ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2025-26
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1 - Αντίστροφός Μετασχ. Fourier

Γνωρίζουμε ότι

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f) \tag{1}$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f(2+j2\pi f)} - \frac{1}{2}\delta(f) = G(f) - \frac{1}{2}\delta(f) \tag{2}$$

και κάνοντας ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα στον όρο $G(f)$ παίρνουμε

$$G(f) = \frac{A}{j2\pi f} + \frac{B}{2+j2\pi f} = \frac{1}{2}\frac{1}{j2\pi f} - \frac{1}{2}\frac{1}{2+j2\pi f} \tag{3}$$

Έτσι

$$\begin{aligned}
X(f) &= \frac{1}{2}\frac{1}{j2\pi f} - \frac{1}{2}\frac{1}{2+j2\pi f} - \frac{1}{2}\delta(f) && (4)\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{j2\pi f} - \frac{1}{2}\frac{1}{2+j2\pi f} - \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{3}{4}\delta(f) - \frac{3}{4}\delta(f) && (5)\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{j2\pi f} - \frac{1}{2}\frac{1}{2+j2\pi f} + \frac{1}{4}\delta(f) - \frac{3}{4}\delta(f) && (6)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{2+j2\pi f} - \frac{3}{4}\delta(f) && (7)
\end{aligned}$$

και επιστρέφοντας στο χρόνο (και με χρήση της Σχέσης (1))

$$x(t) = \frac{1}{2}u(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)u(t) - \frac{3}{4} \tag{8}$$

Άσκηση 2 - Γρίφος! :-)

Από το 2ο στοιχείο παίρνουμε

$$\mathrm{F}^{-1}\{(1+j2\pi f)X(f)\} = Ae^{-2t}u(t) \Longleftrightarrow (1+j2\pi f)X(f) = F\{Ae^{-2t}u(t)\} \tag{9}$$

και γνωρίζουμε ότι

$$e^{-2t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2+j2\pi f} \tag{10}$$

Οπότε

$$(1+j2\pi f)X(f) = A\frac{1}{2+j2\pi f} \Longleftrightarrow X(f) = \frac{A}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)} \tag{11}$$

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα, θα έχουμε

$$X(f) = A\left(\frac{C_1}{1+j2\pi f} + \frac{C_2}{2+j2\pi f}\right) = A\left(\frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{1}{2+j2\pi f}\right) \tag{12}$$

και αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό

$$x(t) = A(e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)) \tag{13}$$

Για τη σταθερά A χρησιμοποιούμε το 3ο στοιχείο, δηλ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = 1 \tag{14}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A^2(e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t))^2 dt = 1 \tag{15}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-2t}u^2(t) - 2e^{-t}e^{-2t}u^2(t) + e^{-4t}u^2(t)\right) dt = \frac{1}{A^2} \tag{16}$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-2t}dt - 2\int_{0}^{+\infty} e^{-3t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-4t}dt = \frac{1}{A^2} \tag{17}$$

$$\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{A^2} \tag{18}$$

$$A^2 = 12 \tag{19}$$

$$A = \pm\sqrt{12} \tag{20}$$

Έχουμε δυο επιλογές για το τελικό σήμα

$$x_1(t) = \sqrt{12}(e^{-t} - e^{-2t})u(t) \tag{21}$$

$$x_2(t) = -\sqrt{12}(e^{-t} - e^{-2t})u(t) \tag{22}$$

Πρέπει να αποφανθούμε για το πρόσημο της παρένθεσης. Το σήμα e^{-t} σβήνει πιο αργά από το e^{-2t}, οπότε η διαφορά $e^{-t} - e^{-2t}$ είναι θετική $\forall t$. Οπότε

$$x(t) = x_1(t) = \sqrt{12}(e^{-t} - e^{-2t})u(t) \tag{23}$$

Άσκηση 3 - ΓΧΑ συστήματα στο χώρο του Fourier

(α΄) Αφού έχουμε ένα ζεύγος εισόδου-εξόδου, είναι πολύ απλό να βρούμε την συχνοτική απόκριση, από τη σχέση

$$Y(f) = X(f)H(f) \Longleftrightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \tag{24}$$

Είναι

$$X(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{3+j2\pi f} \tag{25}$$

$$Y(f) = \frac{2}{1+j2\pi f} - \frac{2}{4+j2\pi f} \tag{26}$$

και άρα

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{3(3+j2\pi f)}{(4+j2\pi f)(2+j2\pi f)} \tag{27}$$

(β΄) Η κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$, βρίσκεται με ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα από τη συχνοτική απόκριση που βρήκαμε πριν. Έχουμε

$$H(f) = \frac{3(3+j2\pi f)}{(4+j2\pi f)(2+j2\pi f)} = \frac{A}{4+j2\pi f} + \frac{B}{2+j2\pi f} = \frac{\frac{3}{2}}{4+j2\pi f} + \frac{\frac{3}{2}}{2+j2\pi f} \tag{28}$$

και από πίνακες μετασχηματισμού

$$h(t) = \frac{3}{2}\left(e^{-4t} + e^{-2t}\right)u(t) \tag{29}$$

(γ') Παίρνοντας τη συχνοτική απόκριση $H(f) = Y(f)/X(f)$ και πολλαπλασιάζοντας χιαστί έχουμε

$$Y(f)(4 + j2\pi f)(2 + j2\pi f) = 3X(f)(3 + j2\pi f) \tag{30}$$
$$(j2\pi f)^2 Y(f) + 6j2\pi f Y(f) + 8Y(f) = 9X(f) + 3(j2\pi f)X(f) \tag{31}$$

και γυρίζοντας στο χρονο

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + 8y(t) = 9x(t) + 3\frac{d}{dt}x(t) \tag{32}$$

Άσκηση 4 - Σειρές Fourier και μετασχ. Fourier

(α') Βρίσκοντας το μετασχ. Fourier μιας περιόδου, έχουμε

$$x(t, T_0) = \frac{2}{T_0}t,\ \ 0 < t < T_0 = \frac{2}{T_0}t\mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T_0}\right) \tag{33}$$

Μπορούμε να βρούμε την παράγωγο του παραπάνω σήματος και να δουλέψουμε την ιδιότητα της παραγώγισης.

$$\begin{aligned}
j2\pi f X(f) &= F\{x'(t)\} && (34)\\
&= F\left\{\frac{2}{T_0}\mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T_0}\right) + \frac{2}{T_0}t\mathrm{rect}'\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T_0}\right)\right\} && (35)\\
&= F\left\{\frac{2}{T_0}\mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T_0}\right) + \frac{2}{T_0}t(\delta(t) - \delta(t - T_0))\right\} && (36)\\
&= F\left\{\frac{2}{T_0}\mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T_0}\right) - \frac{2}{T_0}T_0\delta(t - T_0)\right\} && (37)\\
&= F\left\{\frac{2}{T_0}\mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{T_0}\right) - 2\delta(t - T_0)\right\} && (38)\\
&= \frac{2}{T_0}T_0\mathrm{sinc}\left(fT_0\right)e^{-j2\pi f T_0/2} - 2e^{-j2\pi f T_0} && (39)\\
&= 2\mathrm{sinc}\left(fT_0\right)e^{-j\pi f T_0} - 2e^{-j2\pi f T_0} && (40)\\
X(f) &= \frac{1}{j\pi f}\mathrm{sinc}(fT_0)e^{-j\pi f T_0} - \frac{1}{j\pi f}e^{-j2\pi f T_0} && (41)
\end{aligned}$$

Από τη σχέση

$$X_k = \frac{1}{T_0}X(f, T_0)\Big|_{f=k/T_0} \tag{42}$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}X(f, T_0)\Big|_{f=k/T_0} && (43)\\
&= \frac{1}{T_0}\left(\frac{1}{j\pi f}\mathrm{sinc}(fT_0)e^{-j\pi f T_0} - \frac{1}{j\pi f}e^{-j2\pi f T_0}\right)\Big|_{f=k/T_0} && (44)\\
&= \frac{1}{j\pi k}\mathrm{sinc}(k) - \frac{1}{j\pi k}e^{-j2\pi k} && (45)\\
&= \frac{1}{j\pi k}\cdot 0 - \frac{1}{j\pi k}\cdot 1,\ \ \forall k \neq 0\ \ \text{(από τη δοσμένη βοήθεια)} && (46)\\
&= -\frac{1}{j\pi k},\ \ \forall k \neq 0 && (47)\\
&= \frac{1}{\pi k}e^{j\pi/2},\ \ \forall k \neq 0 && (48)
\end{aligned}$$

ενώ

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \frac{2}{T_0}tdt = \frac{1}{T_0}\frac{2}{T_0}\frac{t^2}{2}\Big|_0^{T_0} = 1 \tag{49}$$

(β΄) Ο μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος δίνεται ως

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta(f - kf_0) = 1 + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} \frac{1}{\pi k} e^{j\pi/2}\delta(f - kf_0) \tag{50}$$

Άσκηση 5 - Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων - Ι

Το φίλτρο επιλογής συχνότητας που δίνεται είναι ένα ζωνοπερατό φιλτρο με συχνότητες αποκοπής $f_{c_1} = 1500$ και $f_{c_2} = 3000$ Hz. Η είσοδος του συστήματος έχει 4 συχνότητες: τη μηδενική, και τις συχνότητες $1000, 1800, 3700$ Hz. Από το φίλτρο θα περάσει μόνο η συχνότητα των 1800 Hz, χωρίς αλλαγή στο πλάτος και στη φάση, αφού το φίλτρο έχει μοναδιαίο πλάτος:

$$y(t) = 3\sin(2\pi 1800 t) \tag{51}$$

Η είσοδος έχει μέση ισχύ

$$P_x = A_0^2 + \sum_{k=1} 3\frac{A_k^2}{2} \tag{52}$$

με A_i τα πλάτη των τεσσάρων όρων. Οπότε

$$P_x = 1^2 + \frac{2^2}{2} + \frac{3^2}{2} + \frac{1^2}{2} = 1 + 2 + 4.5 + 0.5 = 8 \tag{53}$$

Αντίστοιχα για την έξοδο

$$P_y = \frac{3^2}{2} = 4.5 \tag{54}$$

Άρα ο λόγος μέσης ισχύος εισόδου-εξόδου είναι

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{4.5}{8} = \frac{9}{16} \tag{55}$$

Άσκηση 6 - Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων - ΙΙ

Το φίλτρο επιλογής συχνότητας που δίνεται είναι ένα ζωνοπερατό φιλτρο με συχνότητες αποκοπής $f_{c_1} = 5$ και $f_{c_2} = 6$ Hz, δηλ.

$$H(f) = \begin{cases} 1, & 5 < |f| < 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{56}$$

(α΄) Ο μετασχ. Fourier της εισόδου θα είναι

$$\begin{aligned}
X(f) &= F\left\{\frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}\right\} + F\left\{2\cos(2\pi 6t)\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\right\} &(57)\\
&= F\left\{4\frac{\sin(4\pi t)}{4\pi t}\right\} + F\left\{2\cos(2\pi 6t)\frac{2\sin(2\pi t)}{2\pi t}\right\} &(58)\\
&= F\left\{4\mathrm{sinc}(4t)\right\} + F\left\{2\cos(2\pi 6t)\right\} * F\left\{2\mathrm{sinc}(2t)\right\} &(59)\\
&= \mathrm{rect}\left(\frac{-f}{4}\right) + \left(\delta(f-6) + \delta(f+6)\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{-f}{2}\right) &(60)\\
&= \mathrm{rect}\left(\frac{f}{4}\right) + \left(\delta(f-6) + \delta(f+6)\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right) &(61)\\
&= \mathrm{rect}\left(\frac{f}{4}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f-6}{2}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+6}{2}\right) &(62)\\
&= \begin{cases} 1, & |f| < 2 \\ 1, & 5 < |f| < 7 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} &(63)
\end{aligned}$$

(β΄) Το γινόμενο $Y(f) = X(f)H(f)$ θα είναι

$$Y(f) = \begin{cases} 1, & 5 < |f| < 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \times \begin{cases} 1, & |f| < 2 \\ 1, & 5 < |f| < 7 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & 5 < |f| < 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{64}$$

(γ΄) Αντιστρέφοντας στο χρόνο το προηγούμενο αποτέλεσμα και αναγνωριζοντας ότι αποτελείται από δυο τετραγωνικούς παλμούς με κέντρο το $f = \pm 5.5$ Hz, μπορούμε να γράψουμε

$$Y(f) = \mathrm{rect}(f - 5.5) + \mathrm{rect}(f + 5.5) \tag{65}$$

και

$$y(t) = \mathrm{sinc}(t)e^{-j2\pi 5.5t} + \mathrm{sinc}(t)e^{j2\pi 5.5t} = 2\cos(2\pi 5.5t)\mathrm{sinc}(t) \tag{66}$$

(δ΄) Η ενέργεια της εισόδου ισούται με την επιφάνεια κάτω από τη συνάρτηση $x^2(t)$ ή τη $|X(f)|^2$. Ευκολότερα στο χώρο της συχνότητας, η ενέργεια θα είναι $E_x = 4 + 2 \cdot 2 = 8$, αθροίζοντας τα εμβαδά των τριών παλμών. Η ενέργεια της εξόδου, με την ίδια φιλοσοφία, θα είναι $E_y = 2 \cdot 1 = 2$, οπότε

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{1}{4} \tag{67}$$