ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

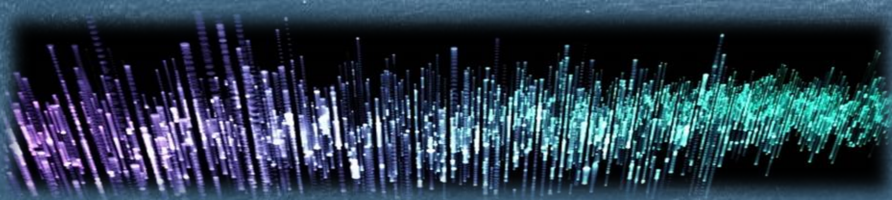
ΔΙΑΛΕΞΗ 6Η

- Απόκριση μηδενικής κατάστασης
- Συνέλιξη

Τι περιέχει το HY215?

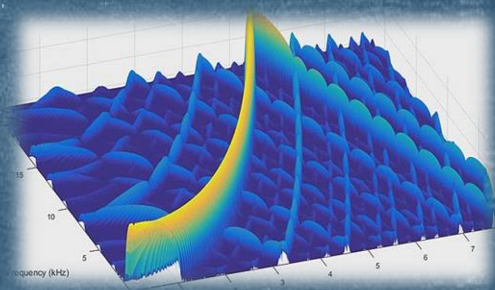
1^{o} Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier



2^{o} Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συστήματα στο χώρο του Laplace
- Συσχετίσεις
- Δειγματοληψία



- Συστήματα ως γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^{M} b_l \frac{d^l}{dt^l} x(t)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-), y'(0^-), \dots, y^{(N-1)}(0^-)$

- Έξοδος ως άθροισμα δυο ανεξάρτητων συνιστωσών

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

με

- ❑ $y_{zi}(t)$: την **απόκριση μηδενικής εισόδου (zero-input response)**
- ❑ $y_{zs}(t)$: την **απόκριση μηδενικής κατάστασης (zero-state response)**

  - ❑ **Χρειαζόμαστε επιπλέον την κρουστική απόκριση του συστήματος, $\boldsymbol{h(t)}$**

- $y_{zi}(t)$: **απόκριση μηδενικής εισόδου (zero-input response)**
- Λύση ομογενούς εξίσωσης

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = 0$$

με χρήση αρχικών συνθηκών $y(0^-), y'(0^-), \dots, y^{(N-1)}(0^-)$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k$$

- Χαρακτηριστικές ρίζες και μορφή απόκρισης μηδενικής εισόδου (απλές και r −πολλαπλή ρίζες)

$$y_{zi}(t) = \left(\sum_{i=1}^{r} c_i t^{i-1} e^{\lambda_j t} + \sum_{\substack{k=r+1, \\ k \neq j}}^{N} c_k e^{\lambda_k t} \right) u(t)$$

- Οι σταθερές c_i βρίσκονται από τις αρχικές συνθήκες

- $h(t)$: **κρουστική απόκριση**
- Θεωρούμε το **απλό** σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \boldsymbol{x(t)}$$

- Λύση ομογενούς εξίσωσης με χρήση «**αρχικών**» συνθηκών

$$h_0(0^+) = 0, h_0'(0^+) = 0, \dots, h_0^{(N-1)}(0^+) = \frac{1}{a_N}$$

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k$$

με λ_i τις χαρακτηριστικές ρίζες

- Μορφή κρουστικής απόκρισης **απλού** συστήματος (απλές και r −πολλαπλή ρίζες)

$$h_o(t) = \left(\sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{c_i t^{i-1} e^{\lambda_j t}} + \sum_{\substack{k=r+1, \\ k \neq j}}^{N} \boldsymbol{c_k e^{\lambda_k t}} \right) u(t)$$

- Οι σταθερές c_i βρίσκονται από τις «**αρχικές**» συνθήκες

- $h(t)$: **κρουστική απόκριση**
- Αρχικό σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^{M} \boldsymbol{b_l} \frac{\boldsymbol{d^l}}{\boldsymbol{dt^l}} \boldsymbol{x(t)}$$

- Μορφή κρουστικής απόκρισης αρχικού συστήματος (με απλές και με μια r −πολλαπλή ρίζες)

$$h(t) = \sum_{l=0}^{M} \boldsymbol{b_l} \frac{\boldsymbol{d^l}}{\boldsymbol{dt^l}} h_o(t)$$

$$= \sum_{l=0}^{M} \boldsymbol{b_l} \left(\frac{\boldsymbol{d^l}}{\boldsymbol{dt^l}} \left(\sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{c_i t^{i-1} e^{\lambda_j t}} + \sum_{\substack{k=r+1,\\ k\neq j}}^{N} \boldsymbol{c_k e^{\lambda_k t}} \right) u(t) \right)$$

- $y_{zs}(t)$: **απόκριση μηδενικής κατάστασης (zero-state response)**
- Μηδενικές αρχικές συνθήκες, εξάρτηση μόνο από είσοδο $x(t)$
- **Συνέλιξη** μεταξύ εισόδου $x(t)$ και **κρουστικής απόκρισης** $h(t)$

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- «Ανάγνωση» του ολοκληρώματος:
- **Το ολοκλήρωμα του γινομένου (η «επιφάνεια κάτω από το γινόμενο») μεταξύ δυο σημάτων, του $x(\tau)$ και μιας χρονικά ανεστραμμένης και μετατοπισμένης έκδοσης του $h(\tau)$, δηλ. της $h(t-\tau)$**
- **Μεταβλητή μας στο ολοκλήρωμα είναι το τ !**

- Ας εξετάσουμε την πράξη της συνέλιξης
- Ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες

Ιδιότητες συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax(t) * y(t) = x(t) * ay(t) = a(x(t) * y(t)),\ a \in \Re$
Αντιμεταθετικότητα	$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
Προσεταιριστικότητα	$(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$
Επιμεριστικότητα	$x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) * y(t) \\ z_2(t) = x_2(t) * y(t) \\ \text{αν } x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \\ \text{τότε } z(t) = x(t) * y(t) = az_1(t) + bz_2(t) \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x(t) : [t_1, t_2] \longrightarrow \Re \\ y(t) : [t_3, t_4] \longrightarrow \Re \\ x(t) * y(t) : [t_1 + t_3, t_2 + t_4] \longrightarrow \Re \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$

- Όλες αποδεικνύονται με τον ορισμό
- Η συνέλιξη φημίζεται για τη **δυσκολία** της ως πράξη
- Ας δούμε πόσο **απλή** είναι τελικά

- **Συνέλιξη**
- **Παράδειγμα**

○ Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = e^{-t}u(t),\ \ y(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$ με την **αλγεβρική** μέθοδο

Είναι

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} u(\tau) \cdot \underline{e^{-(t-\tau-2)}}\, u(t-\tau-2)\, d\tau$$

$$= e^{-(t-2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-\tau} \cdot e^{\tau}}_{1}\, u(\tau) u(t-\tau-2)\, d\tau$$

$$= e^{-(t-2)} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) u(t-\tau-2)\, d\tau \quad (1)$$

$$u(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}, \quad u(t-\tau-2) = \begin{cases} 1, & t-\tau-2 > 0 \Rightarrow \tau < t-2 \\ 0, & t-\tau-2 < 0 \Rightarrow \tau > t-2 \end{cases}$$

- **Συνέλιξη**
- Παράδειγμα

Άρα $u(\tau)\cdot u(t-\tau-2) = \begin{cases} 1, & 0<\tau<t-2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ (2)

Η (1) $\overset{(2)}{\Longrightarrow} e^{-(t-2)}\int_0^{t-2} 1\cdot 1\, d\tau = e^{-(t-2)}\int_0^{t-2} (\tau)'\, d\tau$

$= e^{-(t-2)}\, \tau\Big|_0^{t-2} = (t-2)e^{-(t-2)}, \quad t-2>0 \Rightarrow t>2.$

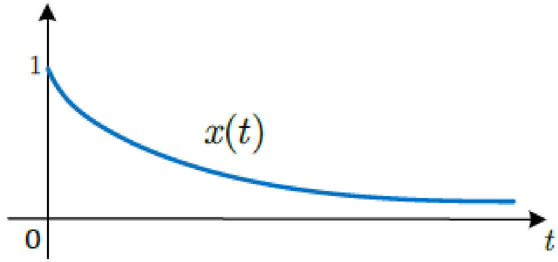
Άρα

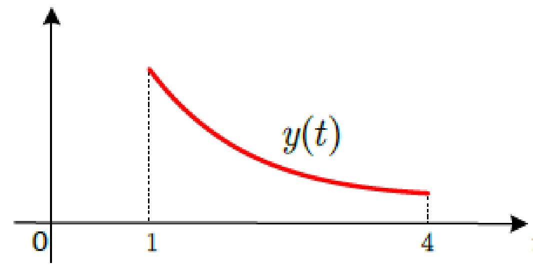
$$x(t)*y(t) = \begin{cases} (t-2)e^{-(t-2)}, & t>2 \\ 0, & t<2 \end{cases}$$

$$= (t-2)e^{-(t-2)}u(t-2).$$

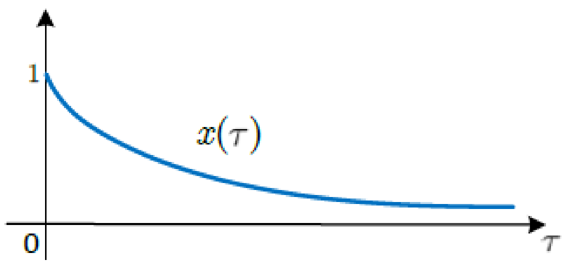
- **Συνέλιξη**

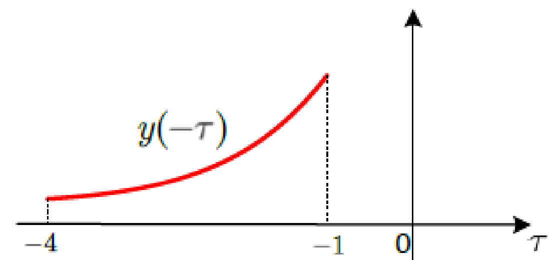
- Έστω δυο σήματα $x(t), y(t)$ των οποίων ζητούμε τη συνέλιξη $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$



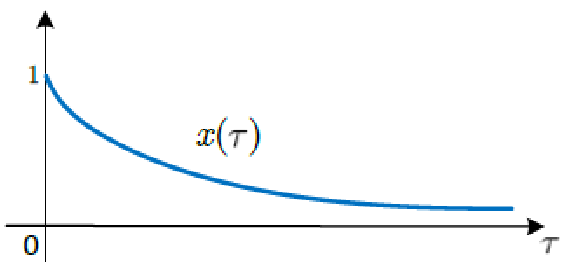


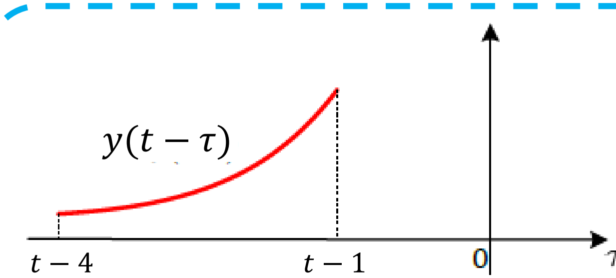
- Η πράξη της συνέλιξης ζητά ένα εκ των δυο σημάτων να υποστεί **χρονική αντιστροφή** και στη συνέχεια **χρονική μετατόπιση**
  - Έστω ότι το $y(t)$ θα είναι αυτό το σήμα





Αντιστροφή

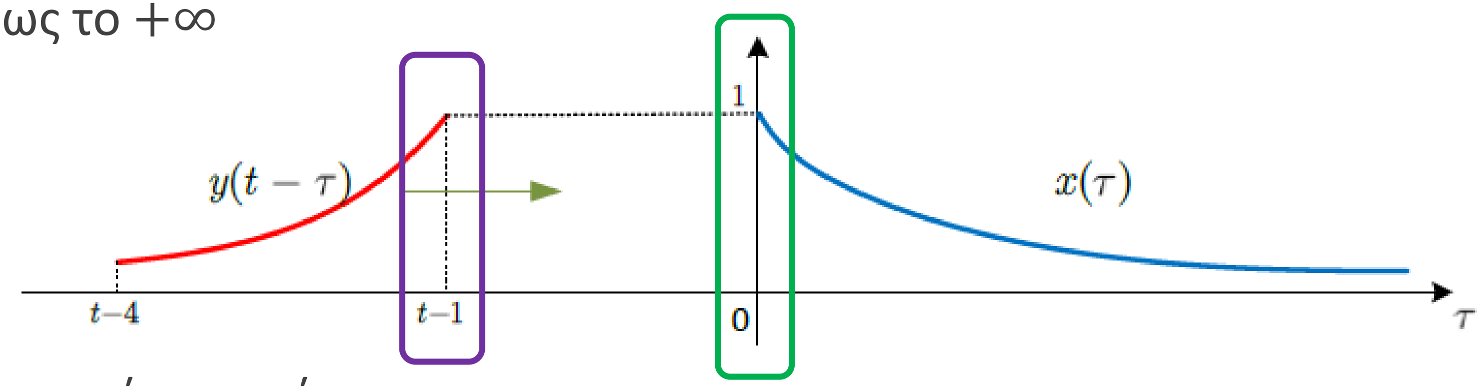




Μετατόπιση

- **Συνέλιξη**

- Τοποθετούμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα $\tau'\tau$ και ολισθαίνουμε το $y(t-\tau)$ από το $-\infty$ ως το $+\infty$



- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t-1<0 \Rightarrow t<1$$

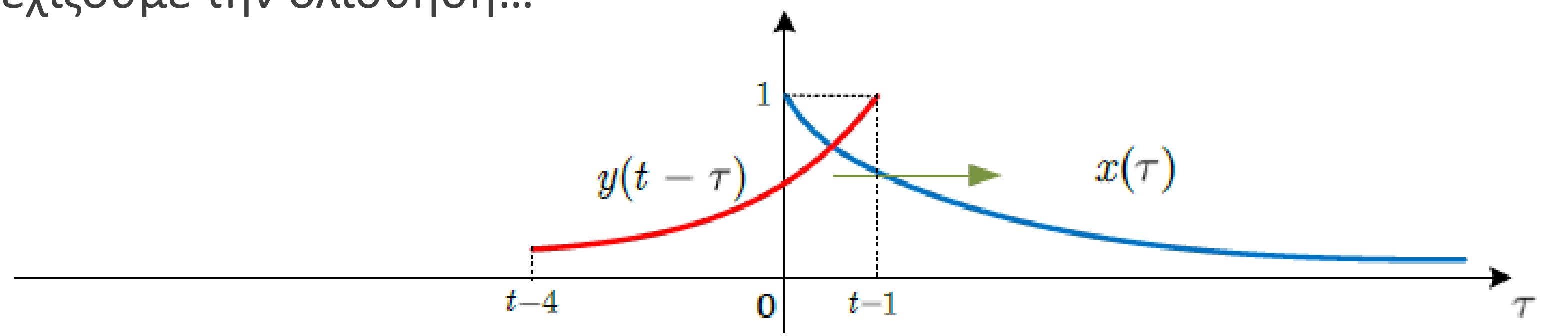
και

$$c(t)=0$$

αφού τα δυο σήματα δε «ζουν» σε κοινό διάστημα

- Αυτό θα πάψει να συμβαίνει όταν το $y(t-\tau)$ πλησιάσει το $x(\tau)$ έτσι ώστε το δεξί «άκρο» του περάσει το $t=0$…
  - …που είναι το αριστερό «άκρο» του $x(\tau)$

- **Συνέλιξη**
- Συνεχίζουμε την ολίσθηση…



- Στην παραπάνω περίπτωση

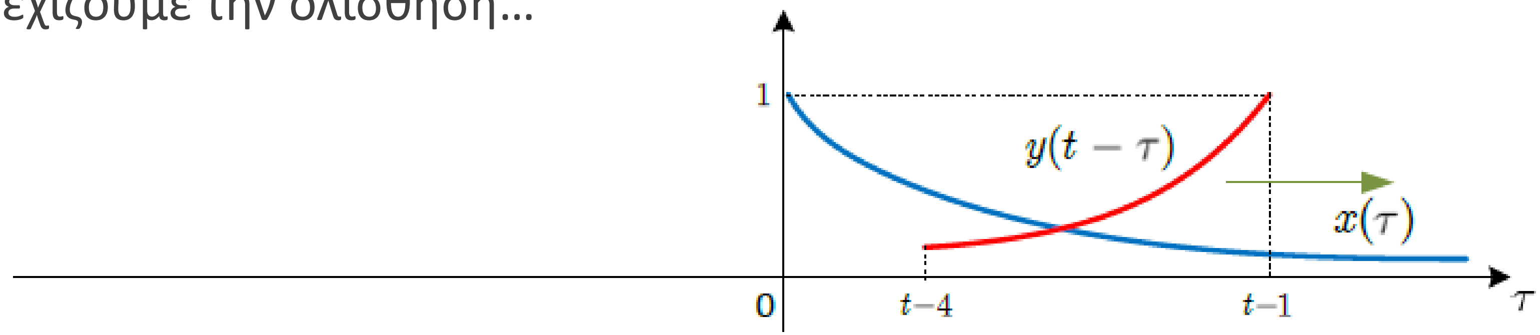
$$t-4<0 \text{ και } t-1>0 \Rightarrow 1<t<4$$

και

$$c(t)=\int_{0}^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

- Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει μόνο στο διάστημα $(1,4)$
- Υπάρχει μια ακόμα περίπτωση…

- **Συνέλιξη**
- Συνεχίζουμε την ολίσθηση…



- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t-4>0 \Rightarrow t>4$$

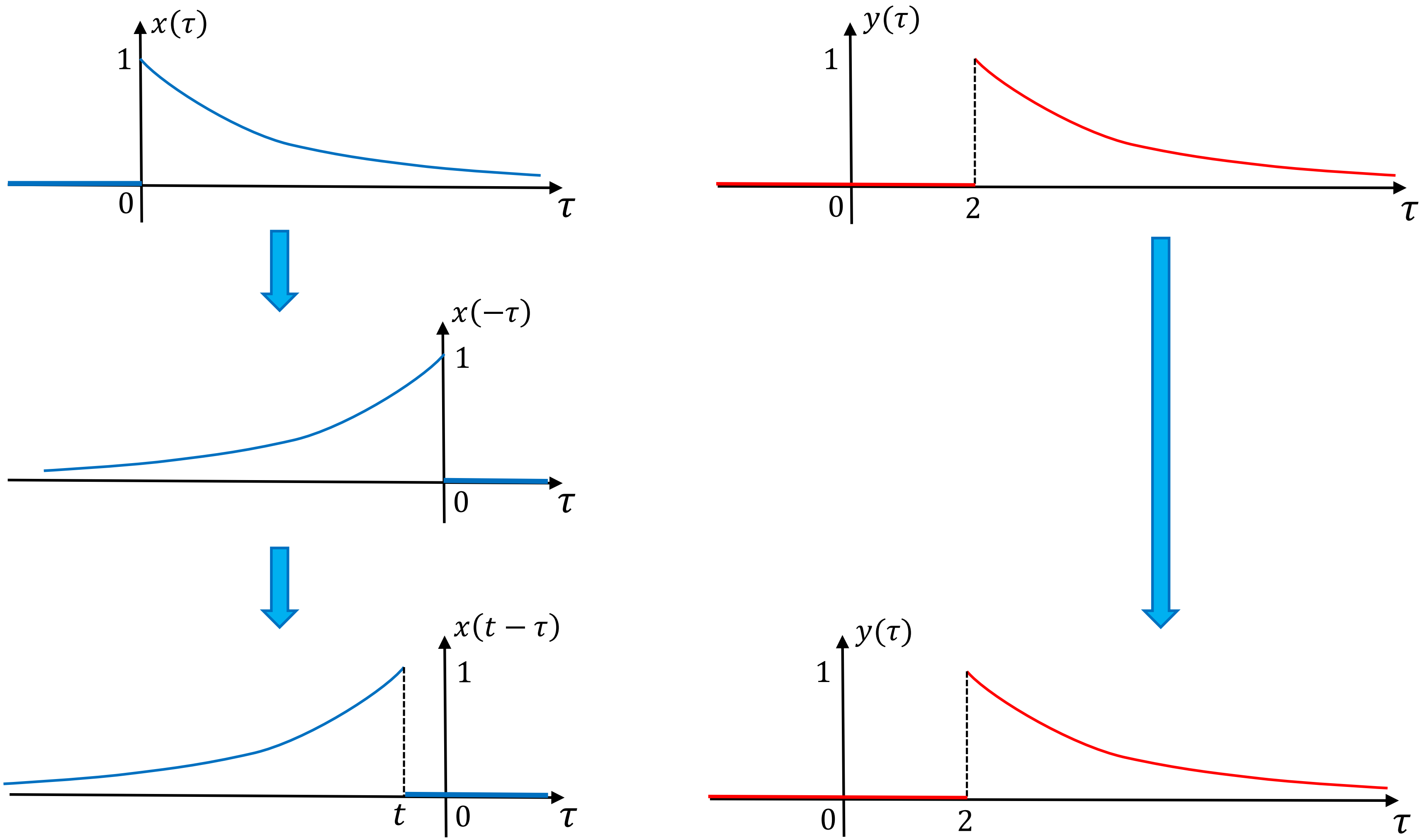
και

$$c(t)=\int_{t-4}^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

- Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει μόνο στο διάστημα $(4,+\infty)$
- Άλλες περιπτώσεις δεν υπάρχουν
- Η λύση που περιγράφηκε ονομάζεται **γραφική λύση συνέλιξης**

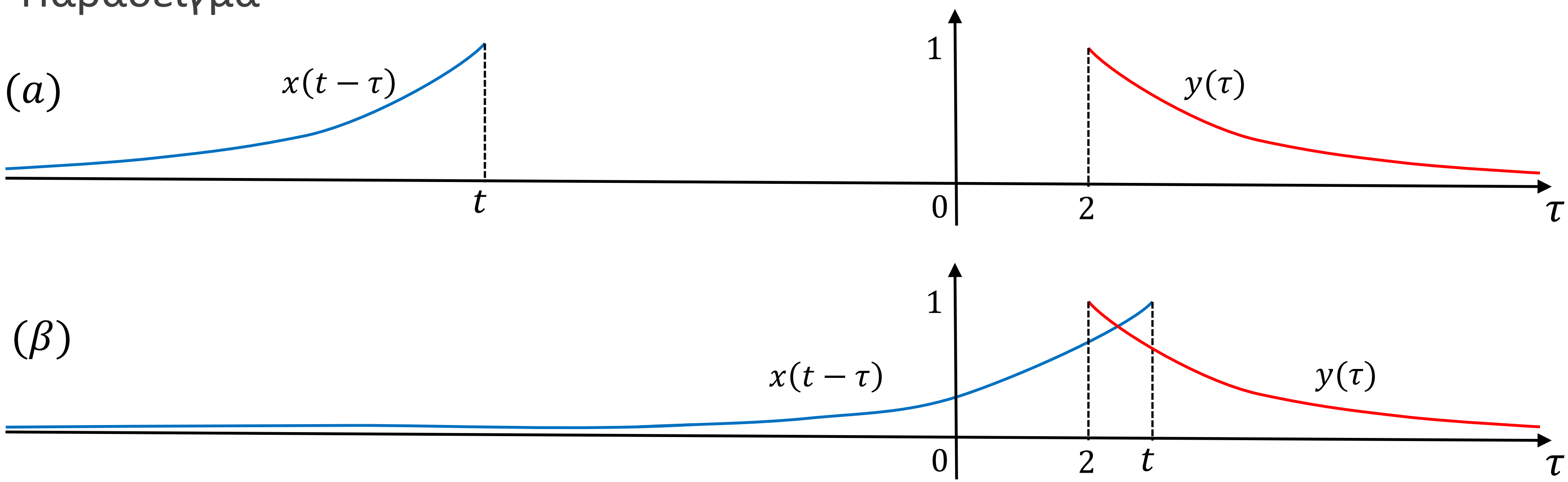
- **Συνέλιξη**
- **Παράδειγμα**

○ Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = e^{-t}u(t), \;\; y(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$

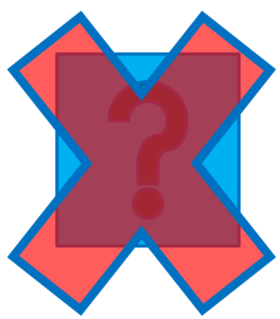


- **Συνέλιξη**

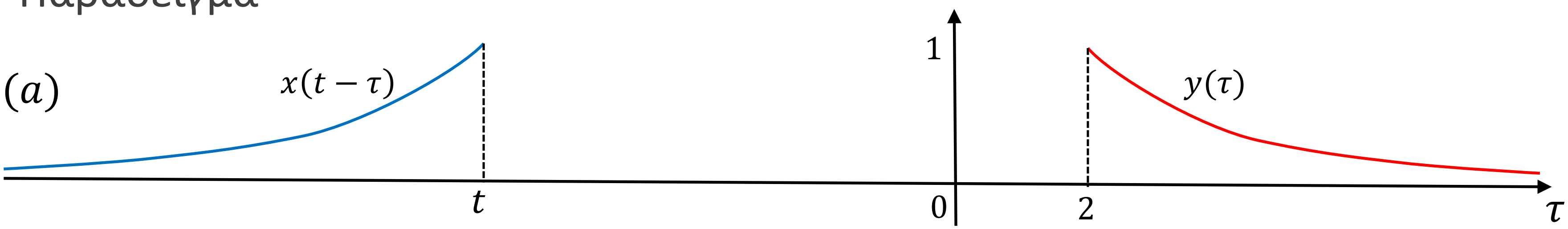
- Παράδειγμα



(γ)



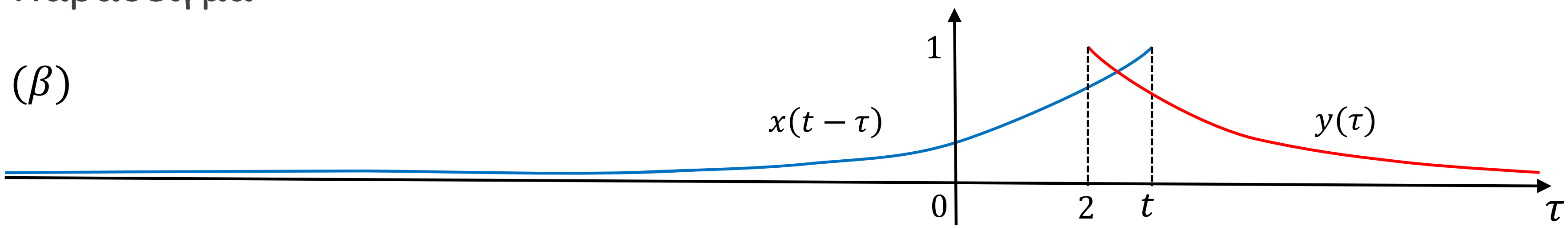
- **Συνέλιξη**
- Παράδειγμα



Εδώ, για $t<2$, $c_{xy}(t)=0$.

- **Συνέλιξη**
- Παράδειγμα

(β)



Εδώ, όσο $\boxed{t > 2}$, τότε

$$C_{xy}(t) = \int_2^t e^{-\tau} e^{-(t-\tau-2)} d\tau = \int_2^t \underbrace{e^{-\tau} \cdot e^{\tau}}_{1} \cdot e^{-(t-2)} d\tau$$

$$= \int_2^t e^{-(t-2)} d\tau = e^{-(t-2)} \int_2^t d\tau = e^{-(t-2)} \tau \Big|_2^t =$$

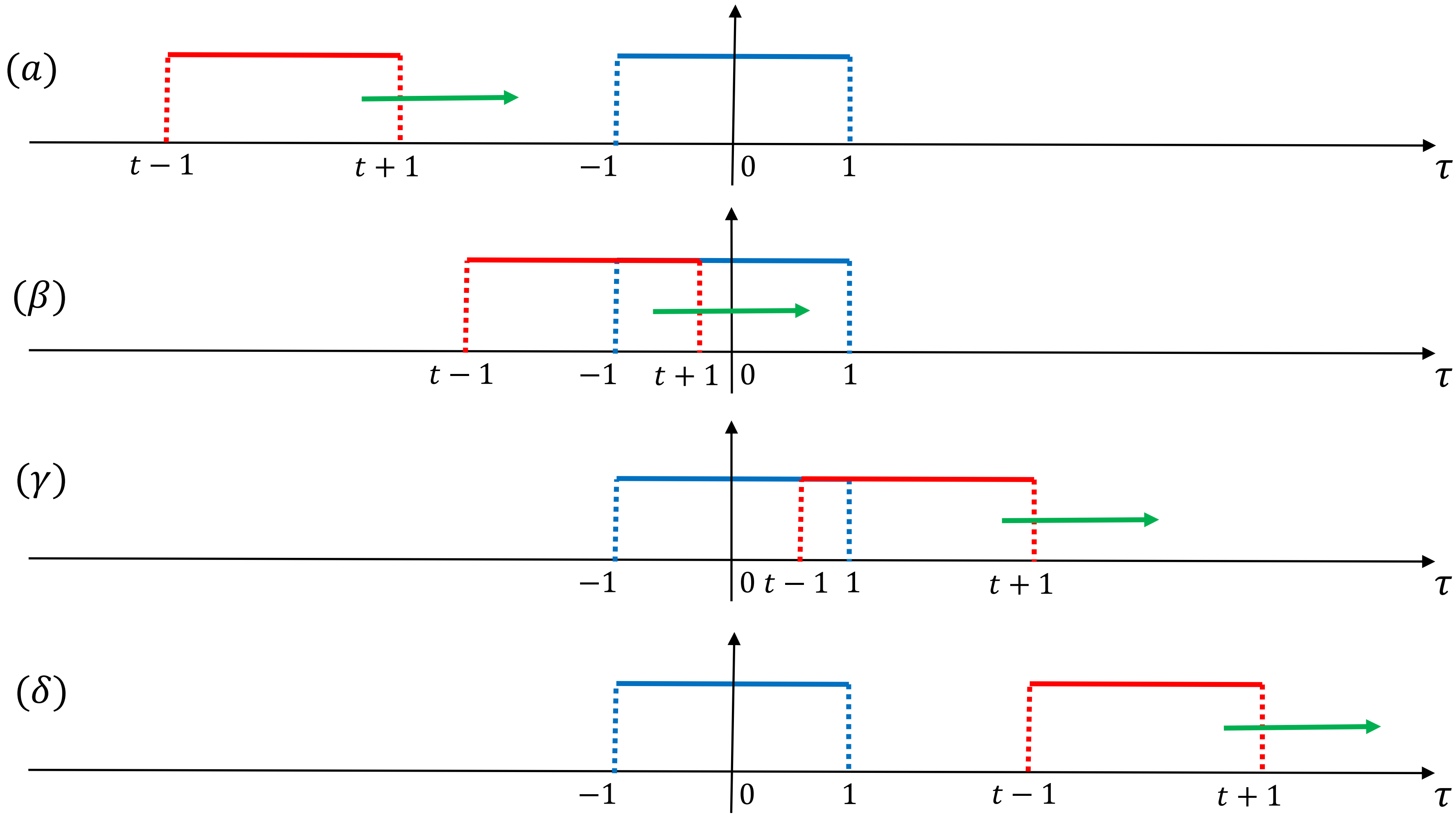
$$= (t-2) e^{-(t-2)}, \quad \boxed{t > 2}$$

Άρα

$$c_{xy}(t) = (t-2) e^{-(t-2)} u(t-2).$$

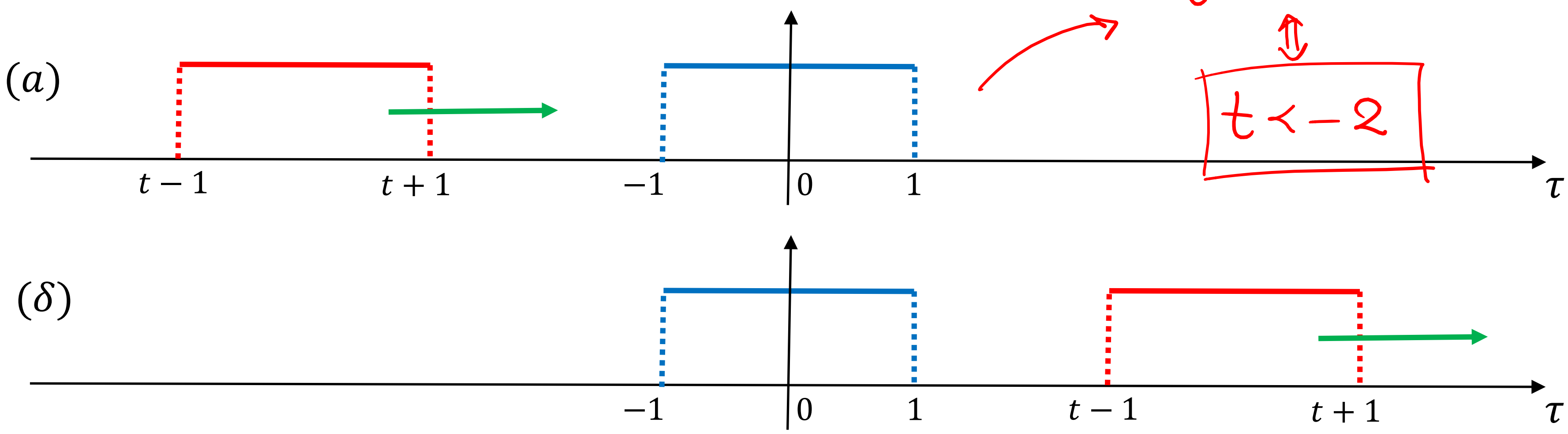
- **Συνέλιξη**
- **Παράδειγμα**

○ Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$ και $y(t) = x(t)$



- **Συνέλιξη**

- Παράδειγμα



$t+1 < -1 \Leftrightarrow \boxed{t < -2}$

$t-1 > 1 \Leftrightarrow \boxed{t > 2}$

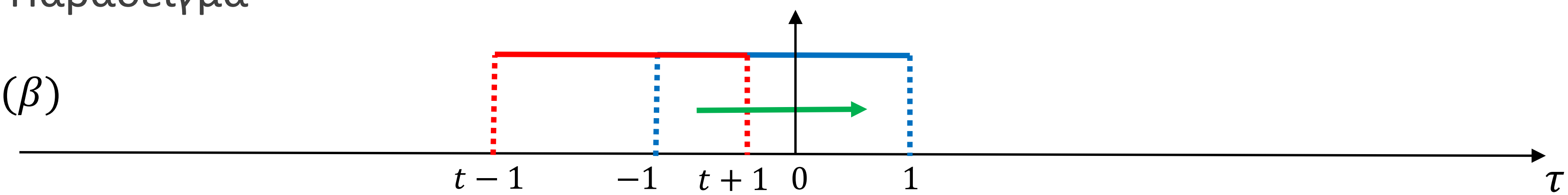
Βλέπαμε ότι

$C_{xx}(t) = 0$,

για $t > 2$ ή $t < -2$

- **Συνέλιξη**
- Παράδειγμα

(β)



Εδώ,

$$C_{xx}(t) = \int_{-1}^{t+1} 1 \cdot 1 \, d\tau = \tau \Big|_{-1}^{t+1} = (t+1) - (-1)$$

$$= t+2,$$

για $t-1<-1$ και $t+1>-1$

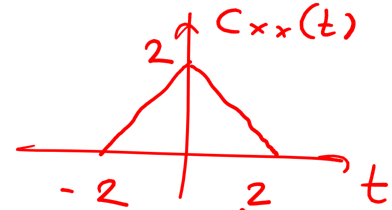
$t<0$ και $t>-2$

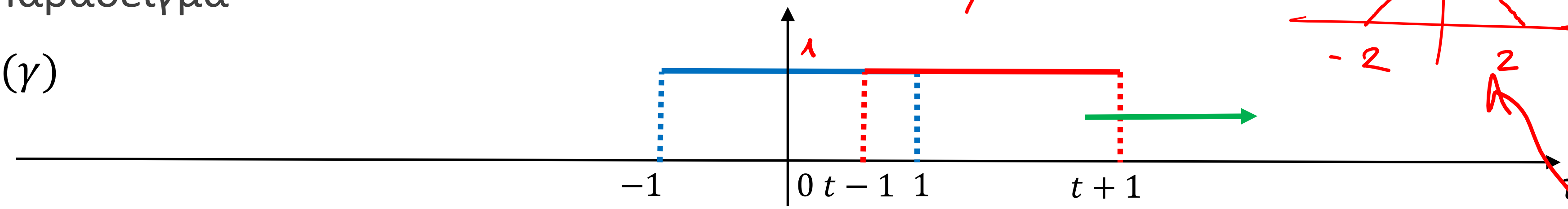
Άρα $t \in (-2, 0)$

- **Συνέλιξη**
- Παράδειγμα

(γ)

$2\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{2}\right)$





Εδώ,

$$C_{xx}(t) = \int_{t-1}^{1} 1\cdot 1\, d\tau = \tau \Big|_{t-1}^{1} = 1-(t-1)$$

$$= 2-t,$$

για $t-1<1$ και $t+1>1$

$t<2$ και $t>0$

Άρα $t \in (0,2)$.

Άρα

$$C_{xx}(t) = \begin{cases} 0, & t<-2,\ t>2 \\ t+2, & -2<t<0 \\ 2-t, & 0<t<2 \end{cases}$$

- **Συνέλιξη**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(\tau - t_0)d\tau = x(t_0)$$

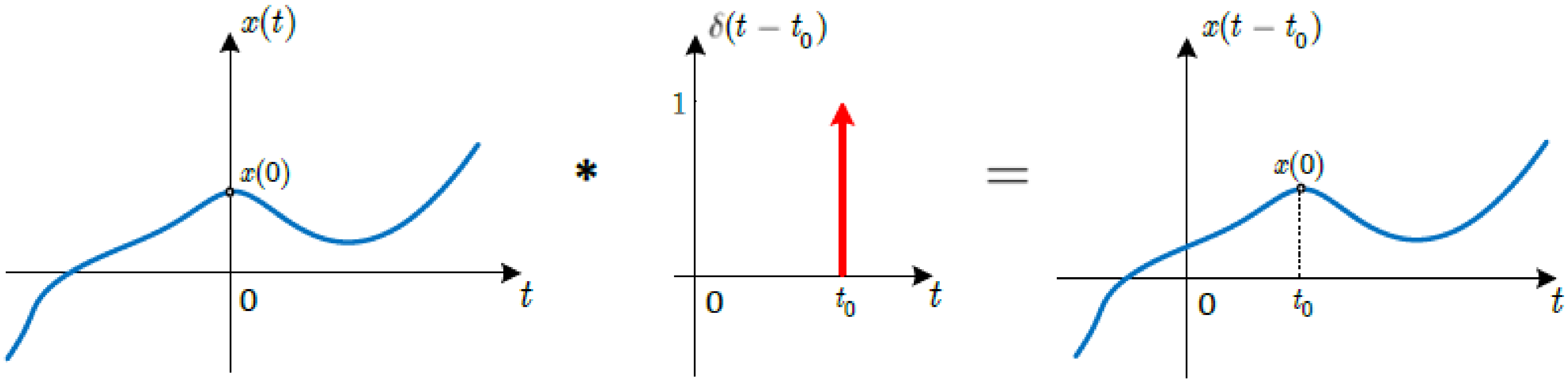
- Συνέλιξη με συναρτήσεις Δέλτα

- Από τις βασικές ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα έχουμε ότι η συνέλιξη ενός σήματος με μια συνάρτηση Δέλτα της μορφής

$$A\delta(t - t_0), \qquad A \in \Re$$

δίνει το ίδιο σήμα μετατοπισμένο κατά t_0 και πολλαπλασιασμένο με $A \in \Re$, δηλ.

$$x(t) * A\delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} Ax(\tau)\delta(t - t_0 - \tau)d\tau = Ax(t - t_0)$$



- **Συνολική Απόκριση Συστήματος**

- Με βάση τα προηγούμενα, η συνολική έξοδος ενός συστήματος που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις **με αρχικές συνθήκες** δίνεται ως

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = \left(\sum_{i=1}^{r} c_i t^{i-1} e^{\lambda_j t} + \sum_{\substack{k=r+1, \\ k \neq j}}^{N} c_k e^{\lambda_k t} \right) u(t) + x(t) * h(t)$$

(αν οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι απλές, πλην μιας r −πολλαπλής)

- Αν το **σύστημα είναι ΓΧΑ**, τότε η έξοδος δίνεται **μόνο** από την απόκριση μηδενικής κατάστασης

$$y(t) = y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$$

- Κατά κανόνα ενδιαφερόμαστε για **ΓΧΑ συστήματα**
  - Κάποιες πολύ λίγες φορές θα εξετάζουμε και τις αρχικές συνθήκες του συστήματος

- **Ευστάθεια Συστήματος**
- Γνωρίζετε ότι ένα σύστημα είναι ευσταθές αν

$$|x(t)| < B_x \Rightarrow |y(t)| < B_y, \qquad B_x, B_y \in \Re_+$$

- Προφανώς αυτή η έξοδος $y(t)$ μπορεί να είναι είτε η συνολική, είτε κάποια από τις επιμέρους
- Ξέρουμε ότι η **απόκριση μηδενικής εισόδου** περιλαμβάνει σήματα της μορφής

$$c_i e^{\lambda_i t} u(t), c_i t^n e^{\lambda_i t} u(t)$$

- Για αυτά πρέπει **υποχρεωτικά** $\boldsymbol{\lambda_i < 0}$ ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές
- Ξέρουμε ότι η **απόκριση μηδενικής κατάστασης** δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση του συστήματος
- Για να είναι ευσταθές το σύστημα πρέπει

Τριγωνική ανισότητα

$$|y_{zs}(t)| < B_y \Rightarrow |y_{zs}(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau) h(t-\tau)| d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)| d\tau < B_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau$$

- **Ευστάθεια Συστήματος**
- Η σχέση

$$|y_{zs}(t)| < B_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau < +\infty$$

ισχύει μόνον όταν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau < +\infty$$

δηλ.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})| \boldsymbol{dt} < +\infty}$$

- Η σχέση αυτή μας λέει ότι η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι **απολύτως ολοκληρώσιμη** και αποτελεί **αναγκαία και ικανή συνθήκη** για την **ευστάθεια** του συστήματος!
- Η συνθήκη αυτή μπορεί να ιδωθεί υπό το πρίσμα των συναρτήσεων που δημιουργούν την κρουστική απόκριση:

$$c_i e^{\lambda_i t} u(t), c_i t^n e^{\lambda_i t} u(t)$$

- Ξανά λοιπόν πρέπει να ισχύει $\boldsymbol{\lambda_i < 0}$ για να είναι το σύστημα ευσταθές!
  - ...αφού η επιφάνεια κάτω από την $|h(t)|$ πρέπει να είναι πεπερασμένη

- **Αιτιατότητα Συστήματος**

- Η αιτιατότητα ενός συστήματος έχει να κάνει με τη σχέση αιτίου-αποτελέσματος
  - Ένα σύστημα παράγει εξόδους μόνο αν υπάρχει κάποιο «αίτιο»-είσοδος που το διεγείρει

- Προφανώς ένα σύστημα που έχει **μη** μηδενικές αρχικές συνθήκες δεν μπορεί να είναι αιτιατό…
  - … αφού παράγει έξοδο χωρίς να διεγερθεί από μια είσοδο! ☺

- Η παραπάνω συνθήκη ισοδυναμεί με αυτό που ονομάζουμε «**κατάσταση αρχικής ηρεμίας**» του συστήματος

- Μπορούμε να βρούμε μια συνθήκη για ένα ΓΧΑ σύστημα που να **σχετίζει την κρουστική του απόκριση με την αιτιατότητα** (ή μη) του?
  - Ναι!

- Σκεφτείτε ότι όταν εμφανίζεται η συνάρτηση Δέλτα ως είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα τότε η έξοδος είναι η κρουστική του απόκριση $h(t)$

- Η είσοδος εμφανίζεται για $t = 0$, άρα η έξοδος πρέπει να υπάρξει για $t \geq 0$ αν το σύστημα είναι αιτιατό

- Άρα **ένα σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν**

$$\boxed{\boldsymbol{h(t) = 0, \qquad t < 0}}$$

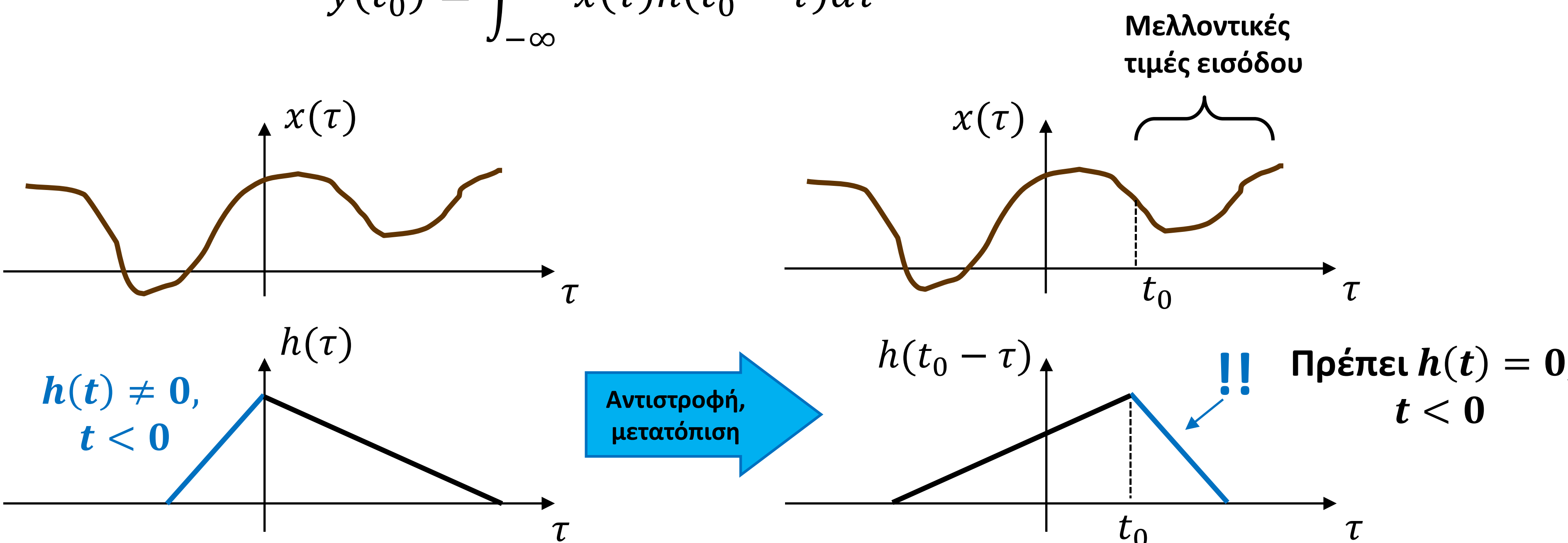
- **Αιτιατότητα Συστήματος**

- Πώς όμως συνδέεται το αποτέλεσμα αυτό με την εξάρτηση της εξόδου από παρελθοντικές τιμές της εισόδου?
  - ...όπως είχαμε πει ότι πρωτοσυναντήσαμε την έννοια της αιτιατότητας...

- Ας θεωρήσουμε μια κρουστική απόκριση $h(t)$ που **δεν** ικανοποιεί την προηγούμενη συνθήκη, δηλ. έχει **μη** μηδενικές τιμές για $t < 0$

- Ας υπολογίσουμε το $y(t_0)$ για ένα τυχαίο σήμα εισόδου μέσω της συνέλιξης

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t_0 - \tau)d\tau$$



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ