

ΗΥ-112: Φυσική Ι
Χειμερινό Εξάμηνο 2025-26
Διδάσκων: Γ. Καφεντζής
Επαναληπτική Τελική Εξέταση

- **ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 3 ΩΡΕΣ**
- **Αιτιολογήστε ΠΛΗΡΩΣ τις απαντήσεις σας. Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή τσέπης.**
- **Κάνετε/αντιγράψτε ΣΧΗΜΑΤΑ και εξηγήστε με ΛΟΓΙΑ τι κάνετε !**

Θέμα 1ο - 50 μονάδες:

Ένα εγκάρσιο ημιτονοειδές κύμα κινείται κατά μήκος νήματος στη *θετική* κατεύθυνση του άξονα x' με ταχύτητα 80 m/s. Για $t = 0$, το απειροστό μικρό τμήμα του νήματος στη θέση $x = 0$ έχει εγκάρσια μετατόπιση 4.0 εκατοστά από τη θέση ισορροπίας του και δεν κινείται. Η μέγιστη εγκάρσια ταχύτητα του ίδιου τμήματος είναι 16 m/s.

(α') **(10 μ.)** Ποια η συχνότητα f του κύματος;

(β') **(10 μ.)** Ποιο το μήκος κύματος λ ;

(γ') **(30 μ.)** Δείξτε ότι η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το κύμα είναι η

$$y(x, t) = 0.04 \cos(5x - 400t) \quad (1)$$

Λύση:

(α') Γνωρίζουμε ότι το απειροστό μικρό τμήμα του νήματος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και γνωρίζουμε ότι η μέγιστη ταχύτητά του δίνεται από τη σχέση

$$u_{\max} = \omega A \quad (2)$$

$$\omega = \frac{16}{0.04} = 400 \text{ rad/s} \quad (3)$$

Οπότε

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 64 \text{ Hz} \quad (4)$$

(β') Από τη σχέση $u = \lambda f$, παίρνουμε

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{80}{64} = 1.26 \text{ m}. \quad (5)$$

(γ') Για την κυματοσυνάρτηση $y(x, t)$ μπορούμε να γράψουμε

$$y(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi) \quad (6)$$

Το πλάτος είναι $A = 0.04 \text{ m}$ από εκφώνηση. Ο κυματαριθμός k δίνεται ως

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \approx 5.0 \text{ rad/m} \quad (7)$$

και γνωρίζουμε από το (α) ερώτημα ότι $\omega = 400 \text{ rad/s}$. Άρα

$$y(x, t) = 0.04 \sin(5x - 400t + \phi) \quad (8)$$

με το πρόσημο – να οφείλεται στη διάδοση προς τα δεξιά (όπως αναφέρει η εκφώνηση). Η αρχική φάση ϕ μπορεί να βρεθεί αν αξιοποιήσουμε το ότι το απειροστό μικρό τμήμα νήματος στη θέση $x = 0$, όπου έχει εγκάρσια μετατόπιση $y(0, 0) = 0.04 \text{ m}$ όταν $t = 0$. Οπότε

$$y(0, 0) = 0.04 \sin(\phi) = 0.04 \iff \sin(\phi) = 1 \implies \phi = \frac{\pi}{2} \quad (9)$$

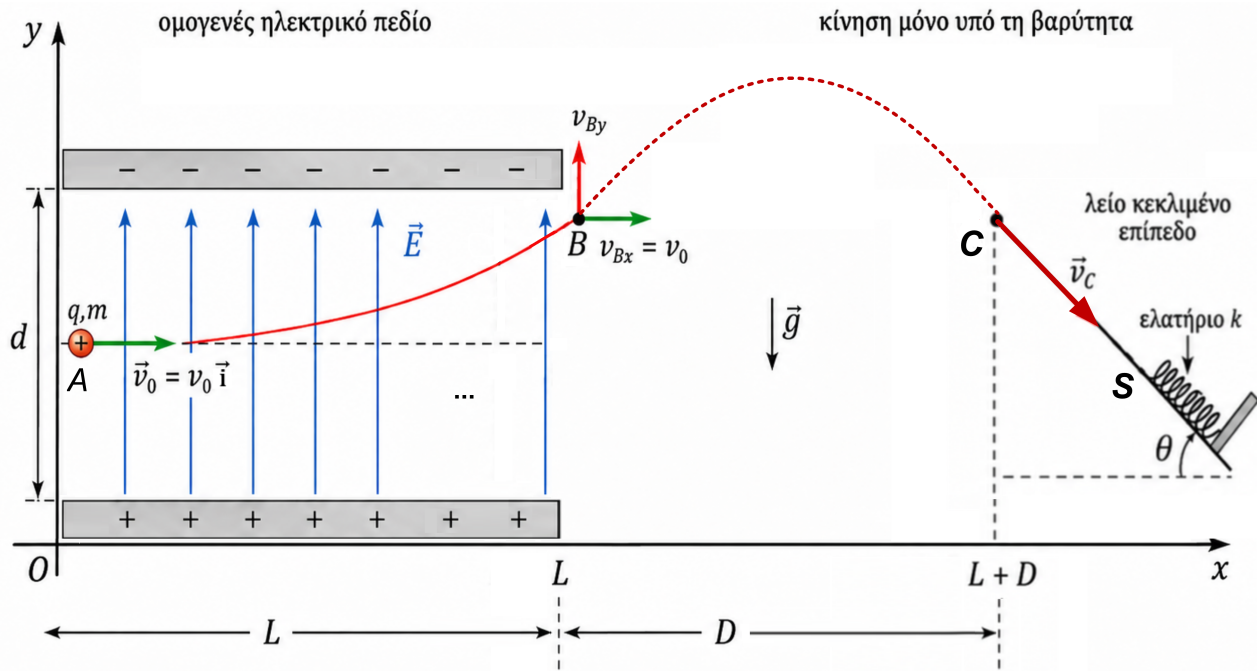
Οπότε συνολικά

$$y(x, t) = 0.04 \sin \left(5x - 400t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (10)$$

$$= 0.04 \cos(5x - 400t) \quad (11)$$

Θέμα 2ο - 50 μονάδες:

Ένα σωματίδιο μάζας m και θετικού ηλεκτρικού φορτίου q εισέρχεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ με οριζόντια ταχύτητα $\vec{u}_0 = u_0 \vec{i}$ στο σημείο A , δηλ. στο μέσο της απόστασης δύο οριζόντιων, φορτισμένων, παράλληλων μεταλλικών πλακών, οι οποίες δημιουργούν ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, όπως στο Σχήμα 1. Οι πλάκες έχουν μήκος L και απέχουν μεταξύ τους απόσταση d . Μεταξύ των πλακών υπάρχει ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μέτρου E , με φορά κατακόρυφα προς τα πάνω.



Σχήμα 1: Σχήμα Θέματος 2.

Παράλληλα, πέραν της ηλεκτρικής δύναμης $\vec{F}_e$, στο σωματίδιο ασκείται η δύναμη του βάρους, $\vec{F}_g$. Θεωρήστε ότι

$$F_e > F_g \iff qE > mg \quad (12)$$

Το σωματίδιο εξέρχεται από την περιοχή του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο B , ακριβώς στο άκρο της άνω πλάκας. Μετά το σημείο B κινείται μόνο υπό την επίδραση της βαρύτητας, εκτελώντας βολή. Στο κατερχόμενο τμήμα της τροχιάς του, σε σημείο C που απέχει οριζόντια απόσταση D από το σημείο B , με τα σημεία αυτά να βρίσκονται στο ίδιο νοητό επίπεδο, το σωματίδιο συναντά *εφαπτομενικά* ένα λείο κεκλιμένο επίπεδο. Το επίπεδο κατέρχεται προς τα δεξιά και σχηματίζει γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα. Το σωματίδιο συνεχίζει την κίνησή του πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. Σε απόσταση ℓ από το σημείο C , μετρούμενη κατά μήκος του κεκλιμένου, βρίσκεται το ελεύθερο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , του οποίου ο άξονας είναι παράλληλος προς το επίπεδο. Το σωματίδιο έρχεται σε επαφή με το ελατήριο στο σημείο S και το συμπιέζει.

Να θεωρήσετε αμελητέες όλες τις τριβές και την αντίσταση του αέρα, καθώς και αμελητέα απώλεια ενέργειας κατά την επαφή του σωματιδίου με το κεκλιμένο.

(α') (**10 μ.**) Να υπολογίσετε την τιμή του ηλεκτρικού πεδίου E ώστε το σωματίδιο να εξέλθει από την περιοχή του πεδίου ακριβώς στο σημείο B , δηλαδή στο άκρο της άνω πλάκας. Επίσης, να υπολογίσετε τις συνιστώσες της ταχύτητάς του στο σημείο B . Δηλ. δείξτε ότι

$$u_{Bx} = u_0 \quad \text{και} \quad u_{By} = \frac{du_0}{L} \quad (13)$$

και

$$E = \frac{m}{q} \left(g + \frac{du_0^2}{L^2} \right) \quad (14)$$

- (β') (**10 μ.**) Μετά το σημείο B , το σωματίδιο κινείται μόνο υπό την επίδραση της βαρύτητας. Να υπολογίσετε την οριζόντια απόσταση D από το σημείο B στο σημείο C , στο οποίο σημείο το σωματίδιο επανέρχεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το B , κατά το κατερχόμενο τμήμα της τροχιάς του, και να δείξετε ότι ισούται με

$$D = \frac{2du_0^2}{gL} \quad (15)$$

- (γ') (**10 μ.**) Στο σημείο C το σωματίδιο συναντά εφαπτομενικά ένα λείο κεκλιμένο επίπεδο που κατέρχεται προς τα δεξιά και σχηματίζει γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα. Να δείξετε ότι η γωνία θ ισούται με

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{d}{L} \right) \quad (16)$$

και να βρείτε τις συνιστώσες της ταχύτητας u_C του σωματιδίου στο σημείο C . Να δείξετε επίσης ότι το μέτρο της ταχύτητας u_C ισούται με

$$u_C = \frac{u_0}{\cos(\theta)} \quad (17)$$

- (δ') (**7.5 μ.**) Το σωματίδιο κινείται από το σημείο C προς τη βάση του λείου κεκλιμένου και, αφού διανύσει απόσταση ℓ , φτάνει στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου, στο σημείο S . Αν u_S το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου στο σημείο S , να δείξετε ότι

$$u_S^2 = \frac{u_0^2}{\cos^2 \theta} + 2g\ell \sin \theta \quad (18)$$

- (ε') (**12.5 μ.**) Μετά την επαφή του με το ελατήριο, το σωματίδιο συνεχίζει να κινείται προς τα κάτω κατά μήκος του κεκλιμένου και συμπιέζει το ελατήριο. Αν $x_{\max}$ είναι η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου, να δείξετε ότι ικανοποιεί την εξίσωση

$$kx_{\max}^2 - 2mg \sin \theta x_{\max} - mv_S^2 = 0 \quad (19)$$

Λύση:

Θεωρούμε ως θετικές φορές της κίνησης τις συμβατικές (πάνω, δεξιά). Το σωματίδιο εισέρχεται στο σημείο A με αρχική ταχύτητα

$$\vec{u}_0 = u_0 \vec{\mathbf{i}} \quad (20)$$

Στην περιοχή μεταξύ των πλακών ασκούνται πάνω του η ηλεκτρική δύναμη

$$\vec{F}_e = qE \vec{\mathbf{j}} \quad (21)$$

και η δύναμη του βάρους

$$\vec{F}_g = -mg \vec{\mathbf{j}} \quad (22)$$

Από το 2ο νόμο του Newton

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y \iff \vec{F}_e + \vec{F}_g = m\vec{a}_y \implies qE - mg = ma_y \quad (23)$$

Επειδή $qE > mg$, η συνισταμένη δύναμη είναι προς τα πάνω και η κατακόρυφη επιτάχυνση είναι

$$a_y = \frac{qE - mg}{m} = \frac{qE}{m} - g \quad (24)$$

Στην οριζόντια διεύθυνση δεν ασκείται δύναμη, άρα

$$a_x = 0 \quad (25)$$

- (α') Θεωρούμε αρχή του συστήματος συντεταγμένων μας το σημείο A . Η οριζόντια κίνηση στη διαδρομή $A \rightarrow B$ είναι ευθύγραμμη ομαλή:

$$x_B = x_A + u_x t \quad (26)$$

Για να φτάσει το σωματίδιο από το A στο B πρέπει να διανύσει οριζόντια απόσταση L . Άρα ο χρόνος παραμονής του μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$x_B = x_A + u_x t \iff L = 0 + u_0 t \iff t = \frac{L}{u_0} \quad (27)$$

Το σημείο A βρίσκεται στο μέσο της απόστασης των πλακών, ενώ το B βρίσκεται στην άνω πλάκα. Συνεπώς η κατακόρυφη μετατόπιση είναι

$$\Delta y = \frac{d}{2} \quad (28)$$

Η αρχική κατακόρυφη ταχύτητα είναι μηδέν (αφού η εκφώνηση αναφέρει ότι το σωματίδιο εισέρχεται με οριζόντια ταχύτητα μόνο), επομένως στην ίδια διαδρομή,

$$y_B = y_A + u_{yA} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \iff \frac{d}{2} = 0 + 0t + \frac{1}{2} a_y t^2 \quad (29)$$

Άρα

$$d = a_y \frac{L^2}{u_0^2} \quad (30)$$

και

$$a_y = \frac{du_0^2}{L^2} \quad (31)$$

Όμως

$$a_y = \frac{qE}{m} - g \quad (32)$$

οπότε

$$\frac{qE}{m} - g = \frac{du_0^2}{L^2} \quad (33)$$

Επομένως

$$E = \frac{m}{q} \left(g + \frac{du_0^2}{L^2} \right) \quad (34)$$

Για τις συνιστώσες της ταχύτητας στο σημείο B , στην οριζόντια διεύθυνση έχουμε

$$u_{xB} = u_0 \quad (35)$$

Στην κατακόρυφη διεύθυνση,

$$u_{yB} = u_{yA} + a_y t = 0 + a_y t = a_y t \quad (36)$$

άρα

$$u_{yB} = \frac{du_0^2}{L^2} \frac{L}{u_0} = \frac{du_0}{L} \quad (37)$$

Συνεπώς

$$u_{xB} = u_0, \quad u_{yB} = \frac{du_0}{L} \quad (38)$$

- (β') Μετά το σημείο B παύει να δρα το ηλεκτρικό πεδίο και το σωματίδιο εκτελεί βολή υπό την επίδραση μόνο της βαρύτητας. Θετούμε ως αρχή της νέας κίνησης το σημείο B . Η επιτάχυνση της βαρύτητας δρα μόνο στην κατακόρυφη συνιστώσα της κίνησης. Η κατακόρυφη συνιστώσα της θέσης στη διαδρομή $B \rightarrow C$ δίνεται από τη σχέση

$$y_B = y_C + u_{yB} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (39)$$

Στο σημείο C το σωματίδιο επιστρέφει στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το B , άρα

$$y_C = y_B = 0 \quad (40)$$

Άρα

$$u_{yB}t - \frac{1}{2}gt_C^2 = 0 \quad (41)$$

οπότε

$$t = \frac{2u_{yB}}{g} \quad (42)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$u_{yB} = \frac{du_0}{L} \quad (43)$$

παίρνουμε

$$t = \frac{2du_0}{gL} \quad (44)$$

Η οριζόντια ταχύτητα παραμένει σταθερή και ίση με u_0 , άρα

$$D = u_0t \quad (45)$$

Επομένως

$$D = u_0 \frac{2du_0}{gL} = \frac{2du_0^2}{gL} \quad (46)$$

(γ') Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας στο C είναι

$$u_{xC} = u_0 \quad (47)$$

Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας είναι

$$u_{yC} = u_{yB} - gt \quad (48)$$

Επειδή

$$t_{B \rightarrow C} = \frac{2u_{yB}}{g} \quad (49)$$

έχουμε

$$u_{yC} = u_{yB} - 2u_{yB} = -u_{yB} \quad (50)$$

Άρα

$$u_{yC} = -\frac{du_0}{L} \quad (51)$$

Επομένως

$$\vec{u}_C = u_0\vec{i} - \frac{du_0}{L}\vec{j}. \quad (52)$$

Επειδή η τροχιά συναντά εφαπτομενικά το κεκλιμένο επίπεδο, η διεύθυνση της ταχύτητας στο C είναι παράλληλη προς το κεκλιμένο επίπεδο. Συνεπώς

$$\tan \theta = \frac{|u_{yC}|}{u_{xC}} = \frac{d}{L} \quad (53)$$

Άρα

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{d}{L} \right) \quad (54)$$

Το μέτρο της ταχύτητας στο C είναι

$$u_C = \sqrt{u_{Cx}^2 + u_{Cy}^2} \quad (55)$$

Επομένως

$$u_C = u_0 \sqrt{1 + \frac{d^2}{L^2}} \quad (56)$$

Από τη σχέση

$$\tan \theta = \frac{d}{L} \quad (57)$$

έχουμε

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (58)$$

άρα

$$u_C = u_0 \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \frac{u_0}{\cos \theta} \quad (59)$$

(δ) Από το σημείο C έως το σημείο S δεν υπάρχουν τριβές, επομένως στο σύστημα $\{\Gamma\eta, \text{σωματίδιο}\}$ διατηρείται η μηχανική ενέργεια. Καθώς το σωματίδιο διανύει απόσταση ℓ κατά μήκος του κεκλιμένου, κατέρχεται κατακόρυφα κατά απόσταση ίση με

$$h = \ell \sin \theta \quad (60)$$

Θεωρούμε θέση μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας τη θέση S . Επομένως από ΑΔΜΕ στη διαδρομή $C \rightarrow S$,

$$E_{\text{mech}}^C = E_{\text{mech}}^S \quad (61)$$

$$K_C + U_{gC} = K_S + U_{gS} \quad (62)$$

$$\frac{1}{2}mu_C^2 + mg\ell \sin \theta = \frac{1}{2}mu_S^2 + 0 \quad (63)$$

Πολλαπλασιάζοντας επί $2/m$,

$$u_S^2 = u_C^2 + 2g\ell \sin \theta \quad (64)$$

Επειδή βρήκαμε ότι

$$u_C = \frac{u_0}{\cos \theta} \quad (65)$$

καταλήγουμε στη σχέση

$$u_S^2 = \frac{u_0^2}{\cos^2 \theta} + 2g\ell \sin \theta \quad (66)$$

(ε) Έστω $x_{\max}$ η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου. Στη θέση μέγιστης συμπίεσης η ταχύτητα του σωματιδίου είναι στιγμιαία μηδέν. Κατά τη συμπίεση κατά $x_{\max}$, το σωματίδιο κατέρχεται επιπλέον κατακόρυφα κατά

$$x_{\max} \sin \theta \quad (67)$$

από τη γεωμετρία του σχήματος. Για το σύστημα $\{\Gamma\eta, \text{σωματίδιο}, \text{ελατήριο}\}$, εφαρμόζουμε διατήρηση της μηχανικής ενέργειας από το σημείο S έως τη θέση μέγιστης συμπίεσης, έστω Z , θεωρώντας επίπεδο/θέση μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας τη θέση που το ελατήριο έχει συμπιεστεί κατά $x_{\max}$:

$$E_{\text{mech}}^S = E_{\text{mech}}^Z \quad (68)$$

$$K_S + U_{gS} + U_{sS} = K_Z + U_{gZ} + U_{sZ} \quad (69)$$

$$\frac{1}{2}mu_S^2 + mgx_{\max} \sin(\theta) + 0 = 0 + 0 + \frac{1}{2}kx_{\max}^2 \quad (70)$$

$$\frac{1}{2}mu_S^2 - \frac{1}{2}kx_{\max}^2 + mgx_{\max} \sin \theta = 0 \quad (71)$$

Πολλαπλασιάζοντας επί 2,

$$mu_S^2 - kx_{\max}^2 + 2mgx_{\max} \sin \theta = 0 \quad (72)$$

Άρα το $x_{\max}$ ικανοποιεί πράγματι την εξίσωση

$$kx_{\max}^2 - 2mg \sin \theta x_{\max} - mu_S^2 = 0 \quad (73)$$