

Αλγόριθμος Πρόσθεσης και Κρατούμενα, Δυαδικοί Αθροιστές

05b (§ 5.3 - 5.11) – 2 Νοε. 2020 – Μανόλης Κατεβαίνης

Πρόσθεση Ακεραίων (unsigned) στο Δυαδικό

- $A = a_{n-1} \times 2^{n-1} + \dots + a_3 \times 2^3 + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0$
- $B = b_{n-1} \times 2^{n-1} + \dots + b_3 \times 2^3 + b_2 \times 2^2 + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0$
- $\Rightarrow A+B = (a_{n-1}+b_{n-1}) \times 2^{n-1} + \dots$
 $+ (a_3+b_3) \times 2^3 + (a_2+b_2) \times 2^2 + (a_1+b_1) \times 2^1 + (a_0+b_0) \times 2^0$
- Αυτή δεν είναι η δυαδική αναπαράσταση του αθροίσματος, διότι οι συντελεστές $(a_i+b_i) \in \{0, 1, 2\}$ και όχι αναγκαστικά $\in \{0, 1\}$
- Τον κάθε συντελεστή (a_i+b_i) πρέπει να τον γράψουμε στο δυαδικό, σαν " $c_{i+1}s_i$ " = $c_{i+1} \times 2^1 + s_i \times 2^0$, όπου τα c_{i+1} και s_i είναι δυαδικά bits, δηλ. $\in \{0, 1\}$ – π.χ. 1 συν 1 = $2_{10} = 10_2$ – όπου s_i είναι το bit «αθροίσματος» και c_{i+1} είναι το bit «κρατούμενου»

A=	$a_3 \times 2^3$	+	$a_2 \times 2^2$	+	$a_1 \times 2^1$	+	$a_0 \times 2^0$		
B=	$b_3 \times 2^3$	+	$b_2 \times 2^2$	+	$b_1 \times 2^1$	+	$b_0 \times 2^0$		
	$(a_3+b_3) \times 2^3$	+	$(a_2+b_2) \times 2^2$	+	$(a_1+b_1) \times 2^1$	+	$(a_0+b_0) \times 2^0$		
							$(c_1 \times 2 + s_0) \times 2^0$		
					$(a_1+b_1+c_1) \times 2^1$	+	$s_0 \times 2^0$		
					$(c_2 \times 2 + s_1) \times 2^1$				
			$(a_2+b_2+c_2) \times 2^2$		$s_1 \times 2^1$				
			$(c_3 \times 2 + s_2) \times 2^2$						
	$(a_3+b_3+c_3) \times 2^3$		$s_2 \times 2^2$						
	$(c_4 \times 2 + s_3) \times 2^3$								
S=	$c_4 \times 2^4$	+	$s_3 \times 2^3$	+	$s_2 \times 2^2$	+	$s_1 \times 2^1$	+	$s_0 \times 2^0$

Πίνακας Αληθείας Κρατουμένου και Αθροίσματος

a_i	b_i	Σ_{10}	c_{i+1}	s_i
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	2	1	0

↑ Ημιαθροιστής (Half Adder – HA)

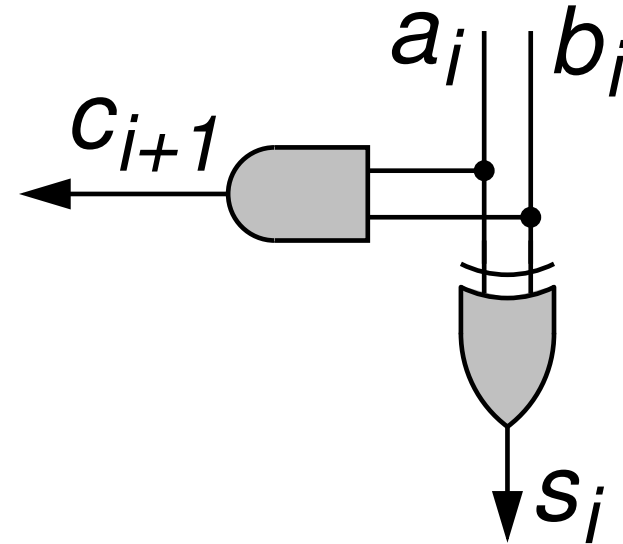
Πλήρης Αθροιστής (Full Adder – FA) →

Ποτέ δεν γενιέται πάνω
από 1 bit κρατουμένου

a_i	b_i	c_i	Σ_{10}	c_{i+1}	s_i
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	2	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	2	1	0
1	1	0	2	1	0
1	1	1	3	1	1

Ημιαθροιστής: Άθροισμα δύο bits ίδιας Σημαντικότητας

a_i	b_i	Σ_{10}	c_{i+1}	s_i
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	2	1	0



- Είσοδοι a_i και b_i πρέπει ίδιας «σημαντικότητας» (significance), δηλαδή συντελεστές της ίδιας δύναμης του 2
- Έξοδος αθροίσματος, s_i : ίδια σημαντικότητα με εισόδους
- Έξοδος κρατούμενου, c_{i+1} : σημαντικ. κατά 1 μεγαλύτερη

Πλήρης Αθροιστής: Άθρ. τριών bits ίδιας Σημαντικότητας

C_{i+1}	$b_i c_i$			
	00	01	11	10
a_i	0	0	1	0
	1	0	1	1

S_i	$b_i c_i$			
	00	01	11	10
a_i	0	0	1	1
	1	1	0	0

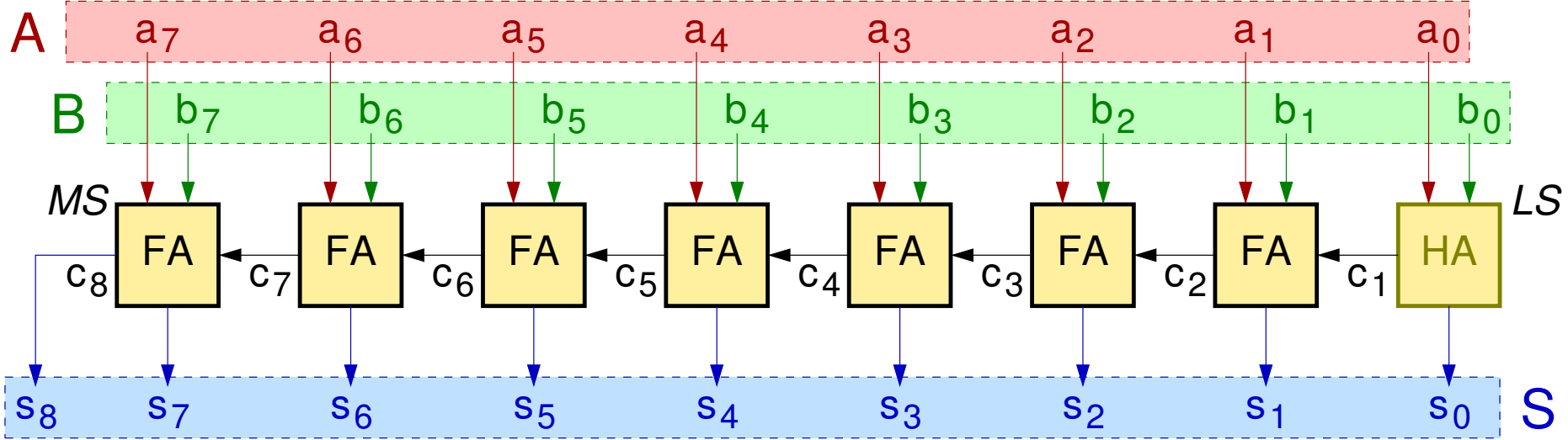
(note: *Odd Parity function*)

a_i	b_i	c_i	Σ_{10}	C_{i+1}	S_i
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	2	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	2	1	0
1	1	0	2	1	0
1	1	1	3	1	1

Συγγένεια του Αθροιστή με τη Συνάρτηση Ισοτιμίας

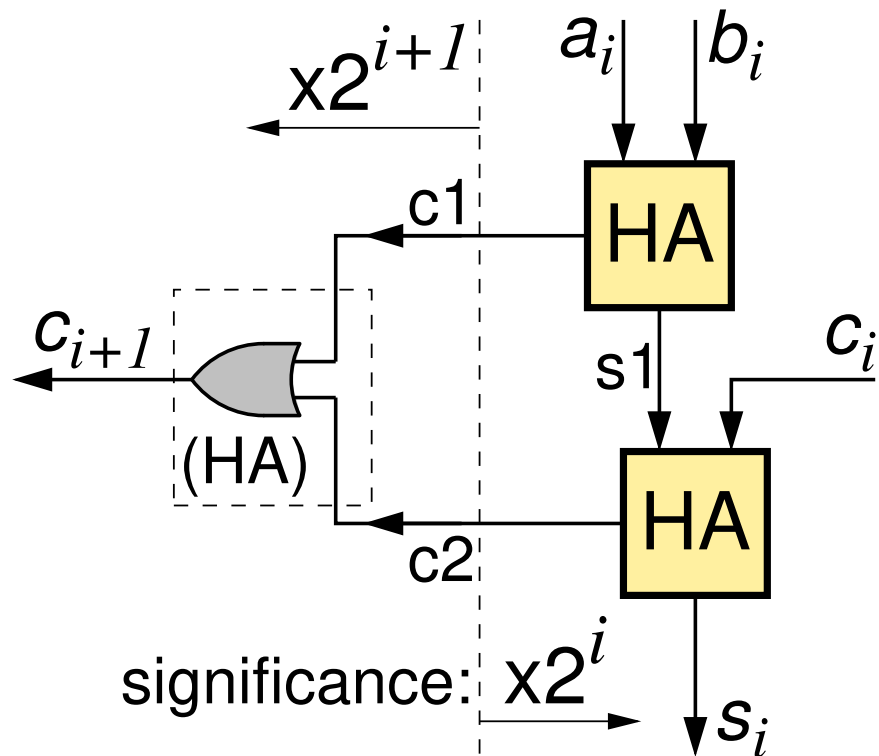
- Η συνάρτηση Ισοτιμίας βασίζεται στο πλήθος των Άσων
 - Πλήθος Άσων = Άθροισμα των bits εισόδου
 - Περιττή Ισοτιμία = «Πλήθος άσων είναι μονός αριθμός»
 - Δεξιό (λιγότερο σημαντικό) bit αθροίσματος S = υπόλοιπο διαίρεσης του S διά τη βάση 2 του δυαδικού
 - Υπόλοιπο διαίρεσης διά 2 = «Αριθμός είναι μονός»
- ⇒ Δεξιό (LS – Least Significant) bit αθροίσματος = Περιττή Ισοτιμία των εισόδων του Αθροιστή

Πολύμπιτος Αθροιστής: Αλυσίδα Κρατούμενων



- Άθροισμα δύο 8-μπιτων ακεραίων: $S = A+B$
- Το άθροισμα χρειάζεται 9 bits για να χωρά πάντα
- Αλυσίδα από Full-Adders – ο πρώτος Half-Adder
- Κρατούμενα από Least Significant (LS) προς Most Signif. (MS)

Εναλλακτικό Κύκλωμα Πλήρους Αθροιστή – Ασκ. 5.6

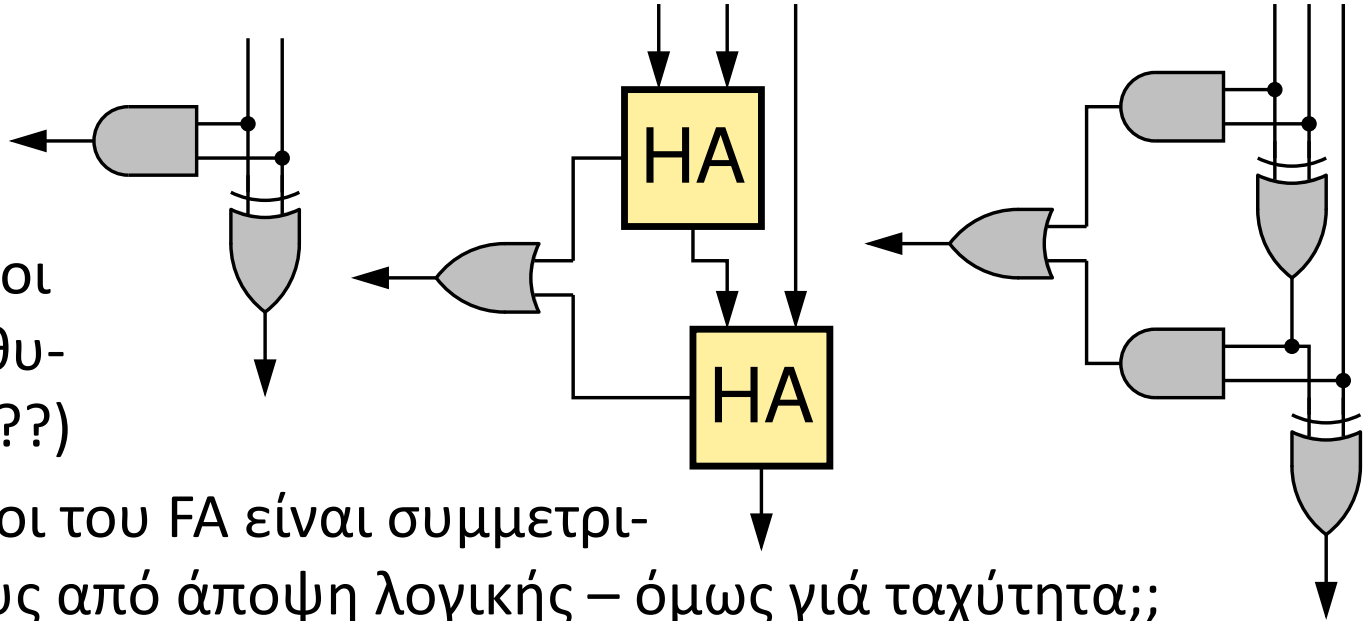


- Για να προσθέσουμε τρεις αριθμούς, a_i , b_i , c_i , αρκεί να προσθέσουμε τους δύο και στο άθροισμά τους να προσθέσουμε και τον τρίτο
- Κανονικά, τα κρατούμενα $c1$ και $c2$ πρέπει να προστεθούν μεταξύ τους, όμως:
- Αποδείξτε ότι αποκλείεται

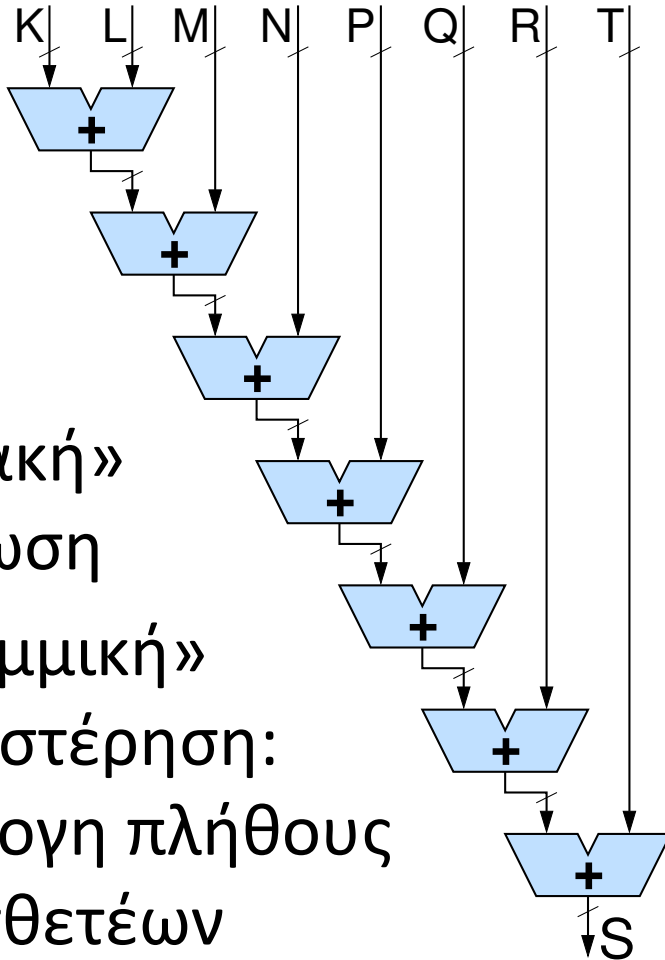
τα $c1$ και $c2$ να γίνουν ποτέ ταυτόχρονα $=1$, και τα δύο

Άσκηση 5.9: Ταχύτητα πολύμπιτης Πρόσθεσης

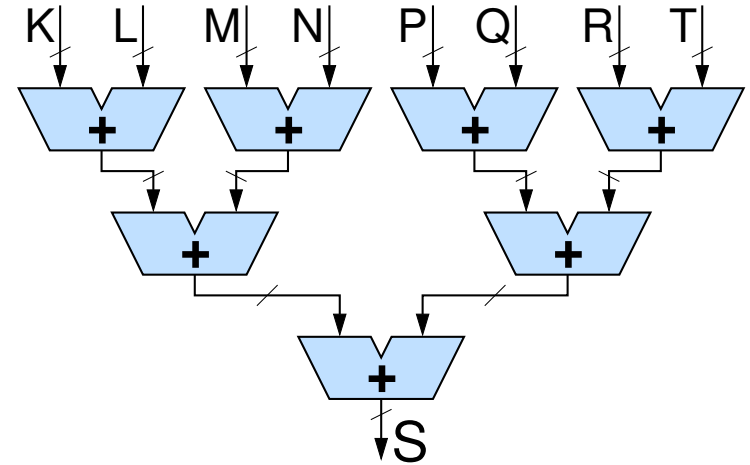
- Έστω ότι υλοποιούμε τον FA με δύο HA
- Έστω ότι όλες οι πύλες ίδια καθυστέρηση (XOR??)
- Οι τρεις εισοδοί του FA είναι συμμετρικές μεταξύ τους από άποψη λογικής – όμως για ταχύτητα;;
- Για το *κάθε* ζευγάρι εισόδου-εξόδου, πόσες πύλες καθυστέρηση;
- Στον αθροιστή της διαφ. 8, ποιά είναι η δεσπόζουσα καθυστέρηση;
- Ο αθροιστής ακεραίων συχνά καθορίζει τον κύκλο ρολογιού των επεξεργαστών – ευτυχώς υπάρχει τεχνική επιτάχυνσης (“carry lookahead”)



Δένδρο: Λογαριθμική Καθυστέρηση, αντί Γραμμικής



- «Σειριακή» οργάνωση
- ⇒ «Γραμμική» καθυστέρηση: ανάλογη πλήθους προσθετέων



- Οργάνωση «Δένδρου»
- ⇒ «Λογαριθμική» καθυστέρηση: ανάλογη \log_2 πλήθους προσθετέων

Αθροιστής Δένδρου: οι λεπτομέρειες

