

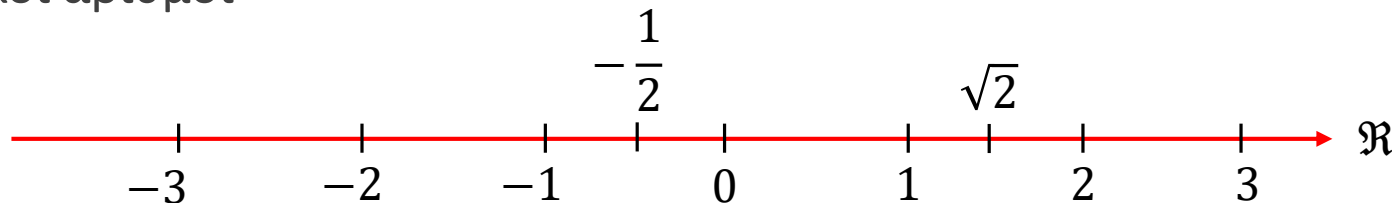
HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 1^Η

- Εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς



- Πραγματικοί αριθμοί



- Λύσεις εξισώσεων:

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \in \mathbb{R}$$

- Κάποιες εξισώσεις δεν έχουν λύση στο $\mathbb{R}$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \dots ?$$

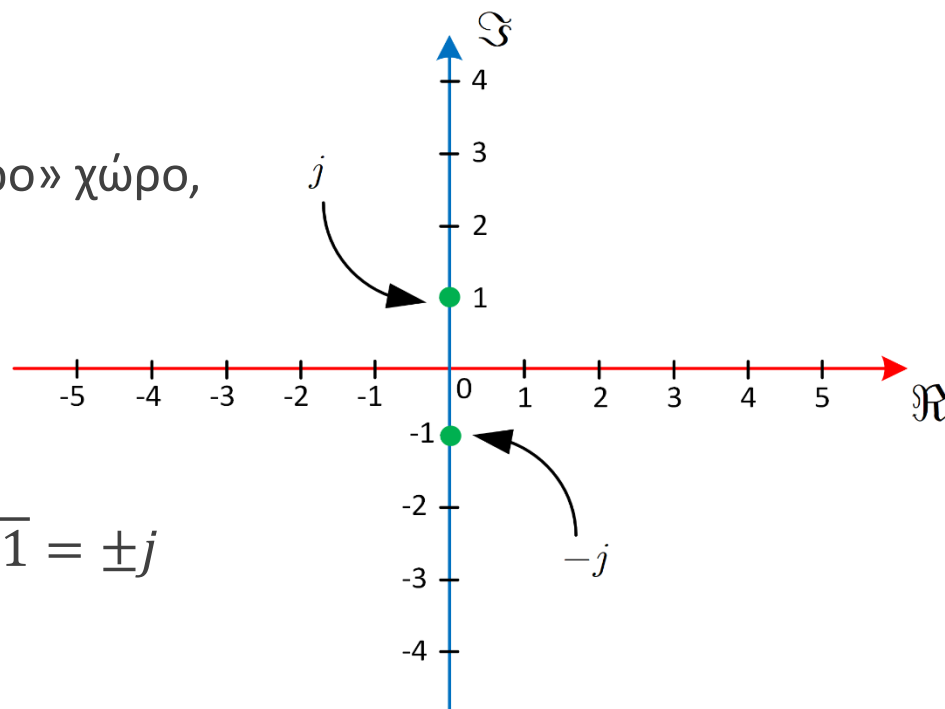
- Μπορούν να έχουν λύση σε ένα «ευρύτερο» χώρο, που περιλαμβάνει τον πραγματικό άξονα

- Ο χώρος αυτός λέγεται χώρος των **μιγαδικών αριθμών** - $\mathbb{C}$

- Λύση:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm j$$

με $\sqrt{-1} = j$ τη **φανταστική μονάδα**



- Οι άξονες που συντελούν στη δημιουργία του μιγαδικού επιπέδου ονομάζονται **πραγματικός (real)** και **φανταστικός (imaginary)** άξονας
- Κάθε σημείο αυτού του επιπέδου αποτελεί ένα ζεύγος αριθμών (x, y)
- Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό γράφεται ως $z = x + jy$ και ονομάζεται **μιγαδικός αριθμός (complex number)**
- Ας δούμε μια εύκολη εφαρμογή: έστω η εξίσωση

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- Αν $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ υπάρχουν δυο διαφορετικές ρίζες μεταξύ τους

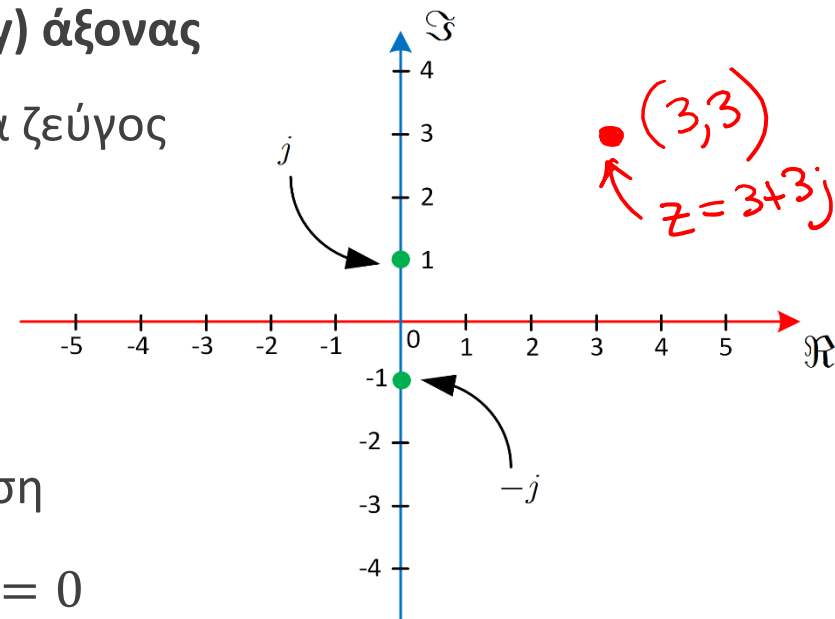
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Αν $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ υπάρχει μια διπλή ρίζα

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$$

- Αν $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ δεν υπάρχει λύση της εξίσωσης

- Όλα τα παραπάνω στο χώρο των πραγματικών αριθμών!



- Αν λύσουμε την εξίσωση στο χώρο των μιγαδικών αριθμών τότε το πράγμα αλλάζει!
Ας δούμε πως:

- Αν $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ υπάρχουν δυο διαφορετικές ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Αν $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ υπάρχει μια διπλή ρίζα

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$$

- Αν $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ υπάρχουν δυο διαφορετικές **(μιγαδικές)** ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-|\Delta|}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)|\Delta|}}{2a} = \frac{-b \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

- Οπότε υπάρχουν μιγαδικές ρίζες

$$x_1 = \frac{-b + j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

• Παράδειγμα:

$$ax^2 + bx + c$$

○ Βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 2x + 5$

Είναι $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$

Έχουμε δυο μιγαδικές ρίζες!

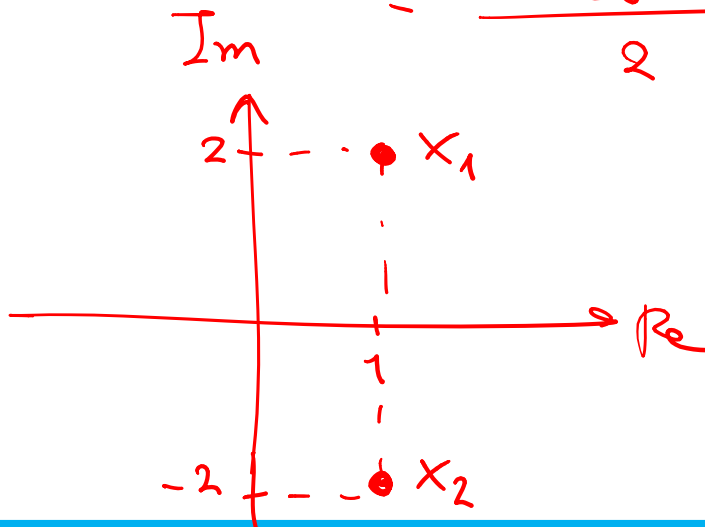
Είναι

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2 \cdot a} = \frac{-(-2) \pm j\sqrt{16}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm j4}{2}$$

$$\rightarrow x_1 = 1 + 2j$$

$$\rightarrow x_2 = 1 - 2j$$

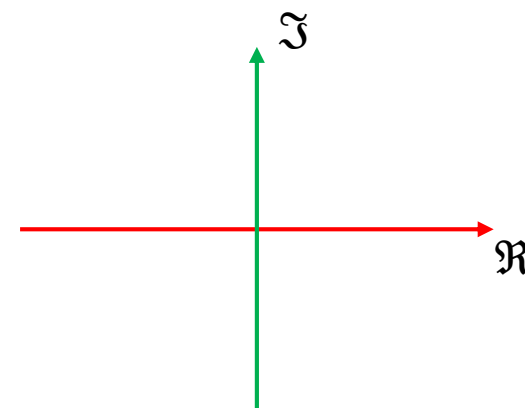


- Η μορφή $z = x + jy$ ενός μιγαδικού αριθμού ονομάζεται
καρτεσιανή

- Ορολογία:

□ **x : τετμημένη** : **πραγματικό μέρος** του μιγαδικού αριθμού
 $x = \Re\{z\} = \text{Re}\{z\}$

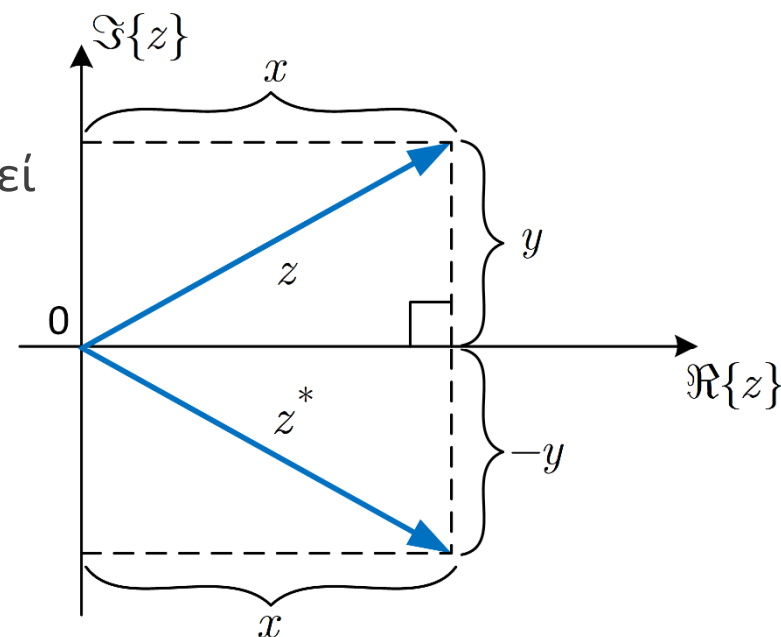
□ **y : τεταγμένη** : **φανταστικό μέρος** του μιγαδικού αριθμού
 $y = \Im\{z\} = \text{Im}\{z\}$



- Άρα

$$z = x + jy = \text{Re}\{z\} + j\text{Im}\{z\}$$

- Ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα **διάνυσμα** που ξεκινά από το $(0,0)$ και καταλήγει στις συντεταγμένες (x, y)



- **Συζυγής** (conjugate) ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$

$$z^* = x - jy = \Re\{z\} - j\Im\{z\}$$

Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Καρτεσιανή Μορφή

Ιδιότητα	Μαθηματική περιγραφή	
	$z_1 = x + jy$	
	$z_2 = u + jv$	
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = (ax + bu) + j(ay + bv)$	
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = (ax - bu) + j(ay - bv)$	
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = (xu - yv) + j(yu + xv)$	
Διαίρεση	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \left(\frac{xu + yv}{u^2 + v^2} \right) + j \left(\frac{uy - xv}{u^2 + v^2} \right)$	
Συζυγία	$z_1^* = x - jy$	★
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\}$	★
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\}$	★
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = x^2 + y^2$	★
Πηλίκο συζυγών	$\frac{z_1}{z_1^*} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + j \frac{2xy}{x^2 + y^2}$	
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$	★
	$(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$	★
	$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$	★
	$\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$	★
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{z_1^*}{z_1 z_1^*} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j \frac{y}{x^2 + y^2}$	
Ισότητα	$z_1 = z_2$ αν και μόνο αν $\Re\{z_1\} = \Re\{z_2\}$ και $\Im\{z_1\} = \Im\{z_2\}$	★
$z \in \mathbb{R}$	$z = z^*$	★
$z \in \Im$	$z = -z^*$	★

- Ένα πολύ χρήσιμο μαθηματικό θεώρημα λέει ότι:
- Ένα πολυώνυμο βαθμού N έχει γενικά N ρίζες (πραγματικές ή/και μιγαδικές). Αν οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε οι όποιες μιγαδικές ρίζες υπάρχουν θα «έρχονται» πάντα σε συζυγή ζεύγη!

- Το είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα

- Π.χ.

$$(z + j)(z - j) = z^2 + 1$$

$$(z + (2 + j))(z + (2 - j)) = z^2 + 4z + 5$$

$$(z + (-1 + j\sqrt{2}))(z + (-1 - j\sqrt{2})) = z^2 + 2z + 3$$

$$(z + j)(z + 1) = z^2 + (1 + j)z + j$$

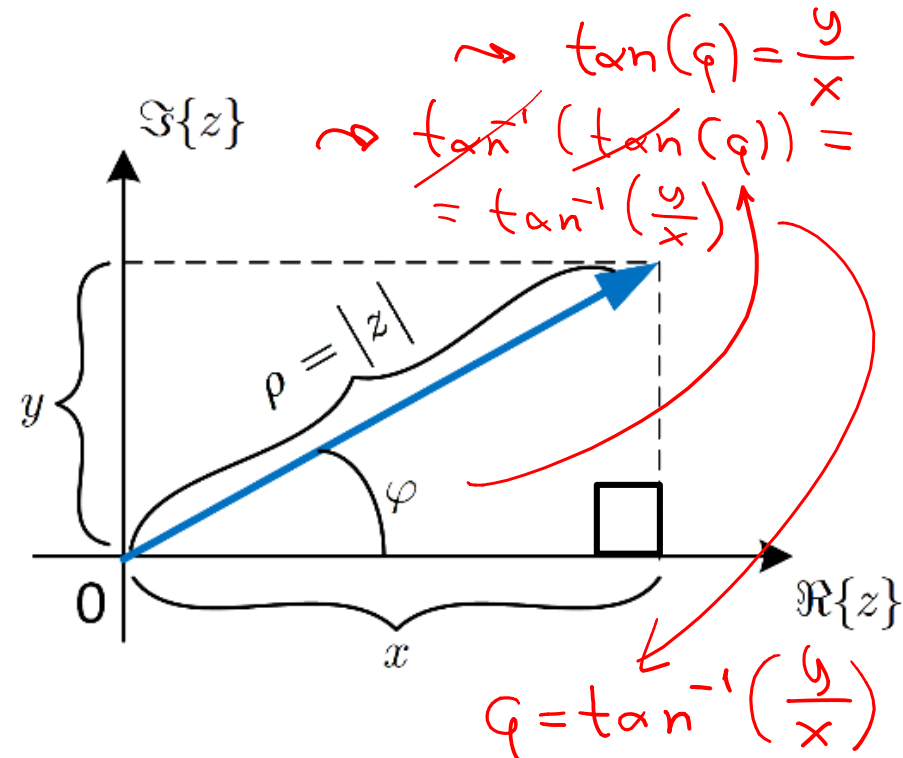
- **Μέτρο** μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ονομάζεται το μήκος του διανύσματος που τον αναπαριστά στο μιγαδικό επίπεδο
 - Αλλιώς, μέτρο ονομάζεται η ευκλείδεια απόσταση του μιγαδικού αριθμού από την αρχή των αξόνων

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- **Φάση** μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ονομάζεται η γωνία φ που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα (των πραγματικών αριθμών) κατά την ορθή μαθηματική φορά
 - Συμβολίζεται και ως $\arg(z)$ ή $\angle z$

$$\varphi = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \\ \text{απροσδιόριστο}, & x = 0, y = 0 \end{cases}$$

$\in (-\pi, \pi]$



- Αντί της καρτεσιανής, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια άλλη μορφή, την **πολική**
- Η πολική μορφή χρησιμοποιεί την έννοια του μέτρου και της φάσης που είδαμε
- Από απλή τριγωνομετρία στο ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε:

$$z = x + jy = \rho \cos \varphi + j\rho \sin \varphi = \rho(\cos \varphi + j \sin \varphi) = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

- Η παραπάνω πολική μορφή μπορεί να απλοποιηθεί μέσω **των σχέσεων του Euler**
- Σχέση του Euler:

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

συζυγής:

$$e^{-j\varphi} = \cos(\varphi) - j\sin(\varphi)$$

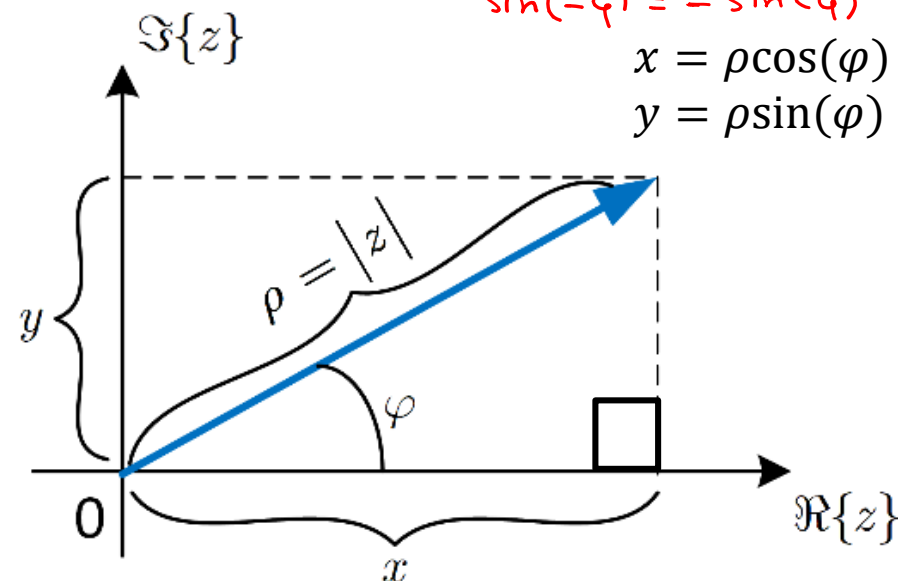
γιατί $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$
 $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$

- Άμεσες συνέπειες της παραπάνω σχέσης:

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

- Μεγάλης σπουδαιότητας σχέσεις!

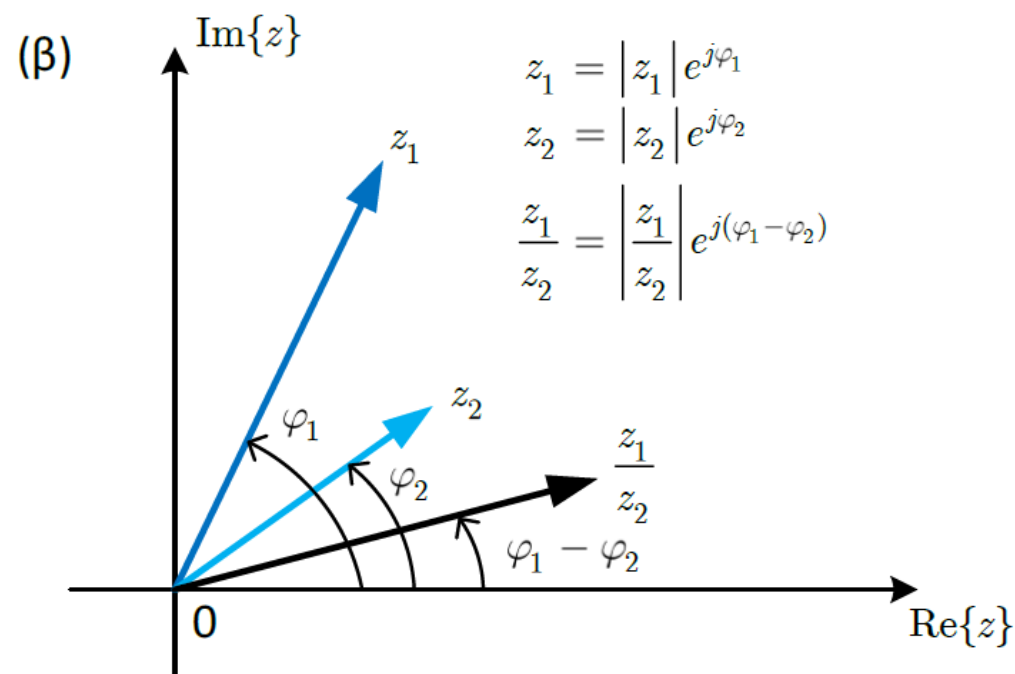
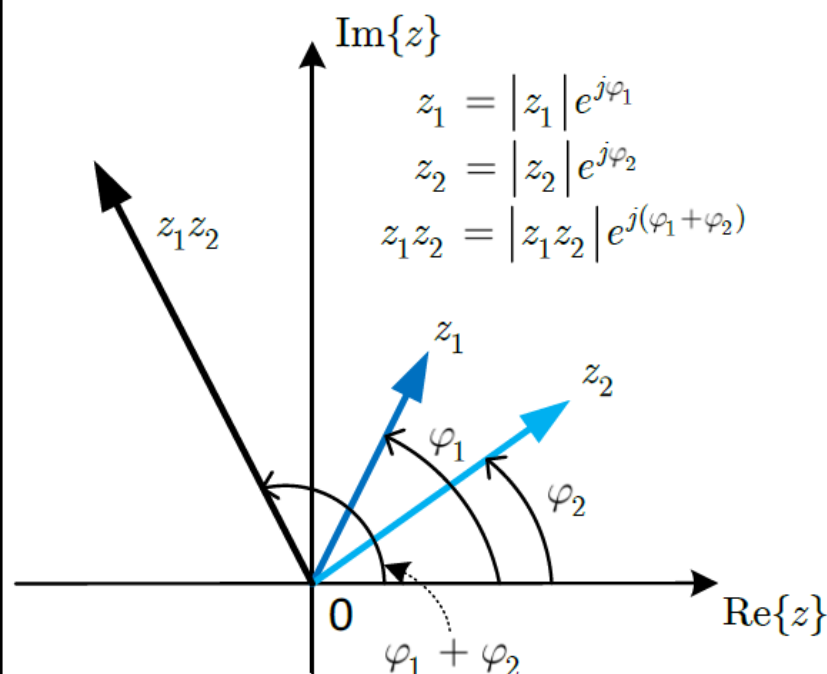


- Η πολική μορφή γράφεται ως:

$$z = x + jy = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) = |z|e^{j\varphi}$$

με $|z|$, φ όπως τα περιγράψαμε νωρίτερα

- Η πολική μορφή είναι πολύ χρήσιμη όταν έχουμε να κάνουμε με τις πράξεις του **γινομένου** και της **διαίρεσης** μεταξύ μιγαδικών αριθμών
- Αντίθετα, η καρτεσιανή μορφή είναι πολύ βολική για τις πράξεις της **πρόσθεσης** και της **αφαίρεσης**



Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Πολική Μορφή

Ιδιότητα	Μαθηματική περιγραφή	
	$z_1 = \rho_1 e^{j\phi_1}, \rho_1 > 0$	
	$z_2 = \rho_2 e^{j\phi_2}, \rho_2 > 0$	
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = a\rho_1 e^{j\phi_1} + b\rho_2 e^{j\phi_2}$	
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = a\rho_1 e^{j\phi_1} - b\rho_2 e^{j\phi_2}$	
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} \rho_2 e^{j\phi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$	★
Διαίρεση	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_2 e^{j\phi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$	★
Συζυγία	$z_1^* = \rho e^{-j\phi_1}$	★
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\} = 2\rho \cos(\phi_1)$	★
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\} = 2j\rho \sin(\phi_1)$	★
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = \rho_1 \rho_1 e^{j\phi_1} e^{-j\phi_1} = \rho_1^2 = z_1 ^2$	★
Πηλίκο συζυγών	$\frac{z_1}{z_1^*} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_1 e^{-j\phi_1}} = e^{j2\phi_1}$	★
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} + \rho_2 e^{-j\phi_2}$	
	$(z_1 - z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} - \rho_2 e^{-j\phi_2}$	
	$(z_1 z_2)^* = \rho_1 \rho_2 e^{-j(\phi_1 + \phi_2)}$	★
	$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{-j(\phi_1 - \phi_2)}$	★
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\rho_1 e^{j\phi_1}} = \frac{1}{\rho_1} e^{-j\phi_1}$	★
Ισότητα	$z_1 = z_2$ αν και μόνο αν $ \rho_1 = \rho_2 $ και $\phi_1 = \phi_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	★

- Κάποιες πολικές μορφές εμφανίζονται πολύ συχνά στην πράξη
- Ας τις δούμε

Συνήθεις πολικές μορφές	
Φάση ϕ	Πολική μορφή
0	$e^{j0} = 1$
$\pm\pi$	$e^{\pm j\pi} = -1$
$\pm k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm jk\pi} = (-1)^k = \begin{cases} 1, & k \text{ άρτιος} \\ -1, & k \text{ περιττός} \end{cases}$
$\pm 2\pi$	$e^{\pm j2\pi} = 1$
$\pm 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm j2k\pi} = 1$
$\pm \frac{\pi}{2}$	$e^{\pm j\pi/2} = \pm j$

- Όλα τα παραπάνω αποδεικνύονται θέτοντας κατάλληλη τιμή του φ στη σχέση του Euler

$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j \sin(\phi)$$

- **Δυνάμεις μιγαδικών αριθμών**

- Για τον υπολογισμό δυνάμεων μιγαδικών αριθμών, η καρτεσιανή μορφή είναι πολύ χρονοβόρα
- Με πολική μορφή:

$$z^n = (|z|e^{j\varphi})^n = |z|^n e^{jn\varphi} = |z|^n (\cos(n\varphi) + j \sin(n\varphi))$$

- Η μορφή αυτή ονομάζεται **σχέση του De Moivre**
- Με βάση την παραπάνω σχέση μπορούμε εύκολα να βρίσκουμε λύσεις εξισώσεων της μορφής

$$z^N - a = 0, \quad a = |a|e^{j\theta} \in \mathbb{C}, \quad N \in \mathbb{N}$$

- Ας δούμε πως

$$z^N = a \iff |z|^N e^{jN\varphi} = |a|e^{j(\theta+2\pi k)} \iff z := \begin{cases} |z| = |a|^{\frac{1}{N}} \\ \varphi = \frac{\theta + 2\pi k}{N}, k = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

- Θέλουμε μόνο N ρίζες αφού το πολυώνυμο είναι N βαθμού

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $z^3 - 8 = 0$

Είναι $z^3 = 8$

$$\left. \begin{aligned} \bullet z^3 &= (|z| e^{j\varphi})^3 = |z|^3 e^{j3\varphi} \\ \bullet 8 &= 8 \cdot \underbrace{e^{j0}}_1 = 8 \cdot \underbrace{e^{j2\pi k}}_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z|^3 e^{j3\varphi} = 8 \cdot e^{j2\pi k}, \quad k = 0, 1, 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z|^3 = 8 \\ 3\varphi = 2\pi k \end{cases} = \begin{cases} |z| = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \varphi = \frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} e^{j\frac{4\pi}{3}} &= e^{j\frac{6\pi - 2\pi}{3}} \\ &= e^{j2\pi} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \\ &\uparrow \quad \uparrow \\ 1 & \quad = e^{-j\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

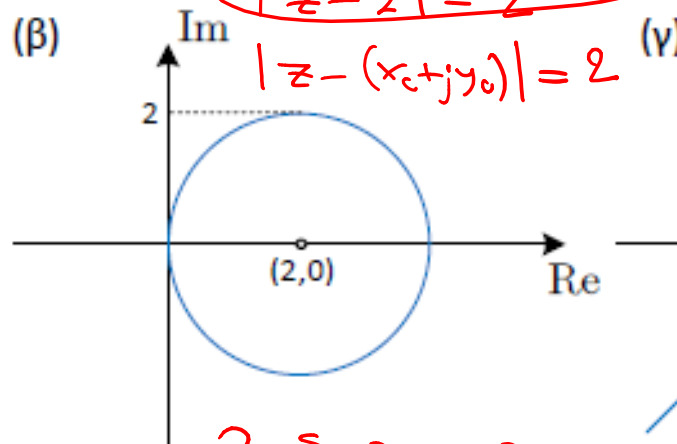
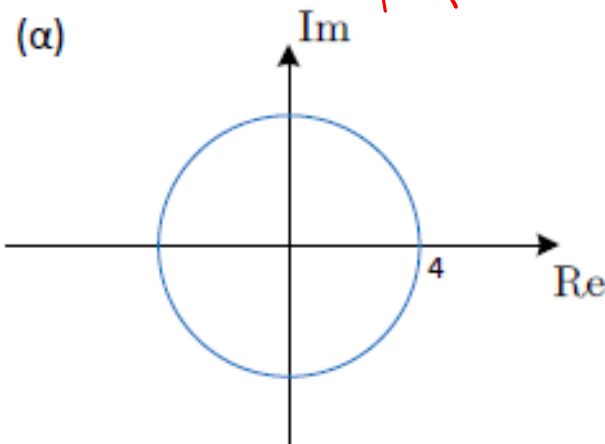
Άρα $z_1 = 2 e^{j0} = 2$, $z_2 = 2 \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}}$, $z_3 = 2 \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}} = 2 e^{-j\frac{2\pi}{3}}$

Γεωμετρικοί Τόποι

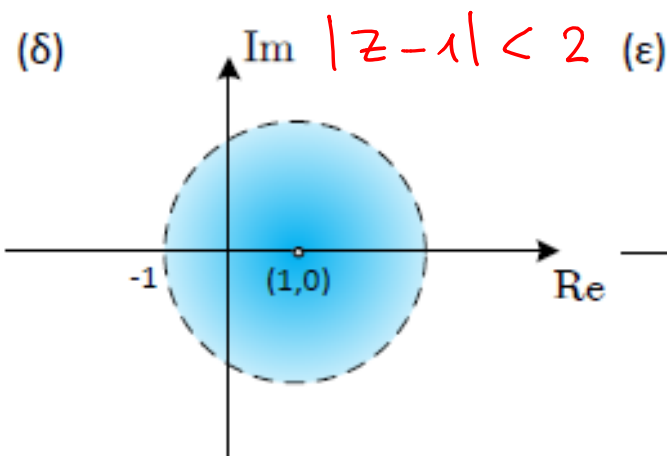
- Η περιοχή του μιγαδικού επιπέδου της οποίας οι μιγαδικοί αριθμοί ικανοποιούν μια συγκεκριμένη (γεωμετρική, πολλές φορές) ιδιότητα ονομάζεται **γεωμετρικός τόπος**

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

$$|z| = 4$$

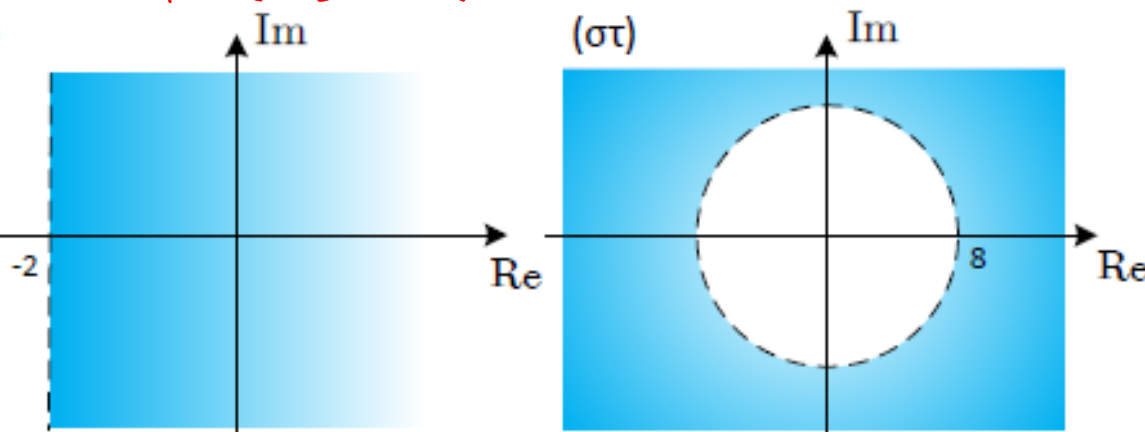


$$\operatorname{Re}\{z\} = \operatorname{Im}\{z\}$$



$$\operatorname{Re}\{z\} > -2$$

$$|z| > 8$$



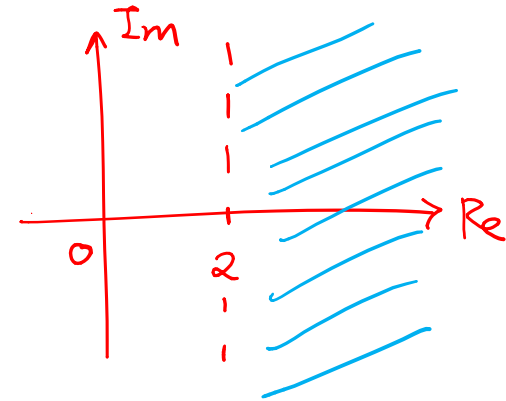
• Παράδειγμα:

○ Βρείτε και σχεδιάστε τους γεωμετρικούς τόπους που περιγράφονται από τις εξισώσεις:

a) $\Re\{z\} > 2$

$$a) \Re\{z\} > 2 \Rightarrow x > 2$$

$$z = x + jy$$



b) $|z - (2 - j)| = 2$

c) $\arg(z + 1) = \frac{\pi}{3}$

b) Αν $z = x + jy$, τότε $|z - (2 - j)| = 2 \Leftrightarrow |x + jy - 2 + j| = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |(x-2) + j(y+1)| = 2 \Leftrightarrow |(x-2) + j(y+1)|^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4 = 2^2$$

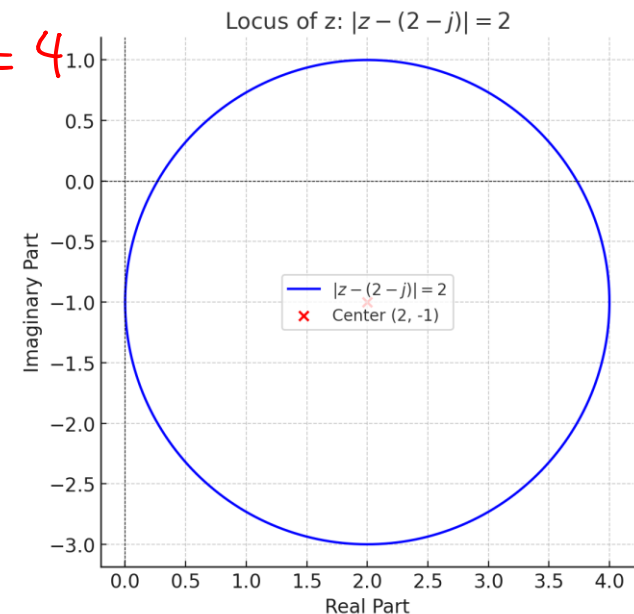
Γενική μορφή:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

Κύκλος ακτίνας

$$r = 2$$

με κέντρο το
 $(2, -1)$



• Παράδειγμα:

$$\left. \begin{array}{l} c) \arg(z+1) = \frac{\pi}{3} \\ z = x+jy \end{array} \right\} \Rightarrow \arg(x+jy+1) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arg(\underbrace{(x+1)+jy}_{\omega}) = \frac{\pi}{3}$$

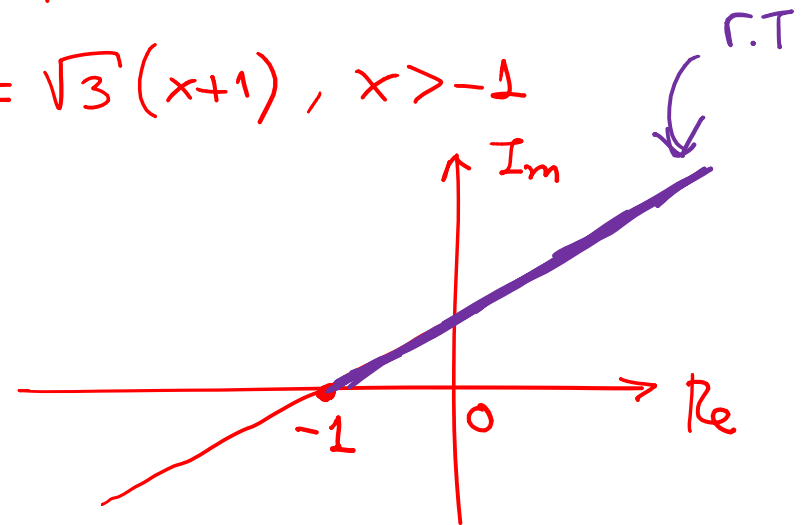
Άρα

$$\tan^{-1} \frac{y}{x+1} = \frac{\pi}{3}, \operatorname{Re}\{\omega\} > 0 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Rightarrow \boxed{x > -1}$$

οπότε

$$\tan(\tan^{-1}(\frac{y}{x+1})) = \tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$$

$$\frac{y}{x+1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow y = \sqrt{3}(x+1), x > -1$$



• Μιγαδικές Συναρτήσεις

- Οι μιγαδικές συναρτήσεις έχουν ως πεδίο ορισμού ένα τμήμα του μιγαδικού επιπέδου και πεδίο τιμών μιγαδικούς (εν γένει) αριθμούς
- Μια τέτοια συνάρτηση $f(z)$ είναι (εν γένει) τεσσάρων διαστάσεων
- Μπορούμε όμως να σχεδιάζουμε το μέτρο και τη φάση της, ή το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της
- Οι έννοιες του ορίου, της συνέχειας, και της παραγωγισιμότητας έχουν αρκετές ομοιότητες αλλά και λίγες διαφορές με αυτές που γνωρίζουμε από τις πραγματικές συναρτήσεις
- Μια εκτενής παρουσίαση είναι εκτός σκοπού
 - Θα αντιμετωπίσουμε τις (όποιες) μιγαδικές συναρτήσεις όταν τις συναντήσουμε
- Θα μας απασχολήσουν περισσότερο **συναρτήσεις του χρόνου t** οι οποίες (μερικές φορές) θα παίρνουν **μιγαδικές τιμές**
- Ας δούμε μια τέτοια απλή και ΠΟΛΥ σημαντική συνάρτηση **του χρόνου t**
- Τη συνάρτηση

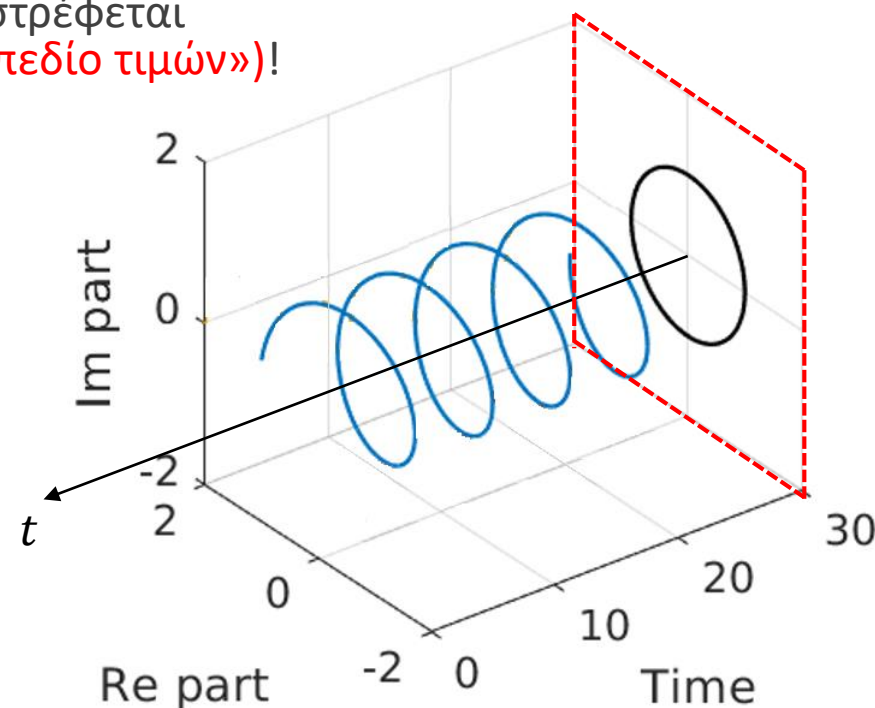
$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)$$

- Η συνάρτηση $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$
- Η συνάρτηση αυτή είναι μια συνάρτηση του χρόνου η οποία παίρνει μιγαδικές τιμές!
- Άρα για τη σχεδιάσή της χρειαζόμαστε έναν άξονα t («πεδίο ορισμού»)
- Επίσης, θέλουμε ένα μιγαδικό «χώρο» (επίπεδο) για να βάζουμε τις τιμές της, π.χ. $x(0) = 1$, $x(1.2) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$, $x(\sqrt{5}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}j, \dots$
 - Παρατηρούμε ότι κάθε μια από αυτές τις τιμές, ως μιγαδικοί αριθμοί, θα περιγράφεται από ένα διάνυσμα, που περιστρέφεται (αλλάζει τιμές) επάνω στο **μιγαδικό επίπεδο** («πεδίο τιμών»)!
- Για κάθε χρονική στιγμή t_0 , η συνάρτηση θα περιγράφεται από ένα διάνυσμα σταθερού **μοναδιαίου** μέτρου...
 - ...αφού $|e^{j\theta(t)}| = |\cos \theta(t) + j \sin \theta(t)|$

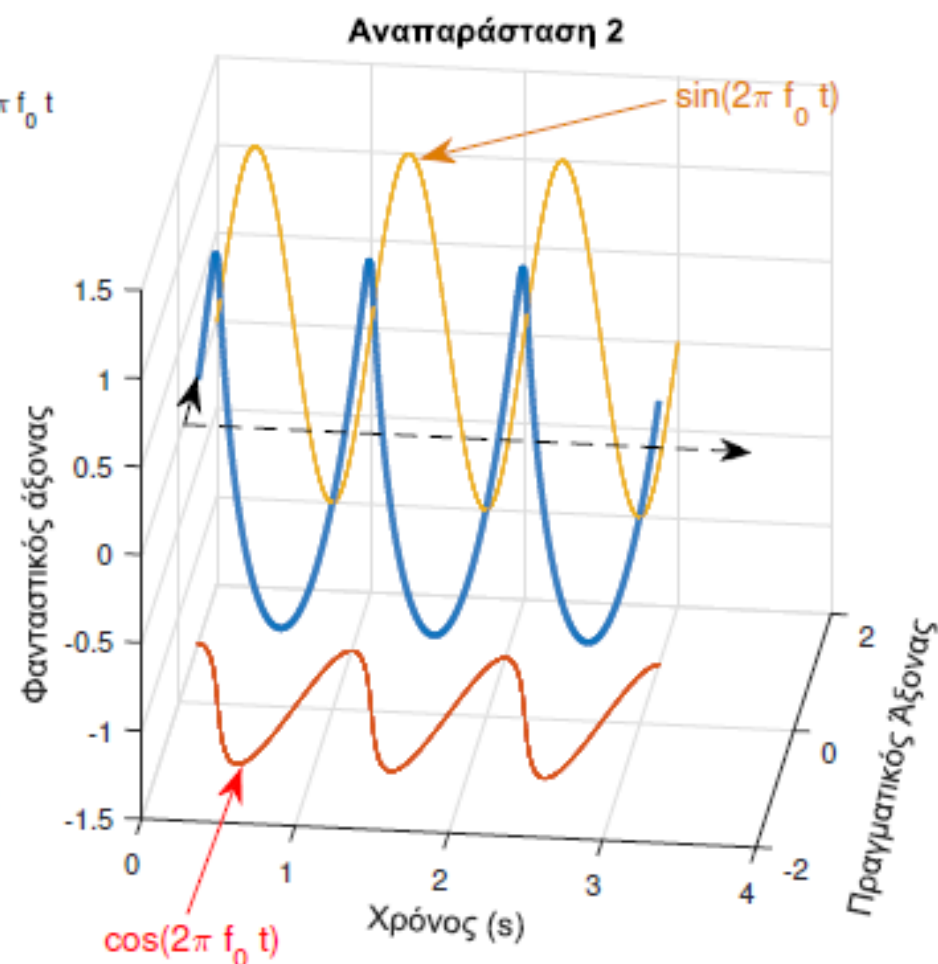
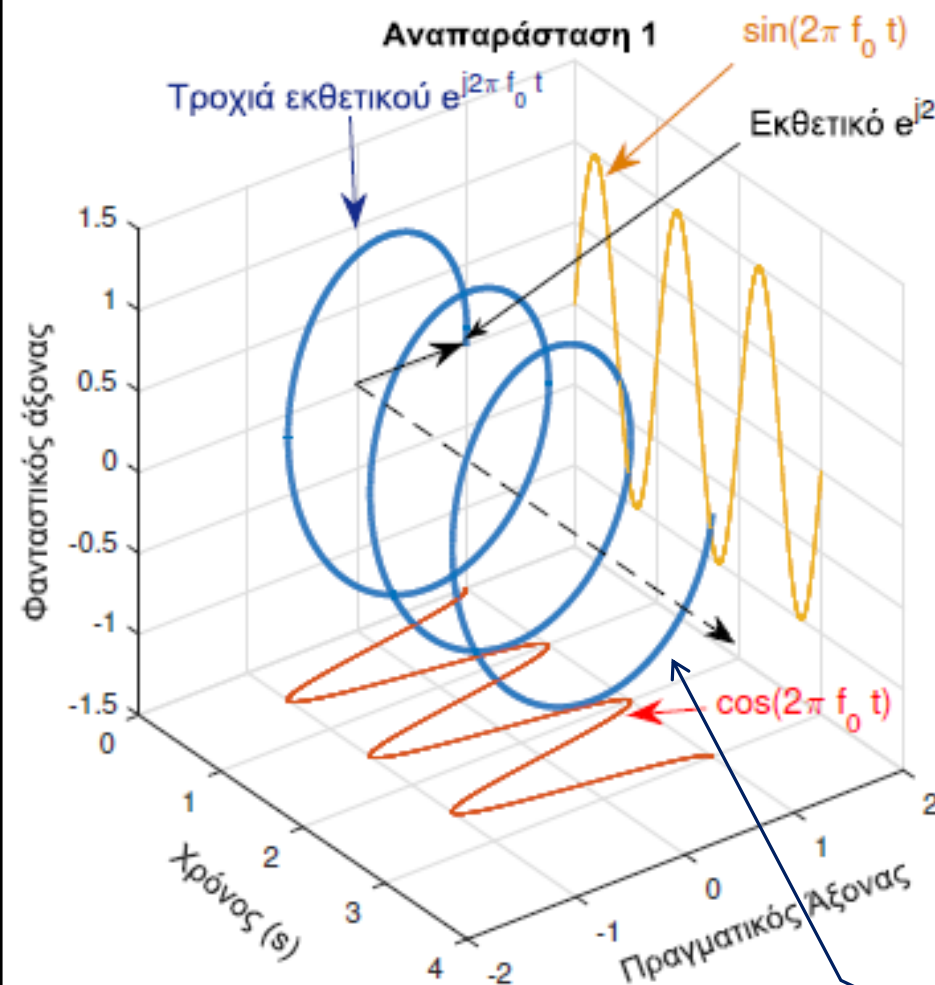
$$= \sqrt{\cos^2 \theta(t) + \sin^2 \theta(t)}$$

$$= 1$$

το οποίο προβάλλεται γύρω από τον άξονα του χρόνου σε σπειροειδή τροχιά



- Η συνάρτηση $x(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)$



Η περιστροφή γίνεται με γωνιακή συχνότητα $\omega_0 = 2\pi f_0$ ή με συχνότητα f_0 Hz

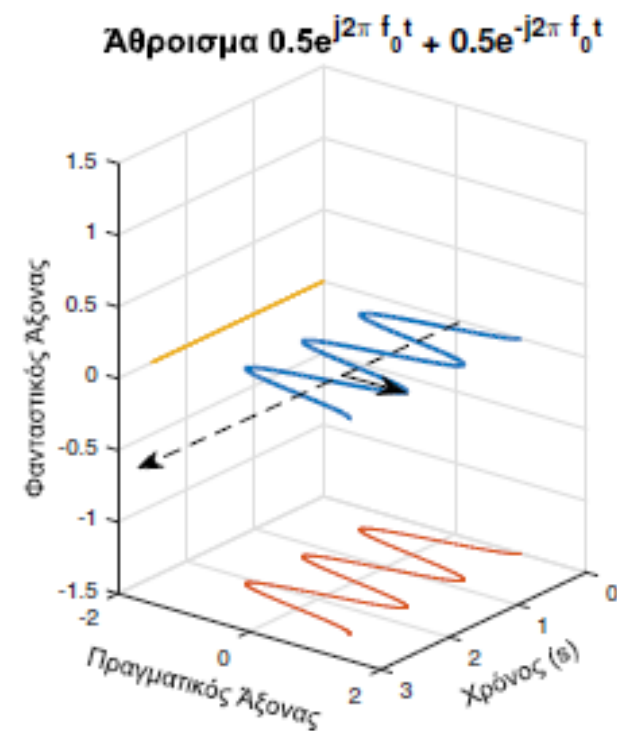
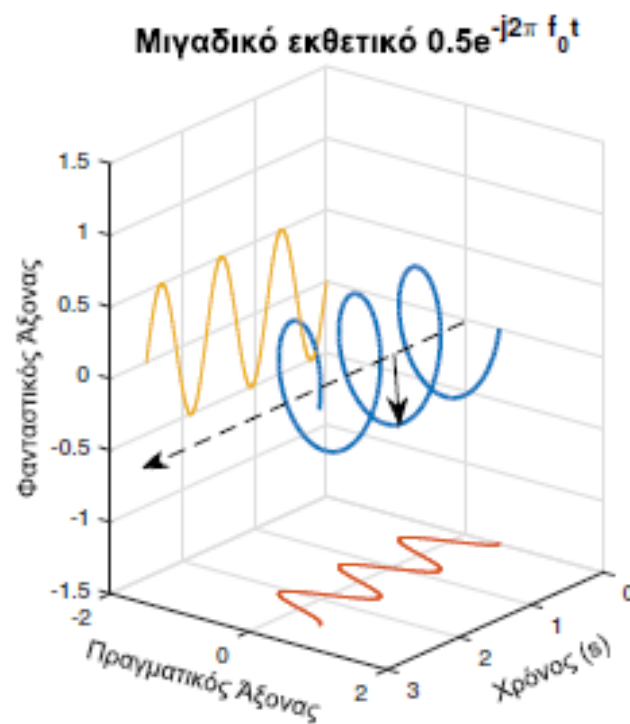
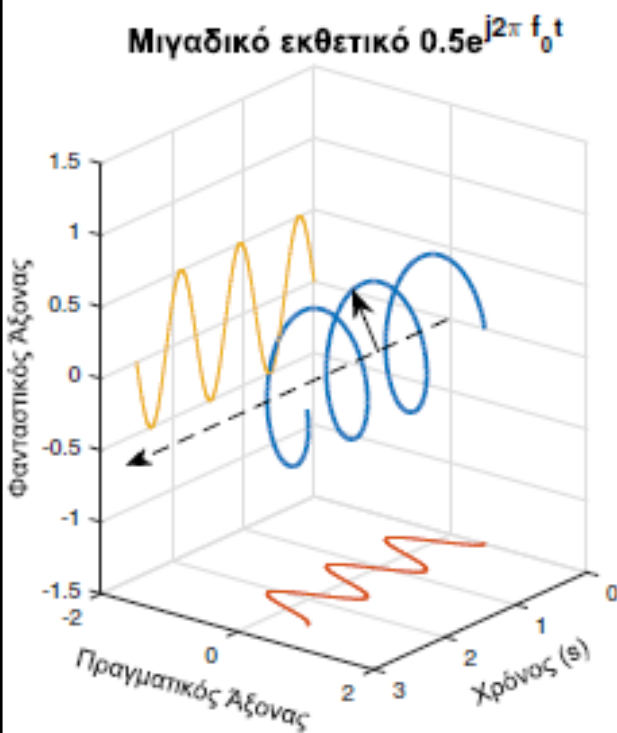
- Η συνάρτηση $x(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)$
- Θα παρατηρήσετε ότι η προβολή της συνάρτησης στο επίπεδο (χρόνος, πραγματικός άξονας) αποτελεί ένα **συνημίτονο**!
- Αντίθετα, η προβολή στο επίπεδο (χρόνος, φανταστικός άξονας) «σχηματίζει» ένα **ημίτονο**!
- Αυτό είναι συνεπές με τις σχέσεις του Euler:

$$\Re\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \cos 2\pi f_0 t = \frac{1}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 t}$$

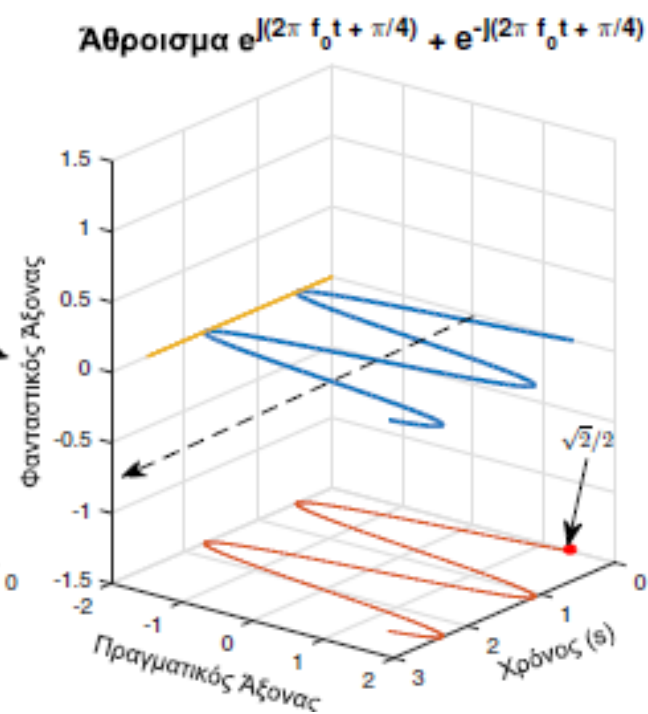
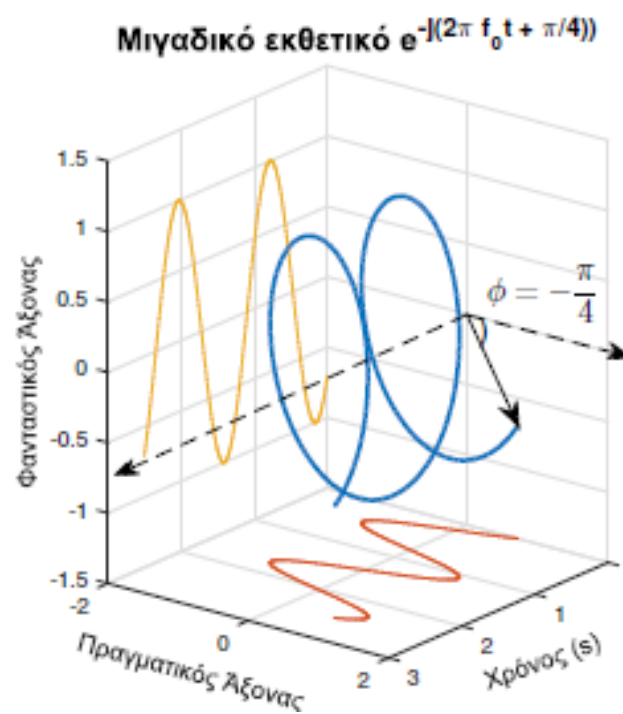
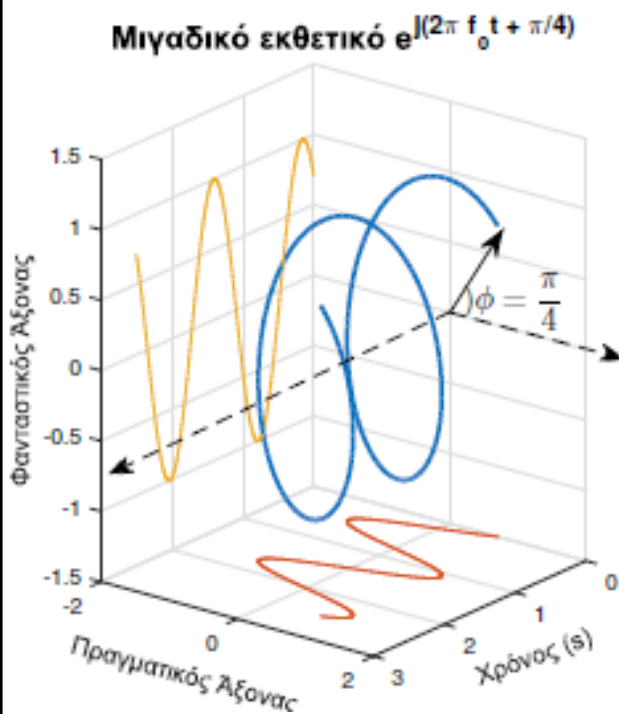
$$\Im\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \sin 2\pi f_0 t = \frac{1}{2j} e^{j2\pi f_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j2\pi f_0 t}$$

- **Επιπλέον**, από τις παραπάνω σχέσεις βλέπετε ότι το άθροισμα δυο συζυγών εκθετικών συναρτήσεων δίνει μια πραγματική συνάρτηση!
- Ας το δούμε αυτό οπτικά...

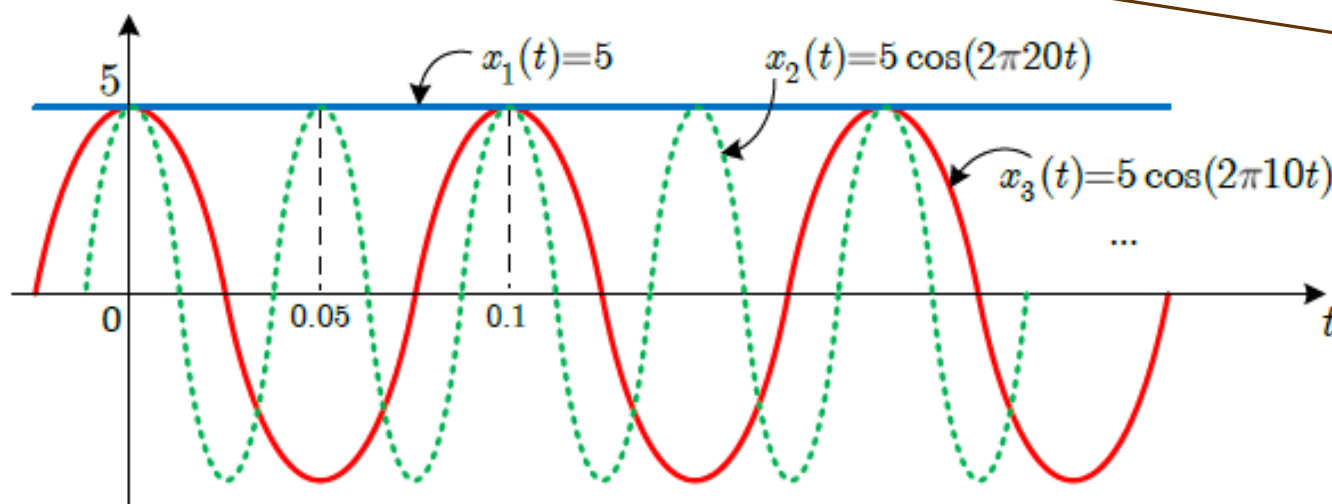
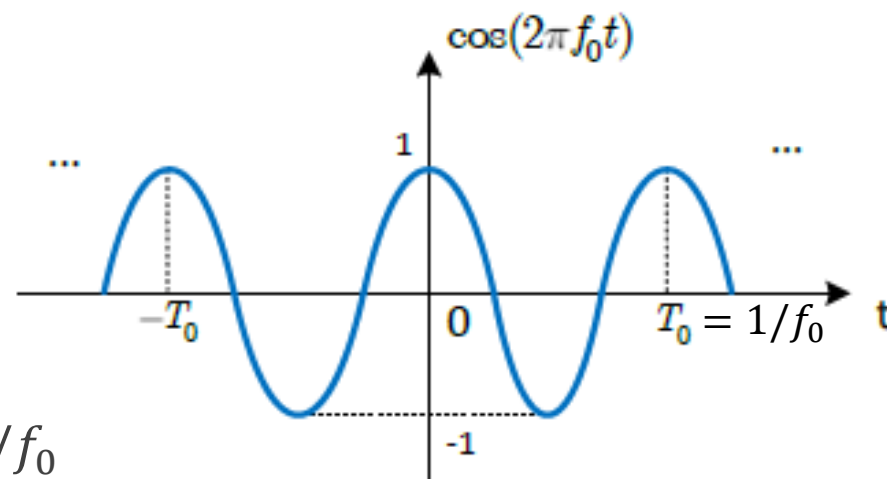
- Η συνάρτηση $x(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)$



- Η συνάρτηση $x(t) = e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} = \cos(2\pi f_0 t + \phi) + j \sin(2\pi f_0 t + \phi)$



- Στην έννοιες που θα συζητήσουμε στο μάθημα, παίζουν θεμελιώδη ρόλο οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις
- Γενικότερα, μια ημιτονοειδής συνάρτηση ορίζεται ως $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$
- A : πλάτος ημιτονοειδούς
- f_0 : συχνότητα ημιτονοειδούς
- φ : φάση μετατόπισης (ή αρχική φάση) ημιτονοειδούς
- Κάθε απλό ημιτονοειδές είναι **περιοδική** συνάρτηση του χρόνου, με **περίοδο** $T_0 = 1/f_0$



Περίοδος: το ελάχιστο χρονικό διάστημα που η συνάρτηση επαναλαμβάνει τον εαυτό της! Η περίοδος και συχνότητα είναι αντίστροφες μεταξύ τους ποσότητες.

• Μετατόπιση Φάσης

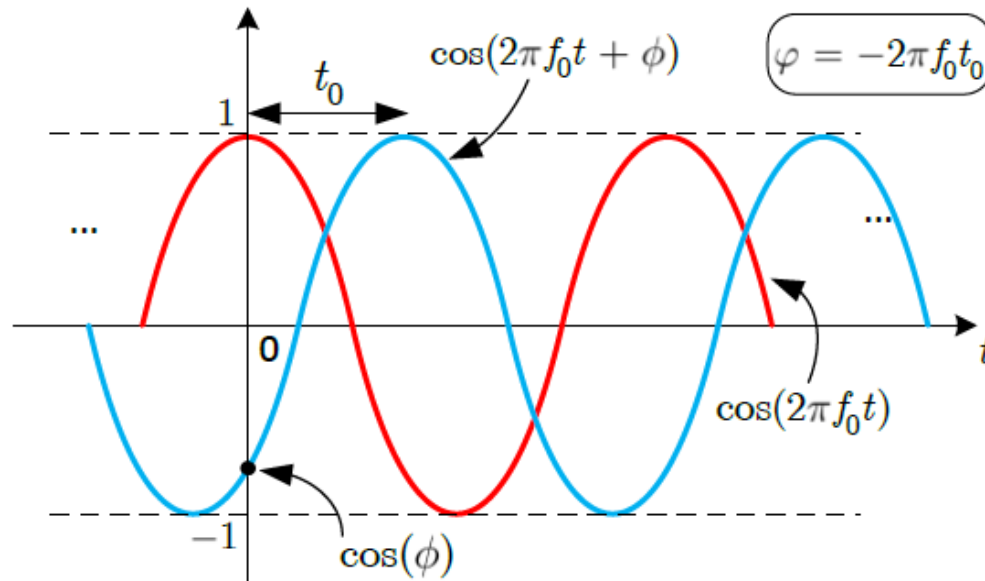
- Η φάση μετατόπισης είναι μια τιμή που καθορίζει πόσο έχει μετατοπιστεί το ημιτονοειδές από τη θέση $t = 0$
- Αν $x_0(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)|_{\varphi=0} = A \cos(2\pi f_0 t)$ το ημιτονοειδές **χωρίς** μετατόπιση, τότε

$$x_0(t - t_0) = A \cos(2\pi f_0(t - t_0)) = A \cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

- Μια μετατόπιση κατά t_0 δεξιά ισούται με φάση μετατόπισης

$$\varphi = -2\pi f_0 t_0 = -\frac{2\pi t_0}{T_0}$$

- Σχηματικά ($A = 1$):



• Άθροισμα Ημιτόνων

- Είναι ενδιαφέρον να δούμε πως μπορούν να απλοποιηθούν οι πράξεις μεταξύ ημιτόνων όταν περνάμε μέσα από το μιγαδικό χώρο

- Ας υπολογίσουμε το άθροισμα

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) + B \sin(2\pi f_0 t)$$

- Από τις σχέσεις του Euler, μπορούμε να γράψουμε:

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) + B \sin(2\pi f_0 t)$$

$$= \Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} + B \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Euler:

$$\begin{aligned} Ae^{j2\pi f_0 t} &= A \cos(2\pi f_0 t) + jA \sin(2\pi f_0 t) \\ &= \Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} + j\Im\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} \end{aligned}$$

$$= \Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} + \Re\{Be^{j(2\pi f_0 t - \pi/2)}\}$$

$$= \Re\{Ae^{j2\pi f_0 t} + Be^{j(2\pi f_0 t - \pi/2)}\}$$

$$= \Re\{(A + Be^{-j\pi/2})e^{j2\pi f_0 t}\}$$

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

$\pm\pi$, σύμφωνα με τη γνωστή σχέση

- Όμως: $A + Be^{-j\frac{\pi}{2}} = A - jB = \sqrt{A^2 + B^2}e^{j\varphi}$, $\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{B}{A}\right)$

• Άθροισμα Ημιτόνων

• Άρα

$$x(t) = \Re\{(A + Be^{-j\pi/2})e^{j2\pi f_0 t}\}$$

$$= \Re\{\sqrt{A^2 + B^2}e^{j\varphi}e^{j2\pi f_0 t}\}$$

Euler:

$$A \cos(2\pi f_0 t) = \Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} = \Re\{\sqrt{A^2 + B^2}e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}\}$$

- Από την τελευταία σχέση – με χρήση Euler – διαπιστώνουμε ότι

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

- Η παραπάνω διαδικασία γενικεύεται και για N ημίτονα

- Ο μιγαδικός $(A + Be^{-j\pi/2})$ ονομάζεται **φάσoρας (phasor)**

- Κάθε (σταθερός) μιγαδικός αριθμός $z = x + jy = |z|e^{j\theta}$ που σχετίζεται με γινόμενο

$$z \cdot e^{j2\pi f_0 t} = |z|e^{j\theta} \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

με μια συνάρτηση $e^{j2\pi f_0 t}$ λέγεται φάσoρας

• Παράδειγμα:

○ Λύστε την εξίσωση $A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \cos(2\pi 50t + \pi) + \cos\left(2\pi 50t - \frac{\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{ A e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} \} &= \operatorname{Re} \{ 1 \cdot e^{j(2\pi 50t + \pi)} \} + \operatorname{Re} \{ 1 \cdot e^{j(2\pi 50t - \frac{\pi}{3})} \} \\ &= \operatorname{Re} \{ e^{j(2\pi 50t + \pi)} + e^{j(2\pi 50t - \frac{\pi}{3})} \} \\ &= \operatorname{Re} \{ e^{j\pi} \cdot e^{j2\pi 50t} + e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{j2\pi 50t} \} \end{aligned}$$

δηλ.

$$\operatorname{Re} \{ \underbrace{A e^{j\phi}}_{W: \text{phasor}} \cdot e^{j2\pi f_0 t} \} = \operatorname{Re} \{ \underbrace{(e^{j\pi} + e^{-j\frac{\pi}{3}})}_{Z: \text{phasor}} e^{j2\pi 50t} \} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_0 = 50 \text{ Hz} \end{array} \right.$$

Είνα

$$\begin{aligned} Z &= e^{j\pi} + e^{-j\frac{\pi}{3}} = -1 + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -1 + \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \sim \text{καρτεσιανή μορφή, δέχουμε ποδική!} \end{aligned}$$

$$|Z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$$

Άρα $Z = 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} = A e^{j\phi} \Rightarrow A = 1, \phi = -\frac{2\pi}{3}$

• Παράδειγμα:

○ Λύστε την εξίσωση $\Re\{\overbrace{(1+j)}^z\}e^{j\theta} = -1$ (1)

Είναι $z = 1+j = |z|e^{j\varphi}$, $|z| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}$, $\varphi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}}{\text{Re}}$

Συγκεκριμένα, $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
 $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ } $\Rightarrow$

$\Rightarrow z = |z|e^{j\varphi} = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$. Από (1) δίνει

$\Re\{ze^{j\theta}\} = -1 \Leftrightarrow \Re\{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j\theta}\} = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Re\{\sqrt{2}e^{j(\theta + \frac{\pi}{4})}\} = -1 \xrightarrow{\text{Euler}} \sqrt{2} \cdot \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \theta + \frac{\pi}{4} = 2nk \pm \frac{3\pi}{4},$
 $k \in \mathbb{Z}$

- Παράδειγμα:

○ Λύστε την εξίσωση $\Re\{(1+j)e^{j\theta}\} = -1$

Οότε

$$\theta = 2nk \pm \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = \begin{cases} 2nk + \frac{\pi}{2} \\ 2nk - \pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

• Περιοδικότητα

- Είδαμε νωρίτερα ότι ένα απλό ημίτονο είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$
- Άραγε το **άθροισμα** ημιτόνων είναι περιοδικό?
- Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα:
- Έστω $x(t) = \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$, $f_1 \neq f_2$
- Έστω ότι είναι περιοδικό. Τότε θα ισχύει $x(t) = x(t + T_0)$ για κάποιο $T_0 > 0$

- Άρα

$$\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) = \cos(2\pi f_1(t + T_0) + \phi_1) + \cos(2\pi f_2(t + T_0) + \phi_2)$$

$$\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) = \cos(2\pi f_1 t + \underline{2\pi f_1 T_0} + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \underline{2\pi f_2 T_0} + \phi_2)$$

- Πρέπει

$$\begin{aligned} 2\pi f_1 T_0 &= 2\pi k, & k &\in \mathbb{Z} \\ 2\pi f_2 T_0 &= 2\pi l, & l &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- Οπότε διαιρώντας

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{k}{l} = \text{λόγος ακεραιων}$$

• Παράδειγμα:

○ Ελέγξτε αν τα παρακάτω αθροίσματα είναι περιοδικά

$$\alpha) \quad x(t) = 2 \cos \left(2\pi \underbrace{100t}_{f_1} + \frac{\pi}{3} \right) - 3 \sin \left(2\pi \underbrace{250t}_{f_2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad \checkmark$$

$$\beta) \quad x(t) = \cos \left(2\pi \underbrace{100t}_{f_1} - \frac{\pi}{8} \right) + 2 \sin \left(\underbrace{400t}_{2\pi \cdot \frac{400}{2\pi}} + \frac{\pi}{3} \right) \quad \times$$

f_2

$$\alpha) \quad f_1 = 100 \text{ Hz}, \quad f_2 = 250 \text{ Hz}, \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{100}{250} = \text{λόγος ακέραιων}$$

$$\beta) \quad f_1 = 100 \text{ Hz}, \quad f_2 = \frac{400}{2\pi} = \frac{200}{\pi}, \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{100}{\frac{200}{\pi}} = \frac{\pi}{2} \neq \text{λόγος ακέραιων}$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

