HY215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Φροντιστήριο 9
Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

15 Μαΐου 2026

Επιμέλεια: Αλέξανδρος Αγγελάκης

Άσκηση 1

Έστω τα σήματα

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (1)$$

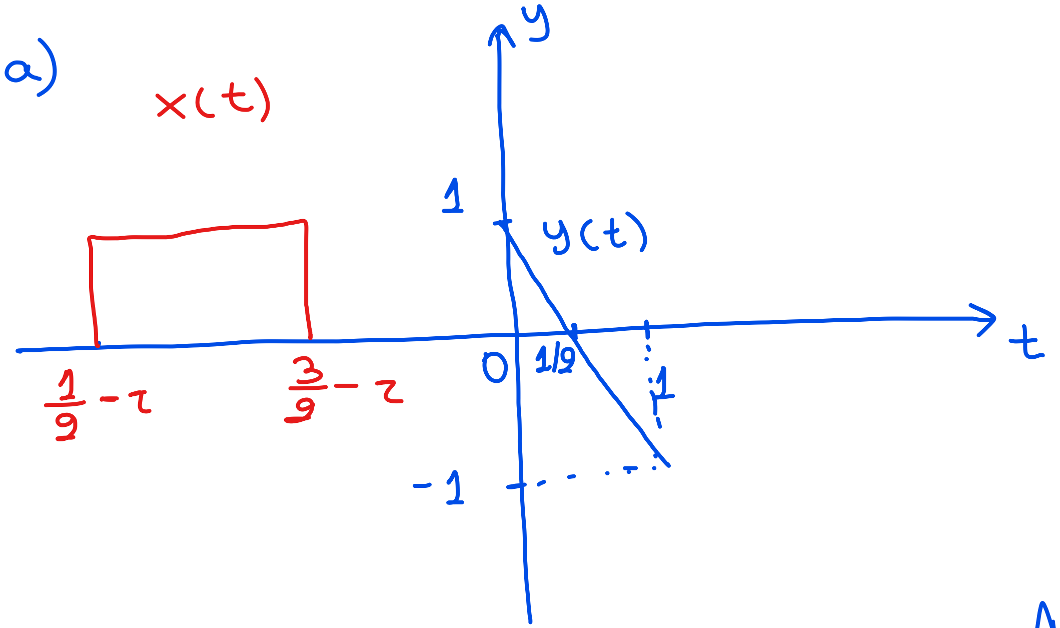
$$y(t) = \begin{cases} 1-2t, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2)$$

Βρείτε τη συνάρτηση ετεροσυσχέτισης $\phi_{yx}(\tau)$ και τη συνάρτηση ετεροσυσχέτισης $\phi_{xy}(\tau)$, χρησιμοποιώντας για τη δεύτερη ελάχιστες πράξεις.

$$\phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)\cdot x(t+\tau)\, dt .$$

Θα μετατοπίσουμε το x(t) ως πιο εύκολο σήμα και θα πάρουμε περιπτώσεις.

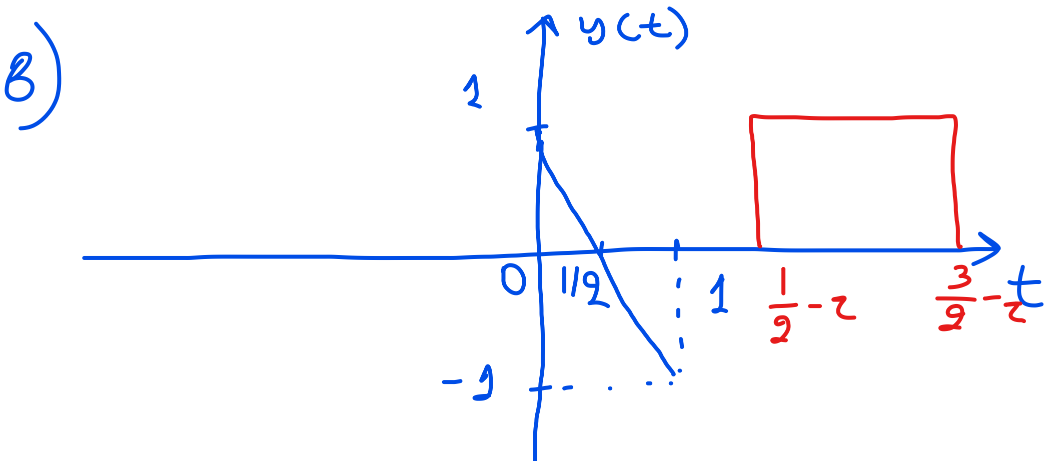
α)



Αν $\frac{3}{2} - \tau < 0 \Leftrightarrow \tau > \frac{3}{2}$ τότε:

$$\boxed{\phi_{yx}(\tau) = 0 , \text{ για } \tau > \frac{3}{2}}$$

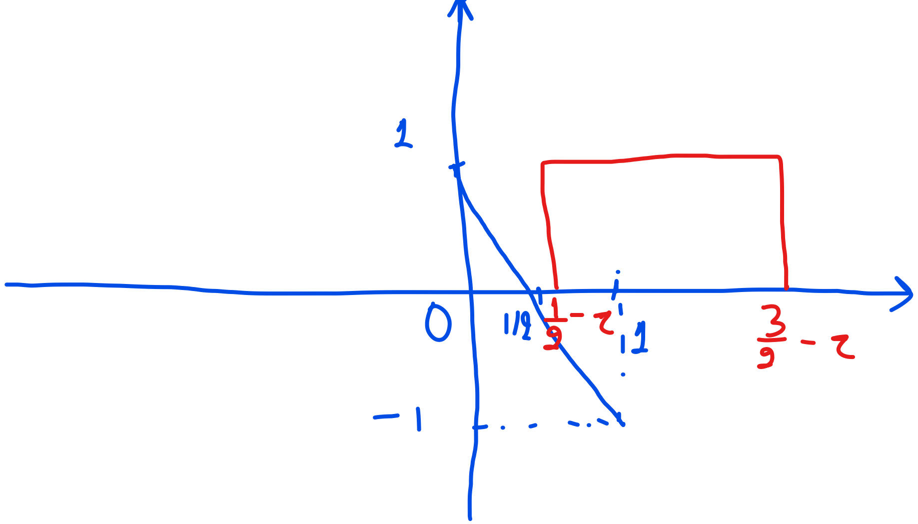
β)



Αν $\frac{1}{2} - \tau > 1 \Leftrightarrow \tau < -\frac{1}{2}$ τότε:

$$\boxed{\phi_{yx}(\tau) = 0 , \text{ για } \tau < -\frac{1}{2}}$$

γ)



Αν $\frac{1}{2} - \tau < 1$ και $\frac{3}{2} - \tau > 1 \Leftrightarrow$

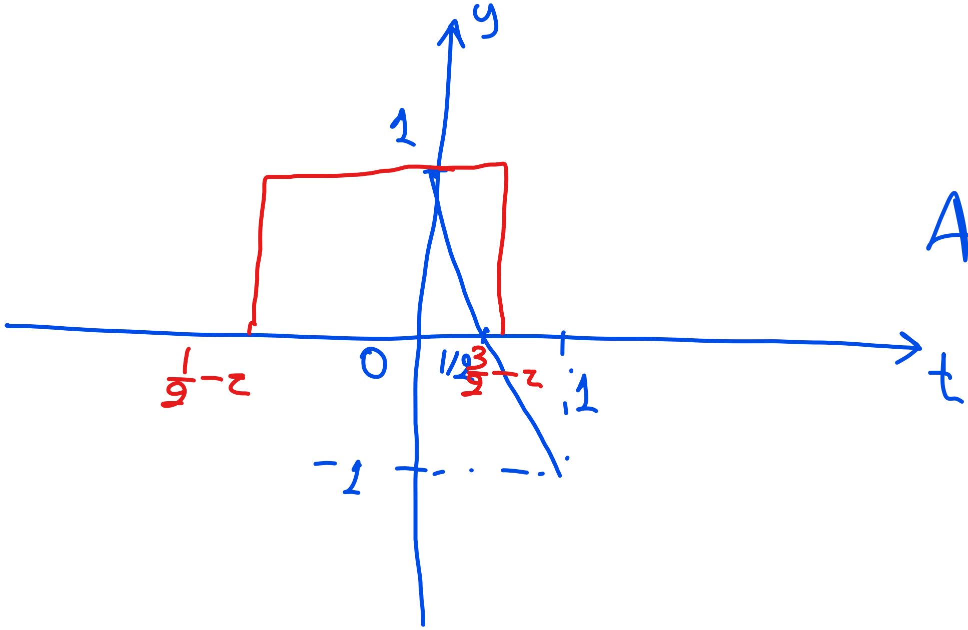
$\tau > -\frac{1}{2}$ και $\tau < \frac{1}{2}$ τότε:

$$\Phi_{yx}(\tau) = \int_{\frac{1}{2}-\tau}^{1} (1-2t)\cdot 1 \, dt = \left[t - t^2\right]_{\frac{1}{2}-\tau}^{1} =$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1}^2 - \left(\frac{1}{2} - \tau - \left(\frac{1}{2}-\tau\right)^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} + \tau + \frac{1}{4} - \tau + \tau^2 = \boxed{\tau^2 - \frac{1}{4} \text{ για } -\frac{1}{2} < \tau < \frac{1}{2}}$$

δ)



Αν $\frac{1}{2} - \tau < 0$ και $\frac{3}{2} - \tau > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} < \tau < \frac{1}{2}$ τότε:

$$\Phi_{yx}(\tau) = \int_{0}^{\frac{3}{2}-\tau} (1-2t)\cdot 1 \, dt = \left[t - t^2\right]_{0}^{\frac{3}{2}-\tau} =$$

$$= \frac{3}{2} - \tau - \left(\frac{3}{2}-\tau\right)^2 - 0 + 0^2 = \frac{3}{2} - \tau - \frac{9}{4} + 3\tau - \tau^2 =$$

$$= \boxed{-\frac{3}{4} + 2\tau - \tau^2 \text{ για } \frac{1}{2} < \tau < \frac{3}{2}}$$

Άρα συνολικά

$$\boxed{\phi_{yx}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -\frac{1}{2}, \ \tau > \frac{3}{2} \\ \tau^2 - \frac{1}{4}, & -\frac{1}{2} < \tau < \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} + 2\tau - \tau^2, & \frac{1}{2} < \tau < \frac{3}{2} \end{cases}}$$

Το $\phi_{xy}(\tau)$ μπορεί εύκολα να υπολογιστεί ως:

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi^*_{yx}(-\tau)$$

και άρα

$$\boxed{\phi_{xy}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -\frac{3}{2}, \ \tau > \frac{1}{2} \\ \tau^2 - \frac{1}{4}, & -\frac{1}{2} < \tau < \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} - 2\tau - \tau^2, & -\frac{3}{2} < \tau < -\frac{1}{2} \end{cases}}$$

Άσκηση 2

Έστω η διαφασματική πυκνότητα ενέργειας

$$\Phi_{xy}(f) = \mathrm{sinc}(f)\frac{1}{1+j2\pi f} \tag{11}$$

Βρείτε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$.

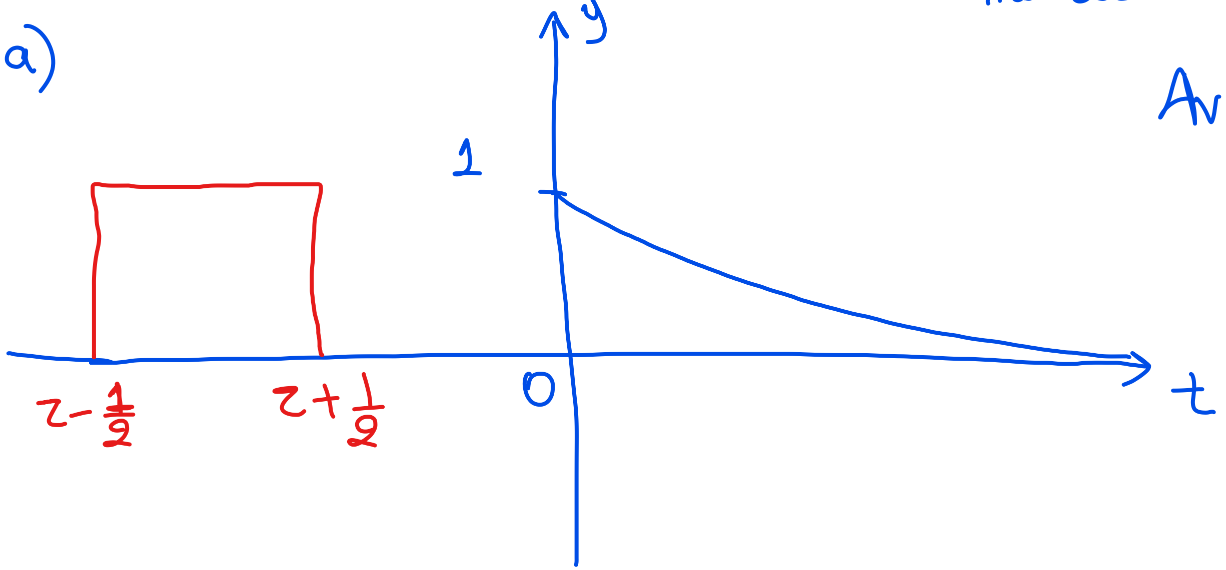
$$\Phi_{xy}(f) = X^*(f)\cdot Y(f) = \mathcal{F}\{\phi_{xy}(\tau)\} = \mathrm{sinc}(f)\cdot\frac{1}{1+j2\pi f}$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathrm{sinc}(f)\cdot\frac{1}{1+j2\pi f}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathrm{sinc}(f)\} * \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+j2\pi f}\right\} =$$

$$= \mathrm{rect}(\tau) * e^{-\tau}u(\tau).$$

Θα μετατοπίσουμε και αντιστρέψουμε το $\mathrm{rect}(\tau)$ ως πιο εύκολο σήμα και διακρίνουμε περιπτώσεις:

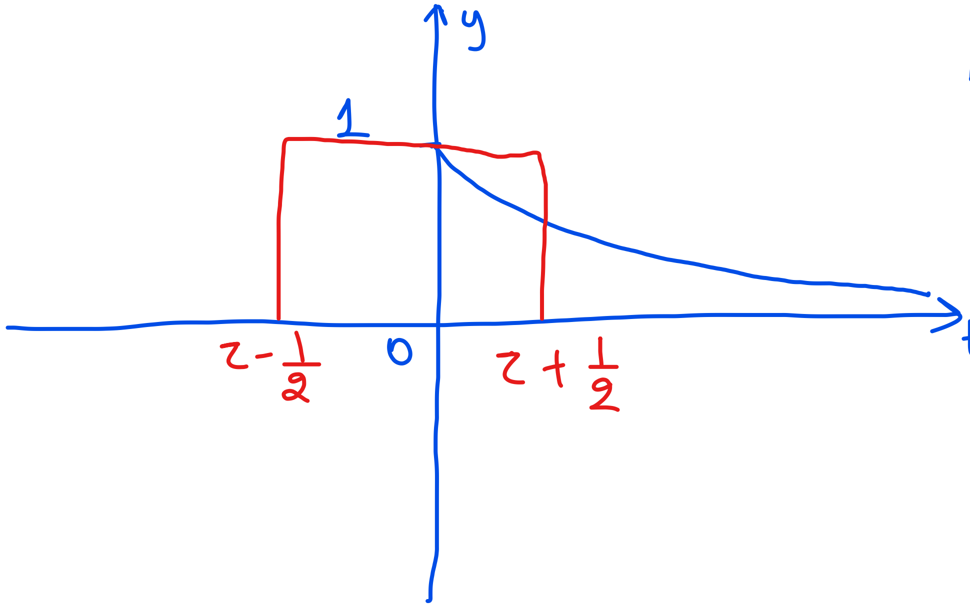
a)



Αν $\tau+\frac{1}{2}<0 \Leftrightarrow \tau<-\frac{1}{2}$ τότε

$$\phi_{xy}(\tau)=0,\quad \tau<-\frac{1}{2}$$

β)



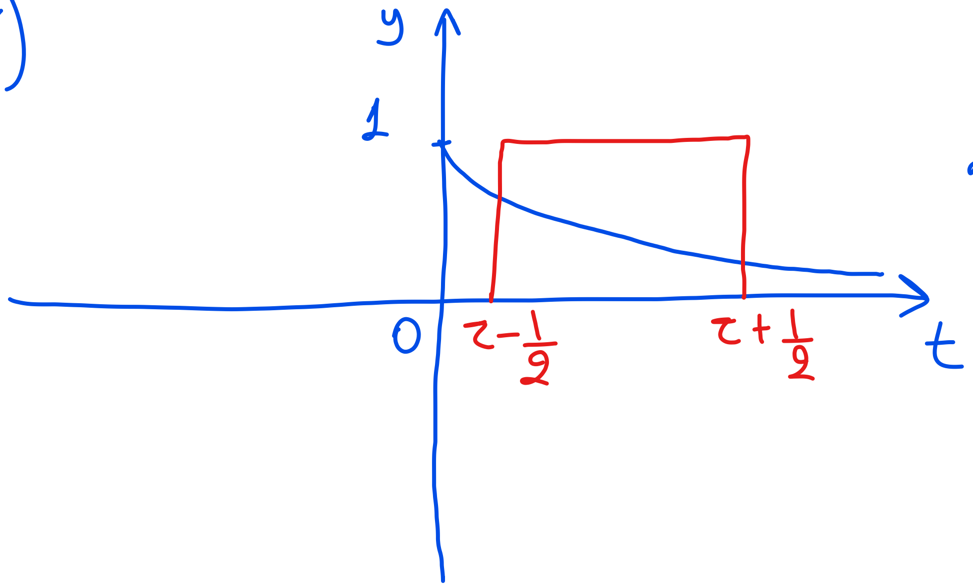
Αν $\tau-\frac{1}{2}<0$ και $\tau+\frac{1}{2}>0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<\tau<\frac{1}{2}$

$$\phi_{xy}(\tau)=\int_0^{\tau+\frac{1}{2}} 1\cdot e^{-t}u(t)\,dt=$$

$$=\int_0^{\tau+\frac{1}{2}} e^{-t}dt=\Big[-e^{-t}\Big]_0^{\tau+\frac{1}{2}}=$$

$$=-e^{-\tau-\frac{1}{2}}+e^{0}=\boxed{1-e^{-(\tau+\frac{1}{2})}}$$

γ)



Αν $\tau-\frac{1}{2}>0 \Leftrightarrow \tau>\frac{1}{2}$ τότε:

$$\phi_{xy}(\tau)=\int_{\tau-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} 1\cdot e^{-t}dt=\Big[-e^{-t}\Big]_{\tau-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}}=$$

$$=\boxed{-e^{-(\tau+\frac{1}{2})}+e^{-(\tau-\frac{1}{2})}}$$

Άρα

$$\boxed{\phi_{xy}(\tau)=\begin{cases}0, & \tau<-\frac{1}{2}\\ 1-e^{-(\tau+\frac{1}{2})}, & -\frac{1}{2}<\tau<\frac{1}{2}\\ e^{-(\tau-\frac{1}{2})}-e^{-(\tau+\frac{1}{2})}, & \tau>\frac{1}{2}\end{cases}}$$

Άσκηση 3

Έστω τα σήματα

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{1}{2 + j2\pi f} \quad (20)$$

$$y(t) = e^{t}u(-t) \xleftrightarrow{F} Y(f) = \frac{1}{1 - j2\pi f} \quad (21)$$

$$|X| = \sqrt{Re^2 + Im^2}$$

$$* \; e^{-2|t|} = \begin{cases} e^{-2t}, & t>0 \\ e^{2t}, & t<0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-2t}u(t) \\ e^{2t}u(-t) \end{cases}$$

(α΄) Υπολογίστε την αυτοσυσχέτιση του σήματος $x(t)$.

(β΄) Υπολογίστε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας του σήματος $y(t)$.

(γ΄) Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$.

(δ΄) Υπολογίστε τη διαφασματική πυκνότητα ενέργειας $\Phi_{xy}(f)$.

α) $$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)\,dt = F^{-1}\{\Phi_x(f)\}$$

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2 = \left|\frac{1}{2+j2\pi f}\right|^2 = \frac{|1|^2}{|2+j2\pi f|^2} = \frac{1}{\sqrt{2^2+(2\pi f)^2}^{\,2}} = \frac{1}{4+4\pi^2 f^2}$$

$$e^{-a|t|} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2} \xleftrightarrow{F^{-1}} \frac{1}{4} e^{-2|\tau|} = \boxed{\frac{1}{4}\left(e^{2\tau}u(-\tau) + e^{-2\tau}u(\tau)\right)} \; *$$

β) $$\Phi_y(f) = |Y(f)|^2 = \left|\frac{1}{1-j2\pi f}\right|^2 = \frac{1}{\sqrt{1^2+(2\pi f)^2}^{\,2}} = \boxed{\frac{1}{1+4\pi^2 f^2}}$$

γ) $$\phi_{xy}(\tau) \xleftrightarrow{F} \Phi_{xy}(f) = X^*(f)\cdot Y(f) = \frac{1}{2-j2\pi f}\cdot\frac{1}{1-j2\pi f} =$$

$$= \frac{1}{(2-j2\pi f)(1-j2\pi f)} = \frac{A}{2-j2\pi f} + \frac{B}{1-j2\pi f} \quad (1)$$

$$A = \frac{1}{\cancel{(2-j2\pi f)}(1-j2\pi f)} \cdot \cancel{(2-j2\pi f)} \Bigg|_{j2\pi f = 2} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$B = \frac{1}{(2-j2\pi f)\cancel{(1-j2\pi f)}} \cancel{(1-j2\pi f)} \Bigg|_{j2\pi f = 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a+j2\pi f}$$

$$e^{at}u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{a-j2\pi f}$$

$$1 \Longrightarrow -\frac{1}{2-j2\pi f} + \frac{1}{1-j2\pi f} \overset{F^{-1}}{\longleftrightarrow} -e^{2\tau}u(-\tau) + e^{\tau}u(-\tau) = \boxed{\left(e^{\tau} - e^{2\tau}\right)u(-\tau)}$$

б) $$\Phi_{xy}(f) = -\frac{1}{2-j2\pi f} + \frac{1}{1-j2\pi f}$$

Άσκηση 4

Έστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 που περιγράφεται σε μια περίοδο ως

$$x(t,T_0)=\begin{cases} A, & |t|<\frac{T_0}{4}\\ 0, & T_0>|t|>\frac{T_0}{4}\end{cases} \tag{35}$$

Βρείτε την αυτοσυσχέτιση και τη φασματική πυκνότητα ισχύος του περιοδικού σήματος.

$$x(t,T_0)=\begin{cases} A, & -\frac{T_0}{4}<t<\frac{T_0}{4}\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases} = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right)$$

, για μια περίοδο T_0.

$$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

$$f_0=\frac{1}{T_0}$$

$$X(f,T_0)=A\cdot\frac{T_0}{2}\cdot\mathrm{sinc}\left(f\cdot\frac{T_0}{2}\right)$$

$$\Phi_x(f,T_0)=\left|X(f,T_0)\right|^2=A^2\frac{T_0^2}{4}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{fT_0}{2}\right)$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_k e^{j2\pi k f_0 t}\quad,\quad \Phi_x(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|X_k|^2 e^{j2\pi k f_0\tau}$$

$$|X_k|^2=\frac{1}{T_0^2}\cdot\Phi_x(f,T_0)\Big|_{f=kf_0}=\frac{1}{\cancel{T_0^2}}\cdot A^2\cdot\frac{\cancel{T_0^2}}{4}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k\cancelto{1}{f_0T_0}}{2}\right)=\boxed{\frac{A^2}{4}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)}$$

$$\boxed{\Phi_x(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{A^2}{4}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)}_{\text{συντελεστές σειράς Fourier του } \Phi_x(\tau)}\cdot e^{j2\pi k f_0\tau}}$$

$\Phi_x(f) = F\{\phi_x(\tau)\}$, οποιοδήποτε περιοδικό σήμα με θεμελιώδη συχνότητα f_0 που αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές Z_k, έχει μετασχ. Fourier: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z_k \cdot \delta(f - kf_0)$

Άρα $$\boxed{\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{4} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right) \cdot \delta(f - kf_0)}$$

Πως βρίσκουμε το $\Phi_x(f)$ (άρα και $\phi_x(\tau)$) για περιοδικά σήματα:

Υπολογισμός Φασματικής Πυκνότητας Ισχύος Περιοδικού Σήματος

1. Υπολογίζουμε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας $\Phi_x(f, T_0)$ μιας περιόδου $x(t, T_0)$ - που είναι σήμα ενέργειας - του περιοδικού σήματος $x(t)$:

$$\Phi_x(f, T_0) = |X(f, T_0)|^2 \tag{9.177}$$

2. Δειγματοληπτούμε την παραπάνω φασματική πυκνότητα ενέργειας ανά kf_0, και το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με $\frac{1}{T_0^2}$ για να λάβουμε τους συντελεστές Fourier της περιοδικής αυτοσυσχέτισης:

$$|X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2}\Phi_x(f, T_0)\Big|_{f=kf_0} \tag{9.178}$$

3. Η φασματική πυκνότητα ισχύος δίνεται ως

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0) \tag{9.179}$$