

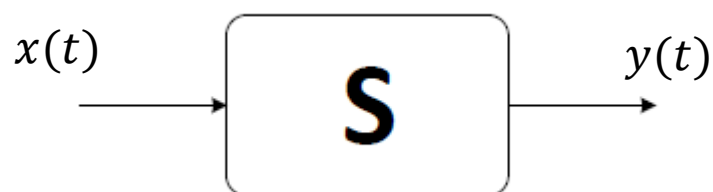
HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 2^Η

- Σήματα και Συστήματα



- **Σήμα:** φορέας πληροφορίας
 - Π.χ. εικόνα, ήχος, βίντεο, σύνολο δεδομένων, κλπ.
- Στα δικά μας πλαίσια, θα θεωρούμε ένα σήμα ως μια χρονοσειρά, δηλ. μια συνάρτηση του χρόνου t
 - Η πληροφορία βρίσκεται στις μεταβολές του σήματος ως προς το χρόνο
- **Σύστημα:** δομή/αλγόριθμος/κύκλωμα κλπ. που εξάγει πληροφορία από την είσοδο $x(t)$ και την αναπαριστά ως έξοδο $y(t)$



- Θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά συστήματα **μιας** εισόδου και **μιας** εξόδου
 - Υπάρχουν και συστήματα πολλαπλών εισόδων ή/και πολλαπλών εξόδων
- Ας μιλήσουμε πρώτα για τα σήματα...
 - ... για τα οποία είπαμε ότι θα περιγράψουμε ως **συναρτήσεις του χρόνου** – $x(t)$

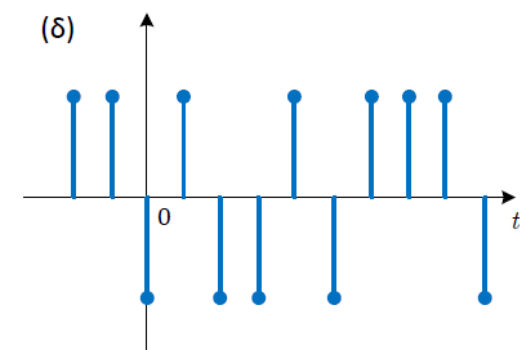
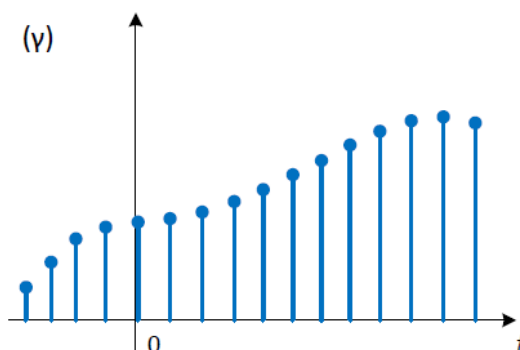
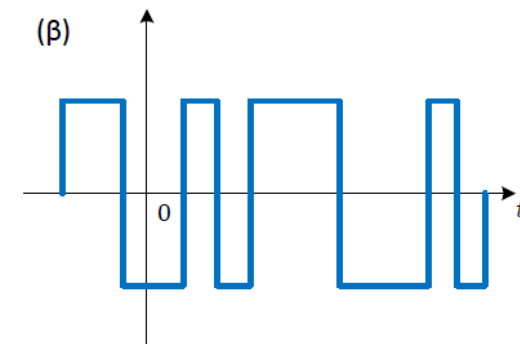
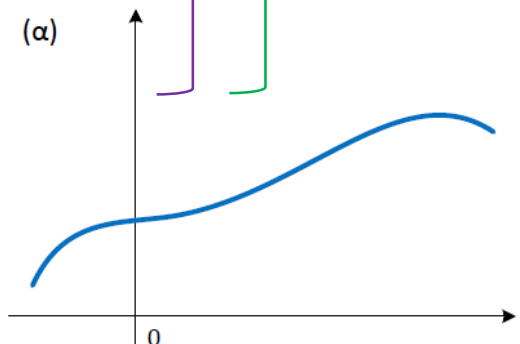
Σήματα

Κατηγορίες σημάτων:

1. Συνεχούς ή διακριτού χρόνου σήματα
2. Αναλογικά ή ψηφιακά σήματα
3. Σήματα περιοδικά ή απεριοδικά
4. Σήματα ενέργειας ή ισχύος
5. Ντετερμινιστικά ή στοχαστικά

HY215

HY370



- **Σήματα**

- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**

- Θα θέλαμε να μπορούμε να περιγράψουμε ένα σήμα με έναν αριθμό
 - Ο αριθμός αυτός θα πρέπει να αντιπροσωπεύει το «μέγεθος» του σήματος

- Ενέργεια Σήματος

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt, \quad x(t) \in \mathbb{C}$$

- Ισχύς σήματος

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt, \quad x(t) \in \mathbb{C}$$

- Αν $0 < E_x < +\infty \rightarrow$ σήμα ενέργειας

- Αν $0 < P_x < +\infty \rightarrow$ σήμα ισχύος

- Ένα σήμα είναι **είτε** ενέργειας, **είτε** ισχύος, **είτε** τίποτε από τα δυο!

- Για παράδειγμα, τα σήματα

$$x(t) = t^n, \quad x(t) = e^{at}$$

δεν είναι τίποτε από τα δυο

- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**
- Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε (εν γένει) εκ των προτέρων αν ένα σήμα είναι ενέργειας ή ισχύος (η τίποτε)
 - Υπάρχουν όμως κάποιοι «κανόνες» για να μην υπολογίζουμε κάθε φορά τυχαία μια εκ των δυο ποσοτήτων (και κάποιες φορές αναγκαστικά και τις δυο)
- **«Κανόνες»:**
 - Προϋπόθεση: το πλάτος του σήματος δεν απειρίζεται για κανένα χρονικό σημείο ή διάστημα == **φραγμένο πλάτος για κάθε t**

☐ Σήμα Ενέργειας

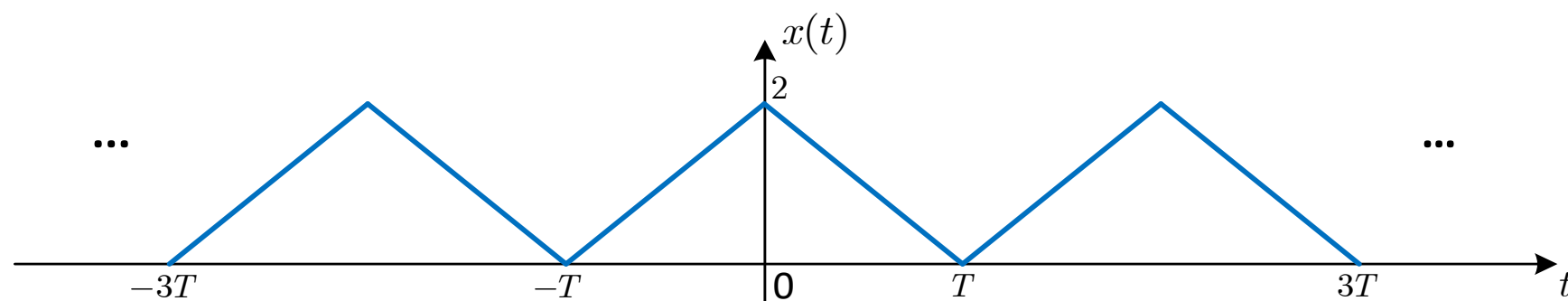
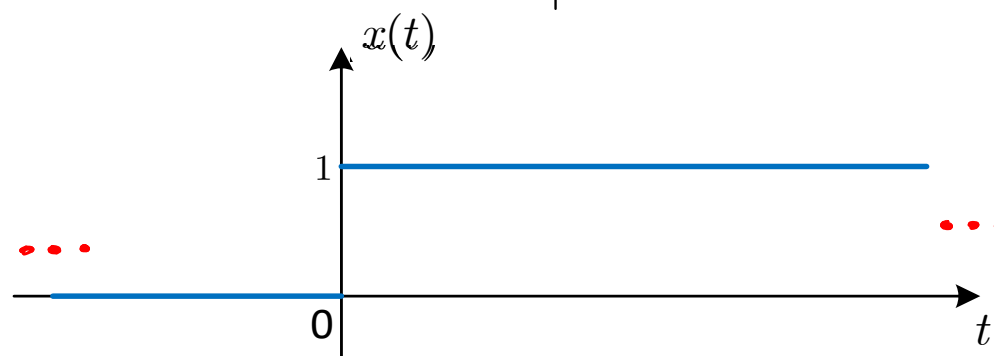
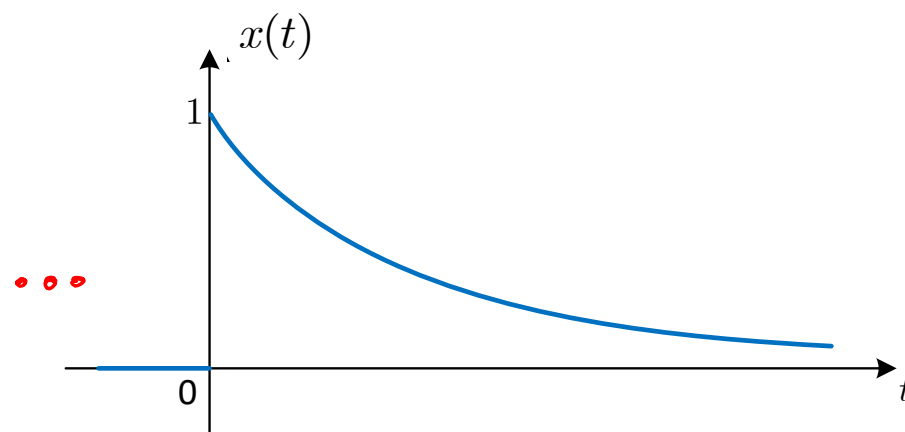
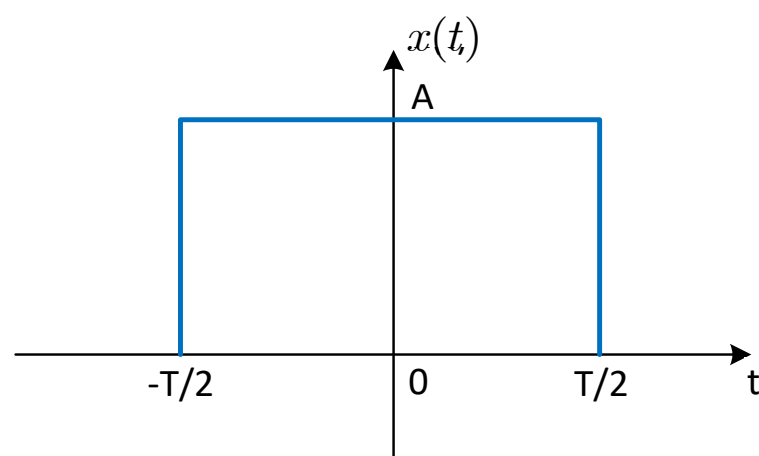
- ✓ Πεπερασμένη διάρκεια στο χρόνο
- ✓ Άπειρη διάρκεια στο χρόνο αλλά $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$
 - ✓ Ακόμα κι αν ισχύει η παραπάνω σχέση, το σήμα μπορεί να **μην** είναι σήμα ενέργειας

☐ Σήμα Ισχύος

- ✓ Άπειρης διάρκειας
- ✓ Περιοδικό

Σήματα

Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος



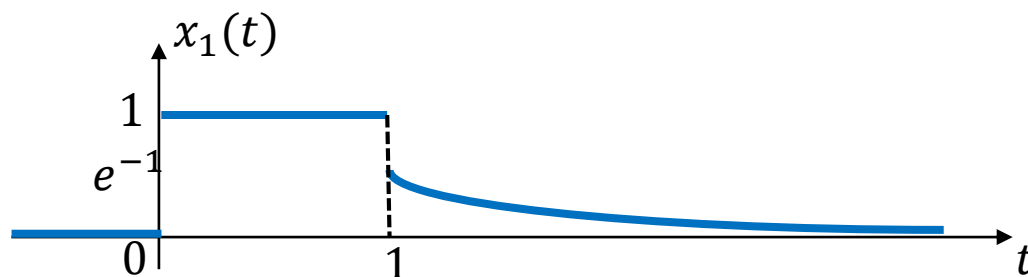
- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**
- Κάθε σήμα που μπορεί να φτιάξει κανείς στο εργαστήριο ή υπάρχει στη φύση είναι σήμα **ενέργειας**
- Όμως τα σήματα ισχύος παρέχουν ένα αυστηρό θεωρητικό υπόβαθρο για γενικότερη μελέτη σημάτων και συστημάτων
- Ας δούμε μερικά παραδείγματα

- Σήματα

- Παράδειγμα:

- Εξετάστε και υπολογίστε την κατάλληλη μετρική για τα παρακάτω σήματα

- $x_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$



• Σήματα

• Παράδειγμα:

○ Εξετάστε και υπολογίστε την κατάλληλη μετρική για τα παρακάτω σήματα

$$\blacksquare x_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$$

Είναι

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2(t) dt = \int_{-\infty}^0 0^2 dt + \int_0^1 1^2 dt + \int_1^{+\infty} (e^{-t})^2 dt$$

$\parallel$
 e^{-2t}

$$= \int_0^1 (t)' dt + \int_1^{+\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2t}\right)' dt = t \Big|_0^1 - \frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_1^{+\infty}$$

$$= (1 - 0) - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-2 \cdot 1} = 1 - 0 + \frac{1}{2} e^{-2} = 1 + \frac{1}{2} e^{-2}$$

Άρα

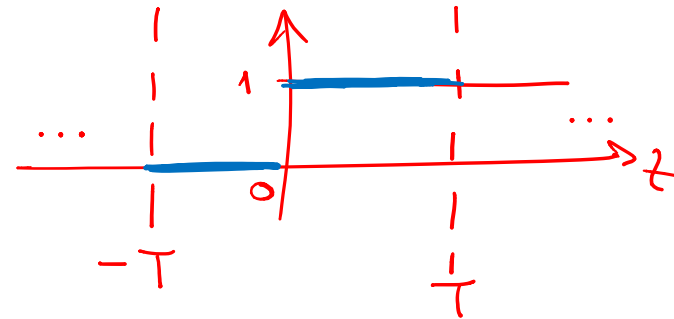
$$E = 1 + \frac{1}{2e^2}$$

• Σήματα

• Παράδειγμα:

○ Εξετάστε και υπολογίστε την κατάλληλη μετρική για τα παρακάτω σήματα

$$\blacksquare x_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



Είναι

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_2^2(t) dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left(\int_{-T}^0 0^2 dt + \int_0^T 1^2 dt \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T 1 dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} t \Big|_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (T - 0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2T} = \frac{1}{2}.$$

Άρα

$$P = \frac{1}{2}$$

- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας και Ισχύος**
- Μπορεί κανείς εύκολα (αλλά με κάμποσες πράξεις) να δείξει ότι

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi), A \in \mathbb{R} \rightarrow P_x = \frac{A^2}{2}$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{i=1}^N A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i), A_i \in \mathbb{R} \rightarrow P_x = A_0^2 + \sum_{i=1}^N \frac{A_i^2}{2}$$

$$x(t) = A e^{j2\pi f_0 t}, A \in \mathbb{C} \rightarrow P_x = |A|^2$$

$$x(t) = \sum_{i=0}^N A_i e^{j2\pi f_i t}, A_i \in \mathbb{C} \rightarrow P_x = \sum_{i=0}^N |A_i|^2$$

- Εξασκηθείτε αποδεικνύοντας αναλυτικά τα παραπάνω! ☺

- **Σήματα**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**
- Μπορούμε να κάνουμε μερικές ενδιαφέρουσες πράξεις στην ανεξάρτητη μεταβλητή του χρόνου t
 - Χρονική ολίσθηση (time shifting)
 - Χρονική αντιστροφή (time reversal)
 - Χρονική κλιμάκωση (time scaling)

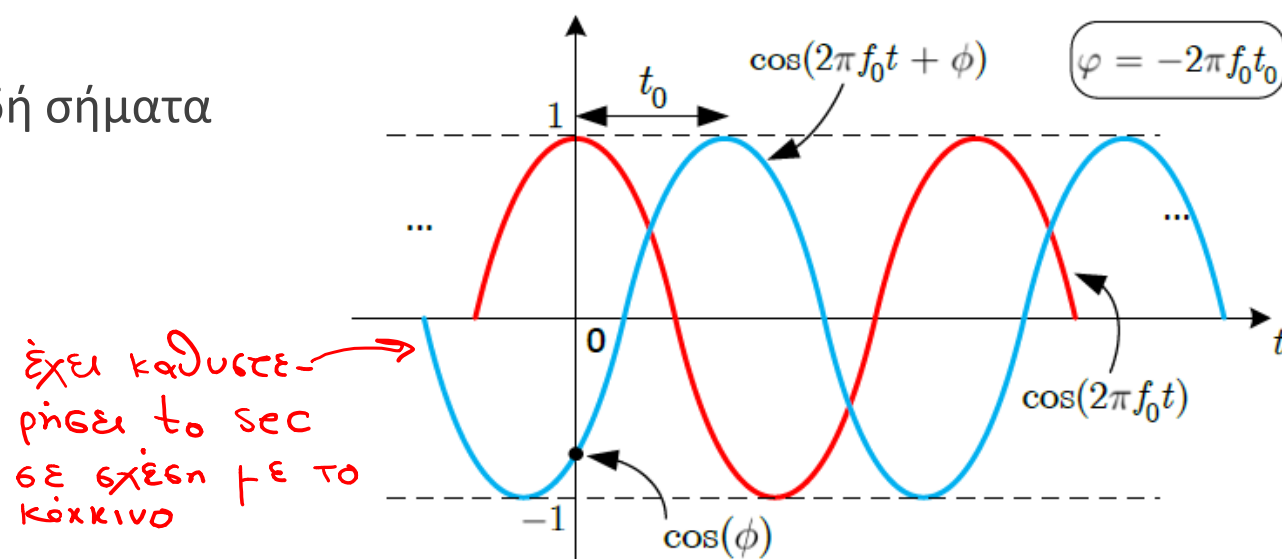
• Σήματα

• Μετασχηματισμοί σημάτων

■ Χρονική μετατόπιση/ολίσθηση (time shifting)

- Η χρονική ολίσθηση δεν είναι τίποτε περισσότερο από τη μετατόπιση του σήματος δεξιά ή αριστερά στον άξονα του χρόνου
- Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με τη μεταβλητή $t - t_0$, με t_0 θετικό ή αρνητικό
 - Αν t_0 θετικό, τότε έχουμε ολίσθηση προς τα δεξιά $\rightarrow$ καθυστέρηση
 - Αν t_0 αρνητικό, τότε έχουμε ολίσθηση προς τα αριστερά $\rightarrow$ προήγηση
 - Η χρονική ολίσθηση ΔΕΝ επηρεάζει τις τιμές του σήματος (το σύνολο τιμών)

• Θυμηθείτε τα ημιτονοειδή σήματα

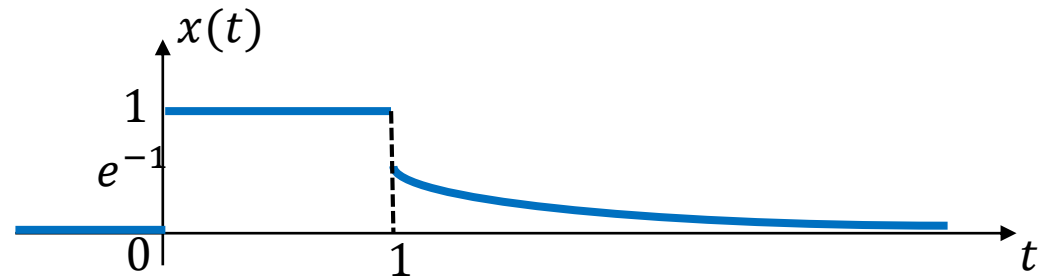


Σήματα

Παράδειγμα:

○ Βρείτε το καθυστερημένο κατά $t_0 = 2$ σήμα για το παρακάτω σήμα

$$\blacksquare x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$$

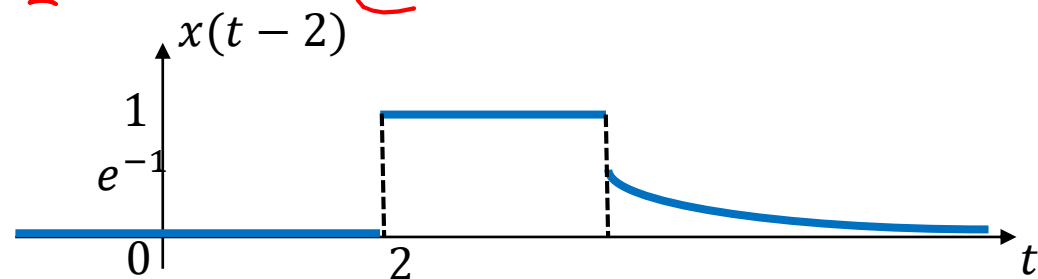


και σχεδιάστε και τα δυο σήματα.

Αντικαθιστώ $t \leftarrow t - 2$

Δίνει

$$x(t-2) = \begin{cases} 0, & t-2 < 0 \\ 1, & 0 < t-2 < 1 \\ e^{-(t-2)}, & t-2 > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 1, & 2 < t < 3 \\ e^{-(t-2)}, & t > 3 \end{cases}$$



- **Σήματα**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**
 - Χρονική αντιστροφή (time reversal)
- Η χρονική αντιστροφή δεν είναι τίποτε περισσότερο από τη ανάκλαση του σήματος ως προς τον κατακόρυφο άξονα
- **Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με τη μεταβλητή $-t$**
 - Αν το σήμα «ζει» στο θετικό ημιάξονα του χρόνου, τότε η αντιστροφή θα το φέρει ανεστραμμένο στον αρνητικό ημιάξονα
 - Αν το σήμα «ζει» στον αρνητικό ημιάξονα του χρόνου, τότε η αντιστροφή θα το φέρει ανεστραμμένο στο θετικό ημιάξονα
 - Αν το σήμα «ζει» και στους δυο άξονες, τότε το τμήμα του θετικού ημιάξονα θα καθρεπτιστεί στον αρνητικό ημιάξονα και το τμήμα του αρνητικού ημιάξονα θα καθρεπτιστεί στο θετικό ημιάξονα
 - Η χρονική αντιστροφή ΔΕΝ επηρεάζει τις τιμές του σήματος (το σύνολο τιμών)

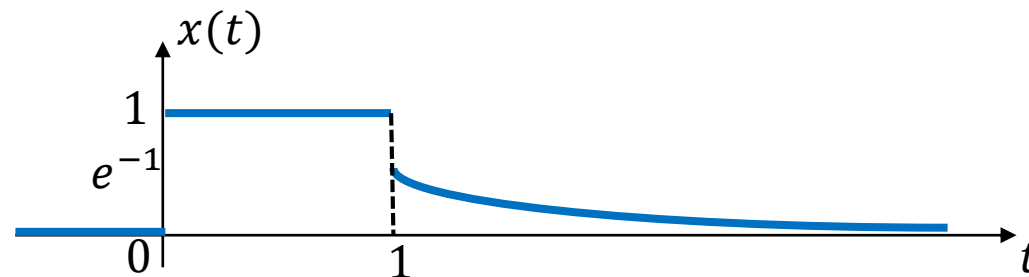
• Σήματα

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το σήμα $x(-t)$ για το παρακάτω σήμα

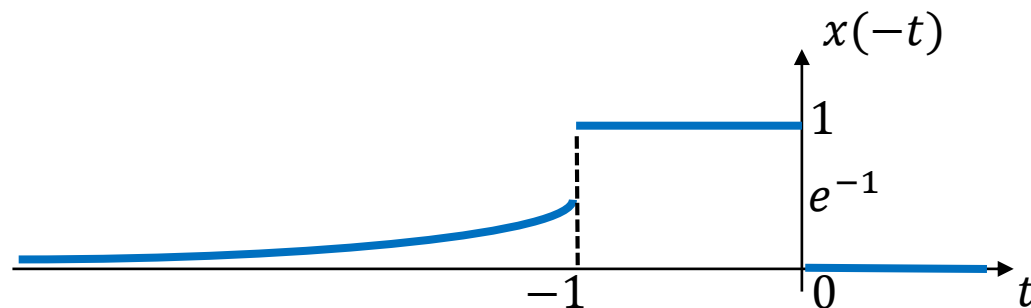
$$\blacksquare x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$$

και σχεδιάστε και τα δυο σήματα.



Αντικαθιστώ $t := -t$

$$x(-t) = \begin{cases} 0, & -t < 0 \\ 1, & 0 < -t < 1 \\ e^{-(-t)}, & -t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ 1, & -1 < t < 0 \\ e^{+t}, & t < -1 \end{cases}$$



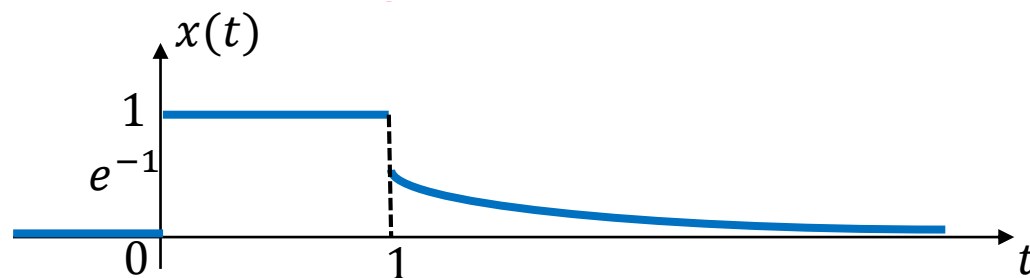
- **Σήματα**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**
 - Χρονική κλιμάκωση (time scaling)
- Η χρονική κλιμάκωση δεν είναι τίποτε περισσότερο από τη συμπίεση ή την επέκταση του σήματος στον άξονα του χρόνου
- **Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με τη μεταβλητή at , $a \in \mathbb{R}_+$**
 - Αν το σήμα «ζει» στο διάστημα $[c, d]$, τότε η κλιμάκωση κατά $a \neq 1$ θα το «μεταφέρει» στο διάστημα $[c/a, d/a]$
 - Αν ο παράγοντας κλιμάκωσης είναι αρνητικός, γίνεται χρονική αντιστροφή παράλληλα με τη χρονική κλιμάκωση
 - Η χρονική κλιμάκωση ΔΕΝ επηρεάζει τις τιμές του σήματος (το σύνολο τιμών)

• Σήματα

• Παράδειγμα:

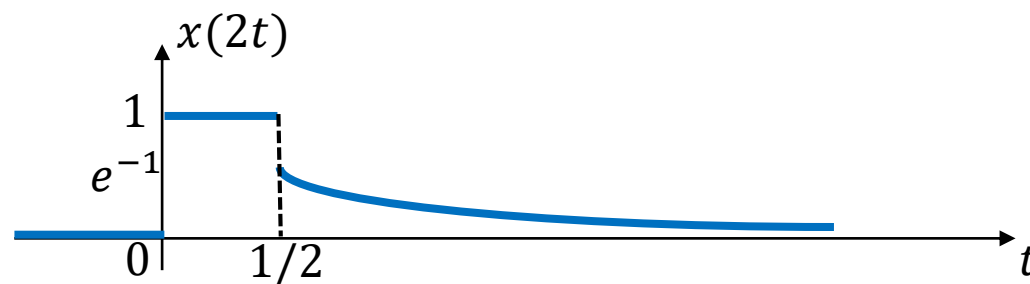
○ Βρείτε τα σήματα $x(2t)$ και $x\left(\frac{t}{3}\right)$ για το παρακάτω σήμα

$$\blacksquare x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$$



και σχεδιάστε τα όλα.

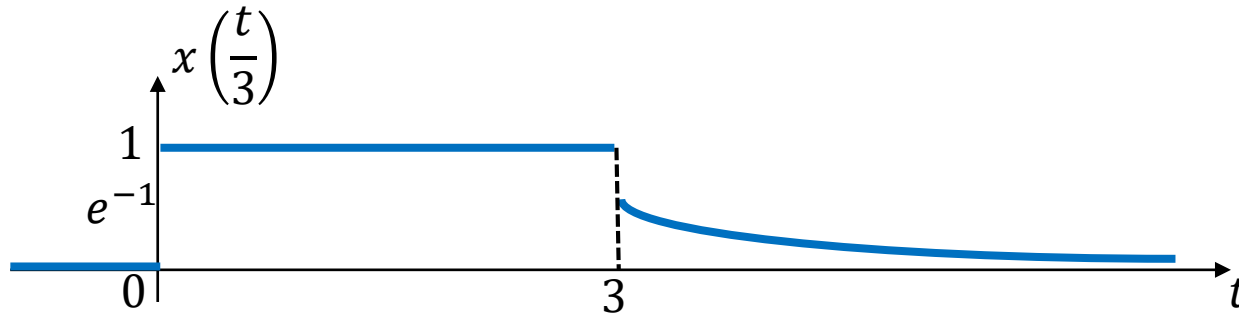
$$\bullet x(2t) = \begin{cases} 0, & 2t < 0 \\ 1, & 0 < 2t < 1 \\ e^{-2t}, & 2t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ e^{-2t}, & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$



• Σήματα

• Παράδειγμα:

$$\bullet \quad x\left(\frac{t}{3}\right) = \begin{cases} 0, & \frac{t}{3} < 0 \\ 1, & 0 < \frac{t}{3} < 1 \\ e^{-t/3}, & \frac{t}{3} > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 3 \\ e^{-t/3}, & t > 3 \end{cases}$$



→ Αν $a > 1$, το σήμα "συμπιέζεται" στο χρόνο

→ Αν $0 < a < 1$, — " — — "επιμηκώνεται" στο χρόνο

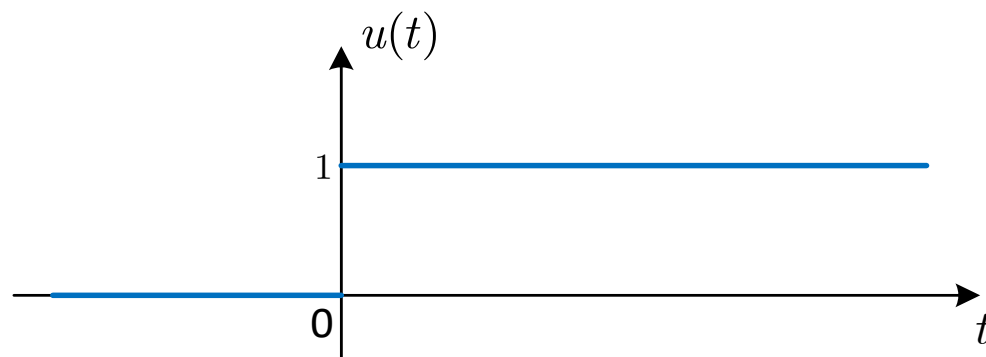
- **Σήματα**
- **Μερικά χρήσιμα μοντέλα σημάτων**
- Εκτός από τα ημιτονοειδή, υπάρχουν και μερικές άλλες συναρτήσεις του χρόνου οι οποίες (θα) είναι πολύ χρήσιμες
- Αυτά είναι:
 - ☐ Η βηματική συνάρτηση
 - ☐ Ο τετραγωνικός παλμός
 - ☐ Ο τριγωνικός παλμός
 - ☐ Η κρουστική συνάρτηση (κατανομή) Δέλτα

- **Σήματα**

- **Η βηματική συνάρτηση**

- Η βηματική συνάρτηση ορίζεται ως

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



- Μια από τις βασικότερες εφαρμογές της είναι ως σήμα-διακόπτης (off-on)

- δηλ. ως ένα ιδανικό μοντέλο ενός σήματος που πάει από $0 \rightarrow 1$ ακαριαία

- ...ή για **να «κόψουμε» τμήματα άλλων σημάτων, πολλαπλασιάζοντάς την με αυτά**

- Όλες οι γνωστές πράξεις καθώς και οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί ορίζονται κανονικά για τη βηματική συνάρτηση

- ...εκτός από τη διαίρεση σήματος με τη βηματική (διαίρεση με μηδέν)

• Σήματα

• Ο τετραγωνικός παλμός

• Ο τετραγωνικός παλμός ορίζεται ως

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{αλλού} \\ A, & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases} = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

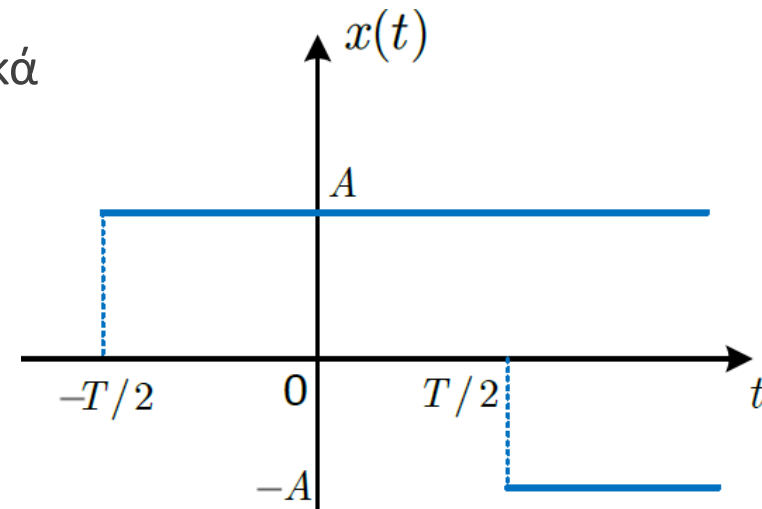
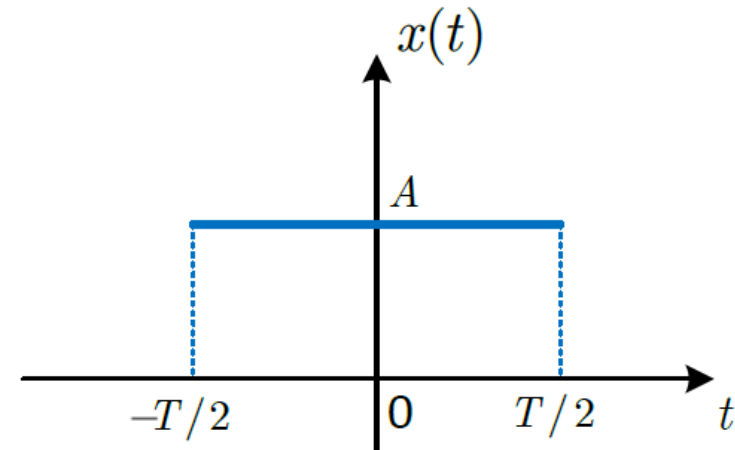
• Μια από τις βασικότερες εφαρμογές του είναι για να «κόψουμε» τμήματα πεπερασμένης διάρκειας άλλων σημάτων, πολλαπλασιάζοντάς τον με αυτά

• Όλες οι γνωστές πράξεις καθώς και οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί ορίζονται κανονικά για τον τετραγωνικό παλμό

- ...εκτός από τη διαίρεση, ξανά (διαίρεση με μηδέν)

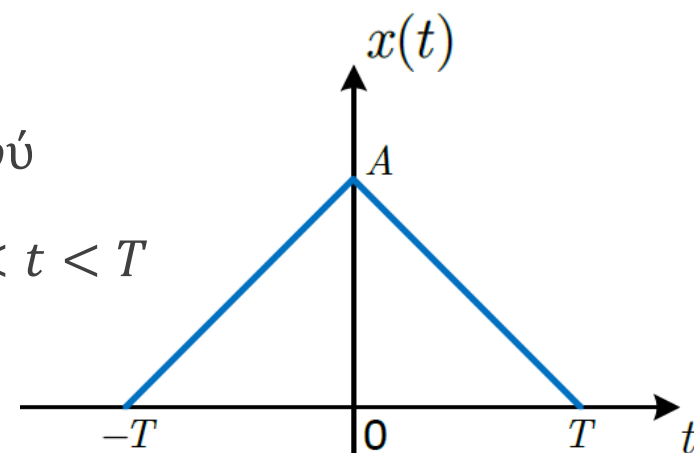
• Ο τετραγωνικός παλμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο βηματικών συναρτήσεων

- ...όπως στο σχήμα



- Σήματα
- Ο τριγωνικός παλμός
- Ο τριγωνικός παλμός ορίζεται ως

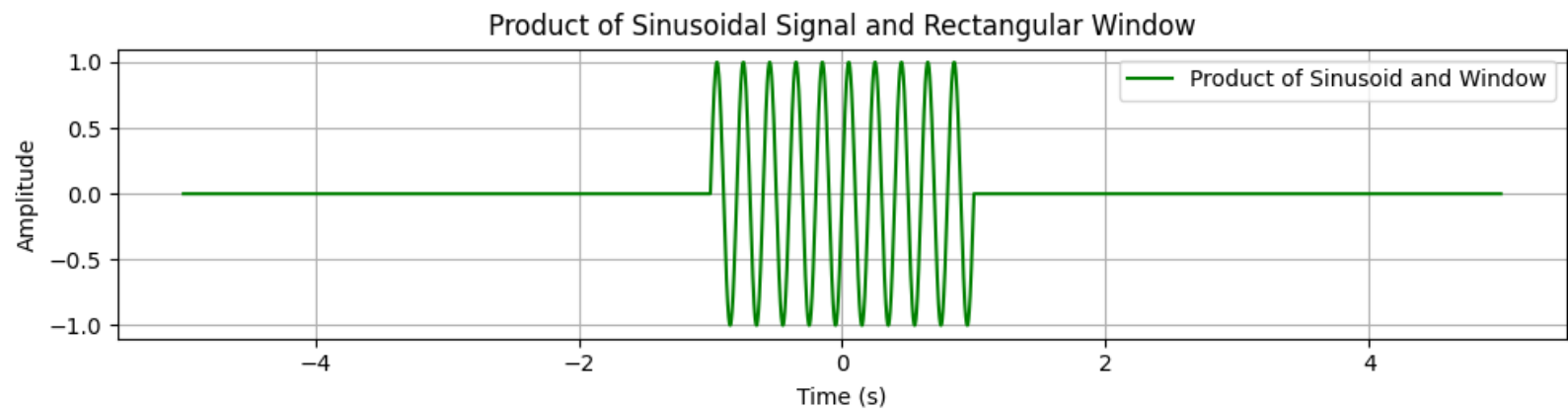
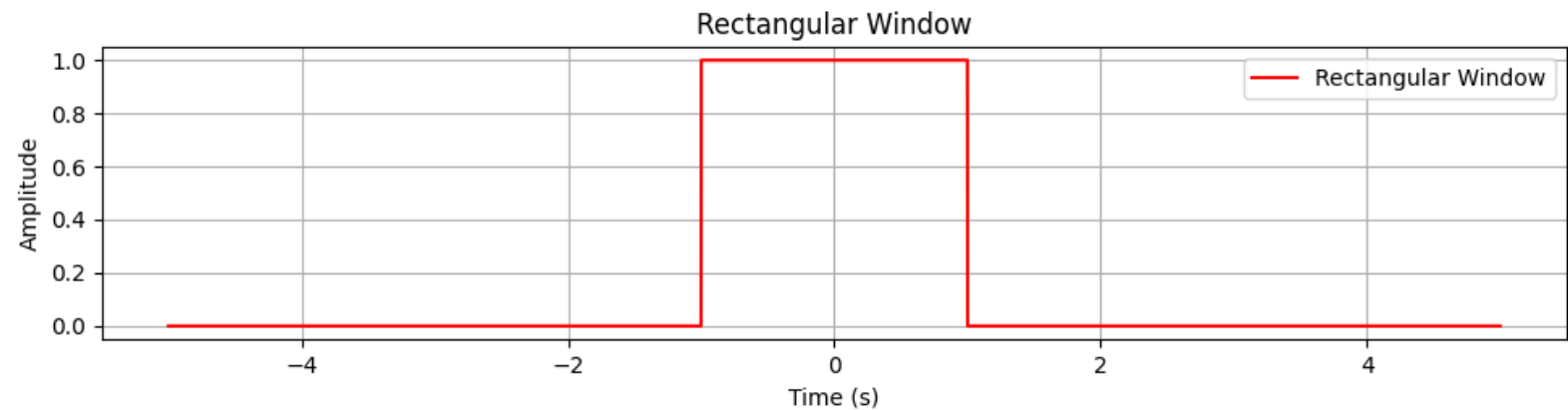
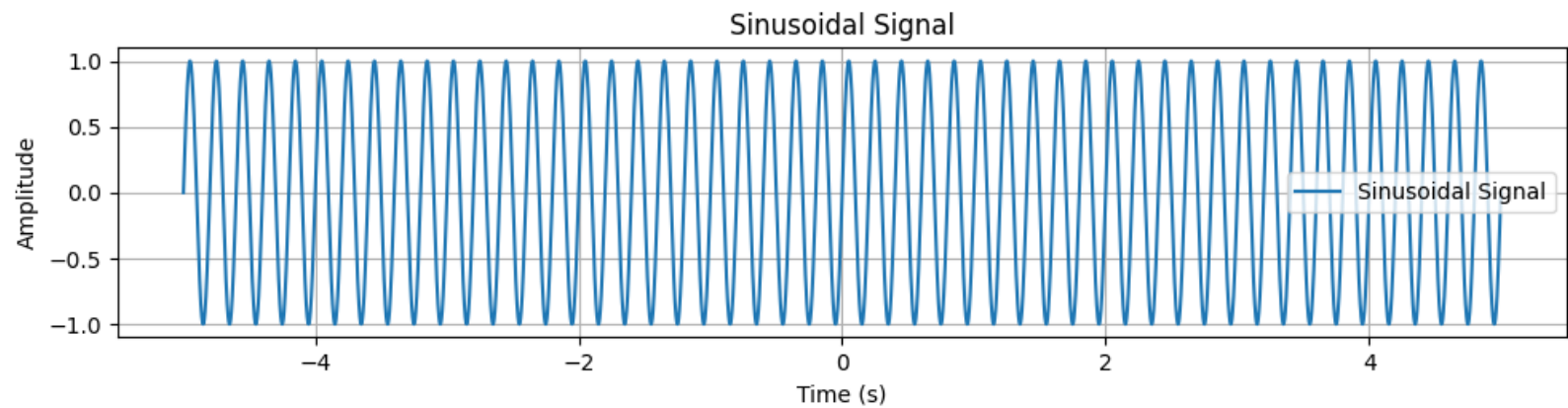
$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{αλλού} \\ A \left(1 - \frac{|t|}{T} \right), & -T < t < T \end{cases}$$
$$= A \operatorname{tri} \left(\frac{t}{T} \right)$$



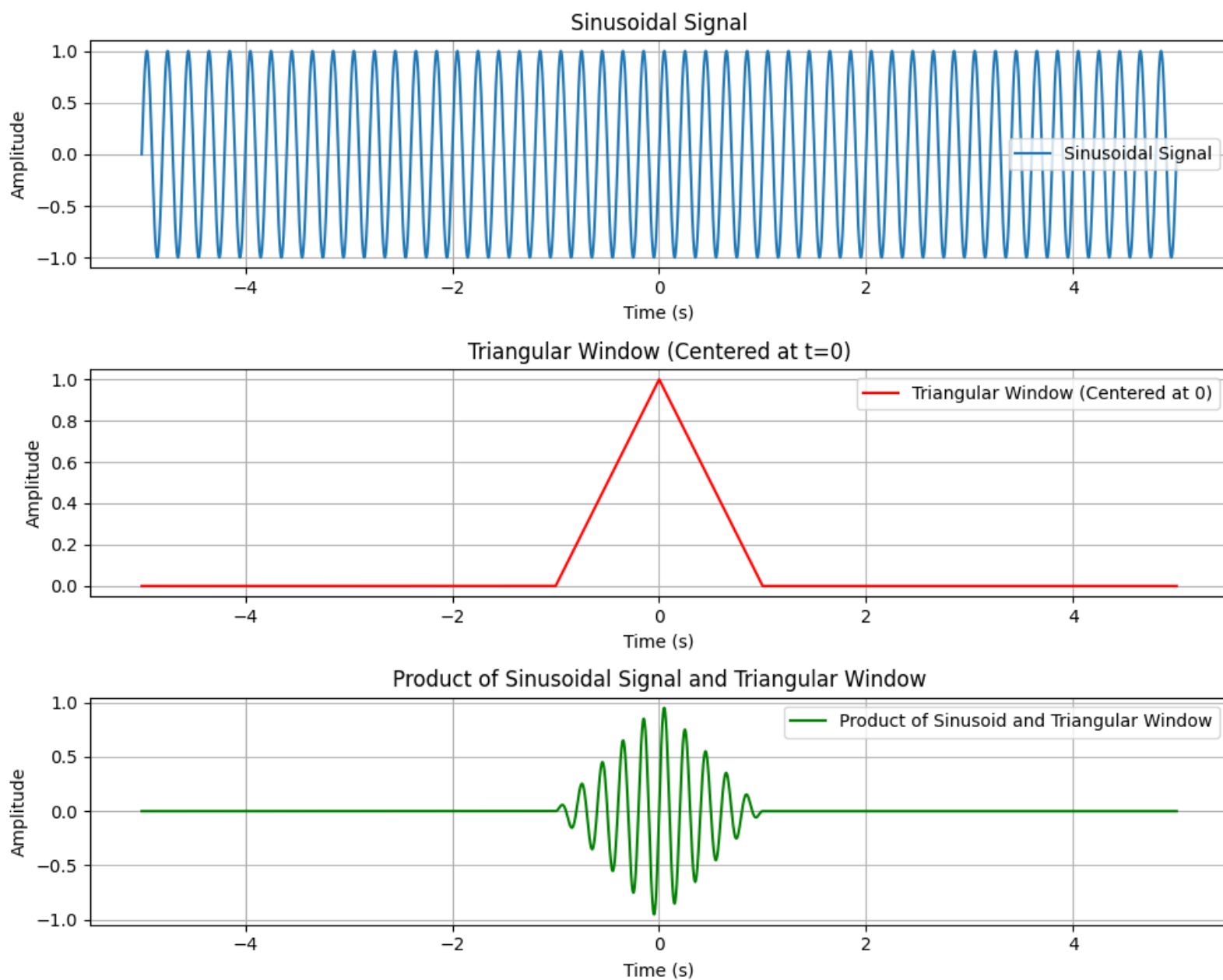
- Μια από τις βασικότερες εφαρμογές του είναι για να «κόψουμε» τμήματα πεπερασμένης διάρκειας άλλων σημάτων, πολλαπλασιάζοντάς τον με αυτά
 - ...αλλά δίνοντας περισσότερο βάρος στις τιμές του σήματος στο κέντρο του παλμού
- Όλες οι γνωστές πράξεις καθώς και οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί ορίζονται κανονικά για τον τριγωνικό παλμό
 - ...εκτός από τη διαίρεση, ξανά (διαίρεση με μηδέν)

- Προσέξτε ότι στον συνοπτικό τύπο του παλμού ο παρονομαστής T είναι η **μισή** διάρκεια του, ενώ στον τετραγωνικό παλμό ο παρονομαστής T ήταν **όλη** η διάρκεια!

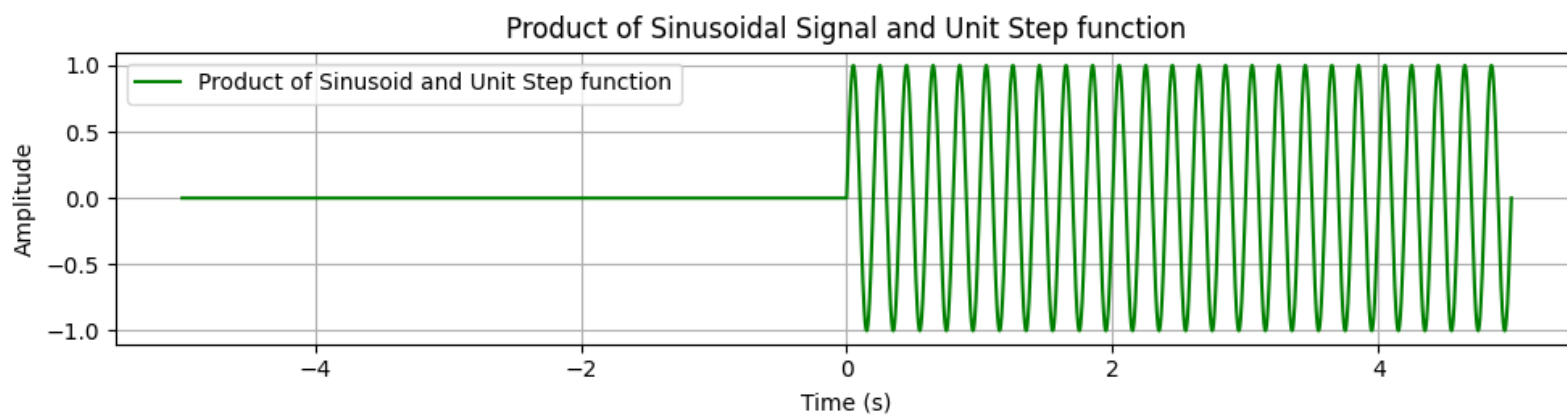
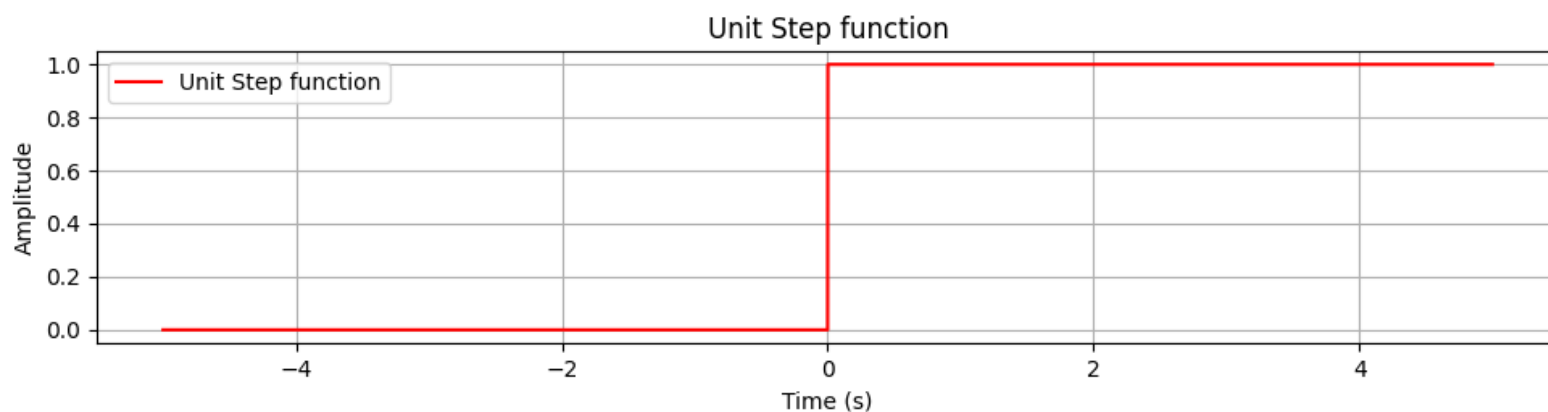
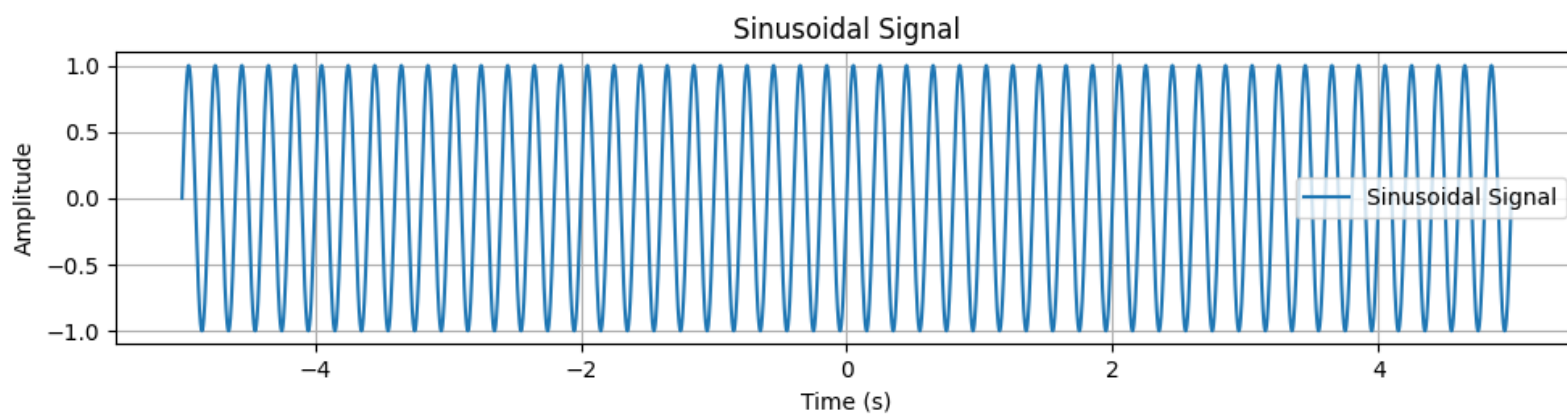
Σήματα



- Σήματα



- Σήματα



Σήματα

Παράδειγμα:

○ Σχεδιάστε τα σήματα:

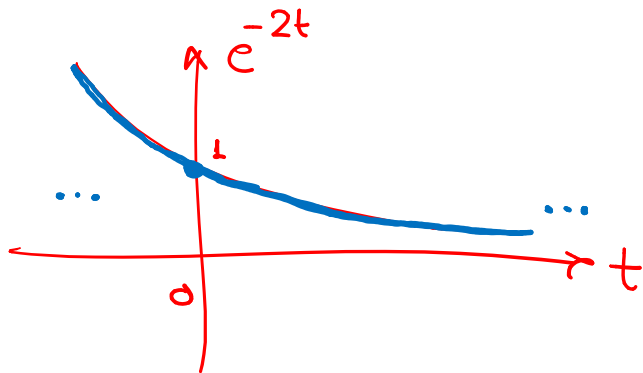
$$(α) e^{-2t}u(t-2)$$

$$(γ) 4\text{rect}\left(\frac{t-2}{5}\right)$$

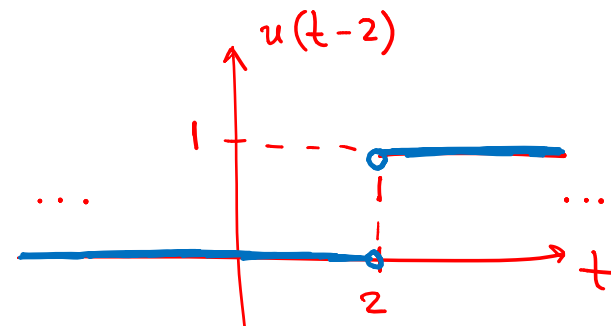
$$(β) u(t^2 - 4)$$

$$(δ) \text{tri}\left(\frac{t+1}{2}\right) + \text{rect}\left(\frac{2t-1}{2}\right)$$

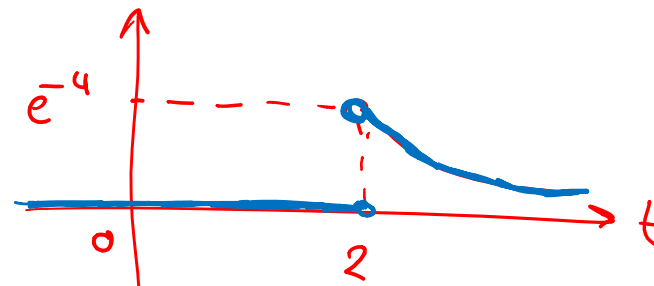
α)



•



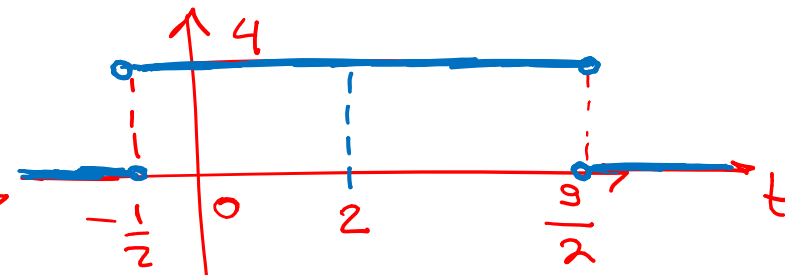
||



$$\leftarrow e^{-2t}u(t-2)$$

γ) $4\text{rect}\left(\frac{t-2}{5}\right)$

Annotations: A (amplitude), $t_0=2$ (center), T (width)



• Σήματα

• Παράδειγμα:

○ Σχεδιάστε τα σήματα:

$$(α) e^{-2t}u(t-2)$$

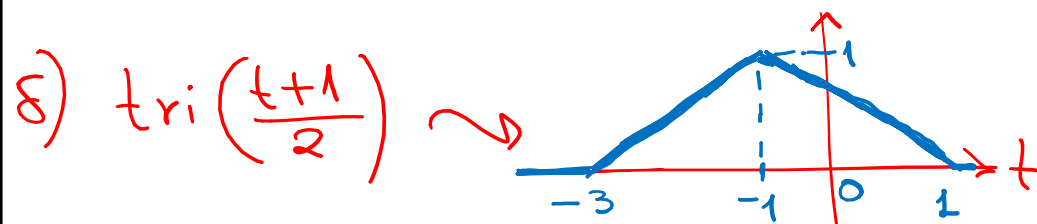
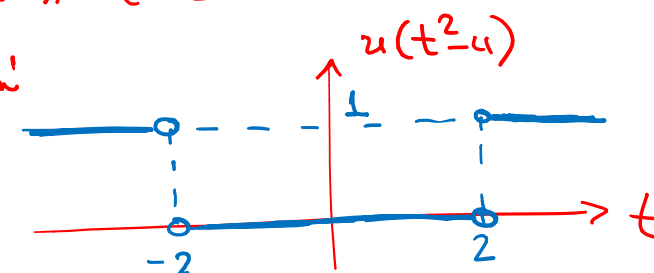
$$(γ) 4\text{rect}\left(\frac{t-2}{5}\right)$$

$$(β) u(t^2 - 4)$$

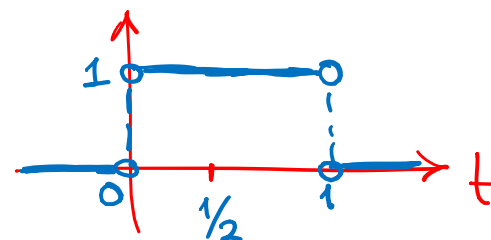
$$(δ) \text{tri}\left(\frac{t+1}{2}\right) + \text{rect}\left(\frac{2t-1}{2}\right)$$

$$β) u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \sim u(t^2-4) = \begin{cases} 1, & t^2-4 > 0 \\ 0, & t^2-4 < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1, & (t+2)(t-2) > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 1, & t < -2 \text{ ή } t > 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



$$\text{rect}\left(\frac{2t-1}{2}\right) = \text{rect}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{1}\right) \sim$$



• Σήματα

• Παράδειγμα:

○ Σχεδιάστε τα σήματα:

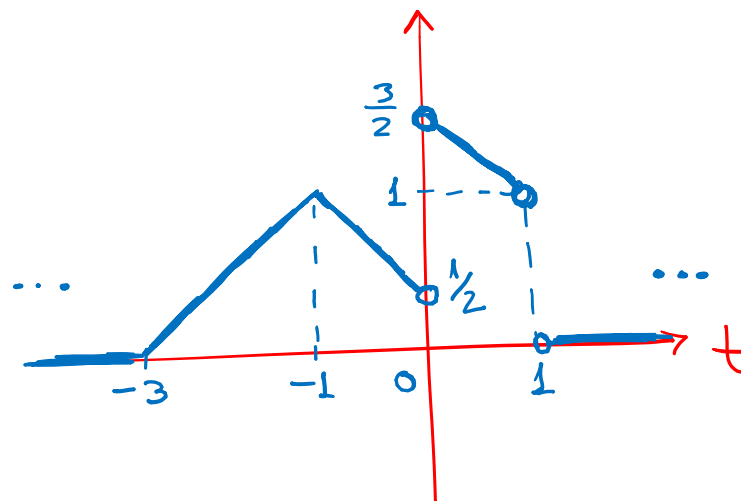
$$(α) e^{-2t}u(t-2)$$

$$(γ) 4\text{rect}\left(\frac{t-2}{5}\right)$$

$$(β) u(t^2 - 4)$$

$$(δ) \text{tri}\left(\frac{t+1}{2}\right) + \text{rect}\left(\frac{2t-1}{2}\right)$$

Αρα



Αυτή η "αυστηρή" σχεδίαση των σήματων, με σημειώσεις τις συνειδήσεις τους και ΔΕΝ θα χρησιμοποιηθεί στο εξής.

Θα σχεδιάζουμε πιο απλοποιημένα τα σήματά μας.

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Ο τετραγωνικός παλμός είδαμε ότι έχει διάρκεια $T > 0$ και πλάτος A
- Αν θέλαμε να περιγράψουμε ένα παλμό απειροστά μικρής διάρκειας ϵ , **αλλά με σταθερό μοναδιαίο εμβαδό**, τι θα κάναμε?
 - Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να περιγράψει ένα σήμα που μοντελοποιεί ένα «ακαριαίο» συμβάν, που «χτυπά κι εξαφανίζεται» ακαριαία
- Θα δημιουργούσαμε τον τετραγωνικό παλμό ως

$$p(t) = \frac{1}{\epsilon} \text{rect}\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$$

διάρκειας ϵ και πλάτους $1/\epsilon$

- ...και θα στέλναμε το ϵ στο μηδέν: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(t)$
- Αυτός ο παλμός θα είχε απειροστά μικρή διάρκεια ϵ και απειροστά μεγάλο πλάτος $1/\epsilon$
- Όμως η επιφάνεια κάτω από τη συνάρτηση θα εξακολουθούσε να είναι μοναδιαία:

$$\int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \left(\frac{1}{\epsilon}\right) dt = 1$$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Ένας τέτοιος «περίεργος» τετραγωνικός παλμός θα ικανοποιούσε δυο ιδιότητες:

$$p(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = 1$$

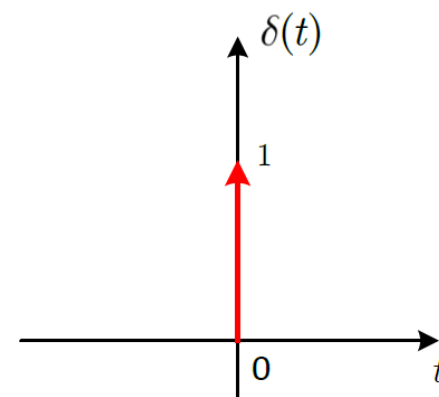
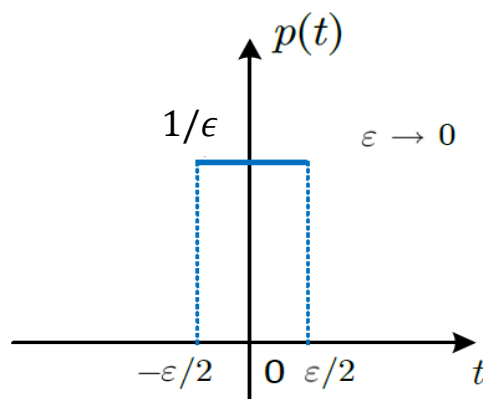
όταν $\epsilon \rightarrow 0$

- Οποιοδήποτε σήμα ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζεται **κρουστική συνάρτηση Δέλτα** – ή απλά **συνάρτηση Δέλτα** στο εξής – και γράφεται ως $\delta(t)$
 - Η συνάρτηση Δέλτα **ΔΕΝ** είναι συνάρτηση – είναι **κατανομή ή γενικευμένη συνάρτηση**!
- Η συνάρτηση Δέλτα λοιπόν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

- Σήματα
- Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα
- Σχηματικά, η προσέγγιση της συνάρτησης Δέλτα από τον τετραγωνικό παλμό και η συνάρτηση Δέλτα φαίνονται παρακάτω
- Παρατηρήστε τη σχεδίαση της συνάρτησης Δέλτα

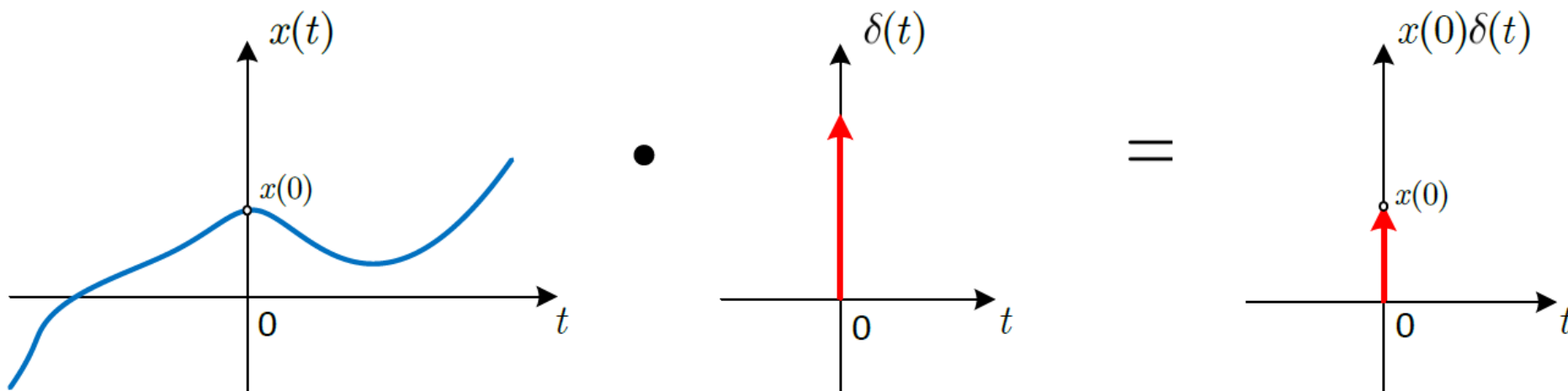


- Προσέξτε ότι το 1 στη «μύτη» της συνάρτησης Δέλτα **δεν** είναι το πλάτος της!
 - Αυτό είναι άπειρο!
- Είναι η τιμή του «εμβαδού» της («επιφάνεια κάτω από τη συνάρτηση»)
- Οι πράξεις που επιτρέπονται με τη συνάρτηση Δέλτα είναι πρόσθεση, αφαίρεση, και πολλαπλασιασμός με συνεχή συνάρτηση. Οι μετασχηματισμοί που είδαμε επιτρέπονται όλοι (με μια ιδιότητα να μας διευκολύνει στη χρονική κλιμάκωση)

- Σήματα
- Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα
- Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα
- Αν πολλαπλασιάσουμε ένα συνεχές σήμα με μια συνάρτηση Δέλτα η οποία «ζει» τη χρονική στιγμή $t = t_0$ τότε ουσιαστικά αλλάζουμε το εμβαδό της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

- Ουσιαστικά η παραπάνω πράξη **δειγματοληπτεί** το σήμα $x(t)$ τη χρονική στιγμή t_0
- Σχηματικά:

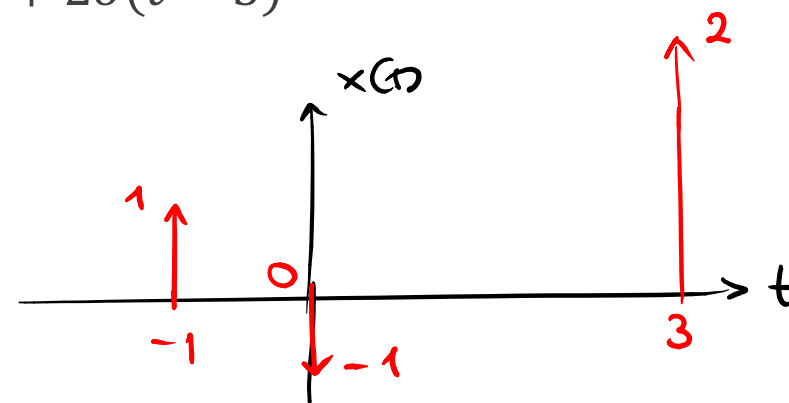


- Σήματα
- Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα
- Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα
- Η προηγούμενη ιδιότητα μας βοηθά να ορίσουμε ασυνήθιστα σήματα που έχουν «τιμές» μόνο για συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, π.χ.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t = -1 \\ -1, & t = 0 \\ 2, & t = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$= 1\delta(t + 1) - 1\delta(t) + 2\delta(t - 3)$$

- Ας σχεδιάσουμε αυτό το σήμα



- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα
- Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση της δειγματοληψίας, περιμένουμε να λάβουμε την «περιοχή κάτω από την επιφάνεια» $x(t)\delta(t - t_0)$...
 - ... η οποία είναι $x(t_0)$

- Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$

- Μερικές ακόμα ιδιότητες που μπορείτε να αποδείξετε είναι οι:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t), \quad a \neq 0$$

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

• Σήματα

• Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε τα

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

$$\underbrace{(3t^2 + 1)}_{x(t)} \delta(t) = (3t^2 + 1) \Big|_{t=0} \cdot \delta(t) = (3 \cdot 0^2 + 1) \cdot \delta(t) = \delta(t)$$

$$\underbrace{(t^2 + \cos \pi t)}_{x(t)} \delta(t - 1) = (t^2 + \cos(\pi t)) \Big|_{t=1} \cdot \delta(t - 1) = 0 \cdot \delta(t - 1) = 0$$

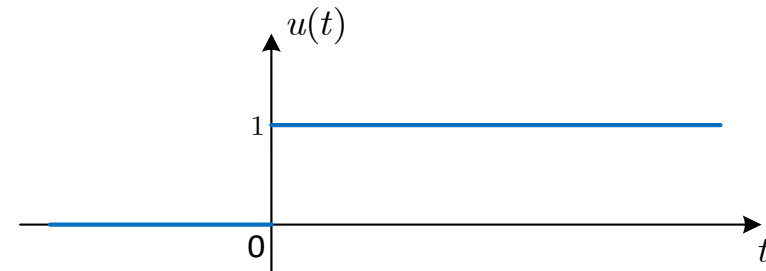
$$\underbrace{e^{-t}}_{x(t)} \delta(2t) = e^{-t} \cdot \frac{1}{2} \delta(t) = \left(\frac{1}{2} e^{-t} \right) \Big|_{t=0} \cdot \delta(t) = \frac{1}{2} \delta(t)$$

$$\underbrace{t}_{x(t)} \delta(t) = t \Big|_{t=0} \cdot \delta(t) = 0 \cdot \delta(t) = 0$$

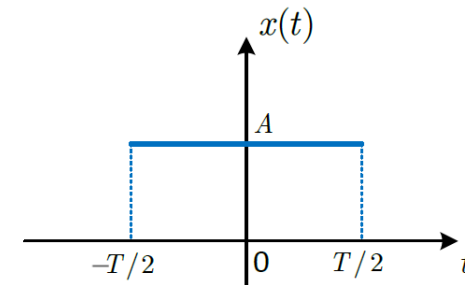
$$\underbrace{\cos(t)}_{x(t)} \delta(t - \pi) = \cos(t) \Big|_{t=\pi} \cdot \delta(t - \pi) = (-1) \cdot \delta(t - \pi) = -\delta(t - \pi)$$

Σήματα – Review

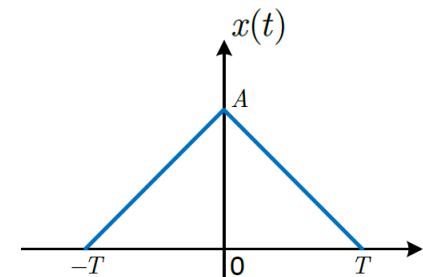
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{αλλού} \\ A, & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases} = A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$



$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{αλλού} \\ A\left(1 - \frac{|t|}{T}\right), & -T < t < T \end{cases} = A \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$$

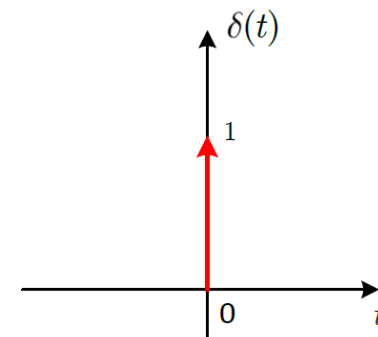


$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$



• Σήματα

• Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε τα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(3t^2 + 1)}_{x(t)} \delta(t - 1) dt = x(t) \Big|_{t=1} = (3t^2 + 1) \Big|_{t=1} = 4$$

$$\int_{-1}^1 \underbrace{(3t^2 + 1)}_{x(t)} \delta(t) dt = (3t^2 + 1) \Big|_{t=0} = 1$$

$$\int_1^6 \underbrace{(\log_{10} t^{20})}_{x(t)} \delta(t + 3) dt = 0 \quad !$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 + \cos \pi t) \delta(t - 1) dt = (t^2 + \cos(\pi t)) \Big|_{t=1} = 1 - 1 = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} \delta(2t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} \cdot \frac{1}{2} \delta(t) dt = e^0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\delta(at) = \frac{1}{a} \delta(t)$$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα και η βηματική συνάρτηση**
- Η (ήδη!) γνωστή μας βηματική συνάρτηση είναι πολύ σημαντική
 - Έχει άραγε παράγωγο? Αν ναι, ποια είναι αυτή?
- Από τον ορισμό της

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

βλέπουμε ότι η παράγωγός της είναι παντού μηδέν εκτός από τη στιγμή $t = 0$, όπου δεν ορίζεται παράγωγος

- Αλλιώς, η παράγωγος είναι άπειρη
- Άρα μια «γενικευμένη» έννοια της παραγώγου της βηματικής συνάρτησης θα ικανοποιούσε την ιδιότητα

$$u'(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

- Επίσης από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού έχουμε

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} u'(t) dt = u(\epsilon) - u(-\epsilon) = 1 - 0 = 1$$

για $\epsilon > 0$

- Σήματα
- Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα και η βηματική συνάρτηση
- Συνολικά

$$u'(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(t) dt = 1$$

- Μα αυτές οι ιδιότητες είναι οι ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα!
- Άρα η (γενικευμένη) **παράγωγος** της βηματικής συνάρτησης είναι η συνάρτηση Δέλτα:

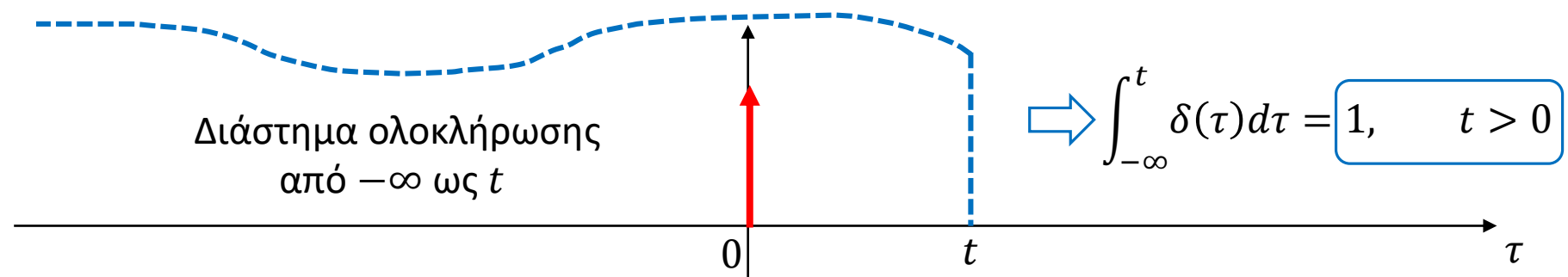
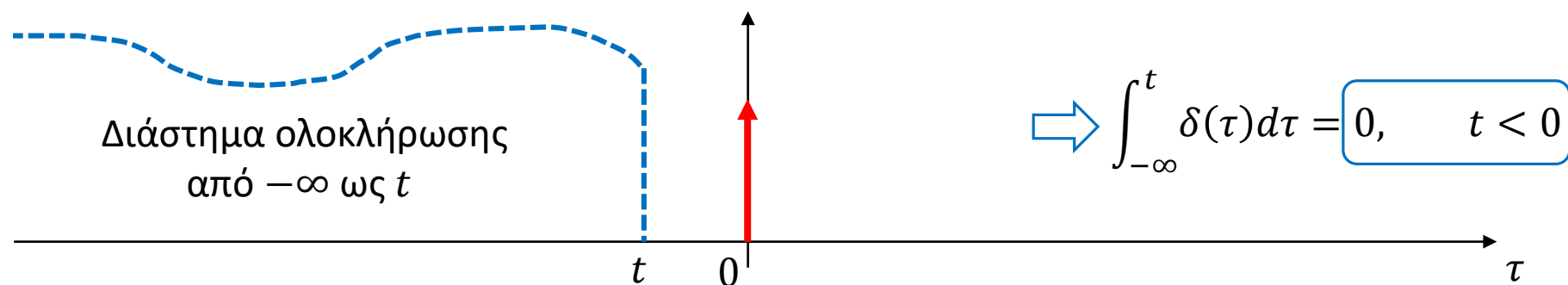
$$u'(t) = \frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$$

- Άμεση συνέπεια της παραπάνω σχέσης είναι η:

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

- Σήματα
- Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα και η βηματική συνάρτηση

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$



- Σήματα
- Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα
- Σύνοψη:

Ιδιότητες συνάρτησης Δέλτα

Ορισμός	$\delta(t) = 0, t \neq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$
Δειγματοληπτική ιδιότητα	$x(t)\delta(t \pm t_0) = x(\mp t_0)\delta(t \pm t_0)$
Ολοκλήρωση γινομένου	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t \pm t_0) dt = x(\mp t_0)$
Στάθμιση	$\delta(at) = \frac{\delta(t)}{ a }, a \in \mathbb{R} - \{0\}$
Άρτια συμμετρία	$\delta(-t) = \delta(t)$
Ολοκλήρωση συνάρτησης Δέλτα	$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$
Παραγωγή	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} \delta(t) x(t) dt = - \frac{d}{dt} x(t) \Big _{t=0}$
n -οστή παραγωγή	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t) x(t) dt = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} x(t) \Big _{t=0}$

Τέλος Διάλεξης

