

Διαγράμματα Venn – Χάρτες Karnaugh, Άλγεβρα Boole

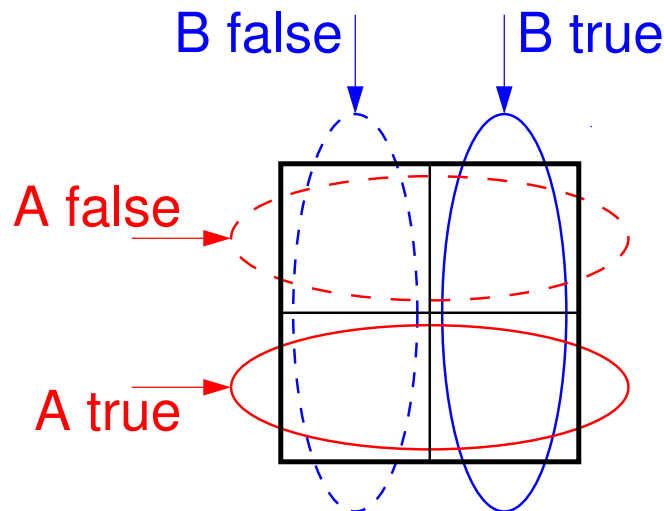
04α (§ 4.1 - 4.8) – 9-14 Οκτ. 2026 – Μανόλης Κατεβαίνης

Χάρτης Karnaugh / Διάγραμμα Venn 2 Μεταβλητών

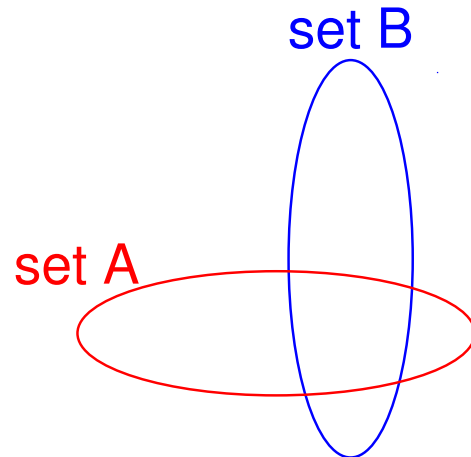
$f(A,B)$

	B	
	0	1
A	0	$f(0,0)$ $f(0,1)$
	1	$f(1,0)$ $f(1,1)$

Πίνακας Αληθείας
σε μορφή
Χάρτη Karnaugh



Οι «Περιοχές»
της κάθε
Μεταβλητής



Διάγραμμα
συνόλων
τύπου Venn

- Μεταβλητές σε ορθογώνιους άξονες – Διδιάστατο διάγραμμα

Συναρτήσεις 2 μεταβλητών με έναν Άσο στον Π.Α.

$f(A,B)$

		B'	B
		0	1
A'	0	0	0
A	1	0	1

$g(A,B)$

		B'	B
		0	1
A'	0	0	1
A	1	0	0

$h(A,B)$

		B'	B
		0	1
A'	0	0	0
A	1	1	0

$k(A,B)$

		B'	B
		0	1
A'	0	1	0
A	1	0	0

$$f(A,B) = A \cdot B \quad g(A,B) = A' \cdot B \quad h(A,B) = A \cdot B' \quad k(A,B) = A' \cdot B'$$

- Το ΚΑΙ ανάβει σε μία και μόνο μία περίπτωση
- Η τομή δύο συνόλων στο διάγραμμα Venn
- Οι 4 έξοδοι του αποκωδικοποιητή

Δύο άσοι σε **γειτονικά** τετρ.: ανεξαρτ. από μία μτβλ.

$f(A,B)$

		B'	B
		0	1
A'	0	0	0
A	1	1	1

$g(A,B)$

		B'	B
		0	1
A'	0	0	1
A	1	0	1

$h(A,B)$

		B'	B
		0	1
A'	0	1	1
A	1	0	0

$k(A,B)$

		B'	B
		0	1
A'	0	1	0
A	1	1	0

$$f(A,B) = A$$

$$g(A,B) = B$$

$$h(A,B) = A'$$

$$k(A,B) = B'$$

- Γειτονικά τετράγωνα = μία μτβλ. αλλάζει, οι άλλες ίδιες
- Συνάρτηση ίδια σε 2 γειτονικά τετράγωνα $\Rightarrow$ ανεξάρτητη από τη μεταβλητή εισόδου που αλλάζει μεταξύ τους

Η συνάρτηση OR: Ένωση συνόλων

		B' B	
$f(A,B)$		0	1
A'	0	0	1
	1	1	1

		B' B	
$g(A,B)$		0	1
A'	0	1	1
	1	0	1

		B' B	
$h(A,B)$		0	1
A'	0	1	0
	1	1	1

		B' B	
$k(A,B)$		0	1
A'	0	1	1
	1	1	0

$$f(A,B) = A+B \quad g(A,B) = A'+B \quad h(A,B) = A+B' \quad k(A,B) = A'+B'$$

- Καλύπτουμε όλους τους άσους με *ορθογώνιες* περιοχές, όσο πιο μεγάλες γίνεται (μέγεθος $\Rightarrow$ ανεξαρτησία)
- Η συνάρτηση είναι το **OR** (ένωση) όλων των επιμέρους

Οι υπόλοιπες 4 συναρτήσεις 2 μεταβλητών...

$f(A,B)$

	B'	B
A'	0	0
A	0	0

$$f(A,B) = 0$$

$g(A,B)$

	B'	B
A'	1	1
A	1	1

$$g(A,B) = 1$$

$h(A,B)$

	B'	B
A'	0	1
A	1	0

$$A \cdot B' + A' \cdot B$$

$k(A,B)$

	B'	B
A'	1	0
A	0	1

$$A' \cdot B' + A \cdot B$$

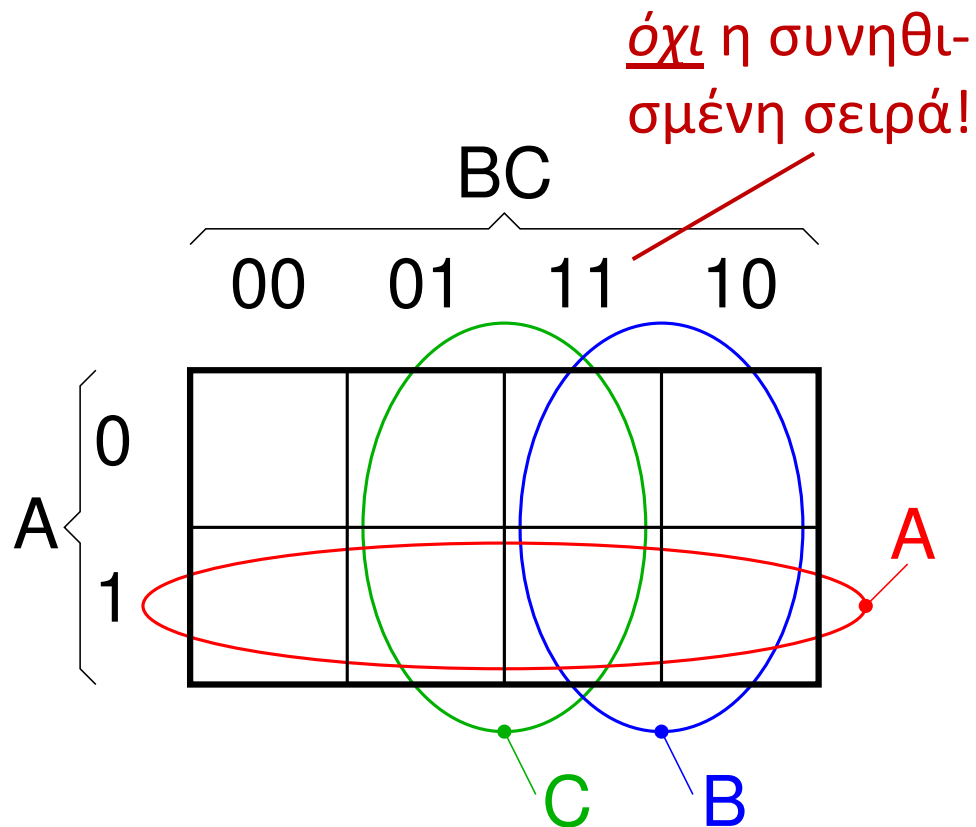
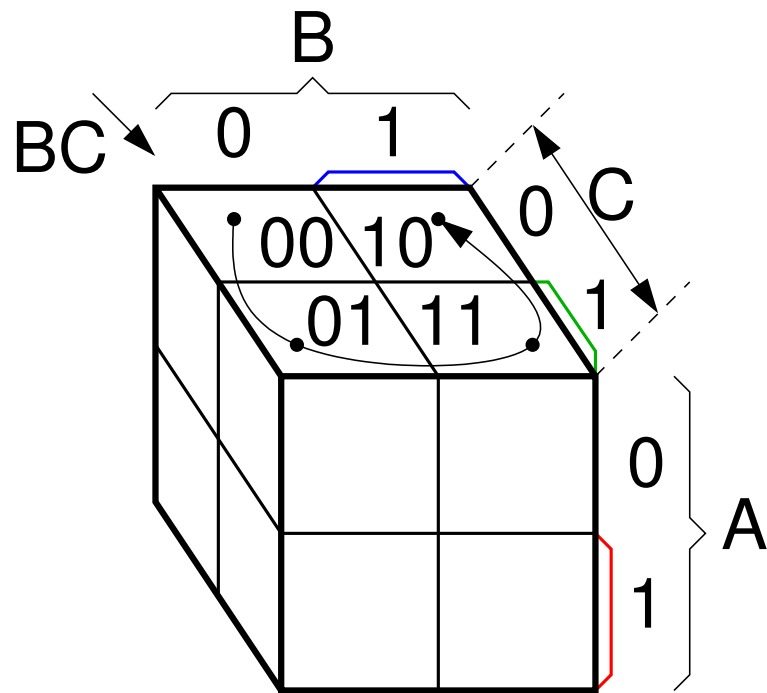
- Ίδια τιμή σε 4 γειτονικά τετρ. $\Rightarrow$ ανεξαρτησία από 2 μτβλ.
- Οι XOR και XNOR δεν αδιαφορούν για καμία είσοδο (ιδιότητα ανίχνευσης σφαλμάτων) $\Rightarrow$ καμία απλοποίηση όρων

Γιατί υπάρχουν $16 (=2^4)$ συναρτήσεις 2 μεταβλητών;

		B	
		0	1
A	0	$f(0,0)$	$f(0,1)$
	1	$f(1,0)$	$f(1,1)$

- Ψηφιακή δυαδική συνάρτηση δύο ψηφιακών δυαδικών μτβλ.
 - Πλήρως καθορισμένη από τον πίνακα αληθείας της
 - Ο πιν. αλ. της έχει 4 θέσεις
 - Σε κάθε θέση, 2 επιτρεπτές τιμές
- Τα 4 bits στα 4 χρωματιστά τετρ. καθορίζουν πλήρως την $f()$
 - Υπάρχουν ακριβώς και μόνον $2^4=16$ συνδυασμοί των 4 bits, άρα υπάρχουν ακριβώς $2^4=16$ συναρτήσεις Boole 2 μεταβλ.

Χάρτης Karnaugh / Διάγραμμα Venn 3 Μεταβλητών



- Τρείς Μεταβλητές
- Τριδιάστατο Διάγραμμα

- Κόβουμε και ξετυλίγουμε

Συναρτήσεις 3 μεταβλητών με έναν Άσο στον Π.Α.

		BC		B	
		00	01	11	10
A	0	0	0	0	0
	1	0	0	1	0

$A \cdot B \cdot C$

		BC		B	
		00	01	11	10
A	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	1

$A \cdot B \cdot C'$

		BC		B	
		00	01	11	10
0		0	0	0	0
A	1	0	1	0	0

$A \cdot B' \cdot C$

		BC		<u>B</u>	
		00	01	11	10
0		0	0	0	0
A	1	1	0	0	0

C

$A \cdot B' \cdot C'$

		BC		B	
		00	01	11	10
A	0	0	0	1	0
	1	0	0	0	0

$A' \cdot B \cdot C$

		BC		B	
		00	01	11	10
0		0	0	0	1
A	1	0	0	0	0

$A' \cdot B \cdot C'$

		BC		B	
		00	01	11	10
0		0	1	0	0
A	1	0	0	0	0

$A' \cdot B' \cdot C$

		BC		B	
		00	01	11	10
0	A	1	0	0	0
1		0	0	0	0

$A' \cdot B' \cdot C'$

Συναρτ. 3 μτβλ. με δύο γειτονικούς Άσους στον Π.Α.

		BC		B	
		00	01	11	10
A	0	0	0	0	0
	1	0	0	1	1

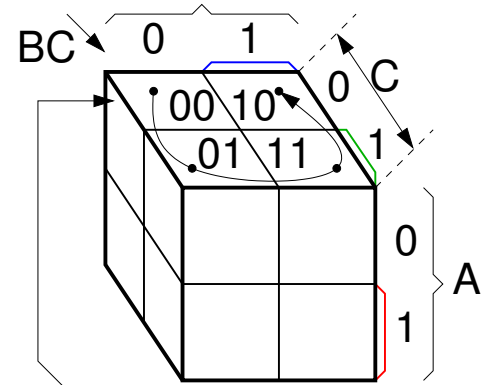
$A \cdot B$

		BC		B	
		00	01	11	10
A	0	0	0	0	0
	1	0	1	1	0

$A \cdot C$

		BC		B	
		00	01	11	10
A	0	1	1	0	0
	1	0	0	0	0

$A' \cdot B'$



		BC		B	
		00	01	11	10
A	0	0	0	1	0
	1	0	0	1	0

$B \cdot C$

		BC		B	
		00	01	11	10
A	0	0	1	0	0
	1	0	1	0	0

$B' \cdot C$

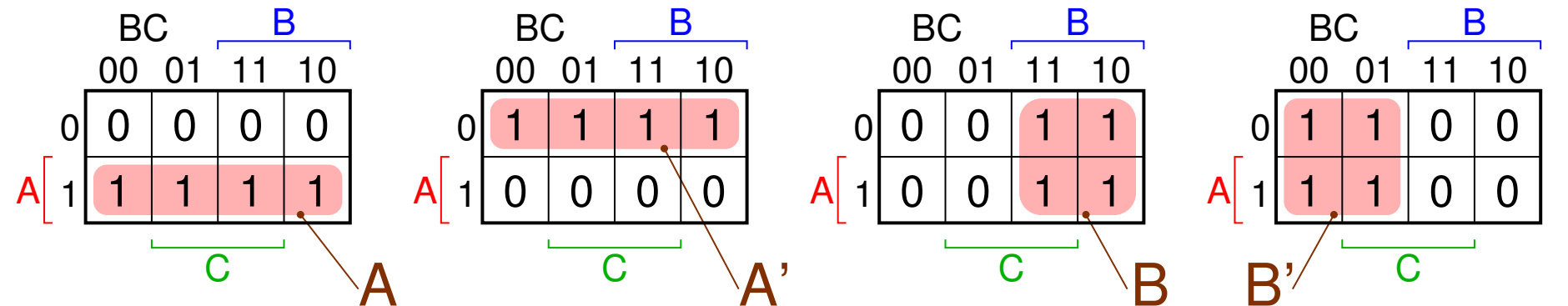
		BC		B	
		00	01	11	10
A	0	0	0	0	0
	1	1	0	0	1

$A \cdot C'$

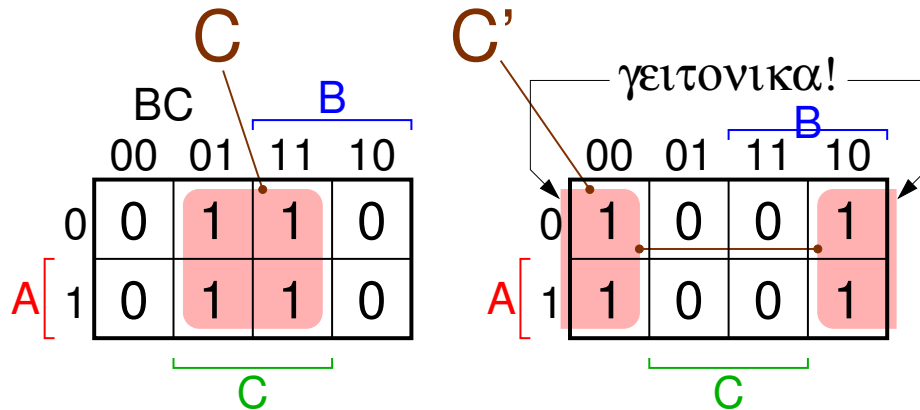
		BC		B	
		00	01	11	10
A	0	1	0	0	1
	1	0	0	0	0

$A' \cdot C'$

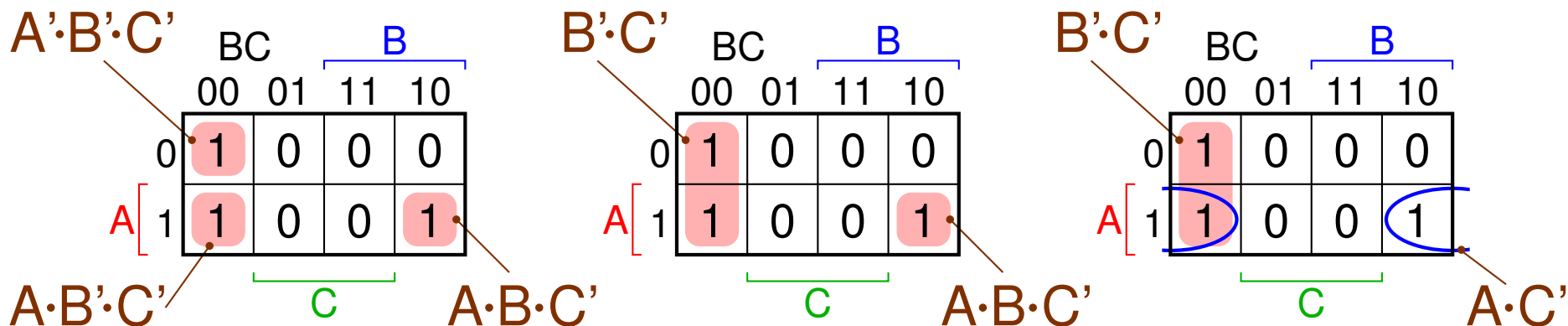
4 γειτονικοί άσοι: ανεξαρτησία από 2 μεταβλητές



- Γειτονιές ορθογωνίου σχήματος πάντα
- Κάθε διπλασιασμός μεγέθους γειτονιάς αντιστοιχεί σε ανεξαρτησία από μία επιπλέον μεταβλητή εισόδου
- 4 άσοι $\Rightarrow$ ανεξαρτησία από 2 μτβλ.



Ένωση Γειτονιών (OR): συμφέρει να είναι Μεγάλες



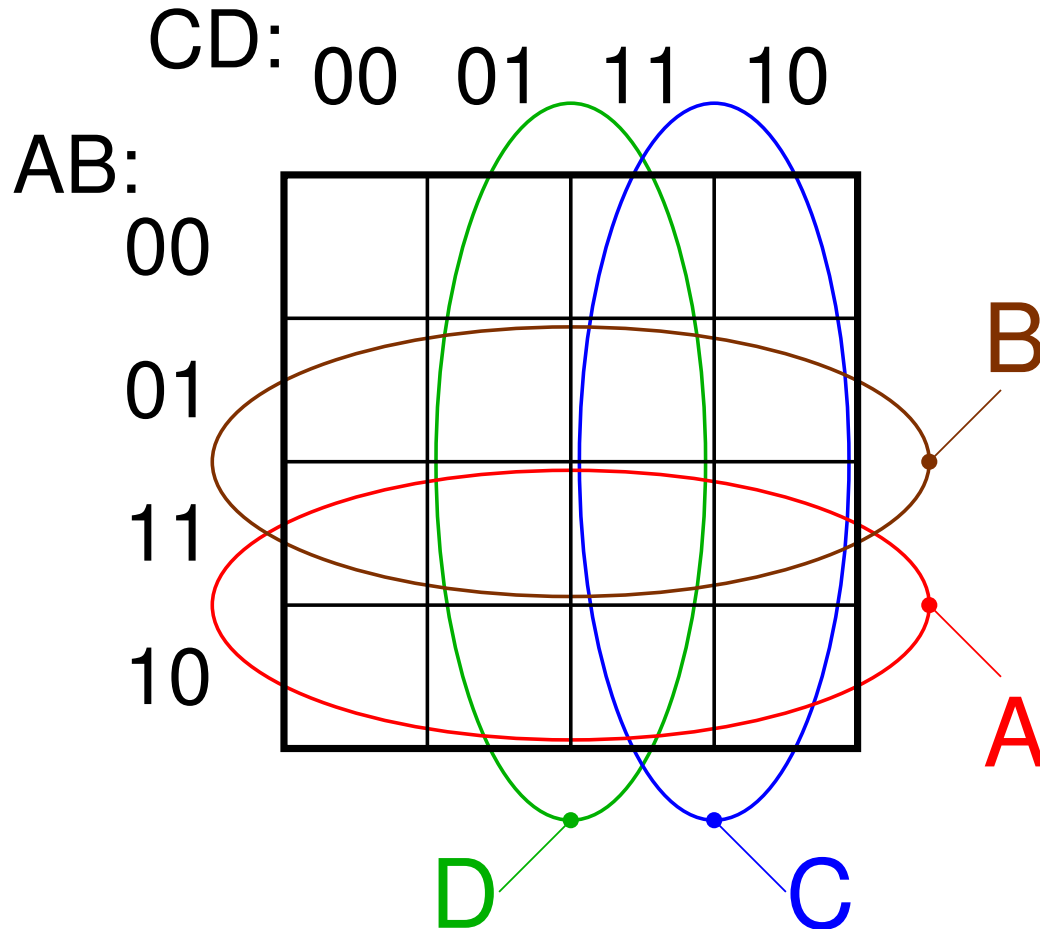
$$A'·B'·C' + A·B'·C' + A·B·C'$$

$$B'·C' + A·B·C'$$

$$B'·C' + A·C'$$

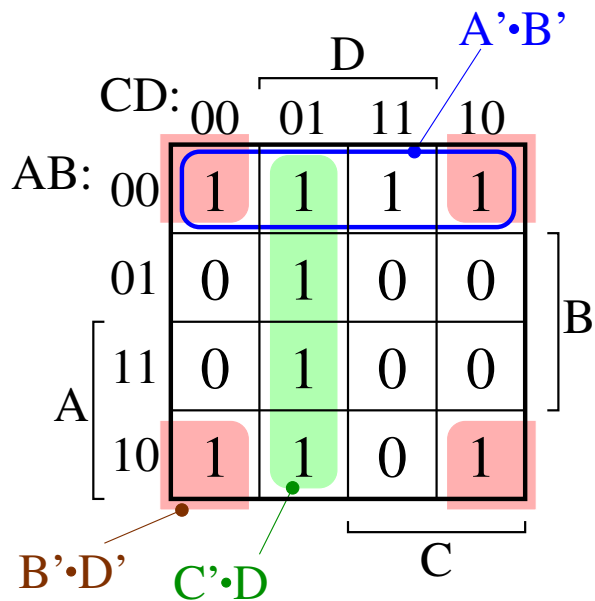
- Ολική Συνάρτηση = **OR** (όροι **AND** ορθογώνιων γειτονιών)
- Όσο μεγαλύτερη γειτονιά, τόσο μικρότερος όρος **AND**
- Συμφέρει «φούσκωμα» γειτονιών, και με αλληλοκάλυψη
- Η ROM της §2.5 υλοποιεί την αριστερή (χειρότερη) λύση

Χάρτης Karnaugh 4 Μεταβλητών

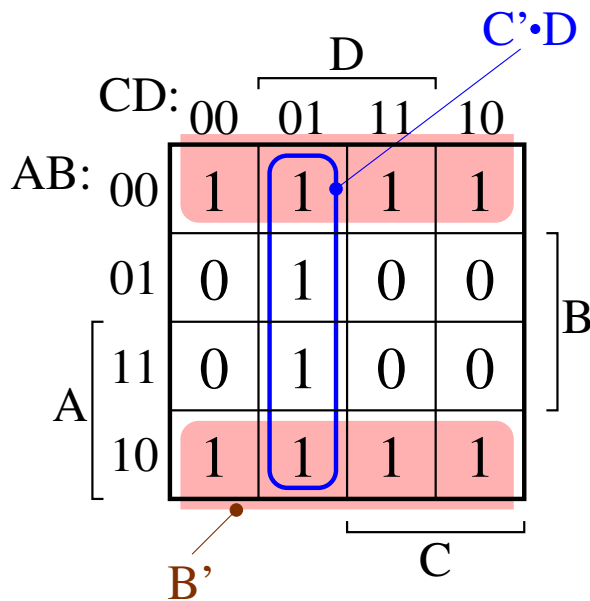


- Σαν από ξετύλιγμα και οριζόντια και κατακόρυφα
- Αριστερή στήλη γειτονική με δεξιά
- Επάνω γραμμή γειτονική με κάτω

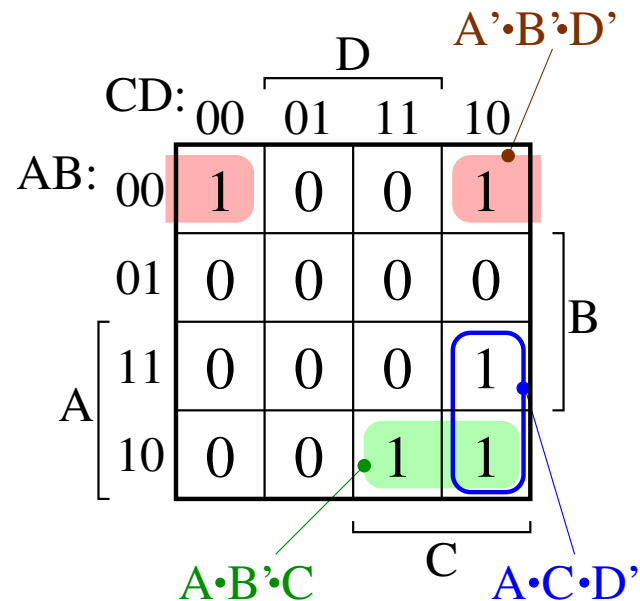
Παραδείγματα Συναρτήσεων 4 Μεταβλητών



$$B'D' + C'D + A'B'$$



$$B' + C'D$$



$$A \cdot B' \cdot C + A \cdot C \cdot D' + A' \cdot B' \cdot D'$$

Μέγεθος «Γειτονιάς» (πλήθος κουτακίων)	1	2	4	8	16
Όρος <u>KAI</u> ανεξάρτητος από πόσες μεταβλητές	0	1	2	3	4
Όρος <u>KAI</u> περιέχει πόσες μεταβλητές εισόδου	4	3	2	1	0

Τι κάνουμε για Συναρτήσεις ≥ 5 μεταβλητών;

- Χάρτης Karnaugh πέντε μεταβλητών θα ήταν σαν δύο χάρτες 4 μεταβλητών ο ένας πάνω από τον άλλον, κλπ.
- Δεν είναι πρακτικό/χρήσιμο για τους ανθρώπους
- Σημερινή τεχνολογία έχει προχωρήσει πολύ
 - Κανείς πιά δεν βελτιστοποιεί «συνδυαστική λογική» με το χέρι
 - Πολύ εξελιγμένοι αλγόριθμοι και προγράμματα αυτοματοποιημένης βελτιστοποίησης
- **EDA** (*Electronic Design Automation*) Tools
- **CAD** (*Computer Aided Design*)

Το σύμβολο “x” (don’t care) στην πλευρά Εισόδων Π.Α.

- Σύντμηση πολλαπλών πανομοιότυπων γραμμών
 - ανεξαρτησία εξόδων από (αδιαφορία για) κάποια μτβλ. εισόδου
 - «ό,τι και να’ναι αυτή η μεταβλητή, εσύ κάνεις το ίδιο»

Χορτο- φάγος;	Χοιρινό τρώτε;	Πιάτο:
1	x	Σαλάτα
0	0	κοτόπουλο
0	1	πριζόλα

Write	DataIn	Μνήμη=
0	x	ό,τι πριν
1	0	0
1	1	1

A	B	A·B
0	x	0
1	0	0
1	1	1

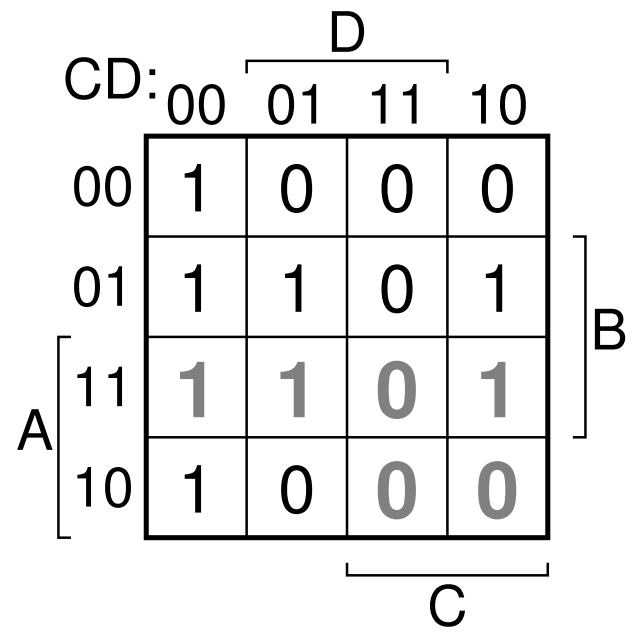
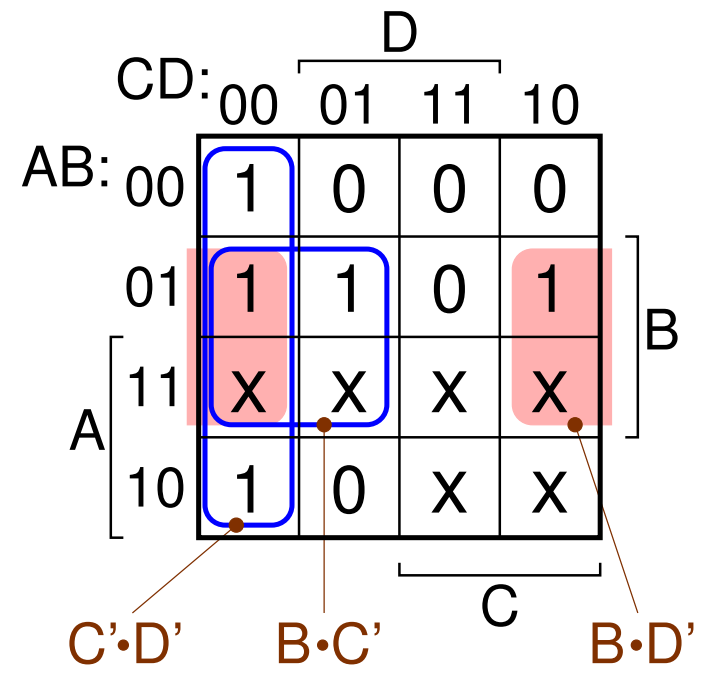
Χορτοφ.;	Χοιρινό;	Πιάτο:
1	0	Σαλάτα
1	1	Σαλάτα
0	0	κοτόπουλο
0	1	πριζόλα

Write	DataIn	Μνήμη=
0	0	ό,τι πριν
0	1	ό,τι πριν
1	0	0
1	1	1

A	B	A·B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Το σύμβολο “x” (don’t care) στην πλευρά Εξόδων Π.Α.

- Προδιαγραφές: «Δεν με νοιάζει – κάνε ό,τι συμφέρει»
 - Τελικά, η έξοδος, ή 0 θα είναι ή 1 θα είναι σε αυτή τη θέση του πίνακα αληθείας – απλά εμείς δεχόμαστε οιοδήποτε εκ των δύο



Ο πελάτης ζήτησε το αριστερό.
Ο σχεδιαστής επέλεξε το δεξί.
Τα γκρίζα τα επιλέγει ο σχεδιαστής, όπως τον συμφέρει.

Άλγεβρα Boole 1: Θεώρημα De Morgan

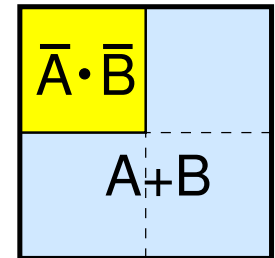
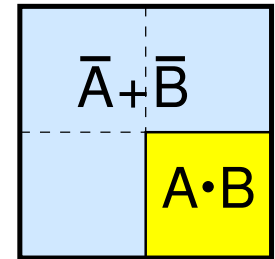
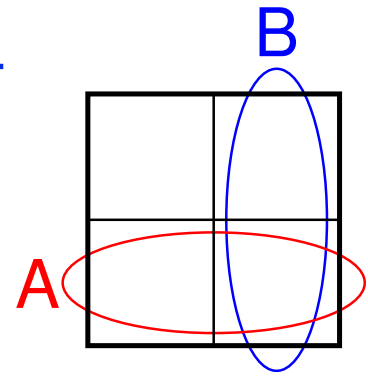
- Δύο αρνήσεις = μία κατάφαση:

$$(A')' = A$$

- De Morgan / Δυϊσμός ΚΑΙ - Ή:

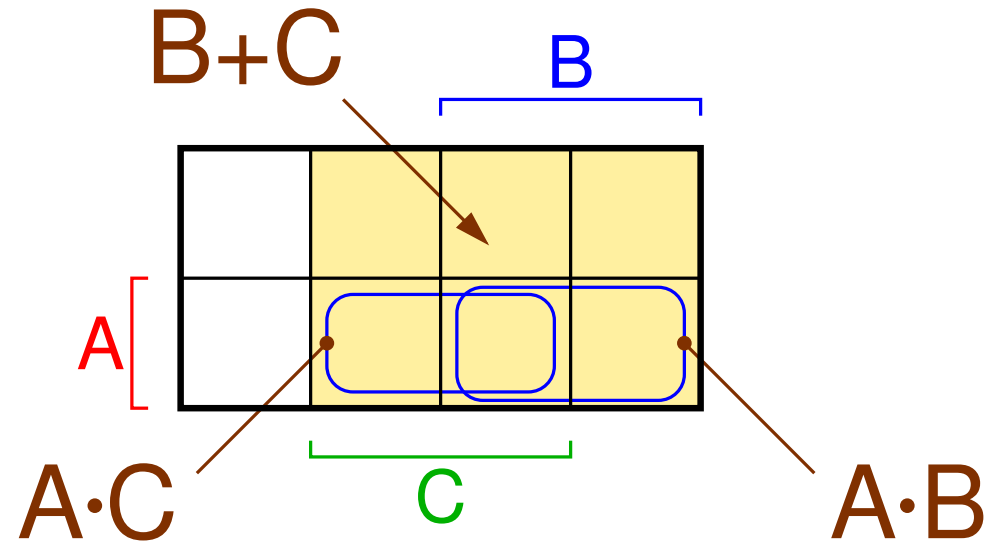
$$(A \cdot B)' = A' + B'$$

$$(A + B)' = A' \cdot B'$$



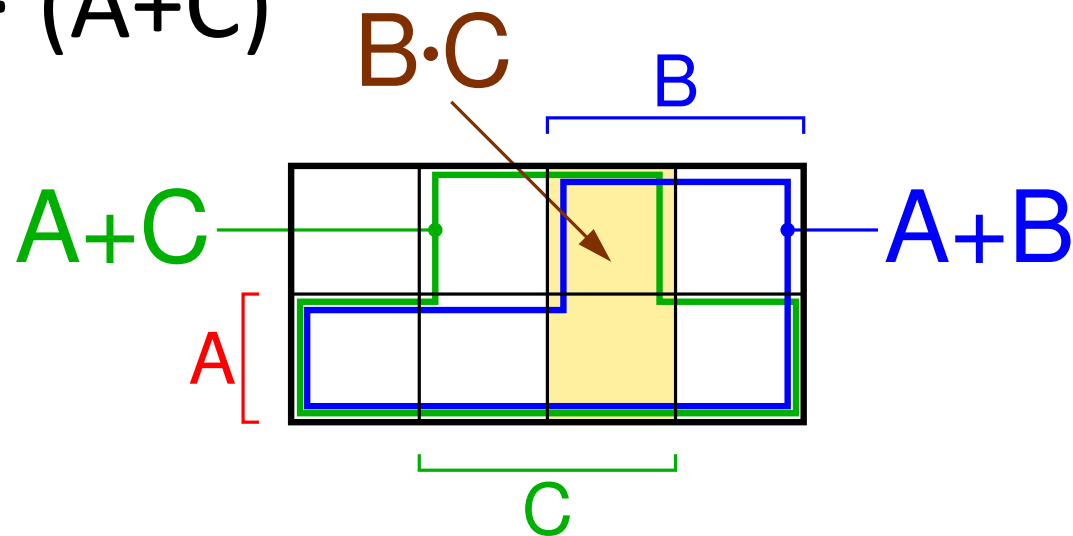
Επιμεριστική ιδιότητα του **KAI** ως προς το **Ή**

$$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$$



Και το Δυϊκό: Επιμεριστική ιδ. του $\underline{H}$ ως προς το $\underline{KAI}$

$$A + (B \cdot C) = (A+B) \cdot (A+C)$$



Δυϊσμός: Σε κάθε ταυτότητα της άλγεβρας Boole, εάν αλλάξουμε τα KAI σε H, τα H σε KAI, τις σταθερές **0** σε **1**, και τις **1** σε **0**, προκύπτει μιά άλλη, δυϊκή της, αληθής ταυτότητα!

Απόδειξη του Δυϊκού χρησιμοποιώντας το ευθύ

$$A+(B \cdot C) =$$

$$= [(A+(B \cdot C))']'$$

$$= [A' \cdot (B \cdot C)']'$$

$$= [A' \cdot (B' + C')]'$$

$$= [(A' \cdot B') + (A' \cdot C')]'$$

$$= (A' \cdot B')' \cdot (A' \cdot C')'$$

$$= (A''+B'') \cdot (A''+C'')$$

$$= (A + B) \cdot (A + C)$$

← Δύο αρνήσεις

← Εσωτ. ΟΧΙ του Ή (De Morgan)

← Εσωτ. ΟΧΙ του ΚΑΙ (De Morgan)

← **Επιμεριστική ΚΑΙ προς Ή (ευθύ)**

← Εξωτ. ΟΧΙ του Ή (De Morgan)

← Εσωτ. ΟΧΙ του ΚΑΙ (De Morgan)

← Δύο αρνήσεις

Άλλες Ταυτότητες της Άλγεβρας Boole & τα Δυσικά τους

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$A+B = B+A$$

(αντιμεταθετική)

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

(προσεταιριστική)

$$A \cdot 0 = 0$$

$$A+1 = 1$$

(annihilator element)

$$A \cdot 1 = A$$

$$A+0 = A$$

(identity element)

$$A \cdot A = A$$

$$A+A = A$$

(idempotent)

$$A \cdot A' = 0$$

$$A+A' = 1$$

(complementation)

$$A \cdot (A+B) = A$$

$$A+A \cdot B = A$$

(absorption)

$$A \cdot (A'+B) = A \cdot B$$

$$A + A' \cdot B = A+B$$