

ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 4^Η

- Διαφορικές εξισώσεις ως συστήματα
- Απόκριση μηδενικής εισόδου



Τι περιέχει το ΗΥ215?



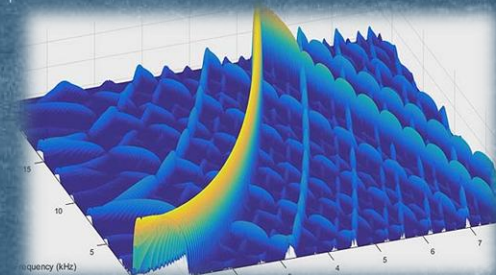
1^ο Κομμάτι

- ▶ Μιγαδικοί αριθμοί
- ▶ Σήματα - Συστήματα
- ▶ Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- ▶ Σειρές Fourier
- ▶ Μετασχηματισμός Fourier



2^ο Κομμάτι

- ▶ Μετασχηματισμός Laplace
- ▶ Συστήματα στο χώρο του Laplace
- ▶ Συσχετίσεις
- ▶ Δειγματοληψία



• Συστήματα

- Πολλά φυσικά/ηλεκτρικά/μηχανικά συστήματα συνεχούς χρόνου περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις που σχετίζουν μια είσοδο $x(t)$ με μια έξοδο $y(t)$
- Η εκτενής μελέτη διαφορικών εξισώσεων είναι ξεχωριστό αντικείμενο
 - ...σίγουρα αποτελεί ένα μάθημα από μόνο του! 😊
- Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε κάποιες απλές διαφορικές εξισώσεις και θα συζητήσουμε ένα συγκεκριμένο τρόπο λύσης που έχει διαισθητικό νόημα από τη σκοπιά του μηχανικού
- Αργότερα, θα συζητήσουμε την έννοια της ευστάθειας και της αιτιατότητας υπό το πρίσμα συστημάτων που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις
- Θα δούμε επίσης πότε ένα σύστημα που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις είναι γραμμικό και πότε είναι χρονικά αμετάβλητο
 - ...δυο ιδιότητες που είναι τρομερά χρήσιμες στην πράξη
- Εν τέλει, θέλουμε να μπορούμε να λύνουμε διαφορικές εξισώσεις! 😊
- Ας ξεκινήσουμε! 😊

- **Συστήματα**
- **Μερικές γνωστές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις**
- **2^{ος} Νόμος Newton**

$$F = m \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

- **Απλός αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση**

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + 2\zeta\omega_0 \frac{d}{dt} x(t) + \omega_0 x(t) = 0$$

- **Κυκλώματα RC**

$$RC \frac{d}{dt} V_{out}(t) + V_{out}(t) = V_{in}(t)$$

• Συστήματα

- Έστω ένα σύστημα εισόδου $x(t)$ κι εξόδου $y(t)$ που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{l=0}^M b_l \frac{d^l}{dt^l} x(t)$$

- Για να μπορέσουμε να λύσουμε αυτήν την εξίσωση (a.k.a να βρούμε την έξοδο $y(t)$ για κάποια είσοδο $x(t)$) χρειαζόμαστε κάποιες **βοηθητικές συνθήκες (auxiliary conditions)**
- Σκεφτείτε την πιο απλή διαφορική εξίσωση που ξέρετε:

$$f(x) = f'(x)$$

- Γνωρίζετε ότι έχει άπειρες λύσεις της μορφής $f(x) = ce^x$, $c \in \mathbb{R}$
- Χωρίς γνώση του $c \in \mathbb{R}$ η λύση μας δεν είναι μοναδική
- Συνήθως μας δίνεται κάποια βοηθητική συνθήκη, όπως π.χ. $f(0) = 2$
- Τότε ξέρουμε ότι $f(x) = 2e^x$, και η λύση μας είναι μοναδική πλέον

• Συστήματα

- Ας μείνουμε λίγο σε αυτή τη διαφορική εξίσωση αλλά να τη γράψουμε όπως δείξαμε πριν:

$$y'(t) - y(t) = 0$$

- Η γενική λύση θα είναι

$$y(t) = ce^t$$

και η οποία ουσιαστικά περιγράφει άπειρες λύσεις, καθώς $c \in \mathbb{R}$.

- Πώς θα τη κάνουμε μοναδική? Θα χρησιμοποιήσουμε τις βοηθητικές συνθήκες!

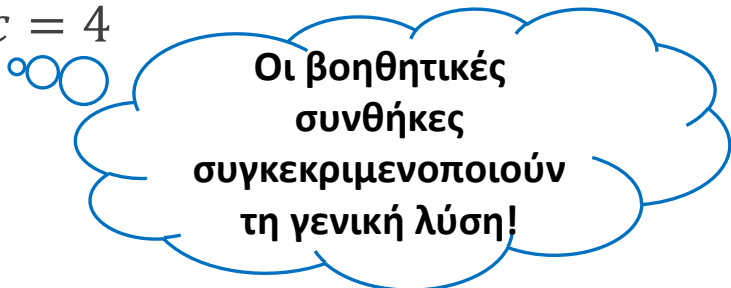
- ...που είναι της μορφής – όπως είπαμε πριν: $y(0^-)$

- Για παράδειγμα, έστω $y(0^-) = 4$, τότε

$$y(0^-) = ce^0 = c \cdot 1 = c = 4$$

- Άρα η λύση μας γίνεται συγκεκριμένη, ως

$$y(t) = 4e^t$$



Οι βοηθητικές
συνθήκες
συγκεκριμενοποιούν
τη γενική λύση!

- **Συστήματα**
- **Συνολική απόκριση (== έξοδος, λύση) συστήματος**
- Στη γενική περίπτωση έχουμε N το πλήθος βοηθητικές συνθήκες της μορφής

$$y(0^-), y'(0^-), y''(0^-), \dots, y^{(N-1)}(0^-)$$

Αρχικές
συνθήκες!

οι οποίες ισχύουν για $t = 0^-$, δηλ. περιγράφουν το σύστημα **πριν** εφαρμόσουμε κάποια είσοδο, αν θεωρήσουμε ότι για $t = 0$ εφαρμόζουμε στο σύστημά μας μια είσοδο $x(t)$

- **Μας ενδιαφέρει τι συμβαίνει για $t > 0$**
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι η έξοδος $y(t)$ αποτελείται από το άθροισμα δυο **ανεξάρτητων** μεταξύ τους παραγόντων

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

με

☐ $y_{zi}(t)$: την **απόκριση μηδενικής εισόδου (zero-input response)**

☐ $y_{zs}(t)$: την **απόκριση μηδενικής κατάστασης (zero-state response)**

- **Συστήματα**

- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}(t)$**

- Θεωρούμε ότι η είσοδος είναι μηδέν, $x(t) = 0 \forall t$

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y_{zi}(t) = 0$$

- Μπορεί ναδειχθεί ότι

$$y_{zi}(t) = ce^{\lambda t}, \quad \lambda, c \in \mathbb{C}$$

- Τότε

$$\sum_{k=0}^N a_k \left(\frac{d^k}{dt^k} ce^{\lambda t} \right) = 0 \Rightarrow c \sum_{k=0}^N a_k \left(\frac{d^k}{dt^k} e^{\lambda t} \right) = 0 \Rightarrow c \sum_{k=0}^N a_k (\lambda^k e^{\lambda t}) = 0$$

$$ce^{\lambda t} \sum_{k=0}^N a_k \lambda^k = 0$$

- Για να ισχύει η ισότητα πρέπει

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k = 0$$

- **Συστήματα**
- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}(t)$**

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k = 0 \Leftrightarrow a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots + a_N \lambda^N = 0$$

- Παραγοντοποιώντας το πολυώνυμο

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \dots (\lambda - \lambda_N) = 0$$

- Το πολυώνυμο αυτό ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του συστήματος
- Οι ρίζες του πολυωνύμου $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, N$ ονομάζονται **χαρακτηριστικές ρίζες** ή **φυσικές συχνότητες** του συστήματος
- Άρα υπάρχουν N διαφορετικά c, λ που ικανοποιούν την αρχική σχέση
- Μπορεί ναδειχθεί ότι το **άθροισμα** των αντίστοιχων εκθετικών ικανοποιεί την ίδια σχέση
- Άρα

$$y_{zi}(t) = \sum_{i=1}^N c_i e^{\lambda_i t}, \mathbf{t > 0} \Rightarrow y_{zi}(t) = \left(\sum_{i=1}^N c_i e^{\lambda_i t} \right) u(t)$$

- **Συστήματα**
- **Απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}(t)$**
- Η παρακάτω σχέση

$$y_{zi}(t) = \sum_{i=1}^N c_i e^{\lambda_i t}, t > 0 \Rightarrow y_{zi}(t) = \left(\sum_{i=1}^N c_i e^{\lambda_i t} \right) u(t)$$

ισχύει μόνο αν οι ρίζες λ_i είναι **απλές**

- Σε περίπτωση που υπάρχει **πολλαπλή** ρίζα (με πολλαπλότητα r) στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, έστω $\lambda = \lambda_1$, τότε το πολυώνυμο γράφεται ως

$$(\lambda - \lambda_1)^r (\lambda - \lambda_{r+1}) (\lambda - \lambda_{r+2}) \dots (\lambda - \lambda_N) = 0$$

και η απόκριση μηδενικής εισόδου γράφεται ως

$$y_{zi}(t) = \sum_{l=1}^r c_l t^{l-1} e^{\lambda_1 t} + \sum_{k=r+1}^N c_k e^{\lambda_k t}, \quad t > 0$$

- Σε κάθε περίπτωση, τα c_i υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες

• Συστήματα

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 5 \frac{d}{dt} y(t) + 6y(t) = x(t)$$

με αρχικές συνθήκες

$$y(0^-) = 0, y'(0^-) = -2$$

Για $x(t) = 0$, έχουμε την ομογενή εξίσωση

$$1 \frac{d^2}{dt^2} y_{zi}(t) + 5 \frac{d}{dt} y_{zi}(t) + 6 y_{zi}(t) = 0$$

Με βάση όσα είχαμε, το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο θα είναι

$$1\lambda^2 + 5\lambda + 6$$

και οι χαρακτηριστικές ρίζες θα είναι οι $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$.

Άρα

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}, t > 0$$

• Συστήματα

• Παράδειγμα:

Από τις αρχικές συνθήκες

$$y(0^-) = 0 \Rightarrow c_1 e^{-2 \cdot 0} + c_2 \cdot e^{-3 \cdot 0} = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \quad (1)$$

$$y'(0^-) = -2 \quad (2)$$

Είναι

$$y'_{zi}(t) = -2c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-3t}, \quad t > 0$$

Από (2), είναι

$$y'_{zi}(0^-) = -2 \cdot c_1 \cdot e^{-2 \cdot 0} - 3 \cdot c_2 \cdot e^{-3 \cdot 0} = -2$$

$$= -2c_1 - 3c_2 = -2 \quad (3)$$

Από (1), (3), είναι

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = -c_2 \\ 2c_2 - 3c_2 = -2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} c_1 = -c_2 \\ -c_2 = -2 \end{array} \right\} \boxed{\begin{array}{l} c_1 = -2 \\ c_2 = 2 \end{array}}$$

Άρα $\boxed{c_1 = -2}$. Άρα $y_{zi}(t) = -2e^{-2t} + 2e^{-3t}, \quad t > 0.$

• Συστήματα

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$$

με αρχικές συνθήκες

$$y(0^-) = A, y'(0^-) = 0$$

Είναι

$$\frac{d^2}{dt^2} y_{zi}(t) + \omega_0^2 y_{zi}(t) = 0$$

Γ-ε χαρακτη. πολυώνυμο να είναι το $\lambda^2 + \omega_0^2$, $t \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 = +j\omega_0$, $\lambda_2 = -j\omega_0$. Άρα θα έχουμε

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{j\omega_0 t} + c_2 e^{-j\omega_0 t}, \quad t > 0$$

• Συστήματα

• Παράδειγμα:

Από τις αρχικές συνθήκες, $y(0^-) = A \Leftrightarrow \boxed{c_1 + c_2 = A} \quad (1)$

Είναι $y'_{zi}(t) = j\omega_0 c_1 e^{j\omega_0 t} - j\omega_0 c_2 e^{-j\omega_0 t}, t > 0$

$$y'_{zi}(0^-) = j\omega_0 \cdot c_1 \cdot e^0 - j\omega_0 c_2 \cdot e^0 \\ = j\omega_0 c_1 - j\omega_0 c_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{j\omega_0} c_1 = \cancel{j\omega_0} c_2 \Leftrightarrow \boxed{c_1 = c_2} \quad (2)$$

Από (1), (2) είναι

$$c_1 = \frac{A}{2}, \quad c_2 = \frac{A}{2}$$

Άρα $y_{zi}(t) = \frac{A}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\omega_0 t} = A \cos(\omega_0 t), t > 0.$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

