{3}$. (A)

$\rightsquigarrow \left|H\left(\frac{2}{\pi}\right)\right| = \frac{1}{|3+j4|} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$ (Γ)

$\rightsquigarrow \measuredangle H\left(\frac{2}{\pi}\right) = \tan^{-1} \frac{H_I(2/\pi)}{H_R(2/\pi)}$ (1), όπως $\frac{1}{3+j4} = \frac{3-j4}{|3+j4|^2} =$

$= \frac{3-j4}{25} = \frac{3}{25} + j\frac{-4}{25} = H_R\left(\frac{2}{\pi}\right) + jH_I\left(\frac{2}{\pi}\right)$ (2)

(1) $\overset{(2)}{\Longrightarrow} \measuredangle H\left(\frac{2}{\pi}\right) = \tan^{-1} \frac{-\frac{4}{25}}{\frac{3}{25}} = \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right) \simeq -0.92$ rad (B)

Άρα από τις (A), (B), (Γ) θα έχουμε

$$y(t) = \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} + 2 \cdot \frac{1}{5} \cos\left(4t + \frac{\pi}{3} - 0.92\right) = 1 + \frac{2}{5}\cos\left(4t + \frac{\pi}{3} - 0.92\right)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Για να επιτύχουμε όλα τα ωραία αποτελέσματα που βρήκαμε πριν, υποθέσαμε ότι η **απόκριση συχνότητας $H(f)$ ορίζεται**
- Ισχύουν οι γνωστές απαιτήσεις για την ύπαρξη της, όπως τις γνωρίσαμε στη μελέτη του Μετασχ. Fourier
  - Η κρουστική απόκριση να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη (μη αναγκαία συνθήκη)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

  - Η κρουστική απόκριση να είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμη

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt < \infty$$

- Αν δε γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση τότε μπορούμε να ξέρουμε αν ένα σύστημα που **<u>εκφράζεται από διαφορικές εξισώσεις</u>** έχει απόκριση συχνότητας?
- Αν δεν έχει, τότε **ΔΕΝ** μπορούμε να γράψουμε τα ωραία αποτελέσματα που είδαμε πριν

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Θυμηθείτε ότι, για ένα **αιτιατό** ΓΧΑ σύστημα, μια τέτοια κρουστική απόκριση αποτελείται από όρους της μορφής

$$c_i e^{\lambda_i t} u(t), \qquad c_i t^n e^{\lambda_i t} u(t)$$

- Η κρουστική απόκριση είναι απολύτως ολοκληρώσιμη μόνον όταν

$$\lambda_i < 0 \text{ , αν } \lambda_i \in \Re \text{, για κάθε } i$$

Ελέγξτε ΟΛΑ τα προηγούμενα παραδείγματα στη διάλεξη αυτή!!

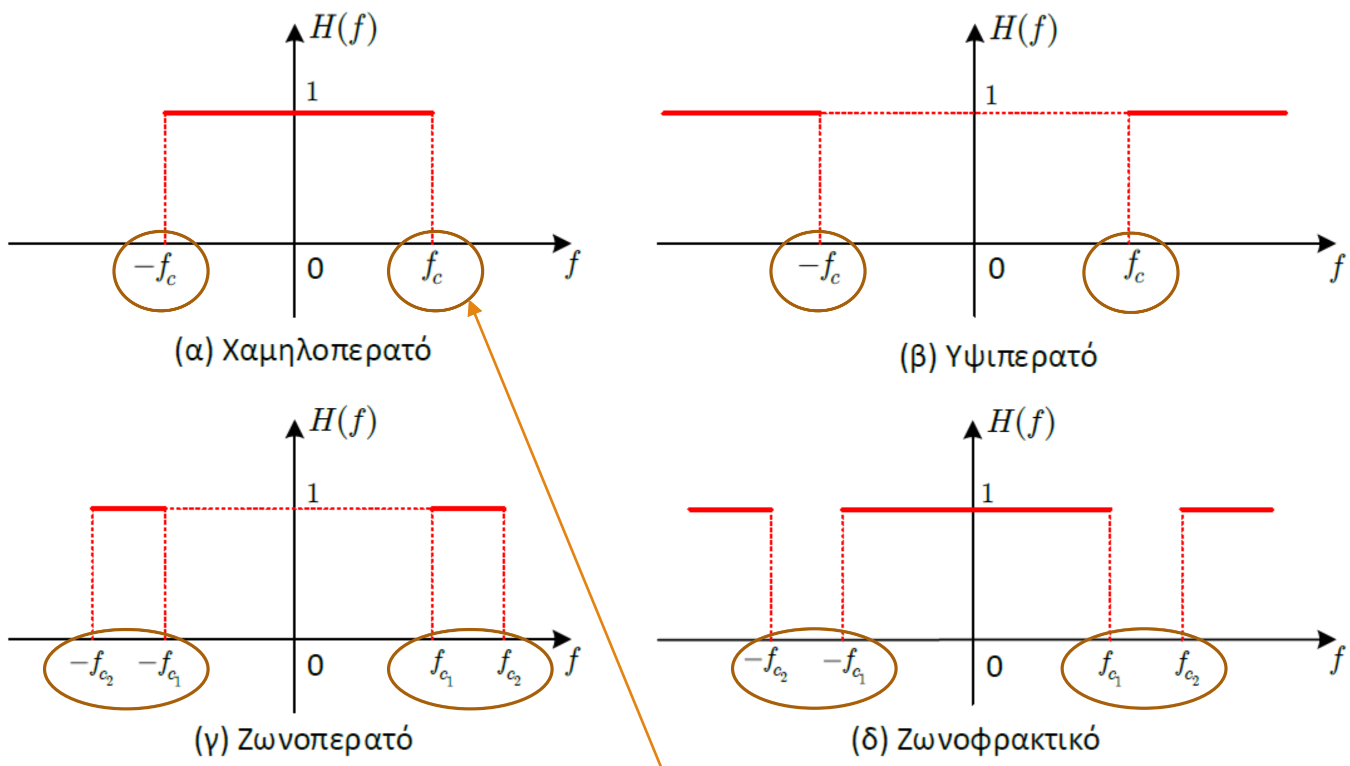
- Αυτό θα σημαίνει ότι τότε θα **υπάρχει** και ο Μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης (μέσω της σύγκλισης του ολοκληρώματος του ορισμού)! ☺

- Αυτό ταυτόχρονα συνεπάγεται ότι το ΓΧΑ σύστημα είναι **ευσταθές**!

- Συνοψίζοντας: ένα **αιτιατό** ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις μπορεί να γραφεί στο χώρο του Μετασχ. Fourier αν και μόνο αν το σύστημα είναι **ευσταθές**!
  - Θα εξετάσουμε μη αιτιατά/μη ευσταθή συστήματα αργότερα

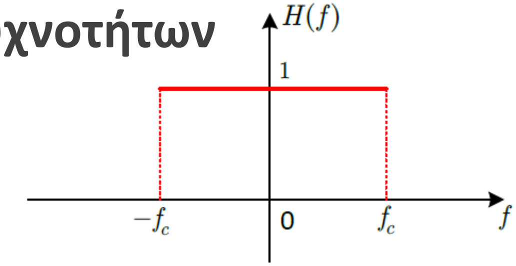
- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- Συστήματα που επιτρέπουν τη διέλευση μόνο ορισμένων συχνοτήτων στην έξοδό τους ονομάζονται **φίλτρα επιλογής συχνοτήτων**
- Θα μελετήσουμε τα **ιδανικά** φίλτρα επιλογής συχνοτήτων (μηδενικής φάσης)
  - Ιδανικά : μη πραγματοποιήσιμα (θεωρητικά μοντέλα)

- Τέσσερις κατηγορίες
- **Χαμηλοπερατό φίλτρο**
- **Υψιπερατό φίλτρο**
- **Ζωνοπερατό φίλτρο**
- **Ζωνοφρακτικό φίλτρο**



Συχνότητα αποκοπής

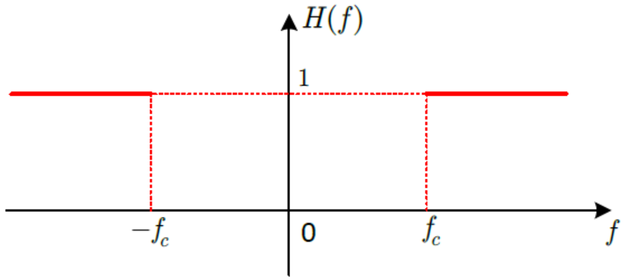
- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- **Χαμηλοπερατό φίλτρο**



(α) Χαμηλοπερατό

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| < f_c \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

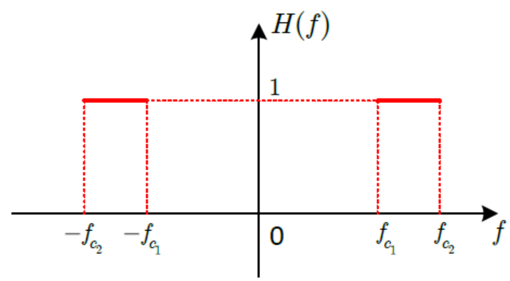
- **Υψιπερατό φίλτρο**



(β) Υψιπερατό

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| > f_c \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

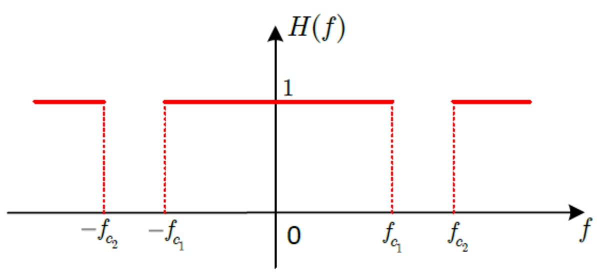
- **Ζωνοπερατό φίλτρο**



(γ) Ζωνοπερατό

$$H(f) = \begin{cases} 1, & f_{c_1} < |f| < f_{c_2} \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

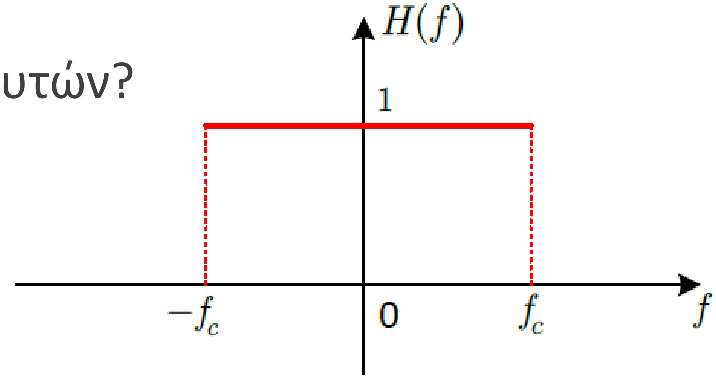
- **Ζωνοφρακτικό φίλτρο**



(δ) Ζωνοφρακτικό

$$H(f) = \begin{cases} 0, & f_{c_1} < |f| < f_{c_2} \\ 1, & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- Ποιες είναι οι κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων αυτών?
- Ας πάρουμε το χαμηλοπερατό φίλτρο
- Από την ιδιότητα της δυϊκότητας



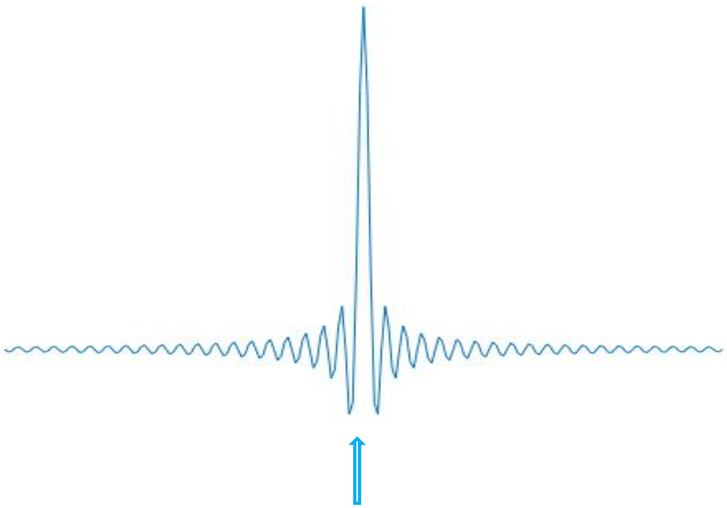
(α) Χαμηλοπερατό

$$A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow AT\mathrm{sinc}(fT)$$

$$AT\mathrm{sinc}(Tt) \leftrightarrow A\mathrm{rect}\left(\frac{-f}{T}\right) = A\mathrm{rect}\left(\frac{f}{T}\right)$$

- Για $A = 1, T = 2f_c$

$$2f_c\mathrm{sinc}(2f_c t) \leftrightarrow \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$



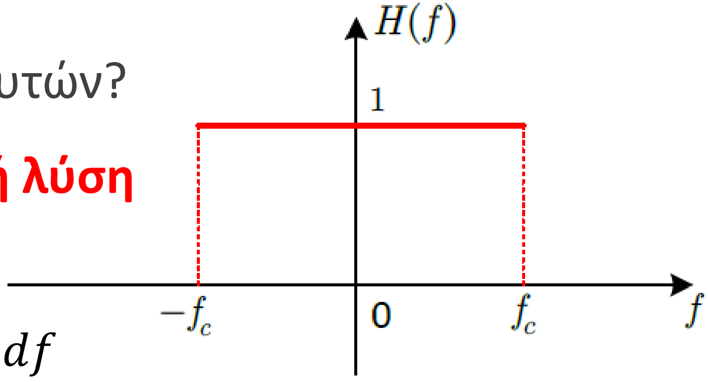
Κρουστική απόκριση

- **Άπειρης διάρκειας**
- **Περιλαμβάνει αρνητικούς χρόνους (μη αιτιατή)**

- Άρα

$$h_{LP}(t) = 2f_c\mathrm{sinc}(2f_c t) \leftrightarrow H_{LP}(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- Ποιες είναι οι κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων αυτών?
- Ας πάρουμε το χαμηλοπερατό φίλτρο – **εναλλακτική λύση**



(α) Χαμηλοπερατό

$$h_{LP}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{LP}(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right) e^{j2\pi f t} df$$

$$= \int_{-f_c}^{f_c} 1 \cdot e^{j2\pi f t} df = \frac{1}{j2\pi t}\left(e^{j2\pi f t} - e^{-j2\pi f t}\right)\Big|_{-f_c}^{f_c}$$

$$= \frac{1}{j2\pi t}\left(e^{j2\pi f_c t} - e^{-j2\pi f_c t}\right) = \frac{1}{j2\pi t} 2j \sin(2\pi f_c t)$$

$$= \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t} = 2f_c \frac{\sin(\pi 2 f_c t)}{\pi 2 f_c t} = 2f_c \mathrm{sinc}(2f_c t)$$

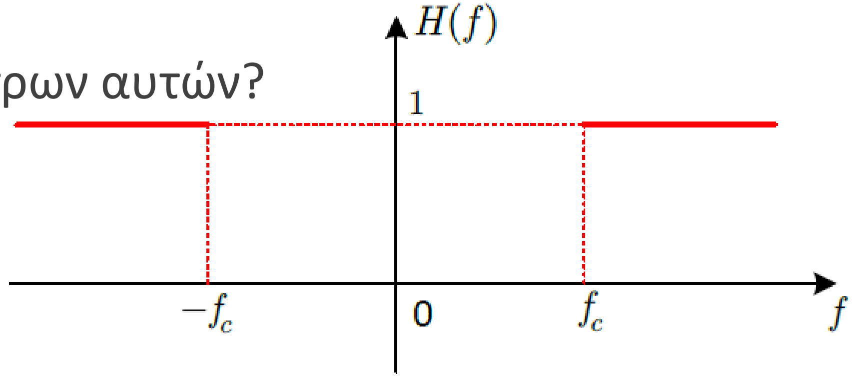
- Άρα

$$h_{LP}(t) = 2f_c \mathrm{sinc}(2f_c t) \leftrightarrow H_{LP}(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

Κρουστική απόκριση

- **Άπειρης διάρκειας**
- **Περιλαμβάνει αρνητικούς χρόνους (μη αιτιατή)**

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- Ποιες είναι οι κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων αυτών?
- Ας δούμε το υψιπερατό φίλτρο
- Από δυϊκότητα και γνωστά ζεύγη μετασχ. Fourier



(β) Υψιπερατό

$$H_{HP}(f) = 1 - H_{LP}(f) = 1 - \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

οπότε

$$F^{-1}\{H_{HP}(f)\} = F^{-1}\{1\} - F^{-1}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)\right\}$$

$$h_{HP}(t) = \delta(t) - 2f_c \mathrm{sinc}(2f_c t)$$

- Άρα

$$h_{HP}(t) = \delta(t) - 2f_c \mathrm{sinc}(2f_c t) \leftrightarrow H_{HP}(f) = 1 - \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

Κρουστική απόκριση

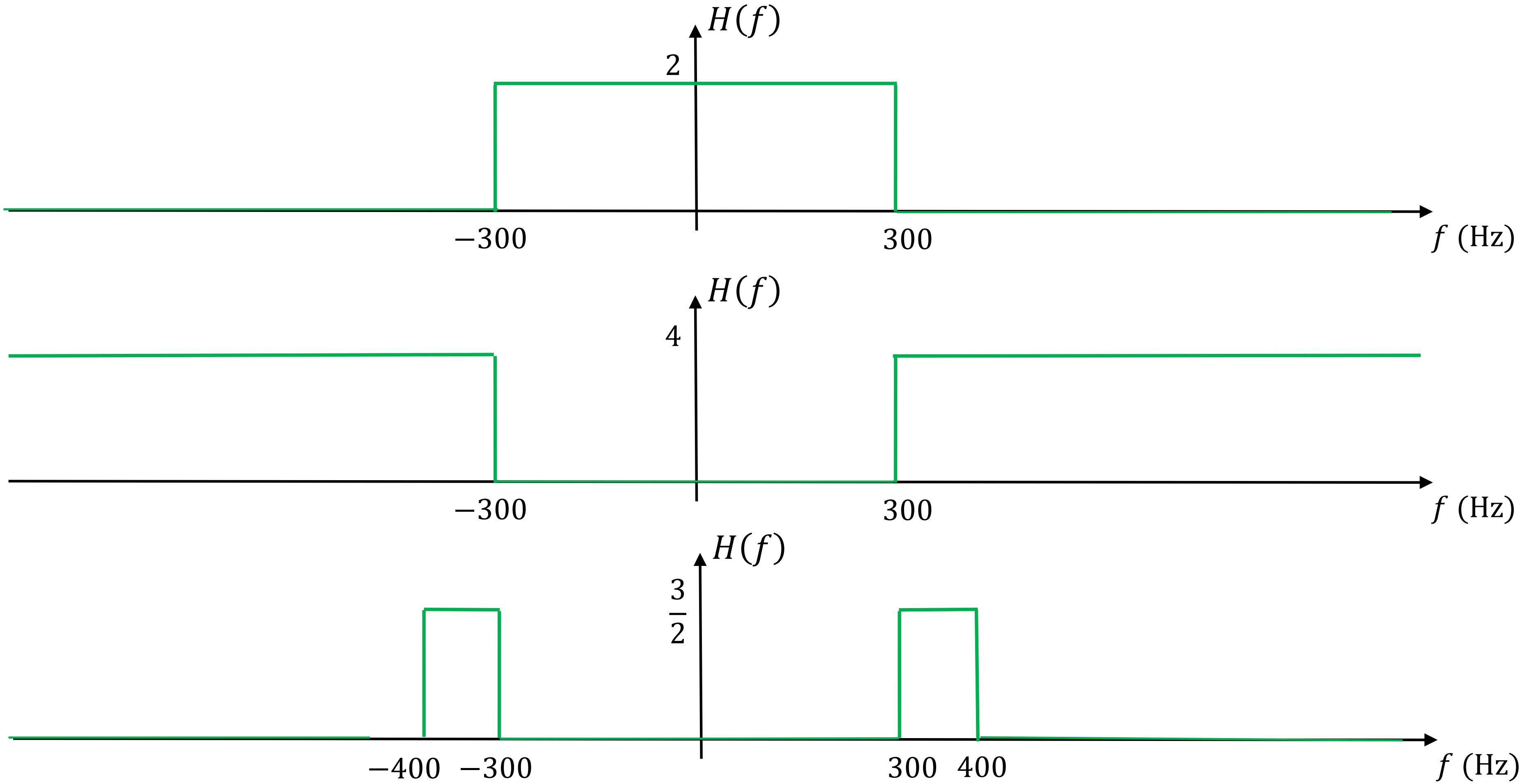
- **Άπειρης διάρκειας**
- **Περιλαμβάνει αρνητικούς χρόνους (μη αιτιατή)**
- **Μην αναφέρουμε καν τη $\delta(t)$ ... ☺**

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

- **Παράδειγμα**:

○ Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1 + 2\cos(2\pi 200 t) + \sin(2\pi 500 t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα?

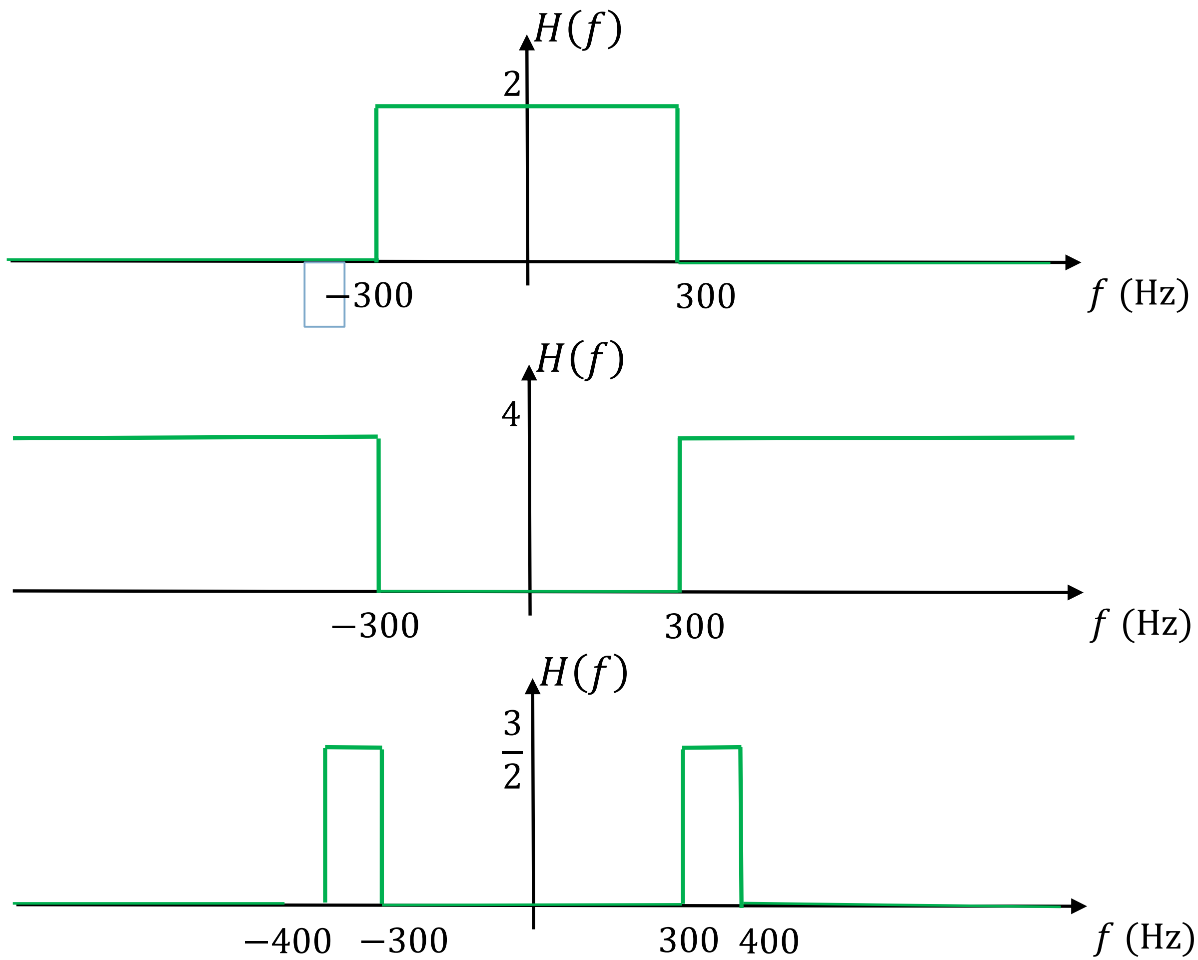


- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

- **Παράδειγμα**:

  ○ Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1\cos(2\pi 0 t) + 2\cos(2\pi 200 t) + \sin(2\pi 500 t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα?



Η διαίσθηση μας λέει ότι όσες συχνότητες «πέφτουν» εκτός του μη μηδενικού εύρους ζώνης του φίλτρου θα αποκοπούν τελείως, ενώ όσες «πέφτουν» εντός του μη μηδενικού εύρους του φίλτρου θα περάσουν πολλαπλασιασμένες με το πλάτος του φίλτρου. Ας τυποποιήσουμε αυτή τη διαίσθηση!! ☺

Τα ιδανικά μας φίλτρα είναι <u>μηδενικής φάσης</u>, άρα δε θα αλλάξουν καθόλου την – όποια – φάση της εισόδου: μόνο το πλάτος θα επηρεαστεί

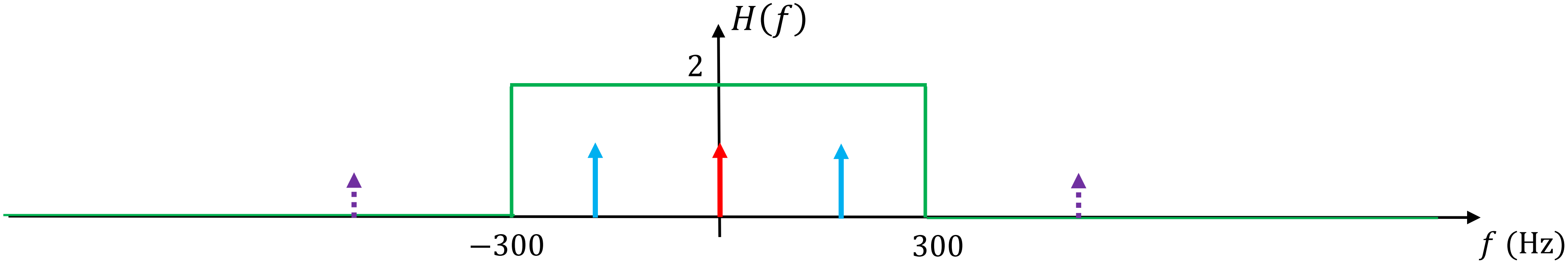
- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**

$$\boxed{Y(f) = X(f)H(f)}$$

- **Παράδειγμα**:

○ Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1 + 2\cos(2\pi 200t) + \sin(2\pi 500t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα?

$$X(f) = \delta(f) + \delta(f-200) + \delta(f+200) + \frac{1}{2j}\delta(f-500) - \frac{1}{2j}\delta(f+500)$$



$$Y(f) = 2\cdot\delta(f) + 2\cdot\delta(f-200) + 2\cdot\delta(f+200) + 0\cdot\frac{1}{2j}\delta(f-500) - 0\cdot\frac{1}{2j}\delta(f+500)$$

$$y(t) = 2 + 4\cos(2\pi 200t)$$

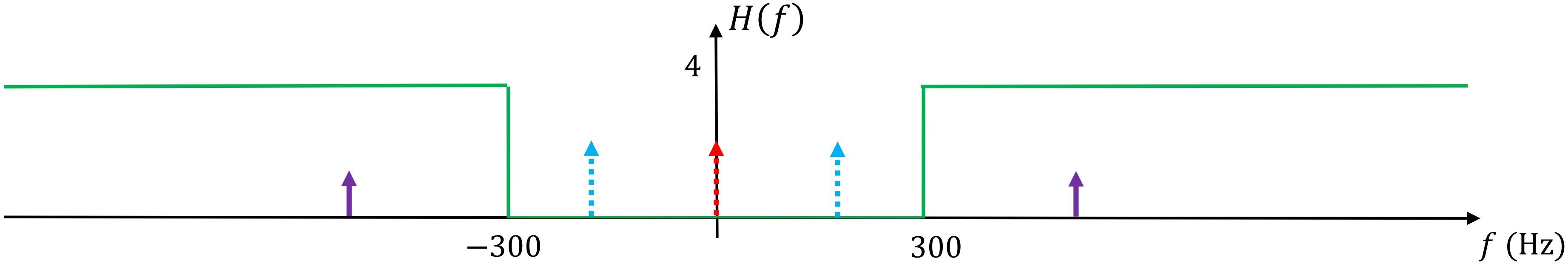
- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

- **Παράδειγμα**:

○ Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1 + 2\cos(2\pi 200 t) + \sin(2\pi 500 t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα?

$$X(f) = \delta(f) + \delta(f-200) + \delta(f+200) + \frac{1}{2j}\delta(f-500) - \frac{1}{2j}\delta(f+500)$$



$$Y(f) = 0 \cdot \delta(f) + 0 \cdot \delta(f-200) + 0 \cdot \delta(f+200) + 4 \cdot \frac{1}{2j}\delta(f-500) - 4 \cdot \frac{1}{2j}\delta(f+500)$$

$$y(t) = 4\sin(2\pi 500 t)$$

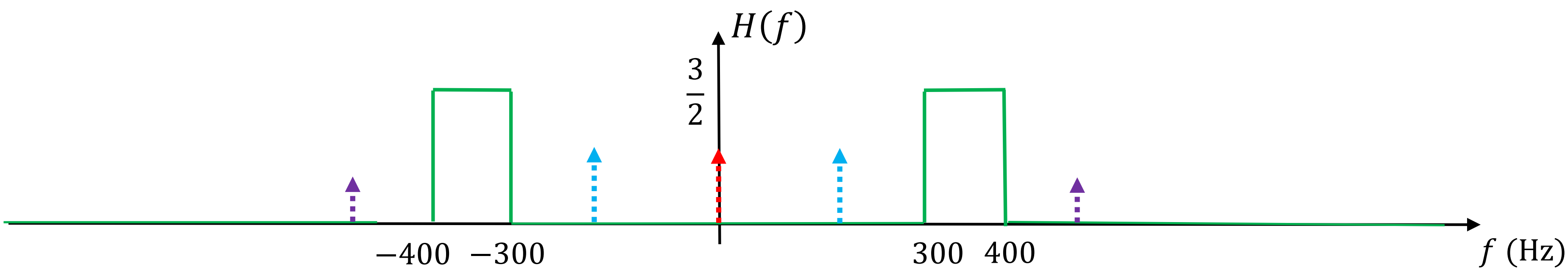
- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

- **Παράδειγμα**:

○ Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1 + 2\cos(2\pi 200t) + \sin(2\pi 500t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα?

$$X(f) = \delta(f) + \delta(f-200) + \delta(f+200) + \frac{1}{2j}\delta(f-500) - \frac{1}{2j}\delta(f+500)$$



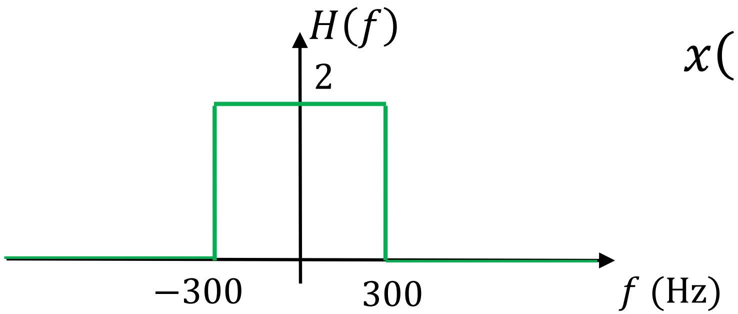
$$Y(f) = 0\cdot\delta(f) + 0\cdot\delta(f-200) + 0\cdot\delta(f+200) + 0\cdot\frac{1}{2j}\delta(f-500) - 0\cdot\frac{1}{2j}\delta(f+500)$$

$$y(t) = 0$$

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- **Παράδειγμα – Εναλλακτική λύση**

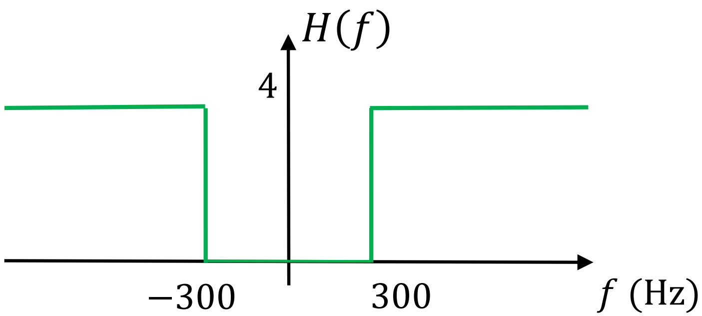
$f_0 = \text{ΜΚΔ}\{200, 500\} = 100$ Hz

○ Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1 + 2\cos(2\pi 200 t) + \sin(2\pi 500 t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα?

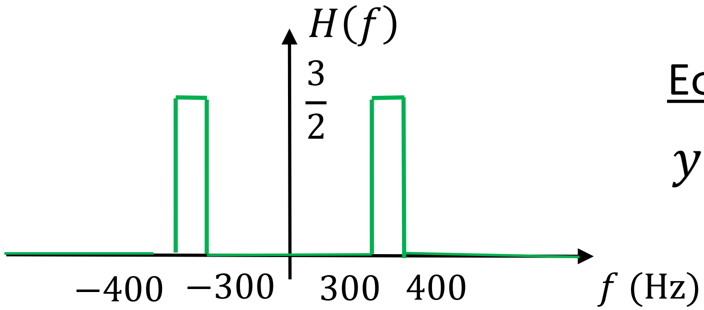


$$x(t) = 1 + 2\cos(2\pi(2\cdot 100)t) + \sin(2\pi(5\cdot 100)t)$$

$$H(f) = \begin{cases} 2, & |f| < 300 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases}$$



$$H(f) = \begin{cases} 4, & |f| > 300 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases}$$



$$H(f) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & 300 < |f| < 400 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases}$$

<u>Εφαρμόζουμε τη σχέση εξόδου για περιοδική είσοδο (sl.17):</u>

$$y(t) = 1\cdot H(0) + 2H(2\cdot 100)\cos(2\pi(2\cdot 100)t) + H(5\cdot 100)\sin(2\pi(5\cdot 100)t)$$

Συστήματα στο χώρο του Fourier

- Σύνοψη:

$$
\begin{tikzcd}
x(t) \arrow[r, "*"] \arrow[d, leftrightarrow, "F"'] & h(t) \arrow[r, "="] \arrow[d, leftrightarrow, "F"] & y(t) \arrow[d, leftrightarrow, "F"] \\
X(f) \arrow[r, "\cdot"] & H(f) \arrow[r, "="] & Y(f)
\end{tikzcd}
$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ