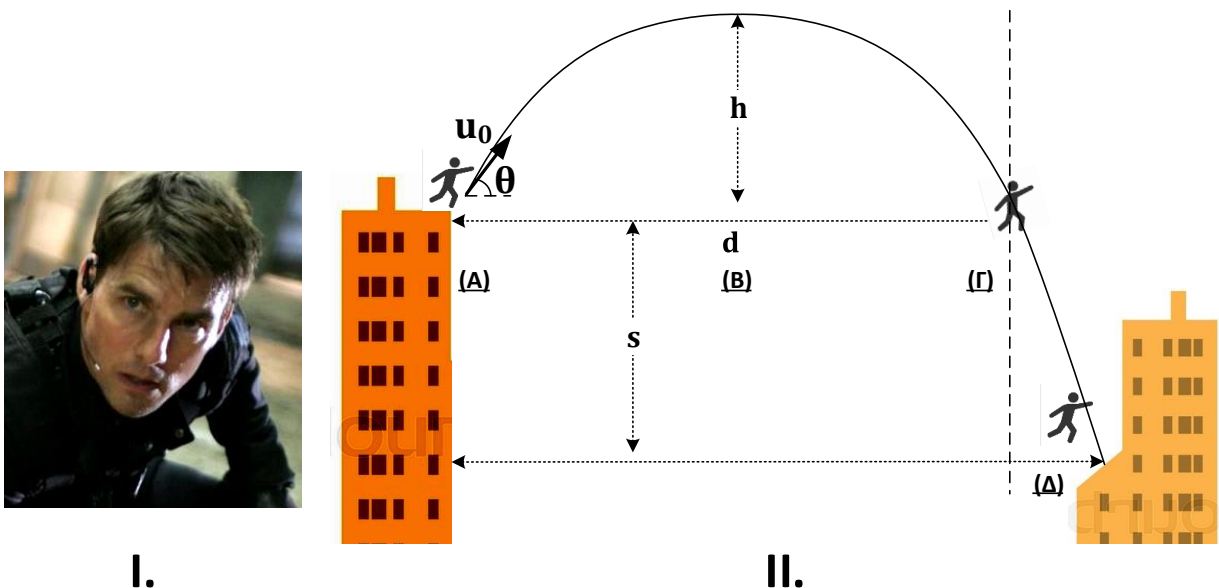


Επαναληπτική Τελική Εξέταση

Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστή τσέπης.

1. Θέμα 1ο: Μηχανική - 30 μονάδες

Ο πράκτορας Ethan Hunt (Σχήμα 1.Ι) χρειάζεται να εκτελέσει ένα επικίνδυνο άλμα για να φέρει σε πέρας μια από τις αποστολές του. Ο Ethan βρίσκεται στην οροφή ενός κτηρίου, όπου και εκτελεί άλμα με αρχική ταχύτητα μέτρου u_0 υπό γωνία θ , όπως στο Σχήμα 1.ΙΙ. Θεωρήστε ότι η στολή του Ethan μηδενίζει τις αντιστάσεις του αέρα.



Σχήμα 1: Θέμα 1: Επικίνδυνες Αποστολές.

- (α) **(5 μ.)** Αν το μέτρο της αρχικής ταχύτητας u_0 είναι $u_0 = 10 \text{ m/s}$ και η γωνία άλματος είναι $\theta = 45^\circ$, ποιο το μέγιστο ύψος h που θα φτάσει ο Ethan;
- (β) **(7.5 μ.)** Πόσο χρόνο t χρειάζεται για να φτάσει στο ίδιο επίπεδο με το επίπεδο άλματός του;
- (γ) **(5 μ.)** Πόση οριζόντια απόσταση d θα έχει διανύσει όταν φτάσει στο παραπάνω ύψος;
- (δ) **(12.5 μ.)** Ποιο θα είναι το μέτρο της ταχύτητας πρόσκρουσης του στην πλάγια επιφάνεια του δεύτερου κτηρίου, αν η απόσταση s - όπως φαίνεται στο Σχήμα - είναι $s = 15 \text{ m}$;

Λύση:

- (α) Ο Ethan ουσιαστικά εκτελεί βολή. Από γνωστούς τύπους, έχουμε

$$h_{max} = \frac{u_i^2 \sin^2(\theta_i)}{2g} \approx 3.69\text{m} \quad (1)$$

(β) Η κίνηση στον κατακόρυφο άξονα είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, οπότε από το σημείο Α ως το σημείο Γ έχουμε

$$y_{\Gamma} = y_A + u_{y_A}t - \frac{1}{2}gt_{\Gamma}^2 \iff 0 = 0 + u_0 \sin(45^\circ)t - 4.9t^2 \iff 10\frac{\sqrt{2}}{2}t - 4.9t^2 = 0 \iff t = 0 \text{ ή } t \approx 1.44 \text{ sec} \quad (2)$$

(γ) Η απόσταση d αποτελεί το εύρος της βολής. Από γνωστό τυπολόγιο, έχουμε

$$R = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g} = \frac{10^2 \sin(90^\circ)}{9.8} \approx 10.2 \text{ m} \quad (3)$$

(δ) Η μόνη δύναμη που ασκείται στον Έιθαν είναι αυτή του βάρους, η οποία είναι συντηρητική. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο που ορίζεται από το σημείο (Δ). Εφαρμόζοντας Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (ή και όποιο άλλο ενεργειακό μοντέλο θέλετε) μεταξύ των θέσεων (Α) και (Δ), θα έχουμε

$$E_{mech}^A = E_{mech}^{\Delta} \quad (4)$$

$$K_A + U_A = K_{\Delta} + U_{\Delta} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2}mu_A^2 + mgs = \frac{1}{2}mu_{\Delta}^2 + 0 \quad (6)$$

$$\frac{1}{2}u_A^2 + gs = \frac{1}{2}u_{\Delta}^2 \quad (7)$$

$$u_{\Delta} = \sqrt{u_A^2 + 2gs} \quad (8)$$

$$= \sqrt{100 + 30 \cdot 9.8} \quad (9)$$

$$\approx 19.85 \text{ m/s} \quad (10)$$

2. Θέμα 2ο: Ηλεκτρισμός και Κυκλώματα - 30 μονάδες

(α) **(10 μ.)** Ένας τεχνικός έρχεται σπίτι σας για να ελέγξει ένα κύκλωμα που περιέχει έναν αντιστάτη αντίστασης R . Προτείνει ένα καλύτερο σχέδιο κυκλώματος που θα περιλαμβάνει έναν αντιστάτη αντίστασης $R' = \frac{7}{3}R$. Κουβαλάει μαζί του τρεις αντιστάτες, καθένας με αντίσταση R . Συνδυάζοντας αυτούς τους τρεις αντιστάτες με κάποιο τρόπο, και βάζοντάς τους σε σειρά με τον αρχικό αντιστάτη αντίστασης R , πιστεύει ότι θα πετύχει την επιθυμητή αντίσταση R' . Πιστεύετε ότι μπορεί να το κάνει; Αιτιολογήστε επαρκώς την απάντησή σας.

(β) **(20 μ.)** Ένα αμπερόμετρο (ammeter) μετρά την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που το διαπερνά, ενώ ένα βολτόμετρο (voltmeter) μετρά την τάση (διαφορά δυναμικού) που υπάρχει στα άκρα του. Για το ηλεκτρικό κύκλωμα του Σχήματος 2, βρείτε τις ενδείξεις του αμπερόμετρου και του βολτόμετρου. Υποθέστε ότι οι συσκευές αυτές είναι ιδανικές (το βολτόμετρο έχει άπειρη αντίσταση, άρα είναι σαν να μην υπάρχει στο κύκλωμα, ενώ το αμπερόμετρο μηδενική αντίσταση, άρα αφήνει το ρεύμα του κλάδου του να το διαπεράσει).

Λύση:

(α) Υπάρχουν τέσσερις πιθανοί τρόποι να συνδυαστούν οι τρεις αντιστάτες με τον τέταρτο.

i. ένας σε σειρά με τρεις παράλληλους: συνολική αντίσταση $R_{eq} = \frac{4}{3}R$.

ii. όλοι σε σειρά: συνολική αντίσταση $R_{eq} = 4R$.

iii. δυο σε σειρά με δυο παράλληλους: $R_{eq} = \frac{5}{2}R$.

iv. ένας σε σειρά με τρεις, οι οποίοι είναι ένας παράλληλα με δυο: $R_{eq} = \frac{5}{3}R$

Άρα ο τεχνικός δεν μπορεί να κάνει αυτό που ισχυρίζεται. Μην τον ξαναφωνάξετε! :)

(β) Εφαρμόζουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff στο βρόχο *cdefc*:

$$-5I_1 + 12 - 3 - 7I_2 = 0 \iff 5I_1 + 7I_2 = 9 \quad (11)$$

Όμοια για το βρόχο *cdeac*:

$$-5I_1 + 12 + 2I_3 - 1 = 0 \iff 5I_1 - 2I_3 = -11 \quad (12)$$

Στον κόμβο *e* ισχύει ο 1ος κανόνας του Kirchhoff, δηλ.

$$I_1 + I_3 = I_2 \quad (13)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στη σχέση (11) έχουμε

$$5I_1 + 7I_1 + 7I_3 = 9 \implies I_3 = \frac{9 - 12I_1}{7} \quad (14)$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση (12), παίρνουμε

$$5I_1 - 2\frac{9 - 12I_1}{7} = -11 \implies I_1 = -1.0 \text{ A} \quad (15)$$

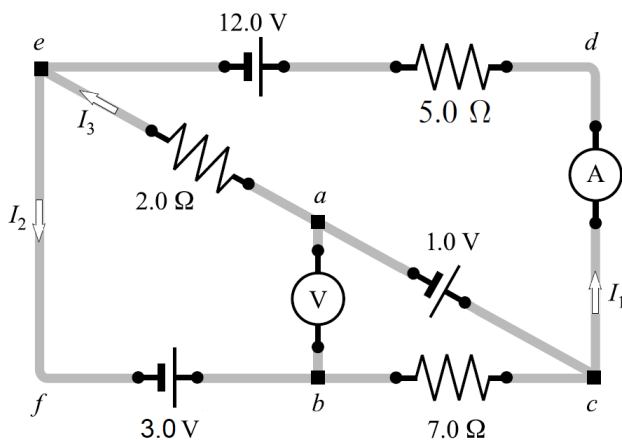
που είναι και η ένδειξη του αμπερόμετρου. Κατά συνέπεια, $I_2 = 2.0 \text{ A}$. Για να βρούμε την ένδειξη του βολτόμετρου, δηλ. το V_{ab} , γράφουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff στο βρόχο *abca*:

$$V_{ab} - 7I_2 + 1 = 0 \implies V_{ab} = 13 \text{ V} \quad (16)$$

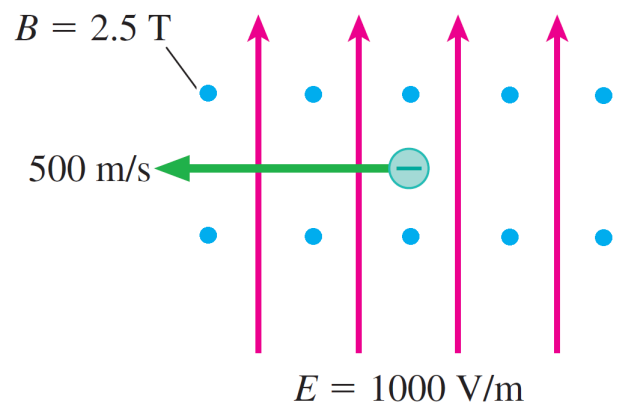
3. Θέμα 3ο: Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία - 20 μονάδες

Είστε μηχανικός στο CERN και παρατηρείτε ένα πείραμα στον επιταχυντή LHC. Ένα ηλεκτρόνιο κινείται υπό την επίδραση ομογενούς ηλεκτρικού **και** μαγνητικού πεδίου όπως στο Σχήμα 3.

- (α) (10 μ.) Ποιό είναι το μέτρο και η κατεύθυνση της *επιτάχυνσης* του ηλεκτρονίου στο στιγμιότυπο που βλέπετε ;
 (β) (10 μ.) Για την επαναληπτική δοκιμή του πειράματος, σας ζητούν να ρυθμίσετε το ηλεκτρικό πεδίο E (σε μέτρο ή/και φορά), ώστε η επιτάχυνση του ηλεκτρονίου στο παραπάνω στιγμιότυπο να είναι μηδενική. Τι κάνετε; Εξηγήστε αναλυτικά.



Σχήμα 2: Θέμα 2: ηλεκτρικό κύκλωμα.



Σχήμα 3: Σχήμα Θέματος 3.

Λύση:

(α) Από τον κανόνα του δεξιού χεριού, βρίσκουμε ότι η μαγνητική δύναμη έχει φορά κατακόρυφα προς τα κάτω (προσέξτε ότι πρόκειται για ηλεκτρόνιο, άρα η μαγνητική δύναμη θα είναι αντίθετης φοράς από τη φορά του αντίχειρα στη χρήση του κανόνα), παράλληλα με τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές. Η ηλεκτρική δύναμη, αντίθετα, έχει φορά κατακόρυφα προς τα κάτω, παράλληλα με τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές. Από το 2ο Νόμο του Newton και υποθέτοντας θετική φορά προς τα κάτω, ισχύει

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \implies \sum F = ma \iff F_B + F_E = m_e a \implies a = \frac{F_B + F_E}{m_e} \quad (17)$$

$$= \frac{2 \times 10^{-16} + 1.6 \times 10^{-16}}{9 \times 10^{-31}} \quad (18)$$

$$= \frac{3.6 \times 10^{-16}}{9 \times 10^{-31}} \quad (19)$$

$$= 4 \times 10^{14} \text{ m/s}^2 \quad (20)$$

με φορά προς τα κάτω, αφού και οι δυο δυνάμεις έχουν διεύθυνση προς τα κάτω.

(β) Για να υπάρχει μηδενική επιτάχυνση, πρέπει

$$\sum F = 0 \iff F_B + F_E = 0 \iff F_B = -qE \implies E = -\frac{F_B}{q} = -1250 \text{ V/m} \quad (21)$$

Άρα πρέπει να αλλάξουμε τόσο το μέτρο όσο και τη φορά του ηλεκτρικού πεδίου. Το μέτρο πρέπει να γίνει από 1000, 1250 V/m, ενώ η φορά πρέπει να γίνει αντίθετη του σχήματος.

4. Θέμα 4ο: Κυματική - 20 μονάδες

Ο υπολογιστής σας “κράσαρε” πειτώντας μπλέ οθόνη, την ώρα που ακούγατε σε υψηλή ένταση την αγαπημένη σας μουσική. Λόγω του κρασαρίσματος, ο ήχος “κόλλησε” σε ένα ημίτονο των 1000 Hz, κάνοντας την ακρόαση αφάνταστα ενοχλητική. Θεωρήστε ότι τα ηχητικά κύματα διαδίδονται σε *σφαιρικά κυματικά μέτωπα*.

(α) **(5 μ.)** Δείξτε ότι ο λόγος δυο ηχητικών εντάσεων I_1, I_2 της ίδιας πηγής ισούται με τον αντίστροφο λόγο των αποστάσεων, r_1, r_2 , από την πηγή, στο τετράγωνο, δηλ. δείξτε ότι

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

(β) **(15 μ.)** Όταν ο Η/Υ σας “κολλάει”, βρίσκεστε σε απόσταση 1 m από αυτόν. Με μεγάλη δυσκολία, μετράτε τον ήχο και βρίσκετε ότι έχει ηχοστάθμη 95 dB. Λόγω της ενόχλησής σας, αρχίζετε να τρέχετε μακριά. Σε πόση απόσταση πρέπει να φτάσετε για να ακούτε τον ενοχλητικό ήχο σε μια υποφερτή ηχοστάθμη των 55 dB;

Λύση:

(α) Γνωρίζουμε ότι τα ηχητικά κύματα διαδίδονται σε σφαιρικά κυματικά μέτωπα και η εντάσεις τους δίνονται από τη σχέση

$$I = \frac{P_{avg}}{4\pi r^2} \quad (22)$$

με r την ακτίνα του κυματικού μετώπου. Για δυο ηχητικά κύματα εντάσεων I_1, I_2 που έρχονται από την ίδια πηγή έχουμε

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{P_{avg}}{4\pi r_1^2}}{\frac{P_{avg}}{4\pi r_2^2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (23)$$

(β) Ο ήχος με ηχοστάθμη 95 dB έχει ένταση

$$\beta_1 = 10 \log_{10} \frac{I_1}{I_0} \iff 9.5 = \log_{10} \frac{I_1}{10^{-12}} \iff 10^{9.5} = \frac{I_1}{10^{-12}} \iff I_1 = 10^{-2.5} \text{ W/m}^2 \quad (24)$$

Όμοια, για τον ήχο με ηχοστάθμη 55 dB θα έχει ένταση

$$\beta_2 = 10 \log_{10} \frac{I_2}{I_0} \iff 5.5 = \log_{10} \frac{I_2}{10^{-12}} \iff 10^{5.5} = \frac{I_2}{10^{-12}} \iff I_2 = 10^{-6.5} \text{ W/m}^2 \quad (25)$$

Άρα από το προηγούμενο ερώτημα

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \iff \frac{10^{-2.5}}{10^{-6.5}} = \frac{r_2^2}{1^2} \iff r_2^2 = 10^4 \implies r_2 = 10^2 \text{ m} \quad (26)$$

Άρα πρέπει να απομακρυνθούμε 100(!) μέτρα από τον υπολογιστή μας.

Συνολικές μονάδες: 100

Άριστα: 100

Καλή Επιτυχία!