HY215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

Φροντιστήριο 1

Σειρές και Συντελεστές Fourier

6 Μαρτίου 2026

Επιμέλεια: Αλέξανδρος Αγγελάκης angelakis@csd.uoc.gr

Ασκηση 1 - Σειρά Fourier I

Έστω το περιοδικό σήμα $x(t) = |\sin(\pi t)|$.

(α') Σχεδιάστε μερικές περιόδους του και βρείτε τη βασική του περίοδο T_0.

(β') Υπολογίστε αναλυτικά την εκθετική Σειρά Fourier του χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του Euler.

(γ') Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης χρησιμοποιώντας μόνο τα $k = \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$.

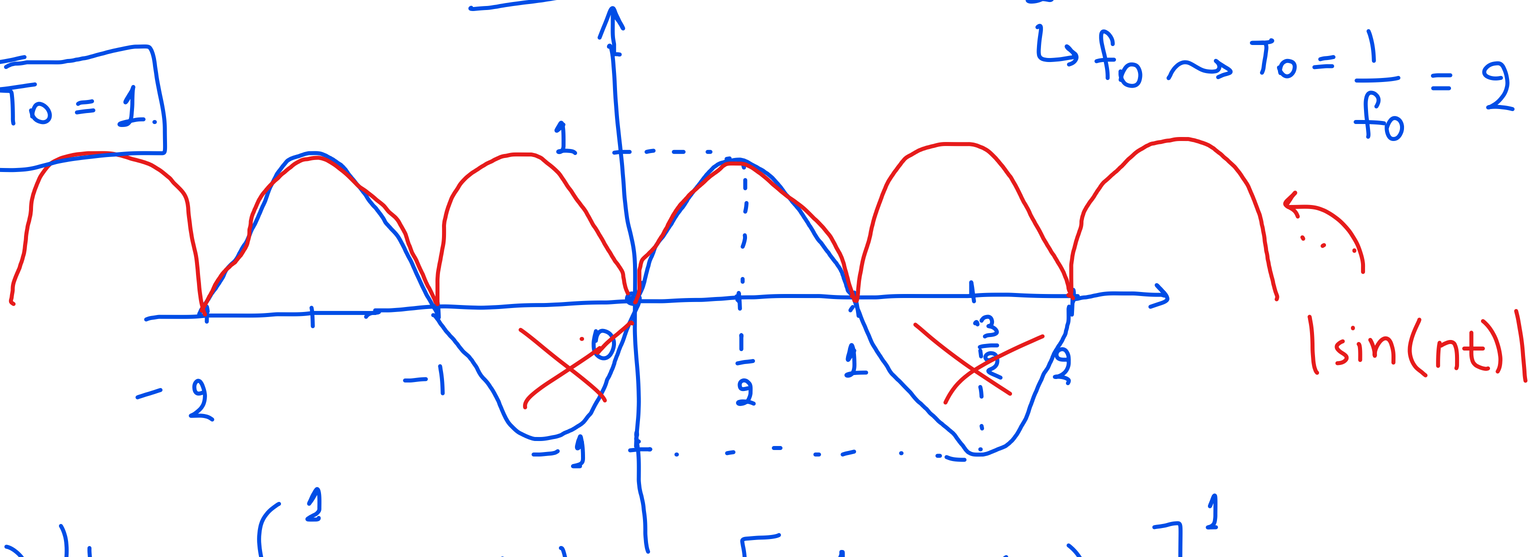
a) $x(t) = |\sin(\pi t)|$

$\sin(\pi t) = \sin(2\pi \frac{1}{2} t)$

$\hookrightarrow f_0 \rightsquigarrow T_0 = \frac{1}{f_0} = 2$

Άρα από το σχήμα $\boxed{T_0 = 1}$

και $f_0 = 1$



β) $X_0 = \frac{1}{\cancel{T_0}^{\,1}} \int_{T_0} x(t)\,dt = \int_0^1 \sin(\pi t)\,dt = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\right]_0^1 =$

$= -\frac{1}{\pi}\cos(\pi) - \left(-\frac{1}{\pi}\cos(0)\right) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \boxed{\frac{2}{\pi}}$

$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^1 \sin(\pi t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt =$

$$= \frac{1}{\cancel{T_0}}^{\nearrow 1} \int_0^1 \frac{e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}}{2j} \cdot e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \qquad \left(\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}\right)$$

$$= \frac{1}{2j} \int_0^1 e^{j\pi t} e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt - \frac{1}{2j} \int_0^1 e^{-j\pi t} e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2j} \int_0^1 e^{-j2\pi k \overset{\nearrow 1\ (T_0=1)}{\cancel{f_0}} t + j\pi t}\, dt - \frac{1}{2j} \int_0^1 e^{-j2\pi k \overset{\nearrow 1\ (T_0=1)}{\cancel{f_0}} t - j\pi t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2j} \int_0^1 e^{-j(2\pi k - \pi)t}\, dt - \frac{1}{2j} \int_0^1 e^{-j(2\pi k + \pi)t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2j} \int_0^1 e^{-j(\pi(2k-1))t}\, dt - \frac{1}{2j} \int_0^1 e^{-j(\pi(2k+1))t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2j} \left[\frac{e^{-j(\pi(2k-1))t}}{-j\pi(2k-1)} \right]_0^1 - \frac{1}{2j} \left[\frac{e^{-j(\pi(2k+1))t}}{-j\pi(2k+1)} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{e^{-j(n(2k-1))}}{-jn(2k-1)} - \frac{1}{-jn(2k-1)}\right) - \frac{1}{2j}\left(\frac{e^{-j(n(2k+1))}}{-jn(2k+1)} - \frac{1}{-jn(2k+1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2j\cdot(-jn(2k-1))}\cdot\left(e^{-j(n(2k-1))} - 1\right) - \frac{1}{2j\cdot(-jn(2k+1))}\cdot\left(e^{-j(n(2k+1))} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{-2n\cancel{j^2}^{\,-1}(2k-1)}\cdot\left(e^{-j(n(2k-1))} - 1\right) - \frac{1}{-2n\cancel{j^2}^{\,-1}(2k+1)}\left(e^{-j(n(2k+1))} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2n(2k-1)}\cdot\left(e^{-j(n(2k-1))} - 1\right) - \frac{1}{2n(2k+1)}\left(e^{-j(n(2k+1))} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2n(2k-1)}\cdot\left(e^{-jn(2k-1)} - 1\right) - \frac{1}{2n(2k+1)}\left(e^{-jn(2k+1)} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2n(2k-1)}\cdot\left((-1)^{(2k-1)} - 1\right) - \frac{1}{2n(2k+1)}\left((-1)^{(2k+1)} - 1\right) =$$

$$e^{-jn} = -1$$

$$= \frac{1}{2n(2k-1)}\cdot(-1-1) - \frac{1}{2n(2k+1)}(-1-1) =$$

$2k+1$ και $2k-1$ περιττοί για $k \in \mathbb{Z}$

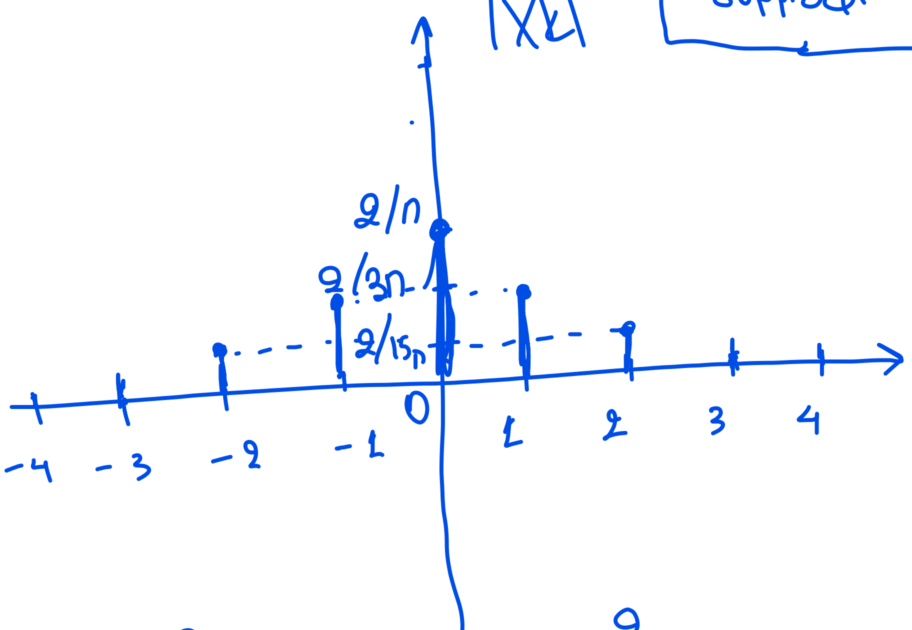
$$= \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\pi(2k-1)} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi(2k+1)} = \frac{1}{\pi(2k+1)} - \frac{1}{\pi(2k-1)} =$$

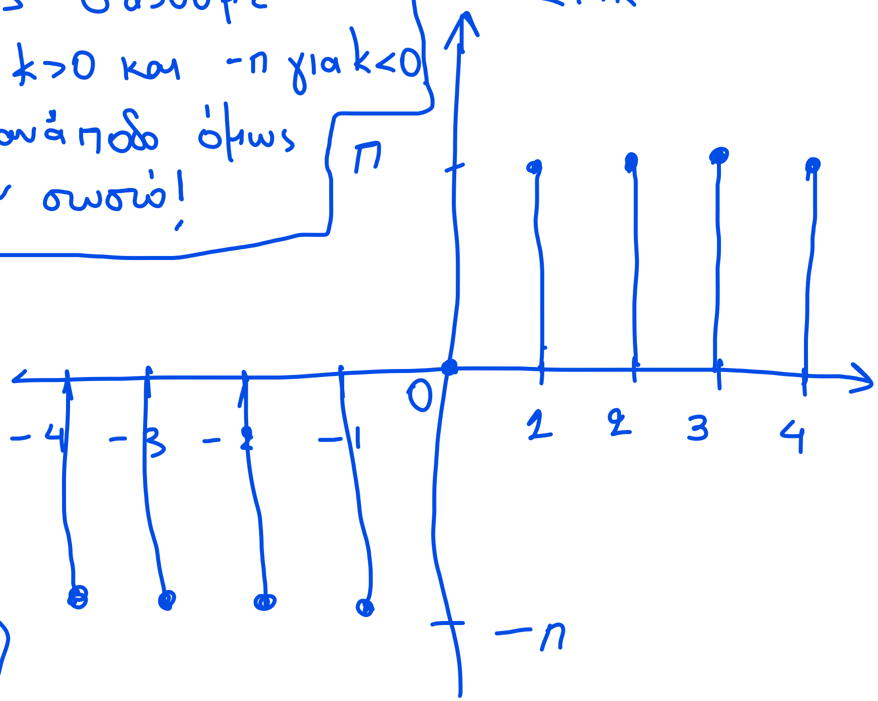
$$= \frac{\cancel{2\pi k} - 1 - \cancel{2\pi k} - 1}{\pi(2k-1)(2k+1)} = \frac{-2}{\pi\left((2k)^2-1\right)} = \boxed{\frac{2}{\pi(1-4k^2)} = X_k \quad \text{και} \quad X_0 = \frac{2}{\pi}}$$

x(t) πραγματικό, άρα $|X_k|$ άρτια και $\angle X_k$ περιττή συμμετρία

συνήθως βάζουμε $+\pi$ για $k>0$ και $-\pi$ για $k<0$ και το ανάποδο όμως θα ήταν σωστό!

γ)





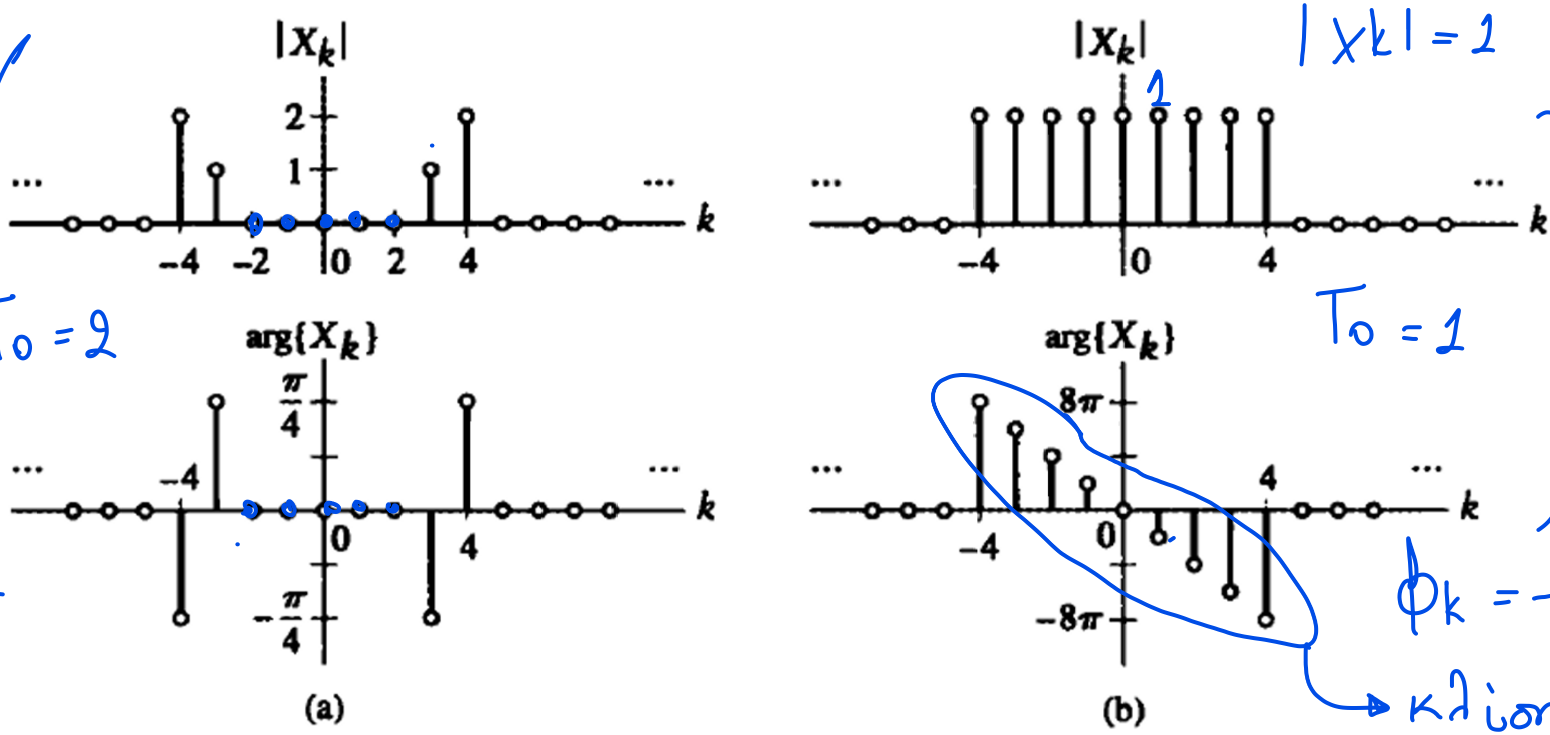
$$X_k = \frac{2}{\pi(1-4k^2)} = -\frac{2}{\pi(4k^2-1)} = \frac{2}{\pi(4k^2-1)} \cdot e^{j\pi}$$

$$e^{j\pi} = -1$$

$$\rightsquigarrow |X_k| = \frac{2}{\pi(4k^2-1)}, \quad \angle X_k = \pi$$

Ασκηση 3 - Σειρές Fourier III

Θεωρήστε τα ζεύγη φάσματος πλάτους και φάσης του Σχήματος 5, με $|X_k|$ το φάσμα πλάτους και $\arg\{X_k\}$ το φάσμα φάσης, ενώ ο οριζόντιος άξονας και των δυο συμβολίζει το δείκτη k των συντελεστών X_k. Έστω ότι οι περίοδοι για τα



$T_0 = 2$

$f_0 = \frac{1}{2}$

$|X_k| = 1$

$T_0 = 1$

$f_0 = 1$

$\phi_k = -2\pi k$

κλίση ευθείας: $-\frac{8\pi}{4} = -2\pi$

Σχήμα 5: *Φάσματα πλάτους και φάσης Άσκησης 3.*

δυο σήματα είναι $T_0^{(a)} = 2$ και $T_0^{(b)} = 1$. Βρείτε τις Σειρές Fourier στο πεδίο του χρόνου στις οποίες αντιστοιχούν[1].

[1]Μη σας απασχολεί ότι η φάση του (b) δε βρίσκεται στο $(-\pi, \pi]$ όπως γνωρίζουμε.

$$x(t) = \sum_{k=-4}^{4} X_k e^{j\pi 2 k f_0 t} = 2e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j2\pi 4 \frac{1}{2} t} + 1 e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j2\pi 3 \frac{1}{2} t} + 1 e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j2\pi 3 \frac{1}{2} t} + 2 e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j2\pi 4 \cdot \frac{1}{2} t} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{2 e^{-j\frac{\pi}{4}}}\underbrace{e^{-j2\pi 4\frac{1}{2}t}}}_{} + \underbrace{\underbrace{2 e^{j\frac{\pi}{4}}}\underbrace{e^{j2\pi 4\frac{1}{2}t}}}_{} +$$

$$+ \underbrace{e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j2\pi\frac{3}{2}t} + e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{+j2\pi\frac{3}{2}t}}_{} =$$

$$= \boxed{4\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(3\pi t - \frac{\pi}{4}\right)}$$

B) $x(t) = \sum_{k=-4}^{4} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-4}^{4} 1 \cdot \underline{e^{-j2\pi k}} e^{j2\pi k f_0 t} =$

$$= \sum_{k=-4}^{4} e^{-j2\pi k} \cdot e^{j2\pi k t} = \sum_{k=-4}^{4} e^{j(2\pi k(t-1))} =$$

$$= \frac{e^{-j8\pi(t-1)} - e^{j10\pi(t-1)}}{1 - e^{j2\pi(t-1)}} = \frac{e^{-j8\pi t} \cdot \cancel{e^{j8\pi}}^{1} - e^{j10\pi t} \cdot \cancel{e^{-j10\pi}}^{1}}{1 - e^{j2\pi t} \cdot \cancel{e^{-j2\pi}}^{1}}$$

$$\sum_{k=N1}^{N2} a^k = \frac{a^{N1} - a^{N2+1}}{1-a}$$

$$\left(\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}\right)$$

$$= \frac{\cancel{e^{jnt}}}{\cancel{e^{jnt}}} \frac{e^{-j9nt} - e^{j9nt}}{e^{-jnt} - e^{jnt}} = \frac{\cancel{-2}j\sin(9nt)}{\cancel{-2}j\sin(nt)} =$$

1

$$= \boxed{\frac{\sin(9nt)}{\sin(nt)}}$$

Ασκηση 7 - Συντελεστές Fourier I

Ενα σήμα με περίοδο T_0 λέγεται ότι έχει "συμμετρία μισού κύματος " αν ικανοποιεί τη σχέση

$$x(t) = -x\left(t - \frac{T_0}{2}\right) \tag{57}$$

Αυτό σημαίνει ότι το μισό της μιας περιόδου του σήματος ειναι το αρνητικό του άλλου μισού. Δείξτε ότι οι συντελεστές Σειράς Fourier που αντιστοιχούν στους άρτιους συντελεστές X_{2k}, είναι μηδέν για τα σήματα με μισού-κύματος συμμετρία.

$$X_{2k} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi 2k f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi 2k f_0 t}\, dt + \frac{1}{T_0}\int^{T_0} -x\left(t-\frac{T_0}{2}\right) e^{-j2\pi 2k f_0 t}\, dt =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi 2k f_0 t}\, dt}_{A} + \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} -x(u)\, e^{-j2\pi 2k f_0 \left(u+\frac{T_0}{2}\right)}\, du$$

$$\begin{cases} u = t - \frac{T_0}{2} \rightsquigarrow t = u + \frac{T_0}{2} \\ t = \frac{T_0}{2} \rightsquigarrow u = 0 \\ t = T_0 \rightsquigarrow u = \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

$$= A - \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(u)\, e^{-j2\pi 2k f_0 u - j2\pi 2k f_0 \frac{T_0}{2}}\, du =$$

$$= A - \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(u) \cdot e^{-j2\pi 2k f_0 u} \cdot e^{-j2\pi \cancel{2}k \cancel{\frac{f_0 T_0}{2}}}\, du = A - \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(u)\, e^{-j2\pi 2k f_0 u}\, e^{-j2\pi k}\, du$$

$$= \underline{\frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi 2k f_0 t}\, dt} - \underline{\frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(u)\, e^{-j2\pi 2k f_0 u}\, du} = 0$$

Ασκηση 9 - Συντελεστές Fourier II

Δείξτε ότι ένα *μιγαδικό* περιοδικό σήμα $x(t)$ για το οποίο ισχύει $x(t) = x(-t)$, ικανοποιειται η συνθήκη

$$X_k = X_{-k} \tag{81}$$

$$X_{-k} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi(-k)f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{j2\pi k f_0 t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(-t)\, e^{j2\pi k f_0 t}\, dt =$$

$u = -t \rightsquigarrow t = -u$

$t = 0 \rightsquigarrow u = 0$

$t = T_0 = u = -T_0$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0} x(u)\, e^{j2\pi k f_0 (-u)}\, du =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0}^{0} x(u)\, e^{-j2\pi k f_0 u}\, du = \underline{X_k} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$