# Δυαδική Αρίθμηση, και το Οκταδικό και Δεκαεξαδικό

*05α (§ 5.1 - 5.2) – 30 Οκτ. 2020 – Μανόλης Κατεβαίνης*

© copyright University of Crete – https://www.csd.uoc.gr/~hy120/20f/copyright.html

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | $2^1+$ | 0 | = 2 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | 1 | 3 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | | 0 | 4 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | $2^2+$ | 1 | = 5 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | | 2 | 6 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 7 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 8 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | | 1 | 9 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | | 2 | 10 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | $2^3+$ | 3 | = 11 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | | 4 | 12 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | | 5 | 13 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | | 6 | 14 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 7 | 15 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 16 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | | 1 | 17 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | | 2 | 18 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | | 3 | 19 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | | 4 | 20 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | | 5 | 21 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | | 6 | 22 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | $2^4+$ | 7 | = 23 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | | 8 | 24 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | | 9 | 25 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | | 10 | 26 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | | 11 | 27 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | | 12 | 28 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | | 13 | 29 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | | 14 | 30 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 15 | 31 |

# Δυαδική Αρίθμηση

- Κάθε επιπλέον bit, αριστερά: $2^i$ + προηγούμενη εικόνα
- Με *n* bits: $2^n$ ακέραιοι, από μηδέν (0) έως και $2^n$-1
- *unsigned integers*

# Ψηφία αριθμού = συντελεστές δυνάμεων της Βάσης

- Στο Δυαδικό:
- $00111_2 = 0\times2^4 + 0\times2^3 + 1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = 4+2+1 = 7_{10}$
- $01001_2 = 0\times2^4 + 1\times2^3 + 0\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0 = 8+1 = 9_{10}$
- $01101_2 = 0\times2^4 + 1\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0 = 8+4+1 = 13_{10}$
- $10011_2 = 1\times2^4 + 0\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = 16+2+1 = 19_{10}$
- $11010_2 = 1\times2^4 + 1\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0 = 16+8+2 = 26_{10}$

- Κατ’ αναλογία όπως και στο Δεκαδικό:
- $32768_{10} = 3\times10^4 + 2\times10^3 + 7\times10^2 + 6\times10^1 + 8\times10^0$

# Γενική μορφή αριθμού σε οιαδήποτε Βάση

- Βάση (base): **B**
- Ψηφία (digits): $d_i \in \{0, 1, \ldots, B\text{-}1\} \rightarrow$
- Ο $n$-ψήφιος αριθμός:

$$d_{n-1}d_{n-2}\ldots d_2 d_1 d_0 \ (\text{βάση } \mathbf{B}) =$$

$$= d_{n-1}\times\mathbf{B}^{n-1} + d_{n-2}\times\mathbf{B}^{n-2} + \ldots + d_2\times\mathbf{B}^2 + d_1\times\mathbf{B}^1 + d_0\times\mathbf{B}^0$$

# Αριθμοί σε Βάσεις 10, 2, 8, 16

- Δεκαδικός (Decimal) – ψηφία $d_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5,6, 7, 8, 9\}$:
  - $d_{n-1}\ldots d_2 d_1 d_0 = d_{n-1}\times 10^{n-1} + \ldots + d_2\times 10^2 + d_1\times 10^1 + d_0\times 10^0$
- Δυαδικός (Binary) – ψηφία $b_i \in \{0, 1\}$ :
  - $b_{n-1}\ldots b_2 b_1 b_0 = b_{n-1}\times 2^{n-1} + \ldots + b_2\times 2^2 + b_1\times 2^1 + b_0\times 2^0$
- Οκταδικός (Octal) – ψηφία $c_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5,6, 7\}$:
  - $c_{n-1}\ldots c_2 c_1 c_0 = c_{n-1}\times 8^{n-1} + \ldots + c_2\times 8^2 + c_1\times 8^1 + c_0\times 8^0$
- Δεκαεξαδικός (Hexadecimal – ενίοτε και “hex”):
  - ψηφία $h_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5,6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$
  - $h_{n-1}\ldots h_2 h_1 h_0 = h_{n-1}\times 16^{n-1} + \ldots + h_2\times 16^2 + h_1\times 16^1 + h_0\times 16^0$

| Dec | Binary | Oct | Hex |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 10 | 2 | 2 |
| 3 | 11 | 3 | 3 |
| 4 | 100 | 4 | 4 |
| 5 | 101 | 5 | 5 |
| 6 | 110 | 6 | 6 |
| 7 | 111 | 7 | 7 |
| 8 | 1000 | 10 | 8 |
| 9 | 1001 | 11 | 9 |
| 10 | 1010 | 12 | A |
| 11 | 1011 | 13 | B |
| 12 | 1100 | 14 | C |
| 13 | 1101 | 15 | D |
| 14 | 1110 | 16 | E |
| 15 | 1111 | 17 | F |

| Dec | Binary | Oct | Hex |
|---|---|---|---|
| 16 | 10000 | 20 | 10 |
| 17 | 10001 | 21 | 11 |
| 18 | 10010 | 22 | 12 |
| 19 | 10011 | 23 | 13 |
| 20 | 10100 | 24 | 14 |
| 21 | 10101 | 25 | 15 |
| 22 | 10110 | 26 | 16 |
| 23 | 10111 | 27 | 17 |
| 24 | 11000 | 30 | 18 |
| 25 | 11001 | 31 | 19 |
| 26 | 11010 | 32 | 1A |
| 27 | 11011 | 33 | 1B |
| 28 | 11100 | 34 | 1C |
| 29 | 11101 | 35 | 1D |
| 30 | 11110 | 36 | 1E |
| 31 | 11111 | 37 | 1F |

| Dec | Binary | Oct | Hex |
|---|---|---|---|
| 32 | 100000 | 40 | 20 |
| 33 | 100001 | 41 | 21 |
| 34 | 100010 | 42 | 22 |
| … | … | … | … |
| 39 | 100111 | 47 | 27 |
| 40 | 101000 | 50 | 28 |
| 41 | 101001 | 51 | 29 |
| 42 | 101010 | 52 | 2A |
| … | … | … | … |
| 46 | 101110 | 56 | 2E |
| 47 | 101111 | 57 | 2F |
| 48 | 110000 | 60 | 30 |
| … | … | … | … |
| 62 | 111110 | 76 | 3E |
| 63 | 111111 | 77 | 3F |
| 64 | 1000000 | 100 | 40 |

# Πόσοι και Ποιοί ακέραιοι (unsigned) χωρούν σε *n* bits

- Πόσοι ακέραιοι; *n* bits $\rightarrow 2^n$ συνδυασμοί $\rightarrow 2^n$ αριθμοί
- Ποιοί ακέραιοι; Από 0 έως και $2^n$-1, δηλ. $2^n$ το πλήθος
- Ο μεγαλύτερος από αυτούς είναι ο: 11…111, δηλαδή ο:

$$1\times2^{n-1} + 1\times2^{n-2} + \ldots + 1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = 2^n-1$$

- Απόδειξη βάσει της ταυτότητας:

$$(\alpha^n-\beta^n) = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha^{n-1}\beta^0 + \alpha^{n-2}\beta^1 + \ldots + \alpha^1\beta^{n-2} + \alpha^0\beta^{n-1})$$

γιά $\alpha=2$ και $\beta=1$

# Παράσταση Αριθμού σε Βάση: Ύπαρξη, Μοναδικότητα

- Δοθέντος ακεραίου Αριθμού $N \geq 0$,
- Δοθείσας (ακέραιας) Βάσης $B \geq 2$:
- Υπάρχει πάντα και είναι Μοναδική η αναπαράσταση του $N$ στη βάση B:

$$N = d_{n-1} \times B^{n-1} + d_{n-2} \times B^{n-2} + \ldots + d_2 \times B^2 + d_1 \times B^1 + d_0 \times B^0$$

- όπου: $0 \leq d_i \leq B-1$
- Απόδειξη και αλγόριθμος εύρεσης: μέσω επαγωγής εύρεση ως μοναδικού του $d_0$ και μετά $d_1$ κλπ. βλ.$\longrightarrow$

# Υπαρξη & Μοναδικότητα Πηλίκου-Υπολοίπου Διαίρεσης

- Θα χρησιμοποιήσουμε το βασικό θεώρημα της «Ευκλείδιας» διαίρεσης ακεραίων (εφαρμογή γιά θετικούς, εδώ):
- Γιά κάθε ακέραιο Αριθμό $N \geq 0$, και
- Γιά κάθε ακέραιο Διαιρέτη $\Delta \geq 1$,
- *Υπάρχουν* ***μοναδικοί*** *ακέραιοι*:
  - $\Pi$ (πηλίκο), και
  - $Y$ (υπόλοιπο) με τον περιορισμό: $0 \leq Y \leq \Delta\text{-}1$
- τέτοιοι ώστε:

$$(N/\Delta) = \Pi + (Y/\Delta)$$

# Παράσταση *N* σε βάση **B**: Ύπαρξη, Μοναδ., Εύρεση

- Γιά δοθέντα ακέραιο $N \geq 0$ και (ακέραια) βάση $\mathbf{B} \geq 2$, αναζητούμε ψηφία (ακεραίους) $d_i$ με $0 \leq d_i \leq \mathbf{B}-1$, ούτως ώστε:
  - $N = d_{n-1} \times \mathbf{B}^{n-1} + \ldots + d_2 \times \mathbf{B}^2 + d_1 \times \mathbf{B}^1 + d_0 \times \mathbf{B}^0$

$\Rightarrow (N/\mathbf{B}) = d_{n-1} \times \mathbf{B}^{n-2} + \ldots + d_2 \times \mathbf{B}^1 + d_1 \times \mathbf{B}^0 + (d_0/\mathbf{B})$

- έστω $\Pi = (d_{n-1} \times \mathbf{B}^{n-2} + \ldots + d_2 \times \mathbf{B}^1 + d_1 \times \mathbf{B}^0) \longrightarrow$ ακέραιος
- και $Y = d_0$ όπου ξέρουμε ότι $0 \leq d_0 \leq \mathbf{B}-1$ άρα και: $0 \leq Y \leq \mathbf{B}-1$

$\Rightarrow (N/\mathbf{B}) = \Pi + (Y/\mathbf{B})$ [πηλίκο-υπόλοιπο διαίρεσης]

- Άρα $\Pi$ και $Y = d_0$ υπάρχουν και είναι μοναδικά

$\Rightarrow$ βρήκαμε το $d_0$ και $\Pi$, και από $\Pi$ βρίσκουμε $d_1$ κ.ο.κ.

# Εφαρμογή 1: Μετατροπή από Δεκαδικό σε Δυαδικό

- $N = 39_{10}$ να γραφτεί στο δυαδικό
- Χρειάζονται 6 bits: $2^6$=64 αριθμοί – από το 0 έως και το 63
  - 5 bits δεν αρκούν: αναπαριστούν $2^5$=32 αρ. – από 0 έως και το 31
- $N = b_5 \times 2^5 + b_4 \times 2^4 + b_3 \times 2^3 + b_2 \times 2^2 + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0$
- $N/2 = 39/2 = 19 + (1/2) \Rightarrow \mathit{\Pi}_1 = 19 =(b_5 b_4 b_3 b_2 b_1),\ Y_0 = 1 = b_0$
- $\mathit{\Pi}_1/2 = 19/2 = 9 + (1/2) \Rightarrow \mathit{\Pi}_2 = 9 =(b_5 b_4 b_3 b_2),\ Y_1 = 1 = b_1$
- $\mathit{\Pi}_2/2 = 9/2 = 4 + (1/2) \Rightarrow \mathit{\Pi}_3 = 4 =(b_5 b_4 b_3),\ Y_2 = 1 = b_2$
- $\mathit{\Pi}_3/2 = 4/2 = 2 + (0/2) \Rightarrow \mathit{\Pi}_4 = 2 =(b_5 b_4),\ Y_3 = 0 = b_3$
- $\mathit{\Pi}_4/2 = 2/2 = 1 + (0/2) \Rightarrow \mathit{\Pi}_5 = 1 =(b_5),\ Y_4 = 0 = b_4$

$\Rightarrow$ Ο αριθμός $N$ στο δυαδικό = $100111_2$

# Άλλος τρόπος: Ποιές δυνάμεις του 2 χωράνε;

- $N = \underline{39}_{10}$ να γραφτεί στο δυαδικό
- $N = 39 = 32 + 7 = 32 + 4 + 3 = 32 + 4 + 2 + 1 =$

$$= 2^5 + 2^2 + 2^1 + 2^0 =$$

$$= \mathit{1}\times 2^5 + \mathit{0}\times 2^4 + \mathit{0}\times 2^3 + \mathit{1}\times 2^2 + \mathit{1}\times 2^1 + \mathit{1}\times 2^0$$

- Άρα: $N = \underline{100111}_2$ στο δυαδικό

Ομοίως:

- $M = \underline{708}_{10}$ να γραφτεί στο δυαδικό
- $M = 708 = 512 + 196 = 512 + 128 + 68 = 512 + 128 + 64 + 4$

$$= 2^9 + 2^7 + 2^6 + 2^2 \quad \Rightarrow \quad M = \underline{1011000100}_2$$

# Εφαρμογή 2: Μετατροπή από Δυαδικό σε Οκταδικό

- $N = b_{n-1} \times 2^{n-1} + \ldots + b_3 \times 2^3 + b_2 \times 2^2 + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0$
- Μετατροπή στο Οκταδικό – βάση = 8 = $2^3$
- $N/8 = N/2^3 = b_{n-1} \times 2^{n-4} + \ldots + b_3 \times 2^0 + (b_2 \times 2^2 + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0)/8$
- Οι όροι από αριστερά μέχρι και $b_3$ – που είχαν δυνάμεις του 2 με εκθέτη ≥3 – παραμένουν ακέραιοι μετά τη διαίρεση διά $8=2^3$, άρα σχηματίζουν το *Πηλίκο*
- Ο όρος $(b_2 \times 2^2 + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0)$, δηλ. ένας τρίμπιτος αριθμός, παίρνει τιμές από 0 έως και 7, άρα είναι το *Υπόλοιπο*

⇒ Από δεξιά, ανά 3 τα bits, δίνουν από ένα οκταδικό ψηφίο

- Ομοίως, γιά Δεκαεξαδικό: από δεξιά, ανά 4 τα bits…

# Παραδείγματα: Δυαδικό-Οκταδικό-Δεκαεξαδικό

| Από Δυαδικό (20 bits) σε Οκταδικό | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 010 | 111 | 001 | 100 | 110 | 010 |
| 3 | 2 | 7 | 1 | 4 | 6 | 2 |

| Από Οκταδ. σε Δυαδικό (16 b.) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 7 | 0 | 7 | 4 |
| 1 | 111 | 111 | 000 | 111 | 100 |

| Από Δυαδικό (32 bits – 4 Bytes) σε Δεκαεξαδικό | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0000 | 1010 | 0110 | 1101 | 0010 | 1111 | 1011 | 1000 |
| 0 | A | 6 | D | 2 | F | B | 8 |

| Από Δεκαεξαδικό (4 Bytes – 8 ψηφία) σε Δυαδικό | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D | E | A | D | B | E | E | F |
| 1101 | 1110 | 1010 | 1101 | 1011 | 1110 | 1110 | 1111 |

- Από δεξιά οι ομάδες των bits, κι όπου φτάσουν