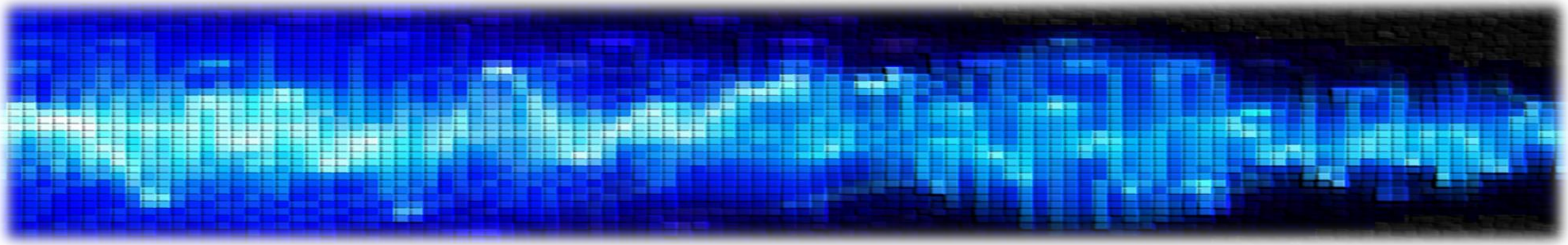
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 7Η



- Ο χώρος της συχνότητας

- Έχουμε μια πολύ καλή εικόνα για το πώς λειτουργούν τα συστήματα στο πεδίο του χρόνου
- Παρ’ όλα αυτά, θέλουμε περισσότερα! ☺
- Δεν ξέρουμε **γιατί** τα συστήματα συμπεριφέρονται έτσι
  - Δηλ. δεν ξέρουμε πώς μια δεδομένη είσοδος επηρεάζεται από το σύστημα
  - Δεν μπορούμε να **σχεδιάσουμε** συστήματα που να συμπεριφέρονται όπως θέλουμε εμείς
- Βήματα προς αυτήν την κατεύθυνση μπορούν να γίνουν αν στρέψουμε την προσοχή μας στο **χώρο της συχνότητας**
- Στην προσπάθειά μας αυτή, θα ξεφύγουμε από την αναπαραστάσεις πλάτους-χρόνου που έχουμε δει ως τώρα…
- Θα περάσουμε σε αναπαραστάσεις **πλάτους-συχνότητας**!
- Ποιες είναι αυτές οι αναπαραστάσεις? Θα το δούμε άμεσα…

- Όπως η συνάρτηση Δέλτα έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση των συστημάτων στο χώρο του χρόνου…
- …έτσι και το **μιγαδικό εκθετικό** σήμα της μορφής $\boldsymbol{x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}},\ \ \boldsymbol{A > 0}$ θα παίξει καθοριστικό ρόλο στο χώρο της συχνότητας
- Αν βάλουμε ένα τέτοιο σήμα ως είσοδο σε ένα **ΓΧΑ** σύστημα τότε θα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
y(t) = x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) A e^{j(2\pi f_0 (t-\tau)+\phi)}\, d\tau \\
&= A e^{j(2\pi f_0 t+\phi)} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau}\, d\tau \\
&= H(f_0)\left(A e^{j(2\pi f_0 t+\phi)}\right) \\
&= H(f_0) x(t)
\end{aligned}
$$

με

$$
\boxed{H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau}\, d\tau}
$$

ένα **σταθερό μιγαδικό αριθμό που εξαρτάται από το $\boldsymbol{f_0}$**, δηλ. από τη συχνότητα εισόδου

- Το αποτέλεσμα

$$y(t) = H(f_0)x(t)$$

με $x(t) = \boldsymbol{A}e^{j(2\pi f_0 t + \boldsymbol{\varphi})}$ και

$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau}\, d\tau$$

είναι πολύ σημαντικό!

$$\cos\theta = \frac{1}{2}e^{j\theta} + \frac{1}{2}e^{-j\theta}$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2j}e^{j\theta} - \frac{1}{2j}e^{-j\theta}$$

- Μας λέει ότι **ένα μιγαδικό σήμα της μορφής $\boldsymbol{x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}}$ περνά «όπως είναι» στην έξοδο του συστήματος και απλά πολλαπλασιάζεται με μια μιγαδική σταθερά $\boldsymbol{H(f_0)}$**!
  - Η οποία βέβαια μπορεί να **αλλάζει το πλάτος και τη φάση της εισόδου**! ☺

- Για παράδειγμα, αν $H(f_0) = 1 + j$, τότε

$$y(t) = (1+j)Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)} = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)} = \boldsymbol{\sqrt{2}A}e^{j\left(2\pi f_0 t + \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\right)}$$

- Ξέρουμε ότι τέτοια σήματα σχετίζονται στενά με ημιτονοειδή σήματα
  - Μέσω της σχέσης του Euler

Νέο πλάτος, νέα φάση στην έξοδο !!

$$z + z^* = 2\Re e\{z\}$$

- Για παράδειγμα, αν

$$x_1(t) = 2e^{j\left(2\pi 100t+\frac{\pi}{3}\right)}$$

και

$$H(100) = 1 + j$$

τότε

$$y(t) = (1+j)2e^{j\left(2\pi 100t+\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}2e^{j\left(2\pi 100t+\frac{\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2}e^{j\left(2\pi 100t+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

- Αν

$$x_2(t) = x_1^*(t) = 2e^{-j\left(2\pi 100t+\frac{\pi}{3}\right)}$$

και

$$H(-100) = 1 - j$$

ποιά η έξοδος? $\rightsquigarrow$ $y_2(t) = H(-100)\,x_2(t) = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\cdot 2e^{-j\left(2\pi 100t+\frac{\pi}{3}\right)}$

$$= 2\sqrt{2}\,e^{-j\left(2\pi 100t+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

συζυγή!

- Αν

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 4\cos\left(2\pi 100t + \frac{\pi}{3}\right)$$

ποιά η έξοδος?

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 4\sqrt{2}\cos\left(2\pi 100t + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) \quad !$$

- Και για μη ημιτονοειδή σήματα?
- Δε θα ήταν πολύ βολικό να μπορούμε να εκφράσουμε **κάθε** σήμα ως **άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων** συγκεκριμένων συχνοτήτων?
  - Τότε θα βρίσκαμε την έξοδο ΓΧΑ συστημάτων για τέτοιες εισόδους πολύ εύκολα!!
- Ας ξεκινήσουμε μελετώντας αρχικά μόνο <u>περιοδικά</u> σήματα
- Υπενθυμίζεται ότι

❑ Ένα σήμα ονομάζεται **περιοδικό** αν ικανοποιεί τη σχέση

$$x(t) = x(t \pm T_0)$$

❑ Η μικρότερη χρονική διάρκεια T_0 που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση ονομάζεται **περίοδος** του περιοδικού σήματος

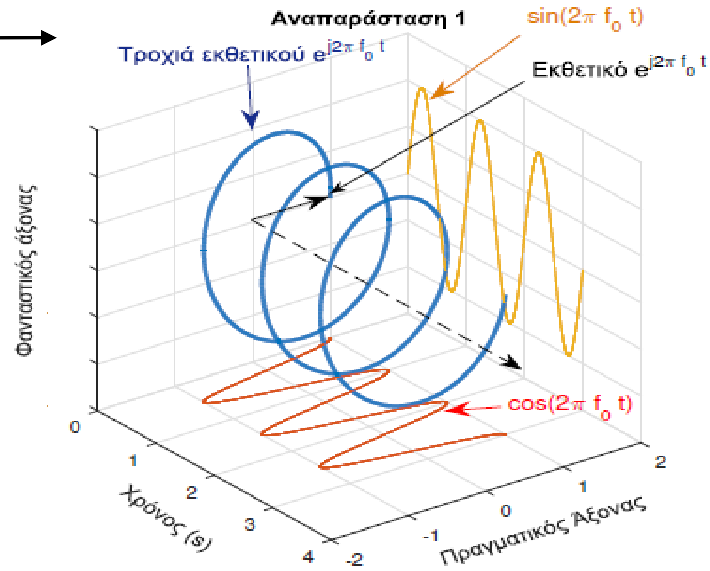
- ○ Μην μπερδεύετε τη **διάρκεια** T ενός **απεριοδικού** σήματος με την **περίοδο** T_0 ενός **περιοδικού** σήματος!

❑ Η περίοδος σχετίζεται με τη **θεμελιώδη συχνότητα** του, f_0, με τη σχέση

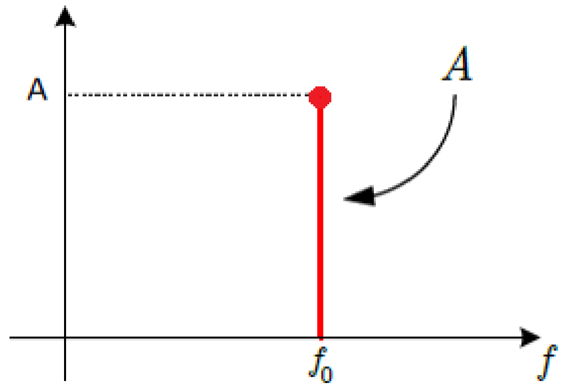
$$f_0 = 1/T_0$$

❑ Για ένα απλό ημίτονο, η θεμελιώδης συχνότητα μας πληροφορεί για το πλήθος των ταλαντώσεων που το σήμα εκτελεί στη μονάδα του χρόνου

- Έστω το γνωστό μας σήμα $x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t},\ A \in \Re_+$
- Το μιγαδικό αυτό σήμα αποτελείται από μια μόνο συχνότητα f_0 και περίοδο T_0
- Θυμηθείτε:



- Οπότε:



- Περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το σήμα

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi), \qquad A > 0, \qquad \phi \in (-\pi, \pi]$$

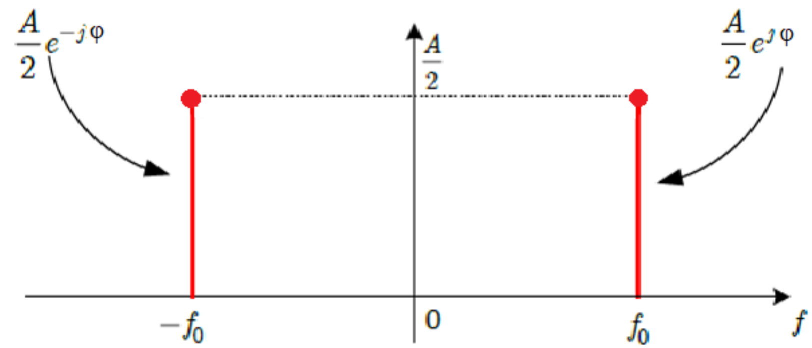
το οποίο γράφεται (Euler) ως:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \boxed{\frac{A}{2}e^{j\phi}}e^{j2\pi f_0 t} + \boxed{\frac{A}{2}e^{-j\phi}}e^{-j2\pi f_0 t}$$

- Οπότε η αναπαράστασή του

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j2\pi f_0 t}$$

θα είναι



- Η παραπάνω σχέση γράφεται και ως

$$x(t) = X_1 e^{j2\pi(1f_0)t} + X_{-1}e^{j2\pi(-1f_0)t}$$

με τους συντελεστές $X_1 = \frac{A}{2}e^{j\phi}$, $X_{-1} = X_1^* = \frac{A}{2}e^{-j\phi}, A > 0$ να ονομάζονται **phasors** (φάσορες), όπως έχουμε ξαναπεί
  - … οι οποίοι είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί για πραγματικά σήματα (όπως το $\cos(\cdot)$)
- Η παραπάνω αναπαράσταση ονομάζεται **φάσμα (spectrum)**
- Είναι προτιμότερο το μέτρο του φάσορα να σχεδιάζεται σε μια γραφική παράσταση ενώ η φάση του σε μια άλλη
  - **Στο *φάσμα πλάτους* σχεδιάζουμε το μέτρο του φάσορα**
  - **…και στο *φάσμα φάσης* τη φάση του φάσορα**

- **Παράδειγμα**

$$* \quad \pm\frac{1}{j} = \mp j = e^{\mp\frac{j\pi}{2}}$$

○ Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του σήματος

$$x(t) = 3 - 2\cos\left(2\pi 10t + \frac{\pi}{9}\right) + \sin\left(2\pi 15t - \frac{\pi}{6}\right)$$

αφού ελέγξετε αν είναι περιοδικό → οι συχνότητες 10, 15 Hz σχηματίζουν λόγο ακεραίων, $\frac{10}{15}$, άρα το x(t) είναι περιοδικό.

Είναι

$$x(t) \overset{\text{Euler}}{=} 3 - \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}} e^{j\frac{\pi}{9}} \cdot e^{j2\pi 10t} + \frac{1}{\cancel{2}} e^{-j\frac{\pi}{9}} \cdot e^{-j2\pi 10t}\right) + \left(\frac{1}{2j} e^{-j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{j2\pi 15t} - \frac{1}{2j} e^{j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{-j2\pi 15t}\right)$$

$$= 3 - e^{j\frac{\pi}{9}} \cdot e^{j2\pi 10t} - e^{-j\frac{\pi}{9}} \cdot e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2j} e^{-j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{j2\pi 15t} - \frac{1}{2j} e^{j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{-j2\pi 15t}$$

$$\overset{*}{=} 3 - e^{j\frac{\pi}{9}} \cdot e^{j2\pi 10t} - e^{-j\frac{\pi}{9}} \cdot e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{-j2\pi 15t}$$

$$= 3 \underbrace{- e^{j\frac{\pi}{9}}}_{\text{όχι πολική}} \cdot e^{j2\pi 10t} \underbrace{- e^{-j\frac{\pi}{9}}}_{\text{όχι πολική}} \cdot e^{-j2\pi 10t} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{3}}}_{\text{πολική μορφή ✓}} \cdot e^{j2\pi 15t} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{3}}}_{\text{πολική μορφή ✓}} \cdot e^{-j2\pi 15t}}_{\text{Έστω } z(t)\text{, για να μην το γράφουμε πολλές φορές...}}$$

- **Παράδειγμα**

$$-1 = e^{\pm j\pi}$$

$$\phi \in (-\pi, \pi]$$

Άρα

$$x(t) = 3 - e^{j\frac{\pi}{9}} \cdot e^{j2\pi 10t} - e^{-j\frac{\pi}{9}} \cdot e^{-j2\pi 10t} + z(t)$$

$$= 3 + e^{-j\pi} e^{j\frac{\pi}{9}} \cdot e^{j2\pi 10t} + e^{j\pi} e^{-j\frac{\pi}{9}} \cdot e^{-j2\pi 10t} + z(t)$$

$$= 3 + e^{-j\frac{8\pi}{9}} \cdot e^{j2\pi 10t} + e^{j\frac{8\pi}{9}} \cdot e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{-j2\pi 15t}$$

$$3 \rightarrow 3 \cdot e^{j2\pi \cdot 0 \cdot t}$$

Όλοι οι συντελεστές των $e^{j2\pi f_k t}$ είναι γραμμένοι σε πολική μορφή!

Μπορούμε τώρα να σχεδιάσουμε τα φάσματα πλάτους και φάσης!

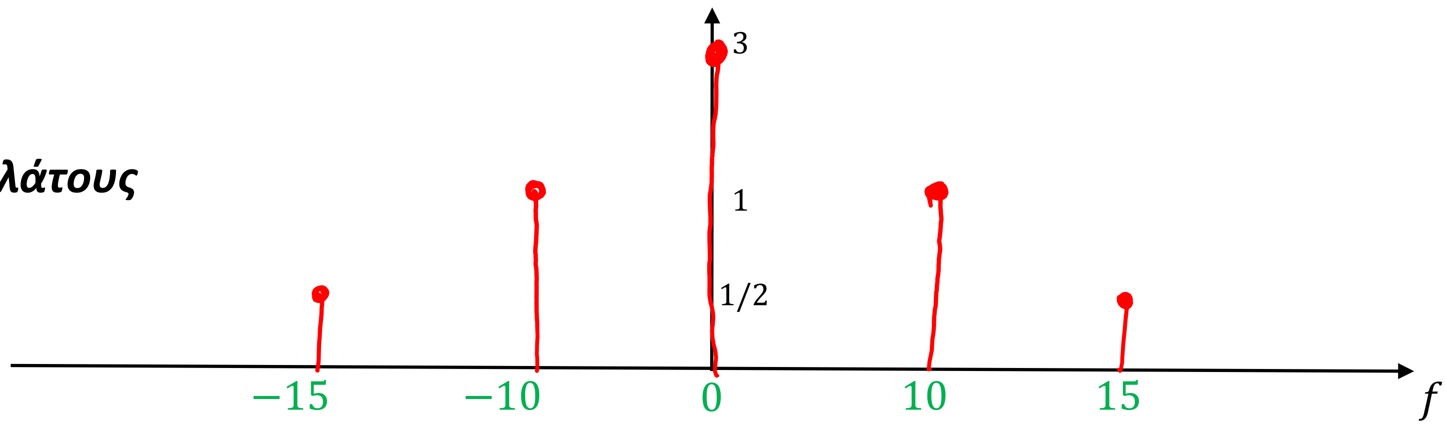
- Οπότε τελικά

$$x(t) = 3e^{j2\pi 0t} + 1e^{-\frac{j8\pi}{9}} e^{j2\pi 10t} + 1e^{\frac{j8\pi}{9}} e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2} e^{-\frac{j2\pi}{3}} e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2} e^{\frac{j2\pi}{3}} e^{-j2\pi 15t}$$

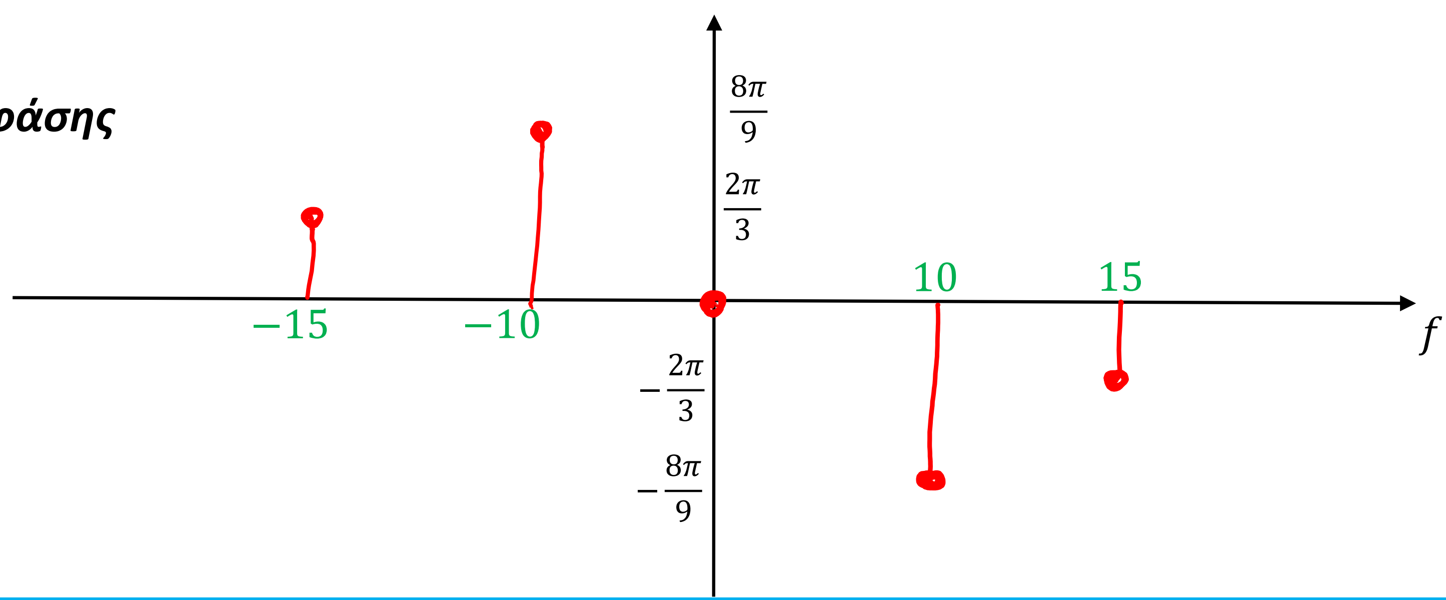
- Παράδειγμα

$$x(t) = 3e^{j2\pi 0t} + 1e^{-\frac{j8\pi}{9}}e^{j2\pi 10t} + 1e^{\frac{j8\pi}{9}}e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2}e^{-\frac{j2\pi}{3}}e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2}e^{\frac{j2\pi}{3}}e^{-j2\pi 15t}$$

φάσμα πλάτους

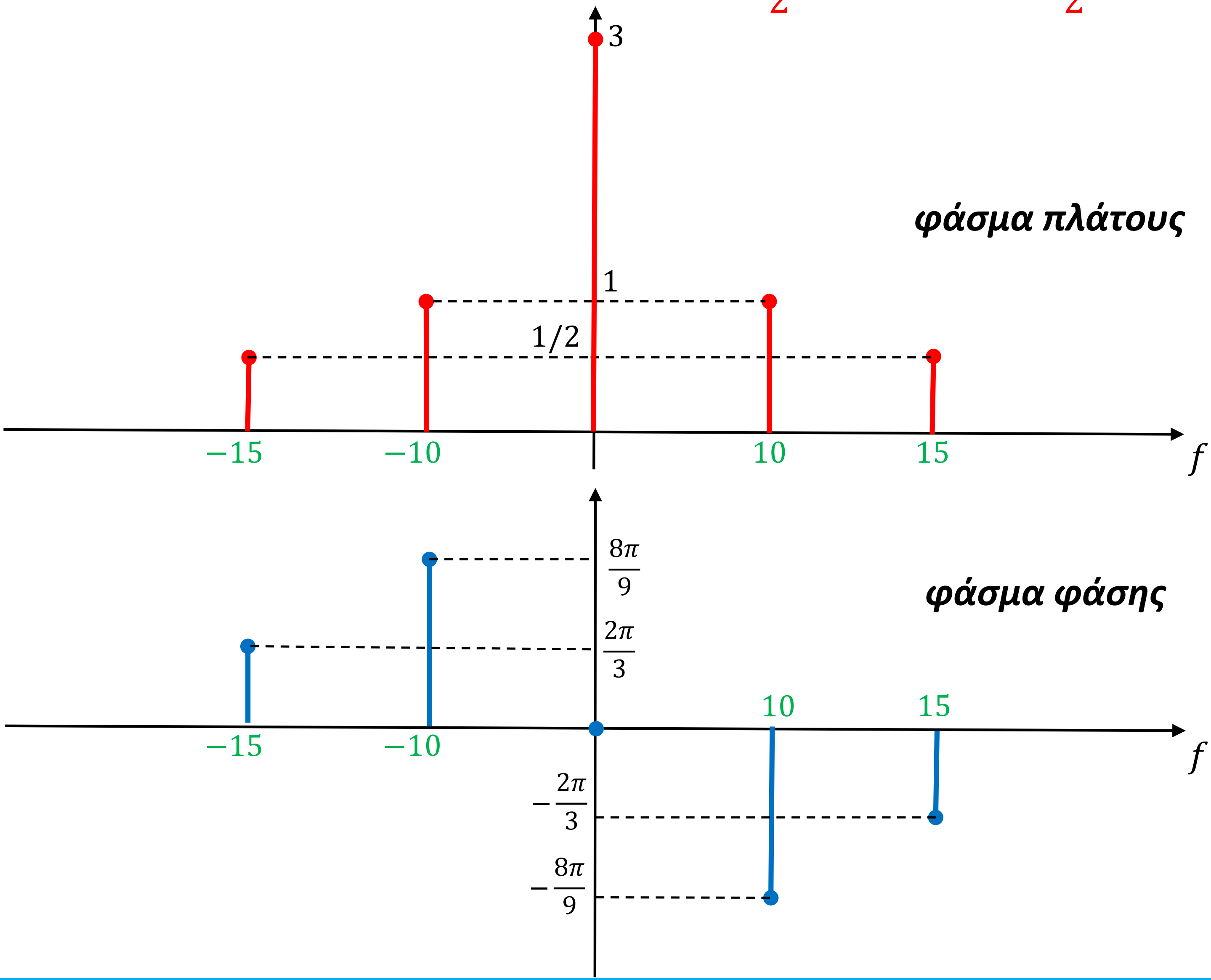


φάσμα φάσης



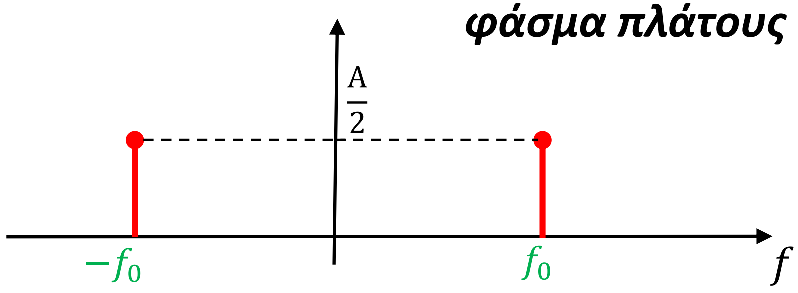
- Παράδειγμα

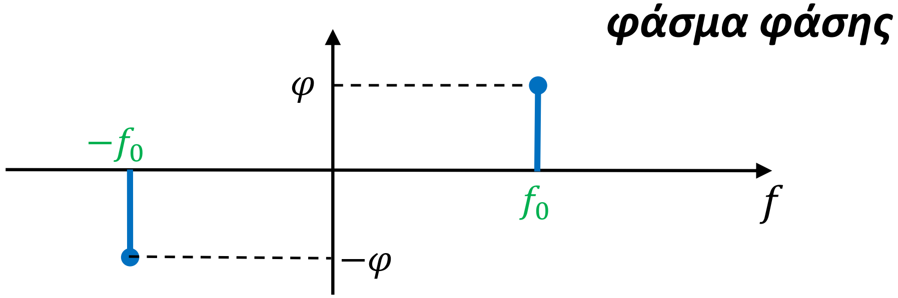
$$x(t) = 3e^{j2\pi 0t} + 1e^{-\frac{j8\pi}{9}}e^{j2\pi 10t} + 1e^{\frac{j8\pi}{9}}e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2}e^{-\frac{j2\pi}{3}}e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2}e^{\frac{j2\pi}{3}}e^{-j2\pi 15t}$$



- **Ο χώρος της συχνότητας**
- Συνοπτικά

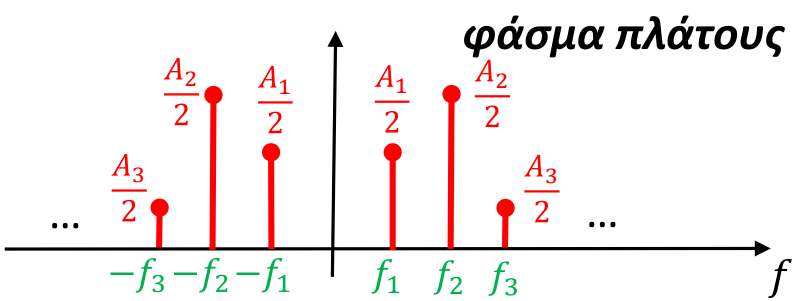
$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j2\pi f_0 t}, \qquad A > 0$$

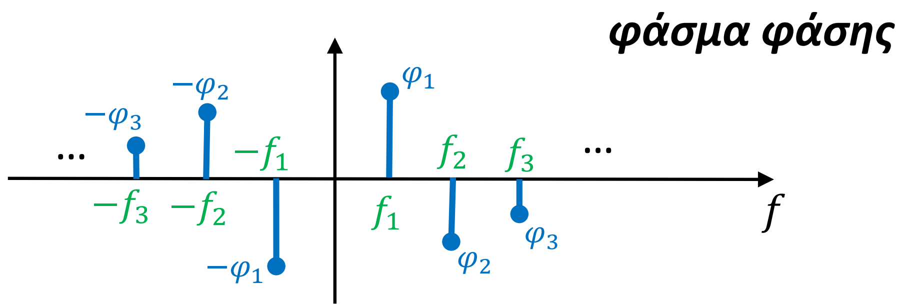




- Γενικότερα

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) = \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} e^{j2\pi f_k t} + \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k} e^{-j2\pi f_k t} \right]$$





- Το να εντοπίσει κανείς τις συχνότητες των επιμέρους ημιτονοειδών είναι εύκολο
- Ποια όμως είναι η **θεμελιώδης συχνότητα f_0** όλου του περιοδικού σήματος?
  - ...(υποθέτοντας ότι είναι περιοδικό)
- Μπορούμε να δείξουμε ότι αν

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos\left(2\pi \frac{1}{T_k} t + \varphi_k\right)$$

τότε αυτό είναι **περιοδικό** με περίοδο T_0, δηλ. ικανοποιεί την $x(t) = x(t + T_0)$, αν

$$f_k T_0 = \frac{T_0}{T_k} \in \mathbb{Z}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

- Αυτό σημαίνει ότι η περίοδος θα πρέπει να είναι ένα **κοινό πολλαπλάσιο των επιμέρους περιόδων**
- Το **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο** των επιμέρους περιόδων αποτελεί την περίοδο του συνολικού σήματος

$$\boxed{T_0 = \text{ΕΚΠ}(T_1, T_2, \dots, T_k)}$$

κι επειδή $f_0 = \frac{1}{T_0}$, τότε

$$\boxed{f_0 = \text{ΜΚΔ}(f_1, f_2, \dots, f_k)}$$

με ΜΚΔ το **μέγιστο κοινό διαιρέτη των επιμέρους συχνοτήτων!**

- Κάθε **πραγματικό** σήμα που αναλύεται φασματικά έχει τις ακόλουθες συμμετρίες:

a) Άρτια συμμετρία στο φάσμα πλάτους του

b) Περιττή συμμετρία στο φάσμα φάσης του

- Η συμμετρία προκύπτει από τη **συζυγία** των φασόρων

$$2\cos\left(2\pi 10t + \frac{\pi}{9}\right) + \sin\left(2\pi 15t - \frac{\pi}{6}\right)$$

- Επίσης παρατηρήστε ότι οι **συχνότητες** των ημιτόνων του παραδείγματος ήταν ***ακέραιες πολλαπλάσιες*** της θεμελιώδους συχνότητας, $f_0 = \text{ΜΚΔ}(10{,}15) = 5$ Hz
  - Έτσι οι φάσορες μπορούν να γραφούν ως X_k, με k το αντίστοιχο **ακέραιο πολλαπλάσιο** της θεμελιώδους συχνότητας
  - Στο προηγούμενο παράδειγμα, οι φάσορες μπορούσαν να γραφούν ως

$$X_2, X_{-2} = X_2^*, X_3, X_{-3} = X_3^*$$

  - Οι $X_1, X_{-1} = X_1^*$ ήταν μηδενικοί
    - Δεν υπήρχε φασματικό περιεχόμενο στη συχνότητα $f = 5$ Hz, παρ' όλο που αυτή είναι η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος!

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) = X_0 e^{j2\pi 0t} &+ \\ X_2 e^{j2\pi 10t} + X_{-2} e^{-j2\pi 10t} &+ \\ X_3 e^{j2\pi 15t} + X_{-3} e^{-j2\pi 15t} & \end{aligned}}$$

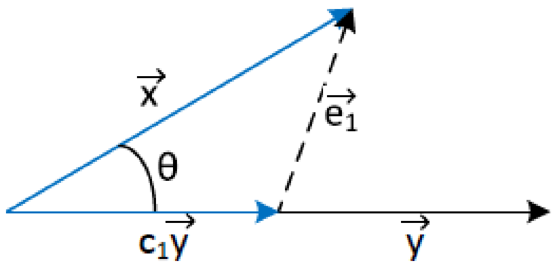
- Η ανάλυση περιοδικών σημάτων που γράφονται **ως άθροισμα ημιτόνων** είναι σχετικά απλή καθώς ακολουθούμε την προηγούμενη διαδικασία, όσα ημιτονοειδή και αν υπάρχουν, ό,τι πρόσημα κι αν έχουν

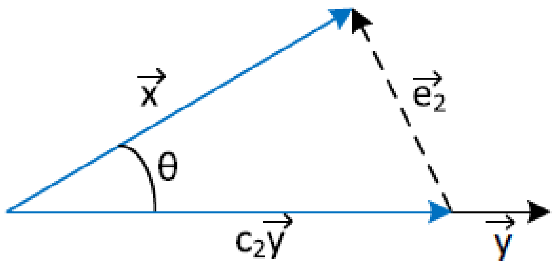
- **Ερώτημα: μπορούμε να γράψουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα ως άθροισμα συζυγών εκθετικών μιγαδικών συναρτήσεων?**
  - Αν μπορούμε, τότε τα προηγούμενα γενικεύονται για κάθε περιοδικό σήμα
  - Η εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο είναι τετριμμένη!

- **Εναλλακτική διατύπωση: μπορούμε να *προσεγγίσουμε* όσο καλά θέλουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα από ένα άθροισμα ημιτόνων (και μέσω της σχέσης του Euler, συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων)?**

Το «σχεδόν» στις παραπάνω προτάσεις αφορά εξαιρέσεις που δε θα συναντήσουμε στην πράξη

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- Για να απαντήσουμε στο προηγούμενο ερώτημα θα ήταν ωραίο να εμπνευστούμε από μερικές ιδιότητες των **διανυσμάτων**
- Έστω διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ όπως στο σχήμα
- Τα διανύσματα $c_i\vec{y}$ αποτελούν **προσεγγίσεις** του διανύσματος $\vec{x}$ από το διάνυσμα $\vec{y}$

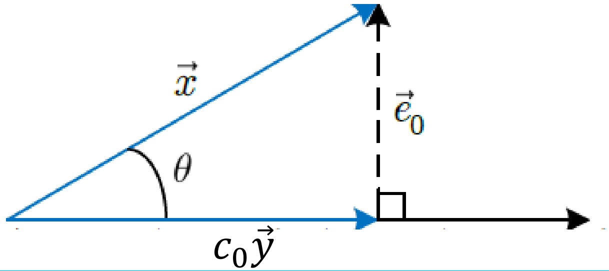




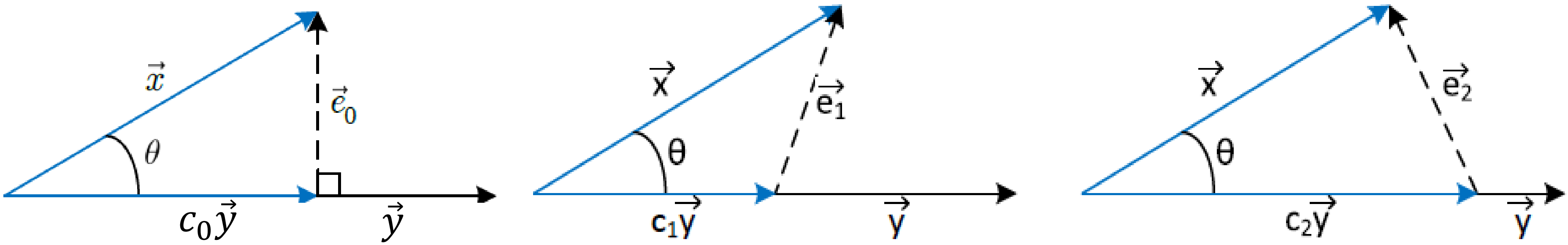
και $\vec{e}_i$ τα **διανύσματα σφάλματος**, με την έννοια ότι το $\vec{e}_i = \vec{x} - c_i\vec{y}$ είναι το διάνυσμα που πρέπει να προσθέσουμε στο $c_i\vec{y}$ για να πάρουμε το διάνυσμα $\vec{x}$, δηλ.

$$\vec{x} = c_i\vec{y} + \vec{e}_i$$

- Γνωρίζετε ότι το **μικρότερο** διάνυσμα σφάλματος είναι αυτό που είναι **κάθετο** στο διάνυσμα $\vec{y}$



- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**



- **Reminder:** τα διανύσματα $c_i\vec{y}$ αποτελούν **προσεγγίσεις** του διανύσματος $\vec{x}$ από το διάνυσμα $\vec{y}$

- Αν λοιπόν θέλαμε να γράψουμε $\vec{x} = c_i\vec{y} + \vec{e}_i \approx c_i\vec{y}$, ποια σταθερά c_i θα ήταν καλύτερη για αυτήν την προσέγγιση?
  - Η διαίσθηση μας – και τα μαθηματικά ☺ – λέει τη σταθερά c_0, αφού το διάνυσμα σφάλματος της, $\vec{e}_0$, είναι αυτό με το **μικρότερο μήκος (μικρότερο μέτρο)**

- Ποια είναι η σταθερά c_0 όμως?

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε

$$\cos\theta = \frac{c_0|\vec{y}|}{|\vec{x}|} \Rightarrow c_0 = \frac{1}{|\vec{y}|^2}|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta = \frac{1}{|\vec{y}|^2}\vec{x}\cdot\vec{y}$$

με $\vec{x}\cdot\vec{y}$ το **εσωτερικό γινόμενο των δυο διανυσμάτων**

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- Γιατί να μην εφαρμόσουμε την ίδια τακτική σε σήματα (αντί για διανύσματα)? ☺
- Έστω ένα σήμα $x(t)$ που θέλουμε να το προσεγγίσουμε με ένα σήμα $y(t)$, σε ένα διάστημα $t_1 < t < t_2$
- Με όμοιο σκεπτικό με πριν, ποιο είναι το ***βέλτιστο c*** **–** με κάποια έννοια **–** για το οποίο $x(t) \approx cy(t)$ στο διάστημα αυτό?
- Ας κάνουμε το ίδιο με πριν: $x(t) = cy(t) + e(t)$
- Ορίζουμε τη **συνάρτηση σφάλματος** (παρόμοια με το διάνυσμα σφάλματος) ως

$$e(t) = x(t) - cy(t)$$

- Θα θέλαμε η συνάρτηση σφάλματος να είναι όσο γίνεται «μικρότερη»…
  - Αλλά με ποια έννοια «μικρότερη»?
- Ένας βολικός τρόπος είναι να ζητήσουμε η συνάρτηση σφάλματος να έχει την **ελάχιστη ενέργεια**

$$E_e(c) = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \big(x(t) - cy(t)\big)^2 dt$$

- **Πρόβλημα βελτιστοποίησης - optimization**!

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- **Ενέργεια σφάλματος**

Η συνάρτηση ενέργειας είναι τετραγωνική (quadratic) ως προς c και άρα κυρτή (convex), κι επειδή η 2η παράγωγός της ως προς c είναι θετική, εγγυάται ότι έχει ένα μοναδικό ελάχιστο.

$$E_e(c) = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \big(x(t) - cy(t)\big)^2 dt$$

- Για να βρούμε το βέλτιστο c θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$\frac{d}{dc} E_e(c) = 0$$

- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι το βέλτιστο c δίνεται από τη σχέση

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt$$

με

$$E_y = \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)dt$$

και

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt = \langle x, y \rangle$$

να ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** των σημάτων $x(t), y(t)$

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- **Συγκρίνετε:**

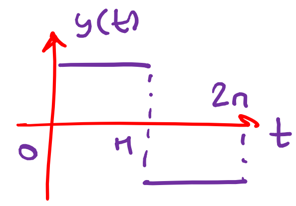
$$\boxed{c_0 = \frac{1}{|\vec{y}|^2}|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta = \frac{1}{|\vec{y}|^2}\vec{x}\cdot\vec{y}}$$

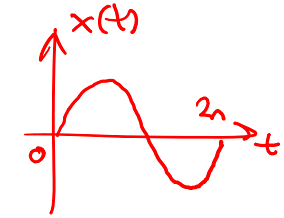
$$\boxed{c = \frac{1}{E_y}\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt = \frac{1}{E_y}\langle x, y\rangle}$$

- **Παράδειγμα**

  - Έστω $y(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi \\ -1, & \pi < t \le 2\pi \end{cases}$ και $x(t) = \sin(t)$, $0 \le t \le 2\pi$

    Βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση του $y(t)$ από το $x(t)$





Θέλουμε το βέλτιστο c : $y(t) \cong c\,x(t)$

Άρα $c = \dfrac{1}{E_x} \displaystyle\int_{t_1=0}^{t_2=2\pi} x(t)\,y(t)\,dt$ (1)

$$E_x = \int_{t_1=0}^{t_2=2\pi} (\sin(t))^2 dt = \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,dt = \dots = \pi \Longleftrightarrow \boxed{E_x = \pi} \quad (2)$$

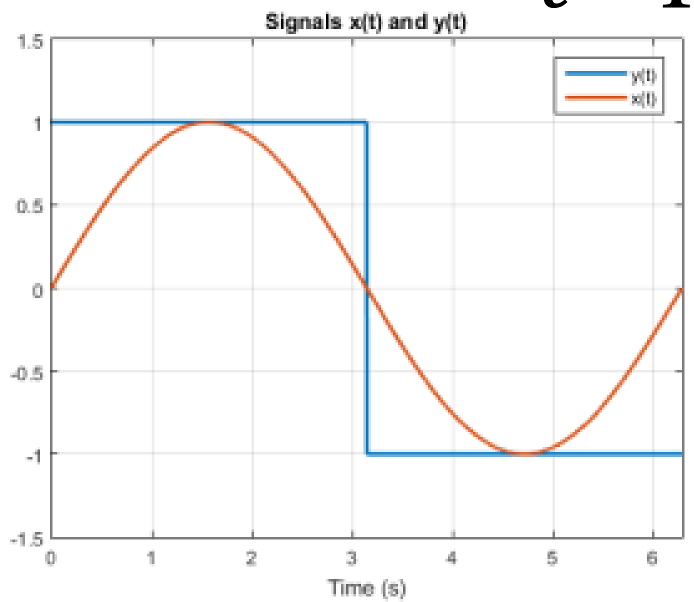
$$(1) \overset{(2)}{\Longrightarrow} c = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\,y(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\sin(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (-1)\sin(t)\,dt$$

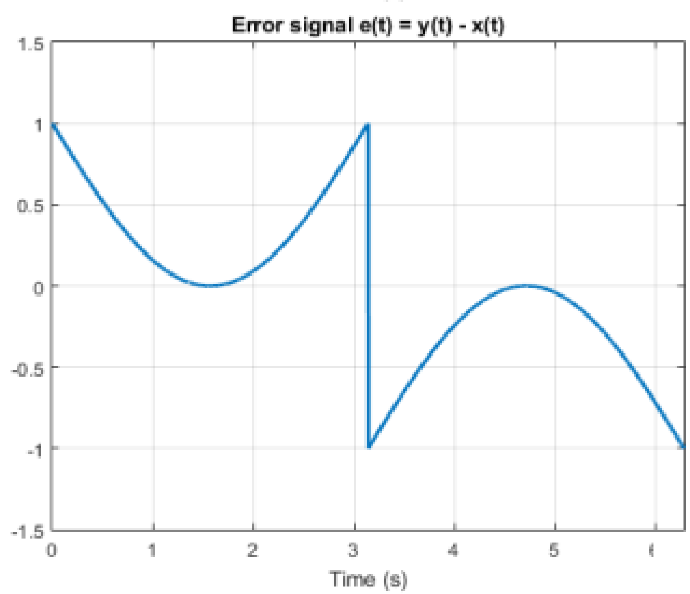
$$= \dots = \frac{4}{\pi} \Longrightarrow \boxed{c = \frac{4}{\pi}}.$$

Άρα $y(t) \simeq \dfrac{4}{\pi}\,x(t)$.

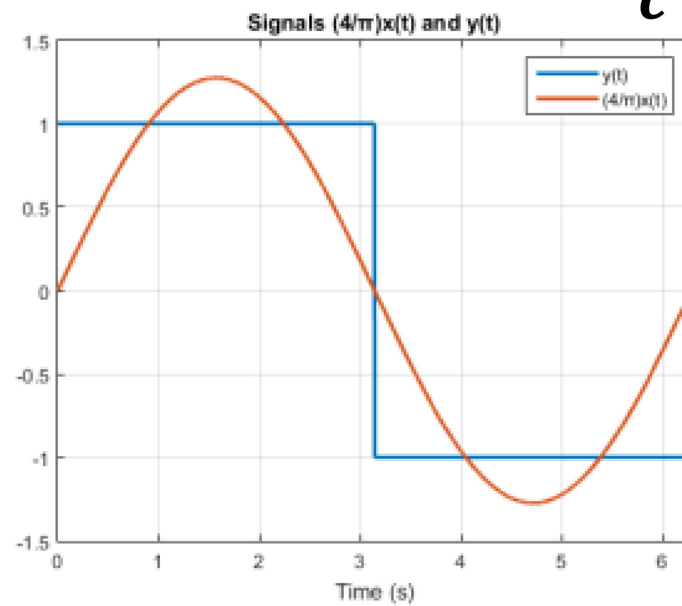
- Παράδειγμα

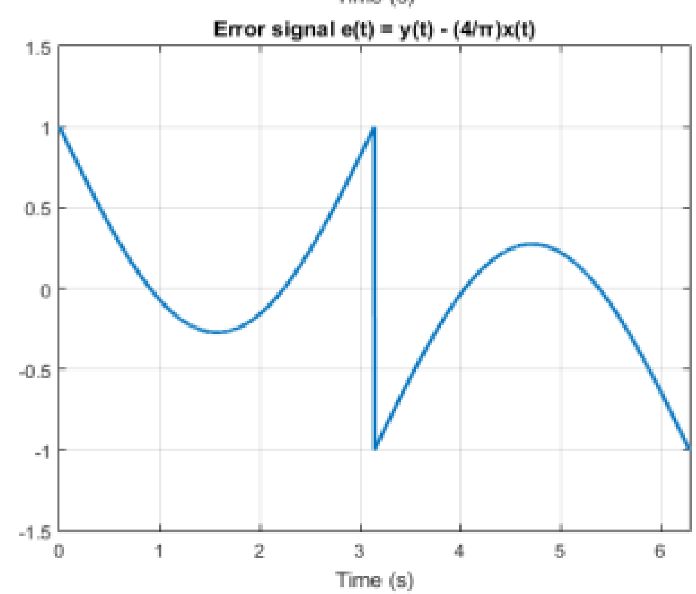
$$c = 1$$



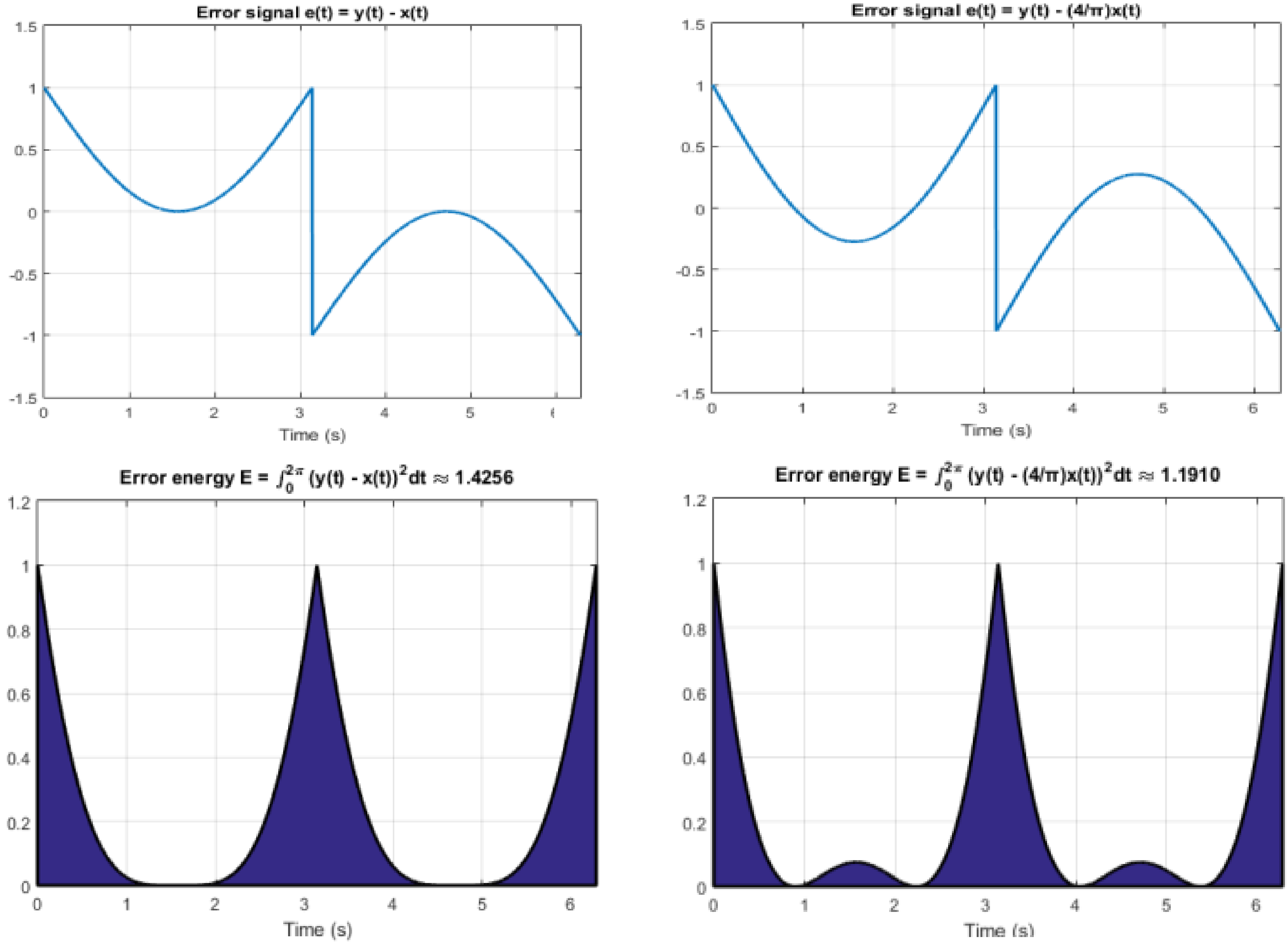


$$c = \frac{4}{\pi}$$





• Παράδειγμα


Error signal e(t) = y(t) - x(t)
Time (s)
Error signal e(t) = y(t) - (4/π)x(t)
Time (s)
Error energy E = $\int_0^{2\pi}$ (y(t) - x(t))^{2}dt ≈ 1.4256
Time (s)
Error energy E = $\int_0^{2\pi}$ (y(t) - (4/π)x(t))^{2}dt ≈ 1.1910
Time (s)

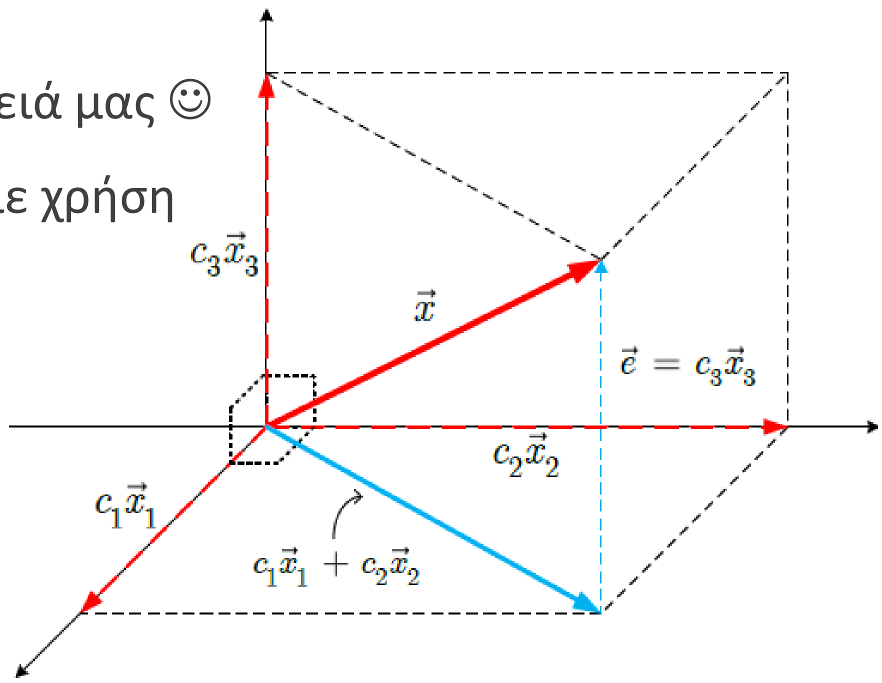
- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- **Back to theory:** γιατί να μείνουμε μόνο σε ένα σήμα προσέγγισης?
- Αν χρησιμοποιήσουμε προσέγγιση του τύπου

$$y(t) \approx c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_N x_N(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k x_k(t)$$

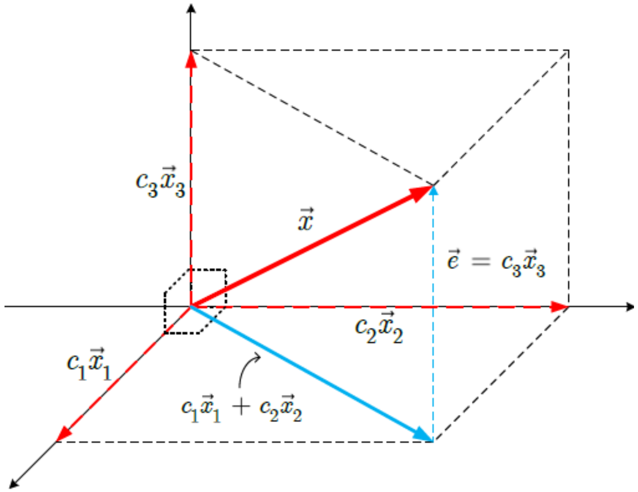
- Αναμένουμε ότι η ενέργεια σφάλματος θα γίνεται όλο και μικρότερη όσο προσθέτουμε όρους $x_i(t)$
  - Αρκεί οι όροι να είναι «**κατάλληλοι**»
- Ξανά, τα διανύσματα θα τρέξουν προς βοήθειά μας ☺
- Ένα διάνυσμα στον 3D-χώρο περιγράφεται με χρήση τριων διανυσμάτων
  - Ένα για το μήκος
  - Ένα για το πλάτος
  - Ένα για το ύψος

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + c_3\vec{x}_3$$

- Πλήρης και ακριβής αναπαράσταση!



- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**



- Αν χρησιμοποιήσουμε **δυο** αντί για **τρια** διανύσματα για την περιγραφή του διανύσματος $\vec{x}$ τότε θα έχουμε **σφάλμα**
  - Έστω ότι δεν περιλαμβάνουμε το $c_3\vec{x}_3$
  - Αυτό θα είναι το **διάνυσμα σφάλματος**
- Διάνυσμα σφάλματος:

$$\vec{e} = \vec{x} - (c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2) = c_3\vec{x}_3$$

- Ερώτηση: **ποια είναι τα κατάλληλα διανύσματα ώστε να περιγράφουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ πλήρως και ακριβώς?**
- Η διαίσθησή μας λέει ότι ένα τέτοιο σύνολο είναι το

$$x_1 = [1,0,0], \qquad x_2 = [0,1,0], \qquad x_3 = [0,0,1]$$

- Τι **χαρακτηριστικά** έχουν τα παραπάνω διανύσματα (ή όποια άλλα, αν υπάρχουν) που τα κάνουν κατάλληλα να αναπαριστούν **χωρίς σφάλμα**?

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**

- Τι **χαρακτηριστικά** έχουν τα τρία προηγούμενα διανύσματα (ή όποια άλλα, αν υπάρχουν) που τα κάνουν κατάλληλα να αναπαριστούν <u>χωρίς σφάλμα</u>?

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}||\vec{y}| \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

- ❑ Είναι **ορθογώνια** → το **εσωτερικό τους γινόμενο (ανά δυο) είναι μηδέν**
  - Από τη γραμμική άλγεβρα ξέρουμε ότι ορθογωνιότητα συνεπάγεται **γραμμική ανεξαρτησία**
  - Γραμμική ανεξαρτησία σημαίνει ότι κανένα από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων δυο
- ❑ Αποτελούν ένα **πλήρες** σύνολο του 3D-χώρου
  - Κανένα άλλο διάνυσμα δεν μπορεί να είναι γραμμικά ανεξάρτητο με τα τρία παραπάνω

- Οι δυο αυτές ιδιότητες (γραμμ. ανεξαρτησία & πληρότητα) μας ονοματίζουν τα τρία αυτά διανύσματα ως **βάση** του 3D-χώρου
  - Αυτό σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα του χώρου μπορεί να γραφεί μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός *όλων* των διανυσμάτων που αποτελούν τη βάση του χώρου **με μηδενικό σφάλμα**

- Πάμε στο χώρο των σημάτων τώρα… ☺

REMINDER

- **Ερώτημα: μπορούμε να γράψουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα ως άθροισμα συζυγών εκθετικών μιγαδικών συναρτήσεων?**
  - Αν μπορούμε, τότε τα προηγούμενα γενικεύονται για κάθε περιοδικό σήμα
  - Η εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο είναι τετριμμένη!

- **Εναλλακτική διατύπωση: μπορούμε να *προσεγγίσουμε* όσο καλά θέλουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα από ένα άθροισμα ημιτόνων (και μέσω της σχέσης του Euler, συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων)?**

Το «σχεδόν» στις παραπάνω προτάσεις αφορά εξαιρέσεις που δε θα συναντήσουμε στην πράξη

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**

- Έστω T_0 η **περίοδος** και $f_0 = 1/T_0$ η **θεμελιώδης συχνότητα** του περιοδικού σήματος που θέλουμε να προσεγγίσουμε σε μια περίοδό του

- Ας επιλέξουμε ένα σύνολο από **ζεύγη συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων**, που έχουν **συχνότητες ακέραιες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους συχνότητας $\boldsymbol{f_0 = 1/T_0}$**

- Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο από **$\boldsymbol{2N}$ συζυγή μιγαδικά εκθετικά σήματα, συν τη μονάδα**

$$\boxed{\mathbb{E} = \left\{e^{j2\pi k f_0 t}\right\}_{k=-N}^{N}, \qquad k \in \mathbb{Z}}$$

- Ας προσεγγίσουμε ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ σε μια περίοδό του $[0, T_0)$ ως ένα **άθροισμα** $2N+1$ τέτοιων σημάτων με συντελεστές X_k (δε χρησιμοποιούμε τώρα τη γραφή c_k):

$$x(t) \approx \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- **Συνάρτηση σφάλματος**

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Ζητούνται τα X_k που δίνουν την **ελάχιστη ενέργεια σφάλματος**

- **Βελτιστοποίηση!! (ξανά ☺)**

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**

Ορθογωνιότητα στο $\mathbb{C}$:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t)dt = 0$$

- Χρησιμοποιώντας διαδικασίες όπως αυτές που είδαμε, (με τα μαθηματικά να είναι κάπως ποιο απαιτητικά) μπορεί κανείς να δείξει ότι:

1. Το σύνολο $\mathbb{E}$ έχει **στοιχεία ορθογώνια** μεταξύ τους:

$$\int_0^{T_0} e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi l f_0 t} dt = \int_0^{T_0} e^{j2\pi (k-l) f_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

2. Το σύνολο $\mathbb{E}$ είναι **πλήρες όταν $N \to +\infty$**, υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος

- Άρα το σύνολο

$$\mathbb{E} = \left\{e^{j2\pi k f_0 t}\right\}_{k=-\infty}^{+\infty} , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

αποτελεί **βάση** του χώρου

- Οπότε

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}}$$

Ισότητα υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος!

- Ποιά είναι όμως ***<u>επιτέλους</u>*** αυτά τα X_k????

- **Σειρές Fourier**

- Ένα περιοδικό πραγματικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}}$$

η οποία σχέση ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Οι συντελεστές X_k ονομάζονται **συντελεστές Fourier,** αποτελούν το **εσωτερικό γινόμενο σε μια περίοδο μεταξύ του περιοδικού σήματος και των μελών της οικογένειας** $\mathbb{E}$, και δίνονται από τη σχέση

$$\boxed{X_k = \frac{1}{T_0}\left\langle x(t), e^{j2\pi k f_0 t}\right\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \in \mathbb{C}}$$

- Η εκθετική σειρά Fourier μπορεί να περιγράψει **και μιγαδικά** περιοδικά σήματα

- Οι συντελεστές Fourier προκύπτουν από το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο, δηλ. από την **προβολή** του σήματος $x(t)$ πάνω στις μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις $e^{j2\pi k f_0 t}$
  - Το X_k μας λέει «πόσο» από το εκθετικό $e^{j2\pi k f_0 t}$ υπάρχει μέσα στο σήμα $x(t)$! ☺

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ