# ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

## ΔΙΑΛΕΞΗ 8Η

- Σειρές Fourier
- Ιδιότητες

- **Σειρές Fourier**


- Ένα περιοδικό πραγματικό σήμα $x(t)$ με περίοδο $T_0$ μπορεί να γραφεί ως

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}}$$

η οποία σχέση ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Οι συντελεστές $X_k$ ονομάζονται **συντελεστές Fourier,** αποτελούν το **εσωτερικό γινόμενο σε μια περίοδο μεταξύ του περιοδικού σήματος και των μελών της οικογένειας** $\mathbb{E}$, και δίνονται από τη σχέση

$$\boxed{X_k = \frac{1}{T_0}\left\langle x(t), e^{j2\pi k f_0 t}\right\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \in \mathbb{C}}$$

- Η εκθετική σειρά Fourier μπορεί να περιγράψει **και μιγαδικά** περιοδικά σήματα

- Οι συντελεστές Fourier προκύπτουν από το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο, δηλ. από την **προβολή** του σήματος $x(t)$ πάνω στις μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις $e^{j2\pi k f_0 t}$
  - Το $X_k$ μας λέει «πόσο» από το εκθετικό $e^{j2\pi k f_0 t}$ υπάρχει μέσα στο σήμα $x(t)$ ! ☺

- **Σειρές Fourier**
- Για **πραγματικά** σήματα, οι συντελεστές είναι συζυγώς συμμετρικοί ως προς $k$

$$X_{-k} = X_k^*$$

- Ας το δείξουμε

$$X_{-k} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi(-k)f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt \qquad (1)$$

$$X_k^* = \left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt\right]^* = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \left(x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt\right)^* = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt$$

- Όμως το σήμα στο χρόνο είναι πραγματικό, άρα $x(t) = x^*(t)$

$$X_k^* = \left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt\right]^* = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt \qquad (2)$$

- Από τις σημειωμένες σχέσεις, ισχύει το ζητούμενο.

- **Σειρές Fourier**

- Όταν το σήμα είναι **πραγματικό**, μπορούμε να γράψουμε την **τριγωνομετρική Σειρά Fourier** ως:

$$\boxed{x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)}$$

με $|X_k|$ το μέτρο και $\phi_k$ τη φάση του $k$ −οστού συντελεστή

$$X_k = |X_k| e^{j\phi_k}$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \overset{X_{-k} = X_k^*}{=} X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$X_k^* = |X_k| e^{-j\phi_k}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ |X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} \right]$$

- **Σειρές Fourier**

$$\boxed{e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ |X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} \right]$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| \left[ e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} \right]$$

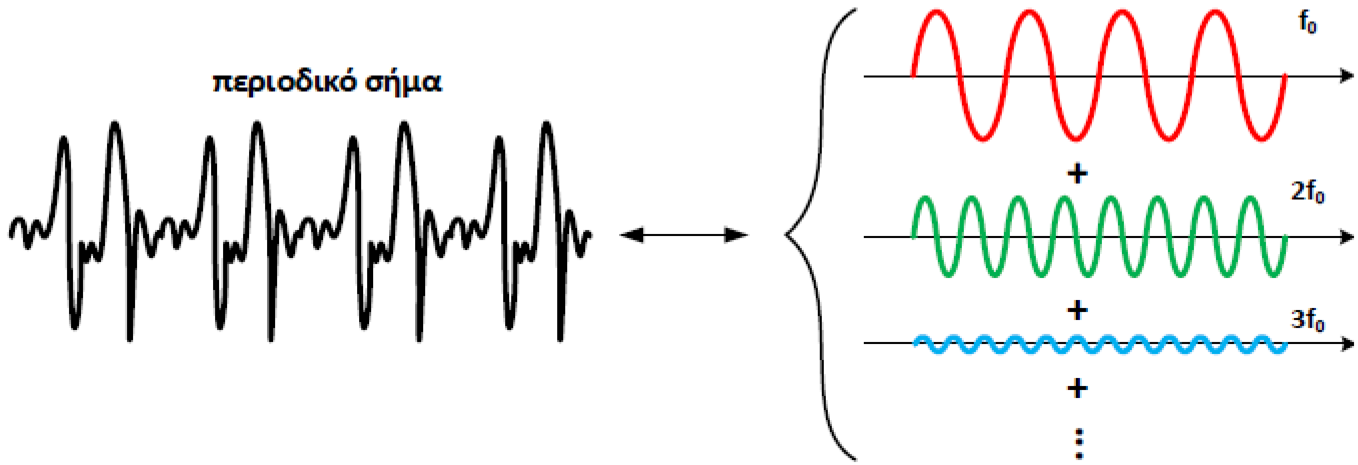
$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| \left[ e^{-j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} + e^{j(2\pi k f_0 t + \phi_k)} \right]$$

$$\boxed{= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)}$$

- **Προσοχή:** η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για πραγματικά σήματα
  - … και πολλές φορές στην πράξη δεν είναι απλό (ή και «κομψό») να εξαχθεί από την εκθετική Σειρά Fourier
  - Τώρα, το $2|X_k|$ μας λέει «πόσο» από το συνημίτονο $\cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$ υπάρχει μέσα στο σήμα $x(t)$, και με πόση αρχική φάση $\phi_k$ ! ☺

- **Σειρές Fourier**

- Η τριγωνομετρική Σειρά Fourier αναλύει ένα **πραγματικό** περιοδικό σήμα με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$ σε **απείρου** – εν γένει – **πλήθους** ημιτονοειδή **με συχνότητες $\boldsymbol{kf_0}$**




- Η εκθετική Σειρά όμως, αναλύει ένα οποιοδήποτέ * περιοδικό σήμα (**πραγματικό ή μη**) με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$ σε **απείρου** – εν γένει – **πλήθους μιγαδικά εκθετικά σήματα με συχνότητες $\boldsymbol{kf_0, k} \in \mathbb{Z}$**

- Σημειώστε ότι η τιμή του συντελεστή για $k = 0$ υπολογίζεται συνήθως ξεχωριστά ως

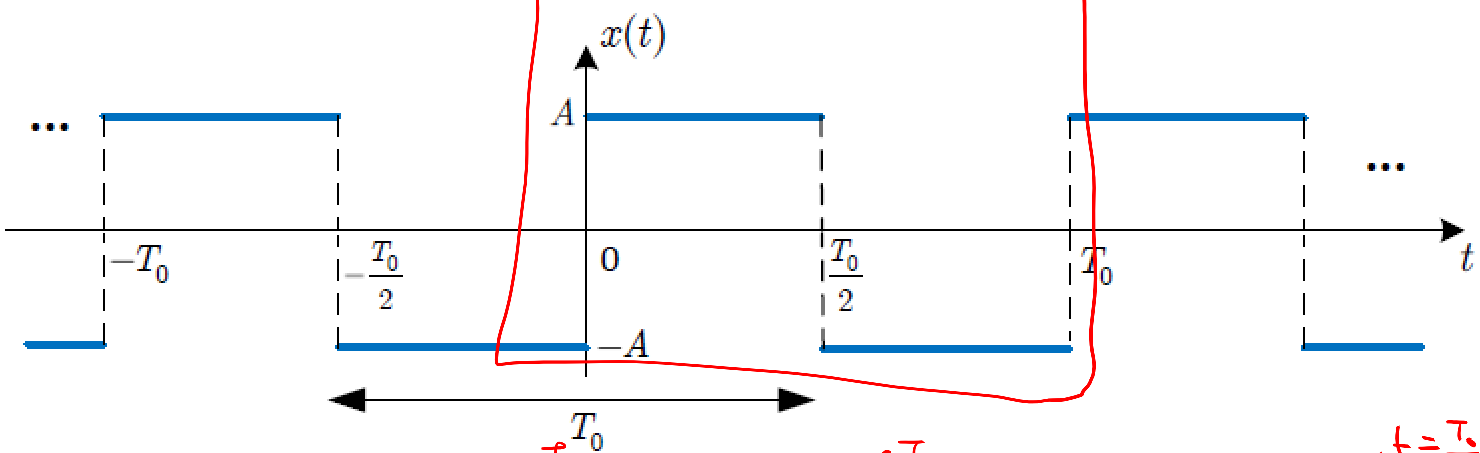
$$\boxed{X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt}$$

- **Παράδειγμα:**

  - Αναπτύξτε σε εκθετική και τριγωνομετρική Σειρά Fourier το σήμα που περιγράφεται σε μια περίοδό του ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A, & 0 \le t < \dfrac{T_0}{2} \\ -A, & \dfrac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$

  και σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και φάσης




Είναι

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} A\,dt + \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} (-A)\,dt = \frac{1}{T_0} At\Big|_{t=0}^{t=\frac{T_0}{2}} +$$

$$+ (-A)t \cdot \frac{1}{T_0}\Big|_{t=\frac{T_0}{2}}^{t=T_0} = \frac{1}{T_0}A\left(\frac{T_0}{2}-0\right) - \frac{A}{T_0}\left(T_0-\frac{T_0}{2}\right) = \frac{A}{2} - \frac{A}{2} = 0 \Leftarrow \boxed{X_0 = 0}$$

- Παράδειγμα:

$$\bigstar \quad \boxed{e^{\pm j2\pi k} = \left(e^{\pm j2\pi}\right)^k = 1^k = 1}$$

$$* \quad \boxed{f_0 T_0 = 1}$$

Είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} A e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt + \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} (-A)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

$$= \frac{A}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt - \frac{A}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

$$= \frac{A}{T_0}\cdot\frac{1}{(-j2\pi k f_0)}\, e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{\frac{T_0}{2}} - \frac{A}{T_0}\cdot\frac{1}{(-j2\pi k f_0)}\, e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0}$$

$$= -\frac{A}{j2\pi k f_0 T_0}\left(e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}} - 1\right) + \frac{A}{j2\pi k f_0 T_0}\left(e^{-j2\pi k f_0 T_0} - e^{-j2\pi k f_0 \frac{T_0}{2}}\right)$$

$$\overset{*}{=} -\frac{A}{j2\pi k}\left(e^{-j\pi k} - 1\right) + \frac{A}{j2\pi k}\left(e^{-j2\pi k} - e^{-j\pi k}\right)$$

$$= \frac{A}{j2\pi k}\left(1 - e^{-j\pi k} + \underbrace{\cancel{e^{-j2\pi k}}}_{1\ \bigstar} - e^{-j\pi k}\right)$$

- Παράδειγμα:

$$e^{\pm j\pi k} = \left(e^{\pm j\pi}\right)^k = \cos(\pi k) = (-1)^k$$

$$\frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{A}{j2\pi k}\left(1 - e^{-j\pi k} + 1 - e^{-j\pi k}\right)$$

$$= \frac{A}{j2\pi k}\left(2 - 2\, e^{-j\pi k}\right) = \frac{A}{j\pi k}\left(1 - e^{-j\pi k}\right).$$

$$= \frac{A}{j\pi k}\left(1 - (-1)^k\right) = \frac{A}{\pi k}\left(1 - (-1)^k\right) \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Παρατηρώ ότι

$$X_k = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτια} \\ \frac{2A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k \text{ περιττά} \end{cases} \quad (1)$$

Εκθετική Σ. Fourier

Άρα

$$x(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττά}}}^{+\infty} \frac{2A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττά}}}^{+\infty} \frac{2A}{\pi k} e^{j\left(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Επίσης

Τριγωνομετρ. Σ Fourier

$$x(t) = \cancel{X_0}^{\,0} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ odd}}}^{+\infty} 2\left(\frac{2A}{\pi k}\right) \cos\left(2\pi k f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

- Παράδειγμα:

Βρήκαμε ότι $X_k = \frac{2A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}$, $k$ περιττά, $X_0 = 0$

Η πολική μορφή θα είναι

$$X_k = |X_k| e^{j\varphi_k} = \frac{2A}{\pi |k|} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \; k \text{ περιττά}, \quad X_0 = 0 = 0e^{j0}$$

$-\infty < k < +\infty$, άρα θέλαμε $|\cdot|$.

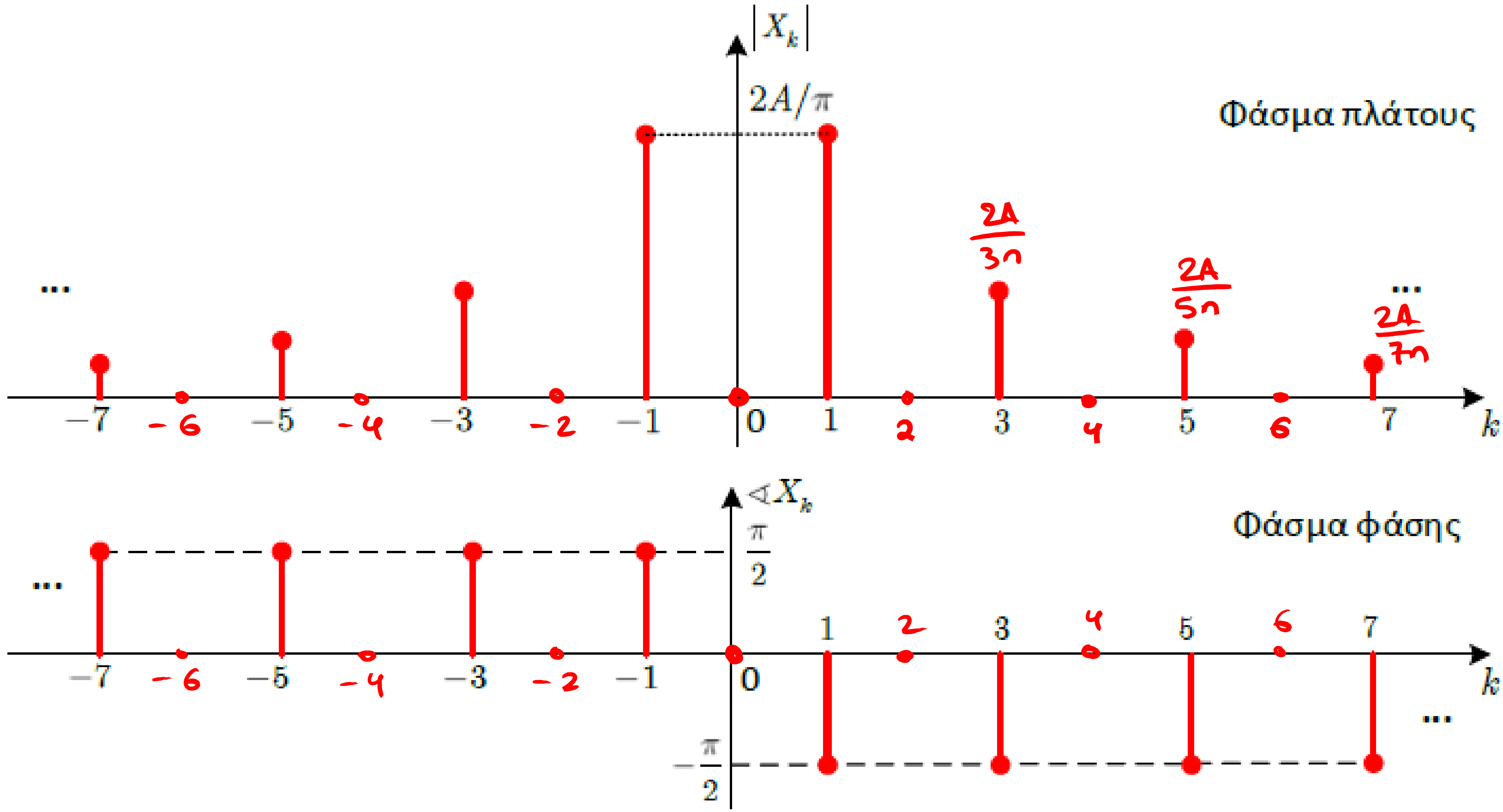
Ας σχεδιάσουμε τα φάσματα πλάτους και φάσης. Ο πιο εύκολος τρόπος είναι να σχεδιάσουμε τα φάσματα για $k \geq 0$, και μετά λόγω άρτιας* και περιττής* συμμετρίας αντίστοιχα (πλάτος και φάση), να σχεδιάσουμε τα φάσματα για $k < 0$

Άρα για $k \geq 0$,

$$|X_k| = \begin{cases} 0, & k = 0, \; k \text{ άρτια} \\ \frac{2A}{\pi k}, & k \text{ περιττά} \end{cases}, \quad \varphi_k = \begin{cases} 0, & k = 0, \; k \text{ άρτια} \\ -\frac{\pi}{2}, & k \text{ περιττά} \end{cases}$$

* $x(t) \in \mathbb{R}$ !

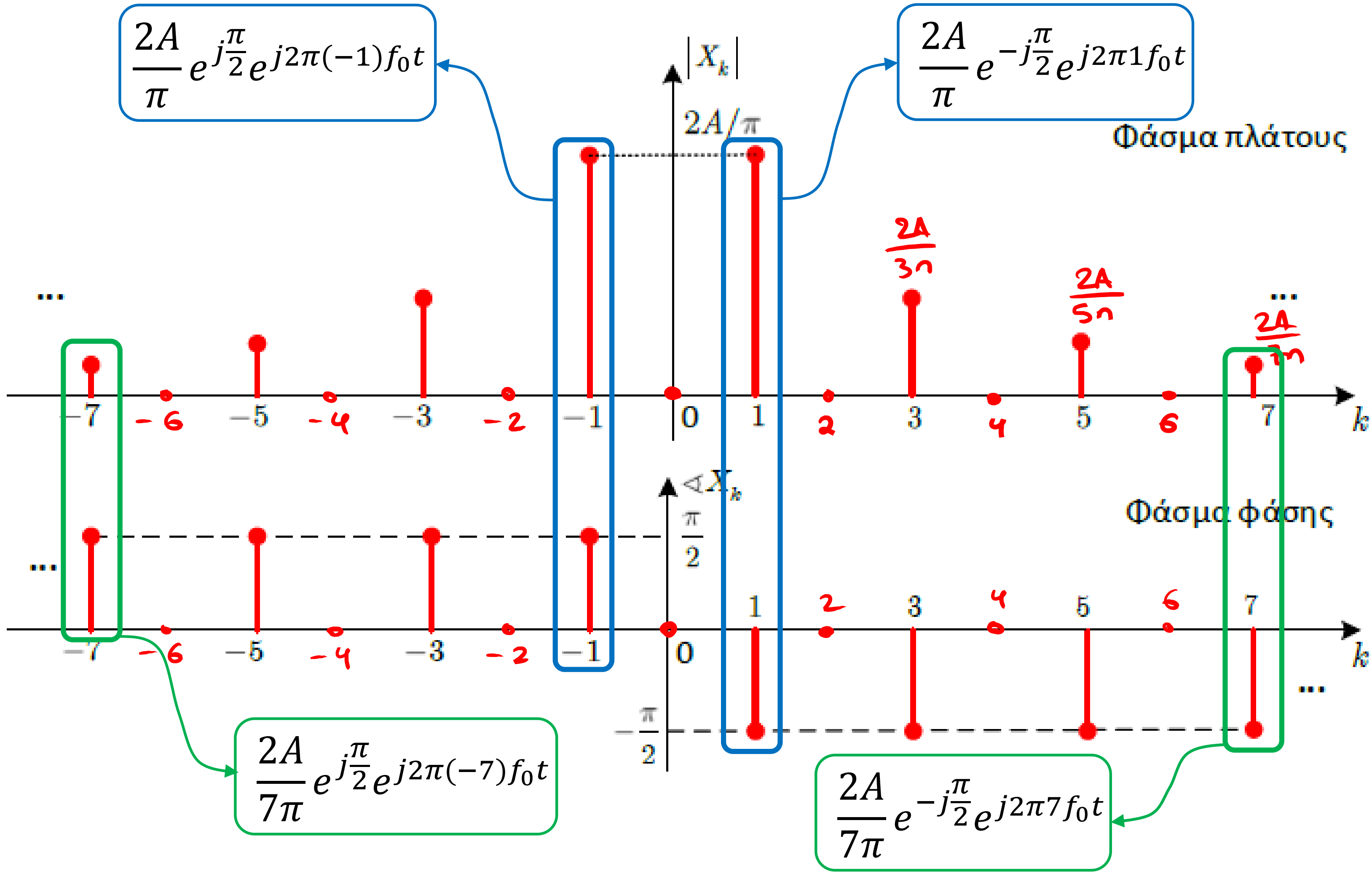
- Παράδειγμα:




- Προτιμούμε να **αναπαριστούμε τον οριζόντιο άξονα σε «διακριτές συχνότητες $kf_0$»** αντί ως ένα συνεχή άξονα του $f$, όπως κάναμε στα αρχικά παραδείγματα
  - Χρησιμοποιούμε **το δείκτη $k$** της θεμελιώδους συχνότητας **για βαθμονόμηση του άξονα**
- Οι συχνότητες ονομάζονται **αρμονικές**

• Παράδειγμα:

$$\boxed{e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)}$$



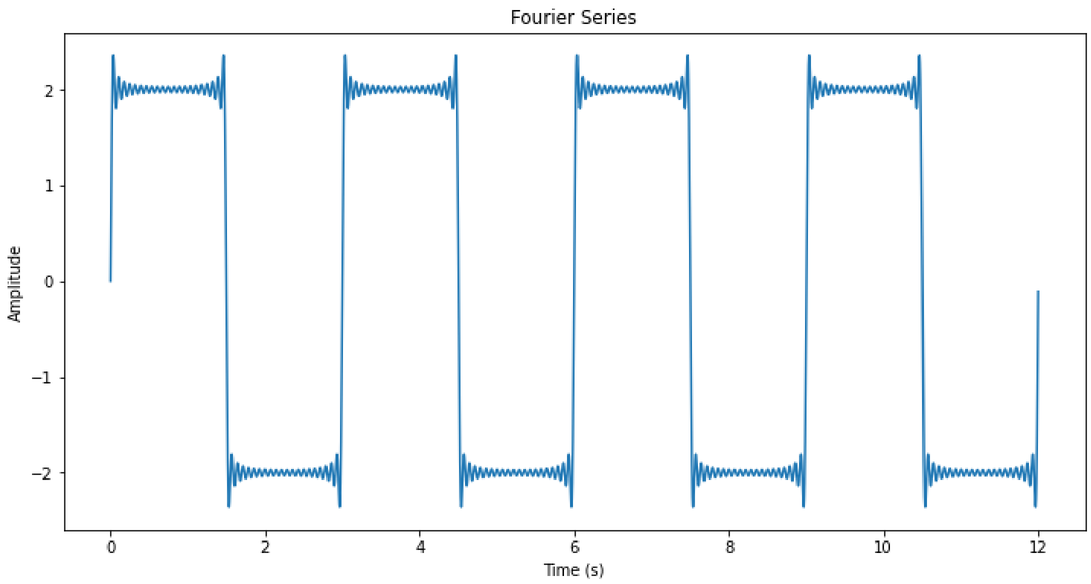

$$x(t) = \frac{4A}{\pi}\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4A}{7\pi}\cos\left(2\pi 7 f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \ldots$$

- **Σειρές Fourier**

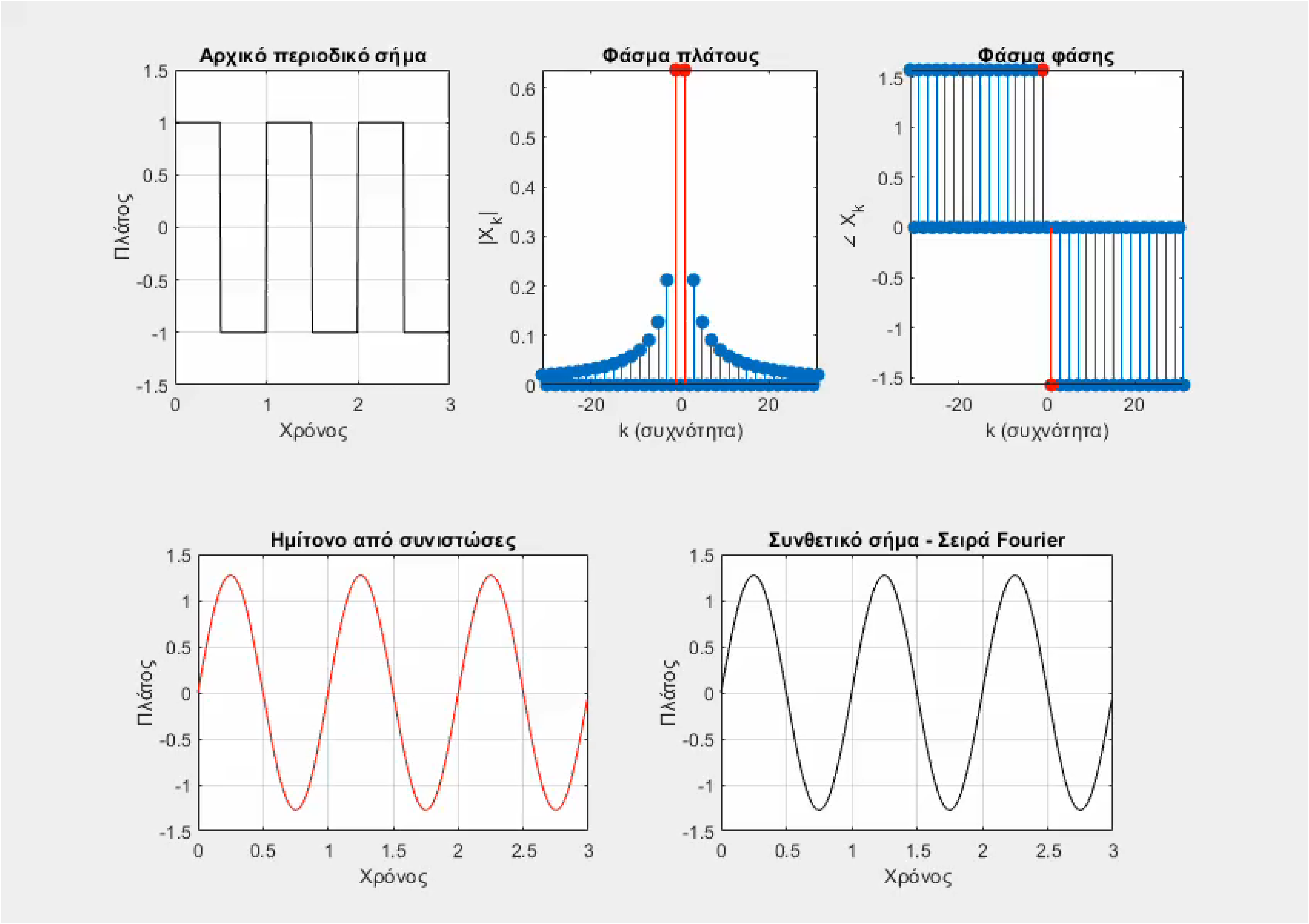
- **Python code**

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


# Parameters
A = 2
T0 = 3
f0 = 1/T0
N = 41
k = np.arange(-N,N+2,2)

# Time axis
dt = 0.001
t = np.arange(0, 4*T0, dt)

# Fourier Coefficients
Xk = (2.0*A/(np.pi*k)) * np.exp(-1j*np.pi/2.0)
X0 = 0

# Synthesis
x = np.zeros(t.shape)

for i in range(0,len(k)):
    x = x + Xk[i]*np.exp(1j*2*np.pi*k[i]*f0*t)

x = x + X0
plt.plot(t,x)
plt.title('Fourier Series')
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
```

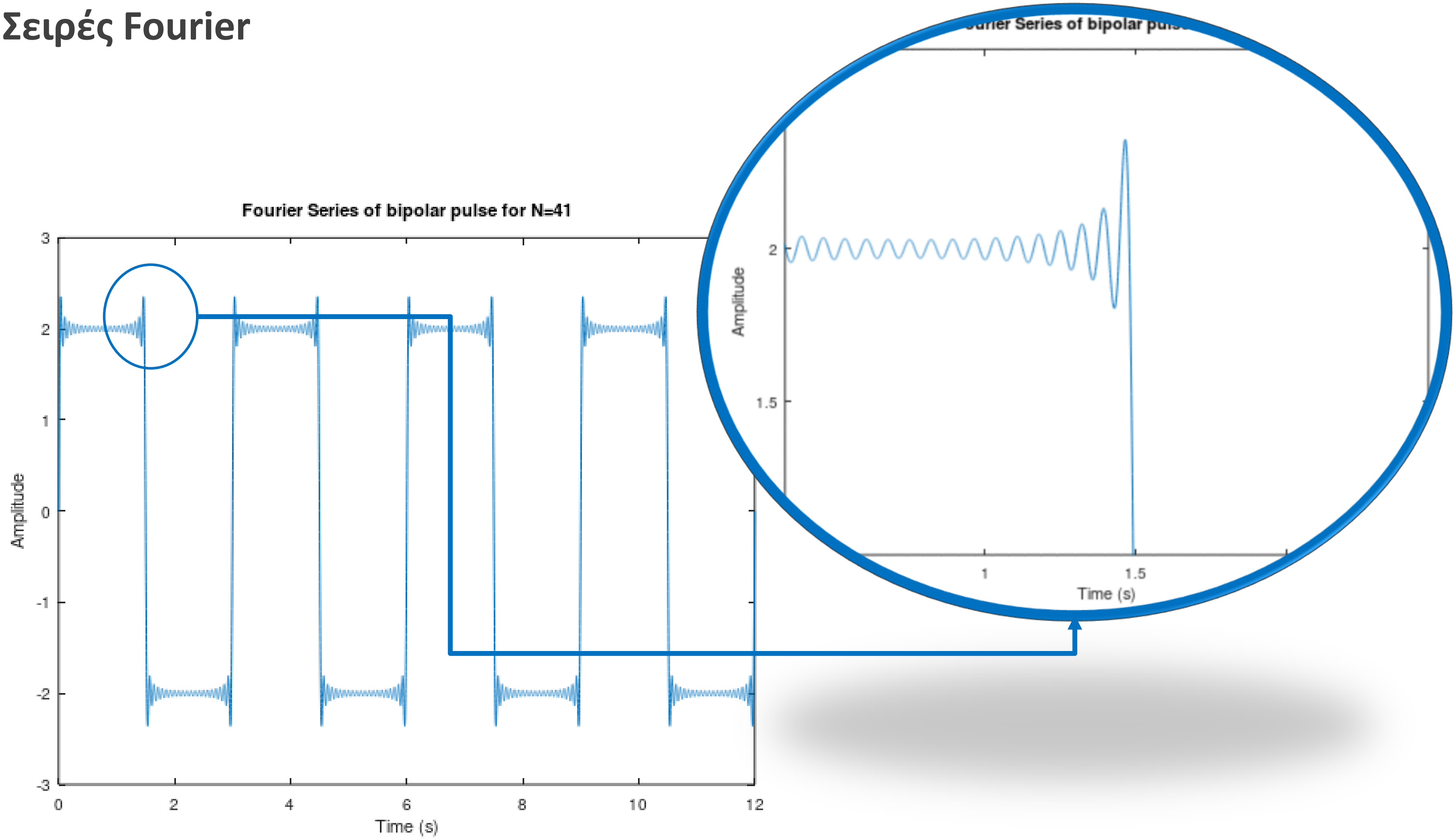
$$\sum_{\substack{k=-41 \\ k\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}}}^{41} X_k\, e^{j\frac{2\pi k}{3}t}$$



# • Σειρές Fourier



- **Σειρές Fourier**




- **Φαινόμενο Gibbs**

- **Σειρές Fourier**
- **Φαινόμενο Gibbs**
- Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει λόγω των ασυνεχειών του αρχικού σήματος - και μόνο παρουσία αυτών - ακόμα κι αν πράγματι η ενέργεια του σφάλματος $E_e$ σε μια περίοδο τείνει στο μηδέν!
- Συγκεκριμένα, ο Gibbs έδειξε ότι η Σειρά Fourier συγκλίνει στην πραγματική τιμή του περιοδικού σήματος σε κάθε σημείο…
  - …εκτός από τα σημεία ασυνέχειας, όπου συγκλίνει στη μέση τιμή των τιμών του περιοδικού σήματος $x(t)$ εκατέρωθεν του σημείου ασυνέχειας $t_0$:

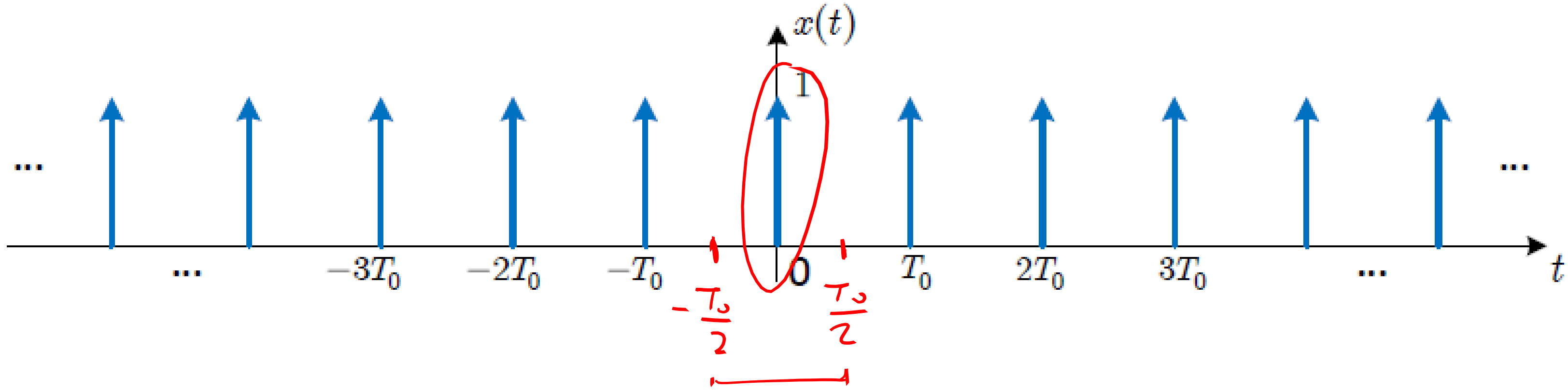
$$\frac{x(t_0^-) + \ x(t_0^+)}{2}$$

- Η Σειρά Fourier περιοδικών σημάτων χωρίς ασυνέχειες λέγεται ότι συγκλίνει **ομοιόμορφα** σε όλα τα σημεία της περιόδου του περιοδικού σήματος
- Ο τρόπος εύρεσης των συντελεστών Fourier επιτρέπει στην ενέργεια σφάλματος να τείνει στο μηδέν όσο αυξάνει το πλήθος των ημιτόνων, και ταυτόχρονα να υπάρχουν σημεία όπου η διαφορά της Σειράς Fourier με το περιοδικό σήμα να **μην** είναι μηδενική (μη ομοιόμορφη σύγκλιση)

- **Παράδειγμα:**
  - Υπολογίστε τη Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος (1)

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t \pm t_0) f(t) dt = f(\mp t_0)}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$




Είναι

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{1}{T_0} e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{T_0} e^{0} = \frac{1}{T_0} \Rightarrow \boxed{X_k = \frac{1}{T_0}}$$

- Παράδειγμα:

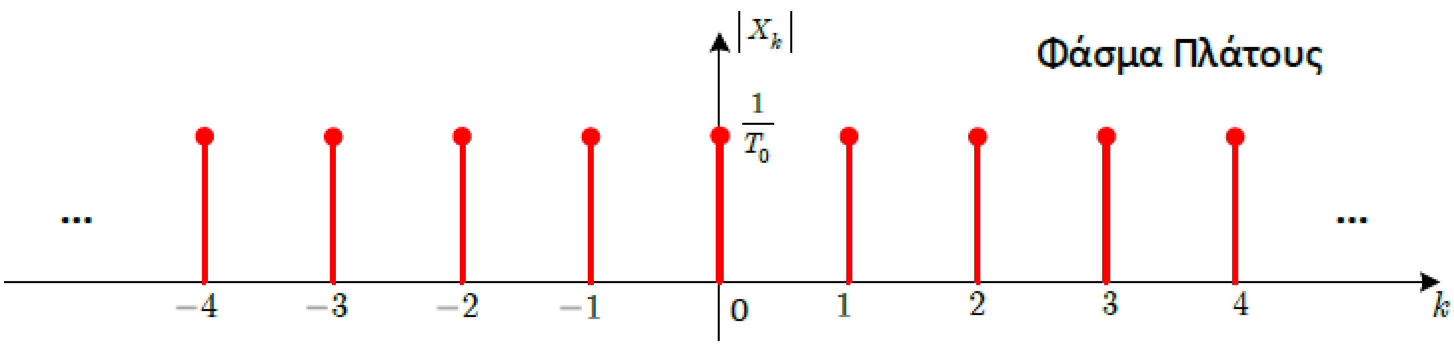
Άρα

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} e^{j2\pi k f_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi k f_c t}$$

και

$$x(t) = \frac{1}{T_0} + \sum_{k=1}^{+\infty} 2 \cdot \frac{1}{T_0} \cdot \cos(2\pi k f_c t)$$

$$= \frac{1}{T_0} + \frac{2}{T_0} \sum_{k=1}^{+\infty} \cos(2\pi k f_c t)$$

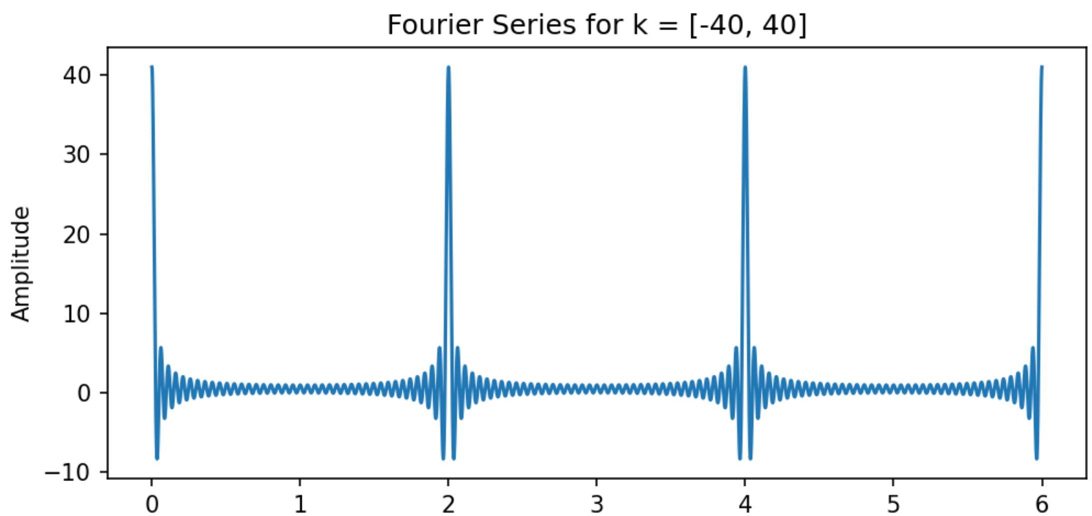


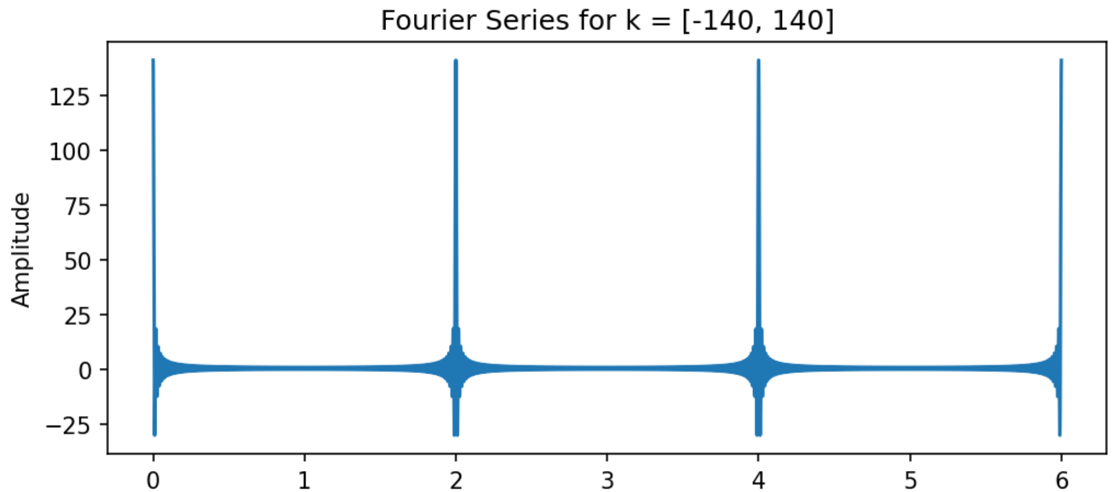
- **Σειρές Fourier**

- **Python code**

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameters
T0 = 2
f0 = 1/T0
N = 40
k = np.arange(-N, N+1, 1)

# Time axis
dt = 0.0001
t = np.arange(0, 3*T0, dt)

# Fourier Coefficients
X0 = 1/T0
Xk = 1/T0 * np.ones(k.shape)

# Synthesis
x = np.zeros(t.shape)

for i in range(0, len(k)):
    x = x + Xk[i] * np.exp(1j*2*np.pi*k[i]*f0*t)

# Adding the constant X0
x = x + X0

# Figures
plt.figure()
plt.plot(t, x)
plt.title('Fourier Series for k = [-40, 40]')
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.show()
```

$$\sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{2} e^{j\pi k t}$$



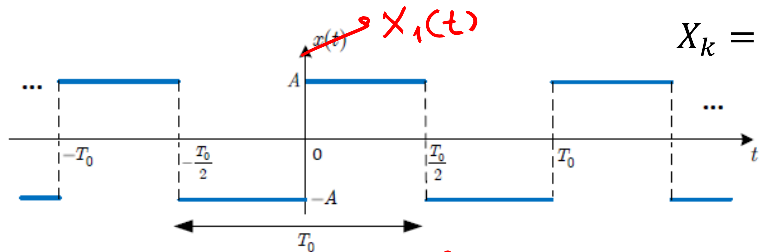



- **«Γνωστές» Σειρές Fourier**

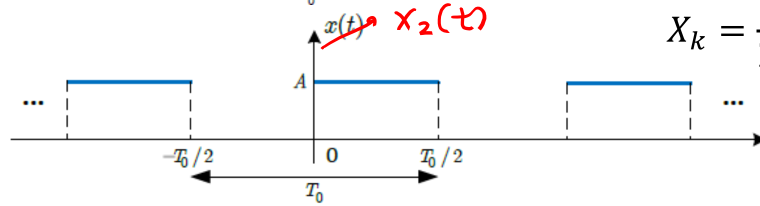
- Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τις παρακάτω σειρές Fourier, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στις ιδιότητες που ακολουθούν

**Συνήθεις Σειρές Fourier**

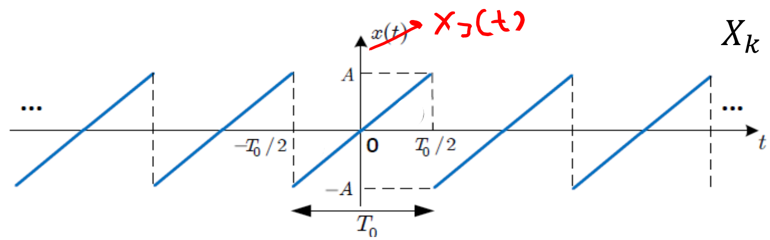
| Περιοδικό σήμα |
|---|
| $x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$ |
| $x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$ |
| $x(t) = \frac{2A}{T_0}t, \quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$ |
| $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$ |



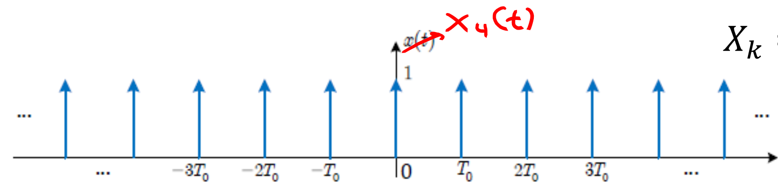

$$X_k = \frac{A}{k\pi}(1-(-1)^k)e^{-\frac{j\pi}{2}}$$




$$X_k = \frac{A}{2k\pi}(1-(-1)^k)e^{-\frac{j\pi}{2}}$$




$$X_k = \frac{A}{k\pi}(-1)^k e^{\frac{j\pi}{2}}$$




$$X_k = \frac{1}{T_0}, \forall\, k$$

# • Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

| Ιδιότητα | Περιοδικό σήμα | Συντελεστές Fourier |
|---|---|---|
| | $\mathbf{x(t)}$ **περιοδικό με περίοδο** $\mathbf{T_0}$<br>$\mathbf{y(t)}$ **περιοδικό με περίοδο** $\mathbf{T_0}$ | $\mathbf{X_k}$<br>$\mathbf{Y_k}$ |
| Γραμμικότητα | $Ax(t) + By(t)$ | $AX_k + BY_k$ |
| Χρονική μετατόπιση | $x(t - t_0)$ | $X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$ |
| Μετατόπιση στη συχνότητα | $e^{j2\pi M f_0 t} x(t)$ | $X_{k-M}$ |
| Συζυγές σήμα στο χρόνο | $x^*(t)$ | $X^*_{-k}$ |
| Αντιστροφή στο χρόνο | $x(-t)$ | $X_{-k}$ |
| Στάθμιση στο χρόνο | $x(at),\ a > 0$ | $X_k$, με περίοδο $T_0/a$ |
| Περιοδική συνέλιξη | $\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$ | $T_0 X_k Y_k$ |
| Πολλαπλασιασμός | $x(t)y(t)$ | $\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$ |
| Παραγώγιση | $\frac{dx(t)}{dt}$ | $j2\pi k f_0 X_k$ |
| Ολοκλήρωση | $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ | $\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$ |
| Συζυγής συμμετρία | $x(t)$ πραγματικό | $\begin{cases} X_k = X^*_{-k}, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\ \lvert X_k\rvert = \lvert X_{-k}\rvert, \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$ |
| Άρτιο σήμα | $x(t) = x(-t)$, $x(t)$ πραγματικό | $X_k \in \Re$ |
| Περιττό σήμα | $x(t) = -x(-t)$, $x(t)$ πραγματικό | $X_k \in \Im$ |
| Άρτιο μέρος | $x_e(t) = \mathrm{Ev}\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό | $\Re\{X_k\}$ |
| Περιττό μέρος | $x_o(t) = \mathrm{Od}\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό | $j\Im\{X_k\}$ |
| Θεώρημα του Parseval | $\frac{1}{T_0}\int_{T_0} \lvert x(t)\rvert^2 dt$ | $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert X_k\rvert^2$ |

# • Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

| Ιδιότητα | Περιοδικό σήμα | Συντελεστές Fourier |
|---|---|---|
| | x(t) περιοδικό με περίοδο $T_0$<br>y(t) περιοδικό με περίοδο $T_0$ | $X_k$<br>$Y_k$ |
| Γραμμικότητα | $Ax(t) + By(t)$ | $AX_k + BY_k$ |

**Απόδειξη:**

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \rightarrow Z_k = ?$$

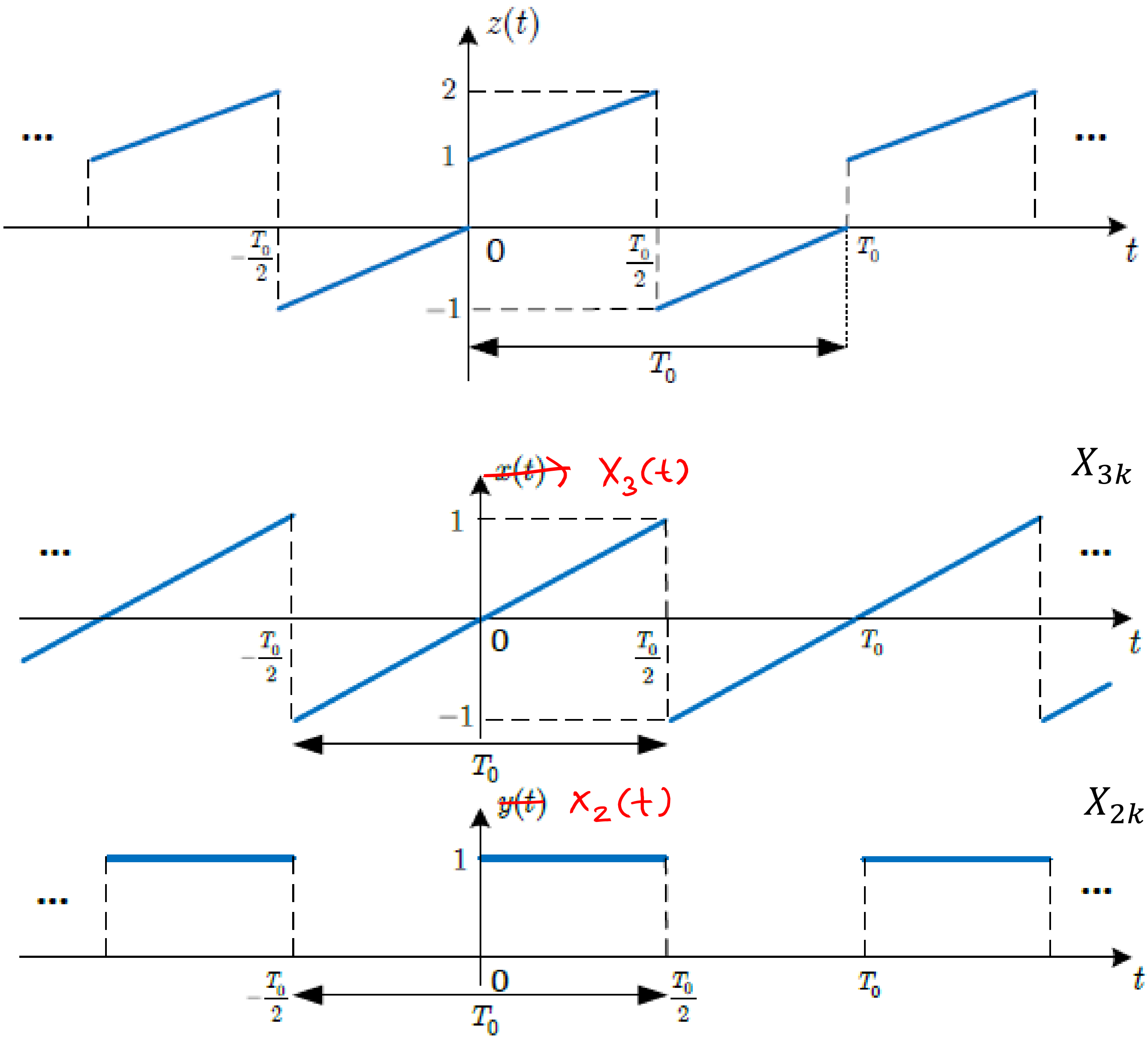
$$Z_k = \frac{1}{T_0}\int z(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int \big(Ax(t) + By(t)\big)\, e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int Ax(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt + \frac{1}{T_0}\int By(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

$$= A\frac{1}{T_0}\int x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt + B\frac{1}{T_0}\int y(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

$$= AX_k + BY_k$$

- **Ιδιότητες**




$$Z_k = ?$$

$$Z_k = X_{2k} + X_{3k}$$

$$X_{3k} = \frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{\frac{j\pi}{2}}$$

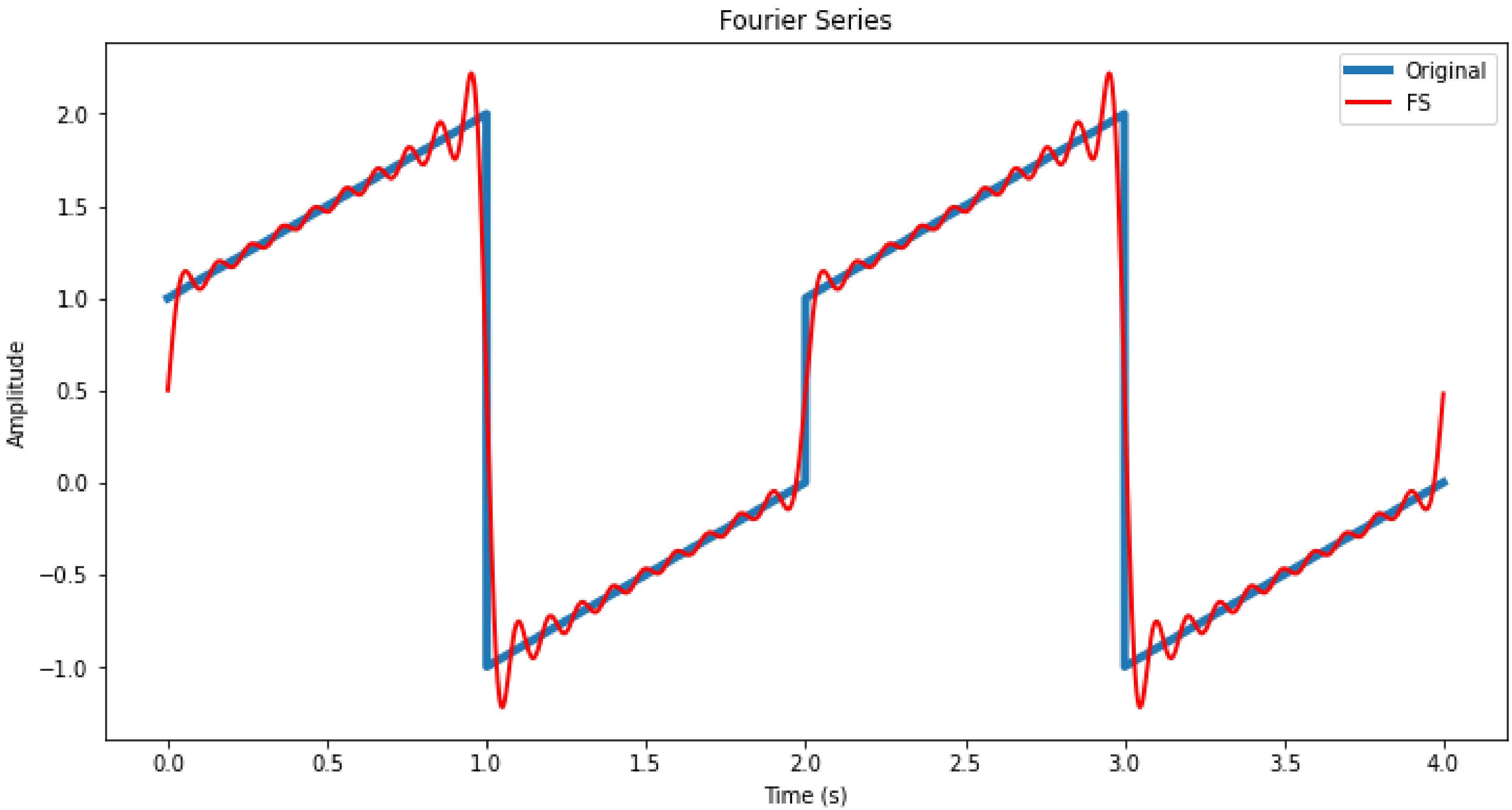
$$X_{2k} = \frac{1}{2\pi k}(1-(-1)^k)e^{-\frac{j\pi}{2}}$$

- **Python κώδικας**

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


# Parameters
A = 2
T0 = 2
f0 = 1/T0
N = 20
k = np.arange(-N,0,1, dtype=float)
k = np.concatenate((k, np.arange(1,N+1,1, dtype=float)))

# Ground truth
dt = 0.001
t1 = np.arange(0,T0/2, dt)
t2 = np.arange(T0/2, T0, dt)
z1 = 1 + t1
z2 = -2 + t2
z = np.concatenate((z1,z2))
z = np.concatenate((z,z))
t = np.arange(0, 2*T0, dt)

t = np.expand_dims(t,1)
k = np.expand_dims(k,1)
```

```python
# Fourier Coefficients
Xk = 1/(np.pi*k) * np.power(-1,k) * np.exp(1j*np.pi/2.0)
E = np.exp(1j*2*np.pi*f0*np.multiply(t, k.T))
x = Xk.T @ E.T

Yk = 1/(2*np.pi*k) * (1 - np.power(-1,k)) * np.exp(-1j*np.pi/2.0)
y = Yk.T @ E.T

# x(t) + y(t)
z_FS = x + y
Z0 = 1/2
z_FS = Z0 + z_FS

plt.figure(figsize=(12,6))
plt.plot(t,z, linewidth=4)
plt.title('Fourier Series')
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.plot(t, z_FS.T, 'r', linewidth=2)
plt.legend(['Original', 'FS'])
```

- **Ιδιότητες**
- **Python κώδικας**



# • Ιδιότητες

| Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier | | |
|---|---|---|
| **Ιδιότητα** | **Περιοδικό σήμα** | **Συντελεστές Fourier** |
| | $\mathbf{x(t)}$ περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$<br>$\mathbf{y(t)}$ περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$ | $\mathbf{X_k}$<br>$\mathbf{Y_k}$ |
| Χρονική μετατόπιση | $x(t-t_0)$ | $X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$ |

**Απόδειξη:**

$$z(t) = x(t-t_0) \rightarrow Z_k = ?$$

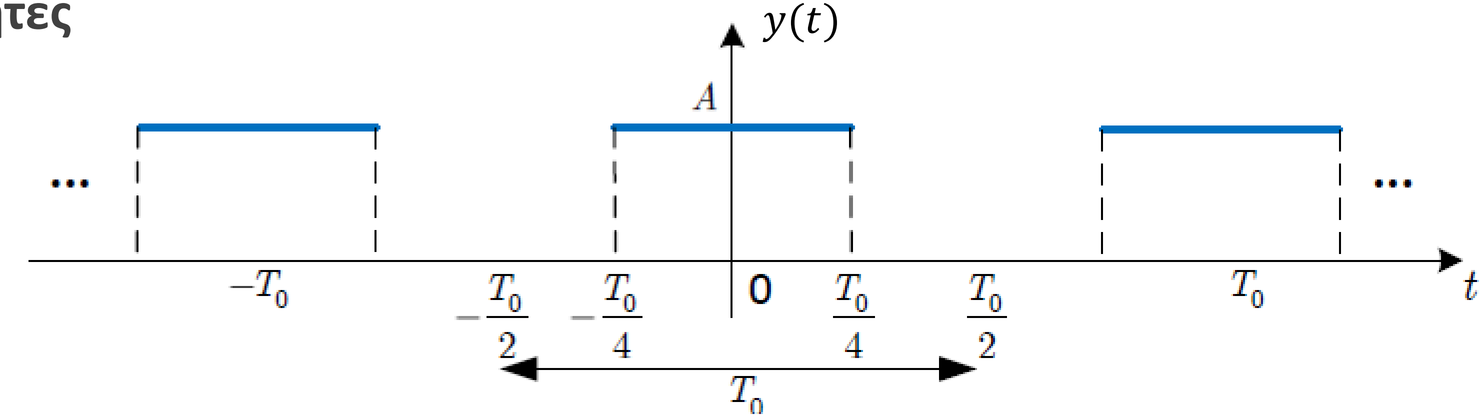
$$\left.\begin{array}{c} Z_k = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int x(t-t_0)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\ u = t - t_0 \Rightarrow du = dt \end{array}\right\} = \frac{1}{T_0}\int x(u)e^{-j2\pi k f_0 (u+t_0)}du$$

$$= \frac{1}{T_0}\int x(u)e^{-j2\pi k f_0 u}e^{-j2\pi k f_0 t_0}du$$

$$= e^{-j2\pi k f_0 t_0}\left[\frac{1}{T_0}\int x(u)e^{-j2\pi k f_0 u}du\right]$$

$$= e^{-j2\pi k f_0 t_0}X_k$$

- **Ιδιότητες**




Αναγνωρίζαμε ότι το $y(t)$ είναι το $x_2(t)$ μετατοπισμένο αριστερά κατά $\frac{T_0}{4}$, δηλ.

$$y(t) = x_2\left(t + \frac{T_0}{4}\right)$$

$$\boxed{X_{2_k} = \frac{1}{2\pi k}\left(1 - (-1)^k\right) e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

$$Y_k = X_{2_k} e^{-j2\pi k f_0\left(-\frac{T_0}{4}\right)}$$

$$= X_{2_k} e^{j\cancel{2}\pi k \overbrace{f_0 T_0}^{1} / \cancel{4}2}$$

$$= X_{2_k} \cdot e^{j\frac{\pi k}{2}}.$$

# • Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

| Ιδιότητα | Περιοδικό σήμα | Συντελεστές Fourier |
|---|---|---|
| | $x(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_0$ | $X_k$ |
| | $y(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_0$ | $Y_k$ |
| Αντιστροφή στο χρόνο | $x(-t)$ | $X_{-k}$ |

**<u>Απόδειξη:</u>**

$$z(t) = x(-t) \rightarrow Z_k = ?$$

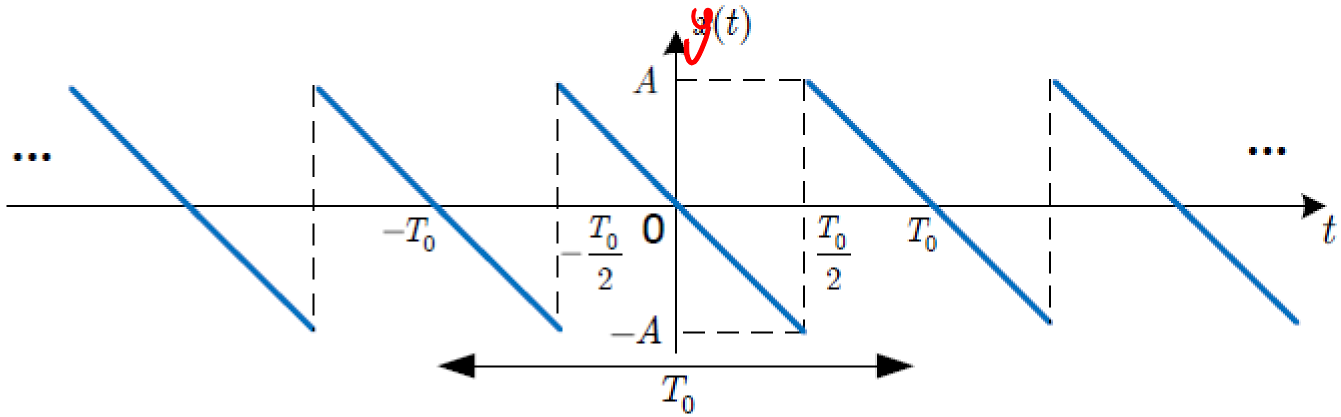
$$\left.\begin{aligned} Z_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(-t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt \\ u &= -t \Rightarrow du = -dt \\ u_1 &= 0, \qquad u_2 = -T_0 \end{aligned}\right\} = -\frac{1}{T_0}\int_0^{-T_0} x(u)e^{j2\pi k f_0 u}du$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0} x(u)e^{j2\pi k f_0 u}du$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0} x(u)e^{-j2\pi(-k) f_0 u}du$$

$$= X_{-k}$$

- **Ιδιότητες**




Αναγνωρίζουμε ότι το y(t) είναι το $x_3(t)$, χρονικά ανεστραμμένο, δηλ.

$$y(t) = x_3(-t).$$

$$X_{3_k} = \frac{A}{k\pi}(-1)^k e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$Y_k = X_{3_k}\Big|_{k=-k}$$

$$= \frac{A}{(-k)\pi}(-1)^{-k} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{A}{\pi k}(-1)^k \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

- Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

| Ιδιότητα | Περιοδικό σήμα | Συντελεστές Fourier |
|---|---|---|
| | x(t) περιοδικό με περίοδο $T_0$<br>y(t) περιοδικό με περίοδο $T_0$ | $X_k$<br>$Y_k$ |
| Στάθμιση στο χρόνο | $x(at)$, $a > 0$ | $X_k$, με περίοδο $T_0/a$ |

**Απόδειξη:**

$$\frac{1}{T_0} \qquad \frac{T_0}{a}$$

$$z(t) = x(at)\,, a > 0 \to Z_k = ?$$

$$Z_k = \frac{1}{T_0/a}\int_0^{T_0/a} x(at)e^{-j2\pi k a f_0 t}dt \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(u)e^{-j2\pi k f_0 u}du = X_k$$

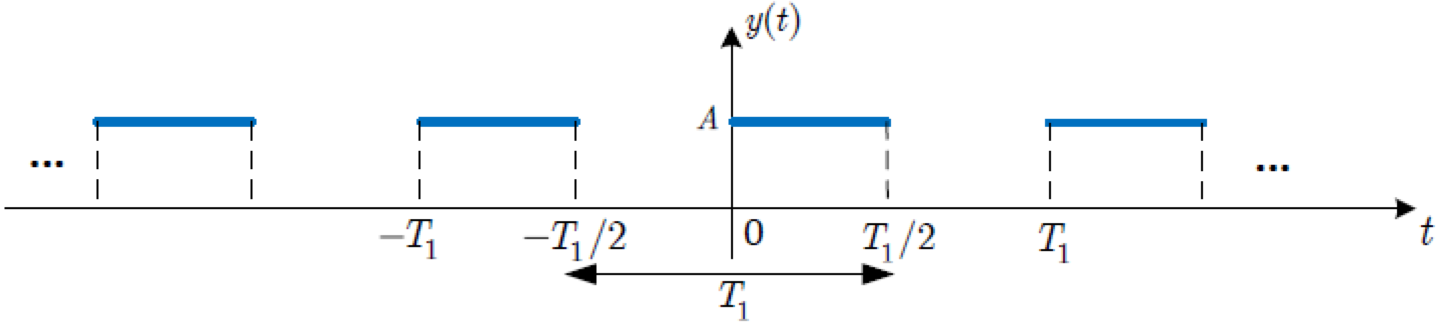
$$u = at \Rightarrow du = adt$$

$$u_1 = 0\,,\ u_2 = T_0$$

Π.χ.

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases} \Rightarrow x_{T_0}(at) = \begin{cases} at, & 0 < at < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < at < T_0 \end{cases} = \begin{cases} at, & 0 < t < \frac{T_0}{2a} \\ 0, & \frac{T_0}{2a} < t < \frac{T_0}{a} \end{cases}$$

- **Ιδιότητες**




Αναγνωρίζαμε ότι το $y(t)$ είναι το $x_2(t)$ αλλά με διαφορετική περίοδο, $T_1$, δηλ.

$$y(t) = x_2(t) \quad \text{με} \quad T_0 = T_1$$

Οι συντελεστές Fourier <u>ΔΕΝ</u> αλλάζουν!

$$Y_k = X_{2k}$$

Όμως αλλάζει η περίοδος του σήματος, $T_1$.

# • Ιδιότητες

| Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier | | |
|---|---|---|
| **Ιδιότητα** | **Περιοδικό σήμα** | **Συντελεστές Fourier** |
| | **x(t) περιοδικό με περίοδο $T_0$**<br>**y(t) περιοδικό με περίοδο $T_0$** | $X_k$<br>$Y_k$ |
| Παραγώγιση | $\frac{dx(t)}{dt}$ | $j2\pi k f_0 X_k$ |
| Ολοκλήρωση | $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ | $\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$ |

**Απόδειξη:**

$$z(t) = \frac{d}{dt}x(t) \rightarrow Z_k = ?$$

$$Z_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0} - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\frac{d}{dt}e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

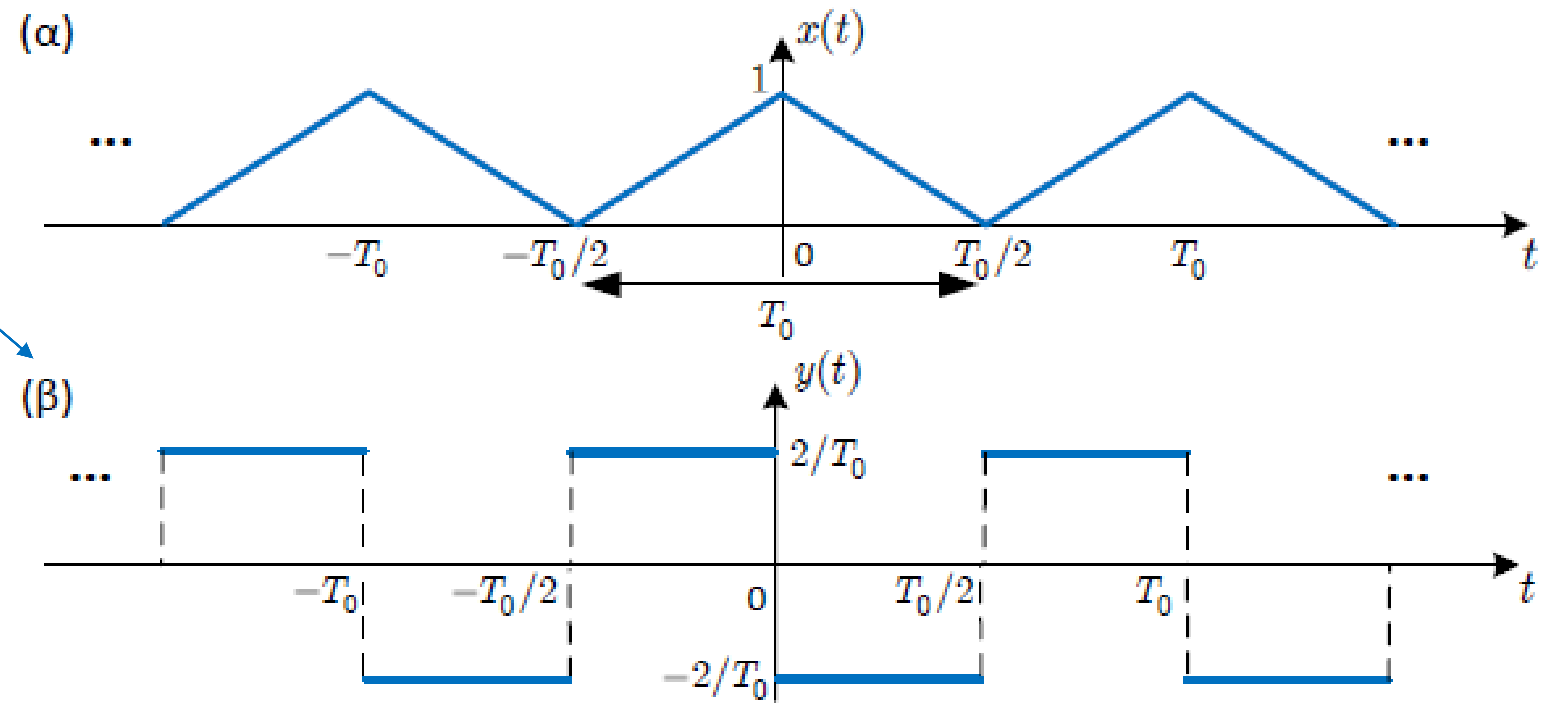
$$= \frac{1}{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0} - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)(-j2\pi k f_0)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0} + j2\pi k f_0\left[\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt\right]$$

$$= \frac{1}{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t}\Big|_0^{T_0} + j2\pi k f_0 X_k = \frac{1}{T_0}\left(\underbrace{x(0) - x(T_0)}_{0}\right) + j2\pi k f_0 X_k = j2\pi k f_0 X_k$$

- **Ιδιότητες**

$$\frac{d}{dt}x(t)$$




Αναγνωρίζουμε ότι το $y(t) = x'(t)$ είναι το σήμα $x_1(t)$ από τα γνωστά μας αλλά με δύο αλλαγές.

- Το $y(t)$ είναι το $x_1(t)$ με "−" μπροστά.
- $A \rightsquigarrow \frac{2}{T_0}$

# • Ιδιότητες

Άρα

$$Y_k = \frac{-\frac{2}{T_0}}{\pi k}\left(1-(-1)^k\right) e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi k T_0}\left((-1)^k-1\right) e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Από την ιδιότητα της ολοκλήρωσης

$$X_k = \frac{Y_k}{j2\pi k f_0} = \frac{\cancel{2}}{j\cancel{2}\pi k \cancel{f_0}\pi k \cancel{T_0}}\left((-1)^k-1\right) e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{j\pi^2 k^2}\left((-1)^k-1\right) e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

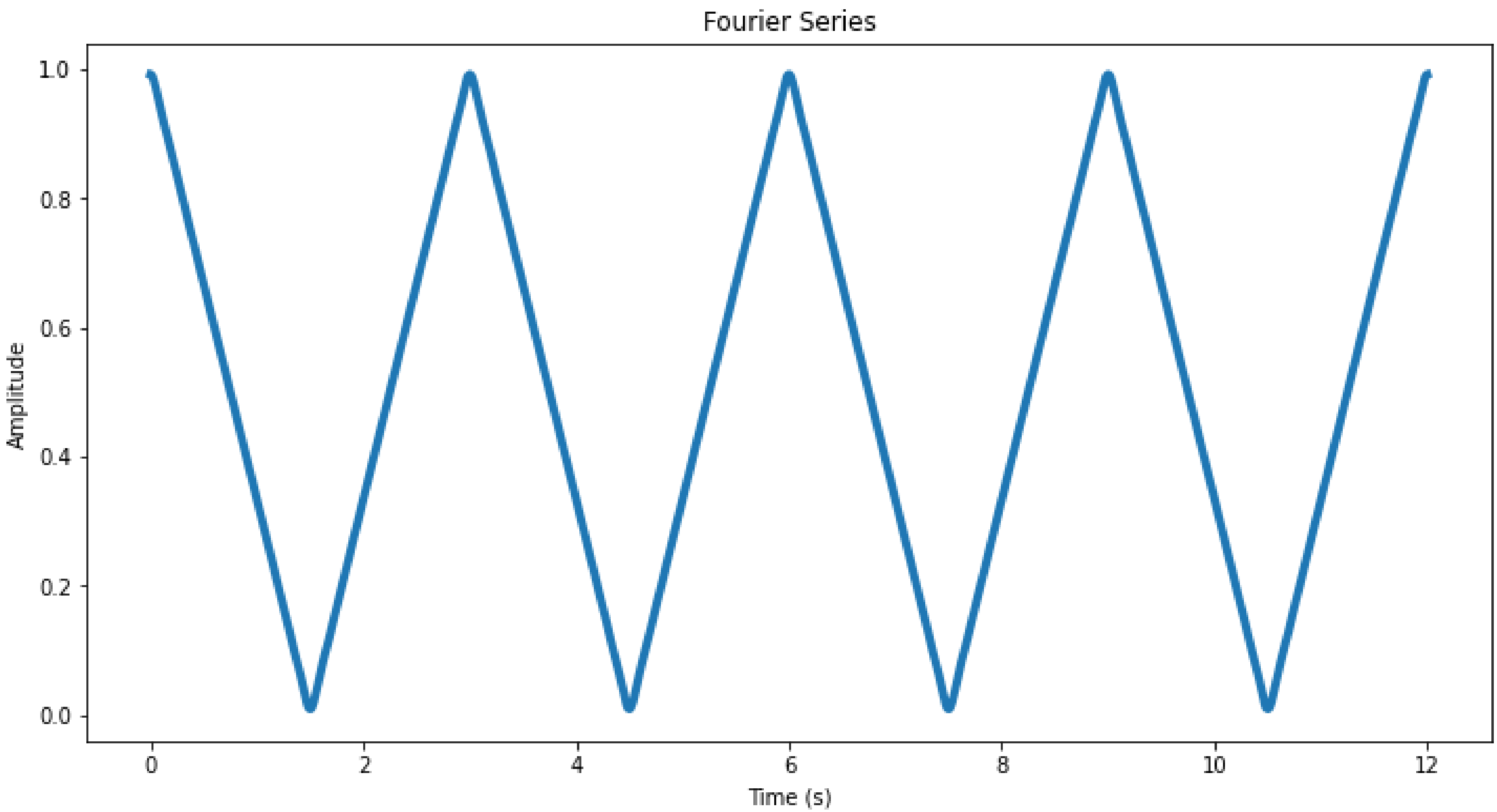
$$= \frac{1}{\pi^2 k^2}\left((-1)^k-1\right) \underbrace{e^{-j\pi}}_{-1}$$

$$= \frac{2}{\pi^2 k^2}, \quad k \text{ περιττά} \quad \left(0, \text{ για } k \text{ άρτια}\right)$$

- **Ιδιότητες**
- **Python κώδικας**

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


# Parameters
A = 1
T0 = 3
f0 = 1/T0
N = 21
k = np.arange(-N,0,2, dtype=float)
k = np.concatenate((k, np.arange(1,N+2,2, dtype=float)))

# Ground truth
dt = 0.001
t = np.arange(0, 4*T0, dt)

t = np.expand_dims(t,1)
k = np.expand_dims(k,1)

# Fourier Coefficients
Xk = 2/(np.pi**2 * k**2)
E = np.exp(1j*2*np.pi*f0*np.multiply(t, k.T))
x = Xk.T @ E.T

X0 = 1/2
x_FS = X0 + x

plt.figure(figsize=(12,6))
plt.plot(t,x_FS.T, linewidth=4)
plt.title('Fourier Series')
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
```

- **Ιδιότητες**
- **Python κώδικας**



# • Ιδιότητες

| Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier | | |
|---|---|---|
| Ιδιότητα | Περιοδικό σήμα | Συντελεστές Fourier |
| | $x(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_0$<br>$y(t)$ περιοδικό με περίοδο $T_0$ | $X_k$<br>$Y_k$ |
| Θεώρημα του Parseval | $\frac{1}{T_0}\int_{T_0}\lvert x(t)\rvert^2 dt$ $= P$ | $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lvert X_k\rvert^2$ $= P$ |

**Απόδειξη:**

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}|x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)x^*(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_l^* e^{-j2\pi l f_0 t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k X_k^* + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq l}}^{+\infty} X_k X_l^* e^{j2\pi(k-l)f_0 t}\right]dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k X_k^* \int_0^{T_0} dt + \frac{1}{T_0}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq l}}^{+\infty} X_k X_l^* \int_0^{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t}dt$$

$$(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)$$
$$= (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3) + \sum rest$$
$$= \sum a_i b_i + \sum rest$$

0 [ορθογωνιότητα]

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|X_k|^2 + \frac{1}{T_0}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq l}}^{+\infty} X_k X_l^* \int_0^{T_0} e^{j2\pi(k-l)f_0 t}dt \quad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|X_k|^2$$

- **Ιδιότητες**

$$X_{-k} = X_k^* \Rightarrow |X_k| = |X_{-k}^*|$$

- Έστω το αναπτυγμένο σε σειρά Fourier πραγματικό σήμα

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{X_0} + \sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{2}{j\pi k} e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$\rightarrow X_k = \frac{2}{j\pi k}, \quad k \neq 0$$

α) Πόση είναι η μέση ισχύς του?

β) Δείξτε ότι το ποσοστό της συνολικής μέσης ισχύος που είναι κατανεμημένο στους 4 πρώτους όρους της τριγωνομετρικής σειράς Fourier (μαζί με το σταθερό όρο) είναι ~85%.

α) $$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = |X_0|^2 + \sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty} |X_k|^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty} \left|\frac{2}{j\pi k}\right|^2 = \frac{1}{4} + \sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad ? \quad (1)$$

• **Ιδιότητες**

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Είναι $\displaystyle\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{k^2}$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{k^2} = 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = 2\,\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Άρα η (1) θα δώσει $P_x = \frac{1}{4} + \frac{4}{\cancel{\pi^2}}\cdot\frac{\cancel{\pi^2}}{3} = \frac{1}{4}+\frac{4}{3} = \frac{3}{12}+\frac{16}{12} = \frac{19}{12}$

β) Θέλαμε την ισχύ του $x_{k=[0,4]}(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{3}\underbrace{2|X_k|}_{A_k}\cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k)$.

Ξέραμε ότι ένα σήμα

$$A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k\cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k)$$

έχει μέση ισχύ $P_x = A_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{A_k^2}{2}$, άρα αντίστοιχα θα έχουμε

$$P_x^{k=0,1,2,3} = X_0^2 + \sum_{k=1}^{3}\frac{(2|X_k|)^2}{2} = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{3}2|X_k|^2 = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{3}2\left|\frac{2}{j\pi k}\right|^2$$

- **Ιδιότητες**

$$= \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{3} \frac{8}{\pi^2 k^2} = \frac{1}{4} + \frac{8}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{8}{\pi^2} 1.36111 \simeq 1.3533$$

Η συνολική μέση ισχύς ισούται με $\frac{19}{12} \simeq 1.5833$. Άρα στους πρώτους τέσσερις όρους της τριγωνομετρικής σειράς Fourier (του $X_0$ συμπεριλαμβανομένου) αντιστοιχεί το $\frac{1.3533}{1.5833} \simeq 0.854 \rightsquigarrow 85\%$ της συνολικής μέσης ισχύος του περιοδικού σήματος.

Άρα αν αποθηκεύσαμε τους 7 συντελεστές Fourier $X_k$, για $k=-3,\dots,3$, που αντιστοιχούν στους 4 πρώτους όρους της τριγωνομετρικής σειράς Fourier, αποθηκεύσαμε το $\sim 85\%$ της συνολικής μέσης ισχύος του περιοδικού σήματος.

# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ