

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2025-26

Διδάσκοντες : Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 3/4/2026

Ημερομηνία Παράδοσης: 21/4/2026, 11:00
είτε γραπτά είτε ηλεκτρονικά.



Σχήμα 1: Το Πασχαλινό σας δώρο...

Άσκηση 1 - Αντίστροφός Μετασχ. Fourier

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του

$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f(2 + j2\pi f)} - \frac{1}{2}\delta(f) \quad (1)$$

$$\underline{\text{Απ.:}} \quad x(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})u(t) - \frac{3}{4}$$

Άσκηση 2 - Γρίφος! :-)

Έστω ένα σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$. Έστω ότι μας δίνουν τα παρακάτω στοιχεία :

1. Το $x(t)$ είναι πραγματικό και έχει μόνο θετικές τιμές.
2. $F^{-1}\{(1 + j2\pi f)X(f)\} = Ae^{-2t}u(t)$, με σταθερό A .
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = 1$

Βρείτε μια κλειστή έκφραση για το $x(t)$.

$$\underline{\text{Απ.:}} \quad x(t) = \sqrt{12}(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

Άσκηση 3 - ΓΧΑ συστήματα στο χώρο του Fourier

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα το οποίο παράγει έξοδο

$$y(t) = (2e^{-t} - 2e^{-4t})u(t) \quad (2)$$

όταν στην είσοδο εμφανίζεται το σήμα

$$x(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t) \quad (3)$$

(α) Βρείτε την απόκριση συχνότητας $H(f)$ του συστήματος.

(β) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$.

(γ) Μπορείτε να βρείτε μια διαφορική εξίσωση που να σχετίζει την παραπάνω είσοδο με την παραπάνω έξοδο ;

$$\underline{\text{Απ.:}} \quad (\alpha) \quad H(f) = \frac{3(3+j2\pi f)}{(4+j2\pi f)(2+j2\pi f)}, \quad (\beta) \quad h(t) = \frac{3}{2}(e^{-4t} + e^{-2t})u(t), \quad (\gamma) \quad \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + 8y(t) = 9x(t) + 3\frac{d}{dt}x(t)$$

Άσκηση 4 - Σειρές Fourier και μετασχ. Fourier

Στην Άσκηση 3 της προηγούμενης σειράς ασκήσεων, κληθήκατε να υπολογίσετε τη Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος $x_{T_0}(t)$ που περιγράφεται σε μια περίοδο ως

$$x(t, T_0) = \frac{2}{T_0}t, \quad 0 < t < T_0 \quad (4)$$

και δείξατε ότι οι συντελεστές Fourier της είναι

$$X_0 = 1, \quad X_k = \frac{1}{\pi k}e^{j\pi/2}, \quad \forall k \neq 0 \quad (5)$$

(α) Βρείτε ξανά τους συντελεστές αυτούς αλλά αυτή τη φορά αξιοποιώντας τη σχέση

$$X_k = \frac{1}{T_0}X(f, T_0)\Big|_{f=k/T_0} \quad (6)$$

που συνδέει τους συντελεστές και το μετασχ. Fourier μιας περιόδου, $X(f, T_0)$, του περιοδικού σήματος - χρησιμοποιήστε την ιδιότητα της παραγωγίσιμης του μετασχ. Fourier για να απλουστεύσετε τα πράγματα.

(β) Γράψτε το μετασχηματισμό Fourier, $X_{T_0}(f)$, του περιοδικού σήματος.

Βοήθεια: $\text{sinc}(\pi k) = 0, \forall k \neq 0$.

Άσκηση 5 - Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων - I

Έστω το ΓΧΑ σύστημα με συχνοτική απόκριση

$$H(f) = \begin{cases} 1, & 1500 < |f| < 3000 \text{ Hz} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (7)$$

που περιγράφει ένα ιδανικό φίλτρο επιλογής συχνότητας. Στην είσοδο αυτού του συστήματος εμφανίζεται το περιοδικό σήμα

$$x(t) = 1 + 2 \cos(2\pi 1000t + \pi/3) + 3 \sin(2\pi 1800t) + \cos(2\pi 3700t + \pi/4) \quad (8)$$

Βρείτε το σήμα εξόδου και υπολογίστε το λόγο της μέσης ισχύος εισόδου-εξόδου.

$$\text{Απ.: } y(t) = 3 \sin(2\pi 1800t), \frac{P_y}{P_x} = \frac{9}{16}$$

Άσκηση 6 - Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων - II

Θεωρήστε ότι το σήμα

$$x(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t} + 2 \cos(12\pi t) \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \quad (9)$$

εμφανίζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με συχνοτική απόκριση

$$H(f) = \begin{cases} 1, & 5 < |f| < 6 \text{ Hz} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (10)$$

που περιγράφει ένα ιδανικό φίλτρο επιλογής συχνότητας.

(α) Βρείτε το μετασχ. Fourier της εισόδου.

(β) Βρείτε το μετασχ. Fourier της εξόδου, σχεδιάζοντας το γινόμενο $Y(f) = X(f)H(f)$ (οι μετασχηματισμοί είναι πραγματικοί, οπότε δε χρειάζεστε κάποιο διαχωρισμό σε μέτρο και φάση).

(γ) Βρείτε το σήμα εξόδου $y(t)$.

(δ) Βρείτε το λόγο ενέργειας εισόδου-εξόδου του συστήματος.

$$\text{Απ.: (α) } X(f) = \begin{cases} 1, & |f| < 2 \\ 1, & 5 < |f| < 7 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}, \text{ (β) } Y(f) = \begin{cases} 1, & 5 < |f| < 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}, \text{ (γ) } y(t) = 2 \cos(2\pi 5.5t) \text{sinc}(t), \text{ (δ) } \frac{E_y}{E_x} = \frac{1}{4}$$

Για την ηλεκτρονική παράδοση:

Φωτογραφίστε ή γράψτε σε Word/Latex τις απαντήσεις σας και μετατρέψτε τις σε ENA ενιαίο αρχείο PDF. Επισυνάψτε το αρχείο σας σε ένα e-mail και στείλτε το στο:

csdp1454@csd.uoc.gr

με τίτλο: [HY215] Παράδοση 4ης σειράς ασκήσεων

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: βάλτε στο πεδίο Cc: το δικό σας e-mail! Έτσι θα λάβετε κι εσείς αντίγραφο της παράδοσής σας και μπορείτε να ελέγξετε ότι όλα είναι όπως πρέπει. Αν χρειαστεί, επαναλάβετε την παράδοση με τον ίδιο τρόπο.