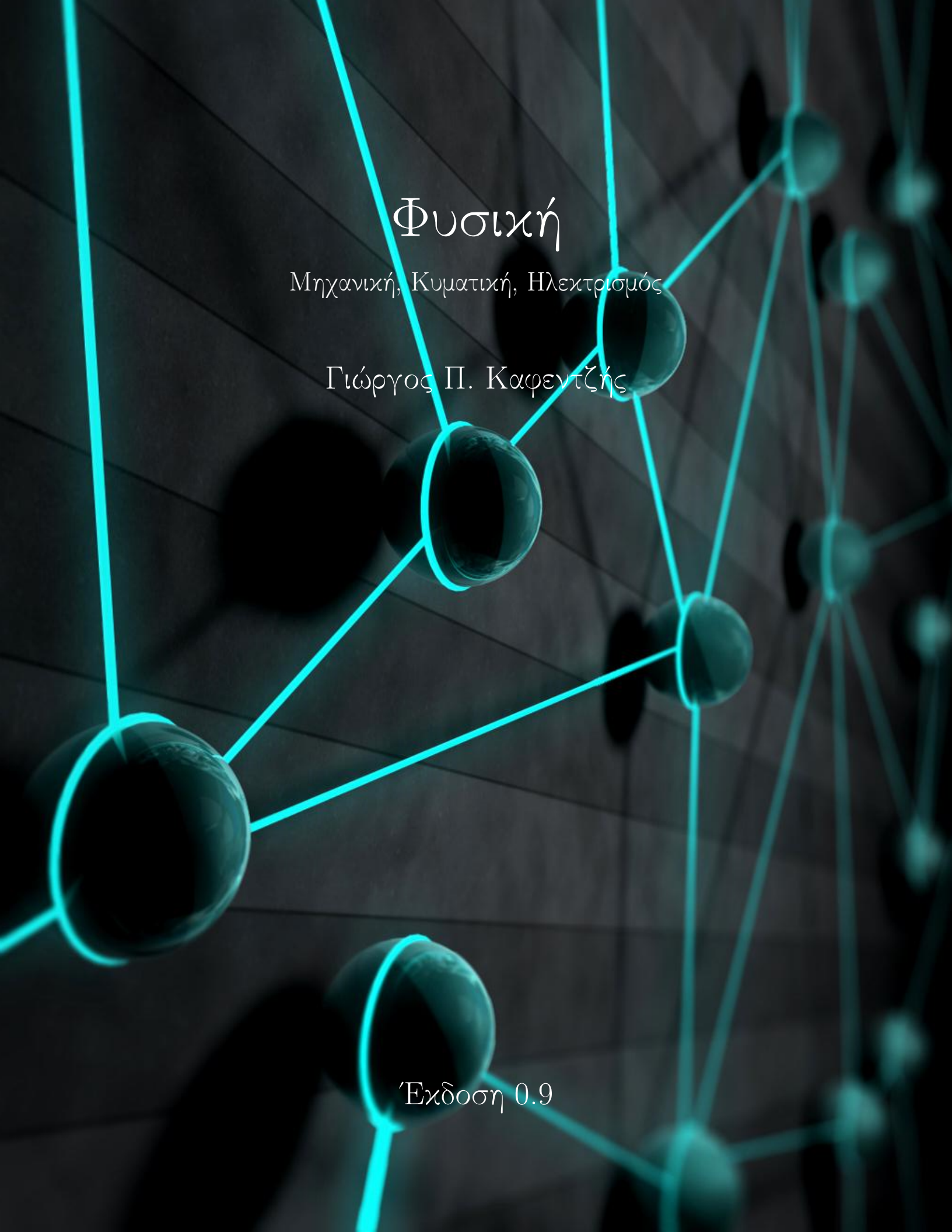




Φυσική

Μηχανική, Κυματική, Ηλεκτρισμός

Γιώργος Π. Καφεντζής

Έκδοση 0.9



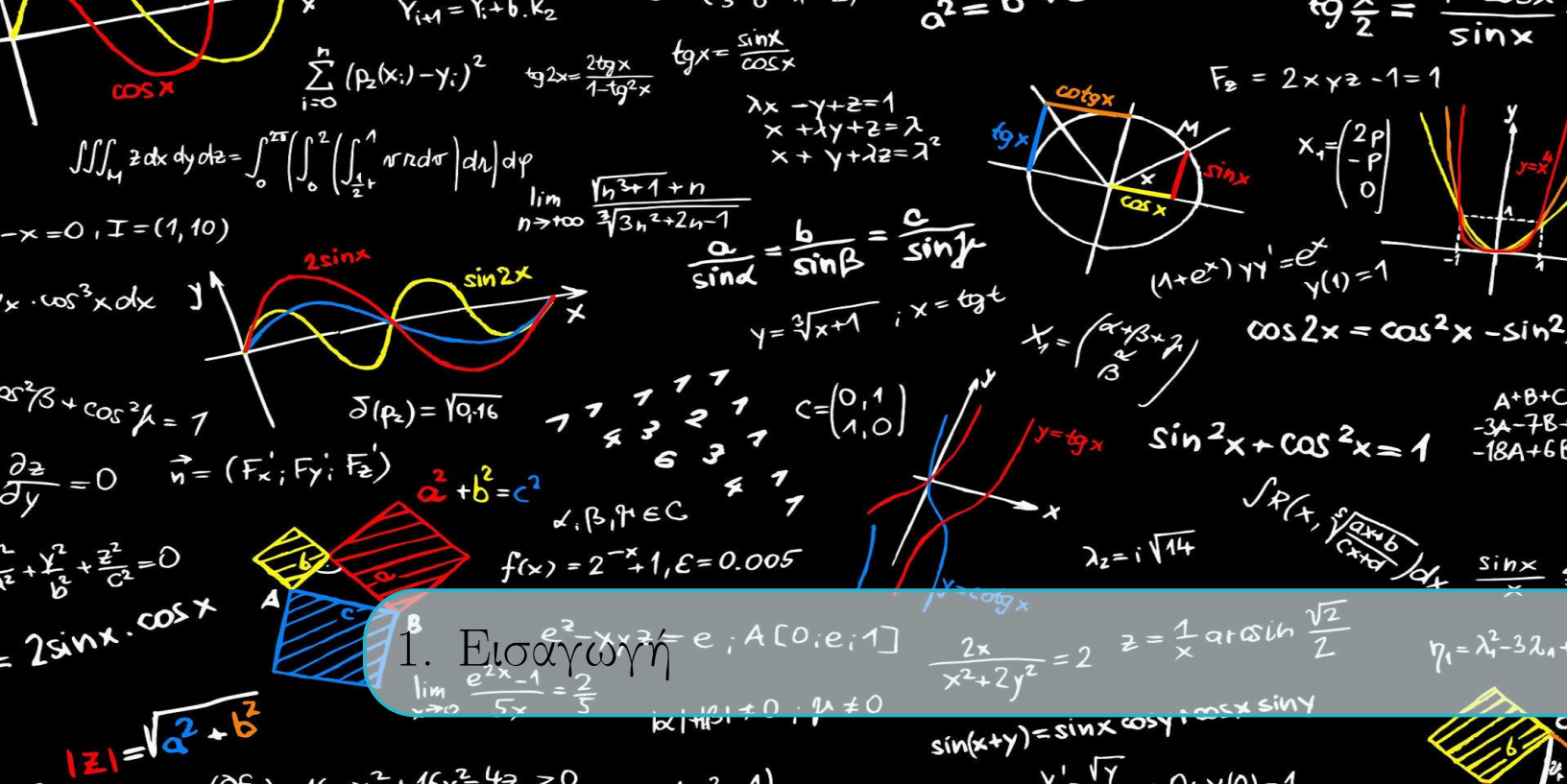
Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	7
1.1	Μαθηματικό Υπόβαθρο	7
1.2	Διανύσματα	7
1.2.1	Ιδιότητες Διανυσμάτων	10
1.2.2	Ανάλυση σε συνιστώσες	12
1.2.3	Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων	16
1.3	Παράγωγος	18
1.4	Ολοκλήρωση	18
1.4.1	Αλλαγή μεταβλητής	21
1.5	Ασκήσεις	23
2	Μηχανική	33
2.1	Εισαγωγή	33
2.2	Κίνηση σε Μια Διάσταση	33
2.2.1	Θέση	33
2.2.2	Μετατόπιση	34
2.2.3	Ταχύτητα	35
2.2.4	Θέση υπό Σταθερή Ταχύτητα	39
2.2.5	Επιτάχυνση	40
2.2.6	Κίνηση υπό Σταθερή Επιτάχυνση	41
2.3	Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις	49
2.3.1	Θέση	49
2.3.2	Μετατόπιση	49
2.3.3	Ταχύτητα	50
2.3.4	Θέση υπό Σταθερή Ταχύτητα	51
2.3.5	Επιτάχυνση	51
2.3.6	Κίνηση υπό Σταθερή Επιτάχυνση	51
2.3.7	Βολή	56

2.3.8	Κυκλική Κίνηση	61
2.4	Οι Νόμοι της Κίνησης	65
2.4.1	Δύναμη	65
2.4.2	Πρώτος Νόμος του Newton	68
2.4.3	Δεύτερος Νόμος του Newton	69
2.4.4	Τρίτος Νόμος του Newton	72
2.4.5	Η δύναμη του βάρους	73
2.4.6	Η κάθετη δύναμη	73
2.4.7	Επιλογή Δυνάμεων σε ένα Πρόβλημα	74
2.4.8	Ανάλυση με βάση τους Τρεις Νόμους	75
2.4.9	Πολλαπλά Μοντέλα	76
2.4.10	Τροχαλίες και Νήματα	77
2.4.11	Δυνάμεις Τριβής	82
2.5	Ενέργεια	89
2.5.1	Σύστημα	90
2.5.2	Έργο Σταθερής Δύναμης	93
2.5.3	Έργο Δύναμης Βάρους	96
2.5.4	Έργο Κάθετης Δύναμης από Επιφάνεια	96
2.5.5	Έργο Μεταβαλλόμενης Δύναμης	96
2.5.6	Η δύναμη του ελατηρίου	98
2.5.7	Έργο δύναμης ελατηρίου	99
2.5.8	Έργο εξωτερικής δύναμης σε ελατήριο	101
2.5.9	Κινητική Ενέργεια	102
2.5.10	Δυναμική Ενέργεια	108
2.5.11	Θερμική Ενέργεια	111
2.5.12	Διαγράμματα Ενέργειας	112
2.5.13	Πλαίσια Εφαρμογής Δυναμικών και Θερμικών Ενεργειών	113
2.5.14	Συντηρητικές και μη συντηρητικές δυνάμεις	114
2.5.15	Μηχανική Ενέργεια Συστήματος	115
2.5.16	Συντηρητικές Δυνάμεις και Δυναμική Ενέργεια	121
2.6	Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας	125
2.6.1	Μη Απομονωμένα Συστήματα	126
2.6.2	Απομονωμένα Συστήματα	127
2.7	Ισχύς	137
2.8	Ασκήσεις	139
3	Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα	191
3.1	Εισαγωγή	191
3.2	Περιοδική Κίνηση	191
3.3	Απλή Αρμονική Ταλάντωση	192
3.3.1	Η κίνηση του σώματος - ελατηρίου ως ΑΑΤ	192
3.3.2	Θέση ΑΑΤ	193
3.3.3	Ταχύτητα και Επιτάχυνση ΑΑΤ	196
3.3.4	Λύση ΑΑΤ	196
3.3.5	Ενέργεια ΑΑΤ	202
3.3.6	Σχέση ΑΑΤ και Ομαλής Κυκλικής Κίνησης	207
3.3.7	Το εκκρεμές	208

3.4	Φθίνουσες Ταλαντώσεις	209
3.5	Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις	211
3.6	Κυματική	213
3.6.1	Κυματοσυνάρτηση	215
3.6.2	Ημιτονοειδή Κύματα	216
3.6.3	Εγκάρσια Ταχύτητα και Επιτάχυνση	220
3.6.4	Ενέργεια Κύματος σε Τεντωμένο Νήμα	221
3.6.5	Ενέργεια και Ισχύς Κύματος	221
3.7	Ηχητικά Κύματα	223
3.7.1	Ταχύτητα Διάδοσης Ήχου	225
3.7.2	Ένταση Ηχητικών Κυμάτων	226
3.7.3	Ηχοστάθμη	227
3.7.4	Ψυχοακουστική	229
3.8	Υπέρθεση Κυμάτων	231
3.8.1	Υπέρθεση Ημιτονοειδών Κυμάτων	232
3.8.2	Υπέρθεση και Διαφορά Διαδρομής	233
3.8.3	Ένταση και Ισχύς	239
3.8.4	Το Φαινόμενο Doppler	245
3.9	Στάσιμα Κύματα	252
3.9.1	Δεσμοί και Αντιδεσμοί	253
3.9.2	Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες	254
3.9.3	Διακροτήματα	256
3.10	Ασκήσεις	259
4	Ηλεκτρισμός	291
4.1	Εισαγωγή	291
4.2	Στοιχεία της Ύλης	292
4.3	Ηλεκτρικές Δυνάμεις	292
4.3.1	Κατηγορίες Υλικών	293
4.3.2	Ο Νόμος του Coulomb	294
4.4	Ηλεκτρικά Πεδία	299
4.4.1	Ηλεκτρικό Πεδίο Σημειακών Φορτίων	300
4.4.2	Ηλεκτρικό Πεδίο Κατανομής Φορτίου	303
4.4.3	Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου	312
4.4.4	Ομογενές Ηλεκτρικό Πεδίο	313
4.5	Ο Νόμος του Gauss	317
4.5.1	Ηλεκτρική Ροή	317
4.5.2	Νόμος του Gauss και Σημειακά Φορτία	324
4.5.3	Νόμος του Gauss και Κατανομή Φορτίου	325
4.5.4	Αγωγοί και Ηλεκτρικό Πεδίο	330
4.6	Ηλεκτρικό Δυναμικό	330
4.6.1	Δυναμικό σε Ομογενές Ηλεκτρικό Πεδίο	332
4.6.2	Ηλεκτρικό Δυναμικό Σημειακών Φορτίων	338
4.6.3	Ηλεκτρικό Πεδίο από Ηλεκτρικό Δυναμικό	343
4.6.4	Ηλεκτρικό Δυναμικό Κατανομής Φορτίου	346
4.6.5	Αγωγοί και Ηλεκτρικό Δυναμικό	349

4.7	Χωρητικότητα	349
4.7.1	Πυκνωτής Παράλληλων Πλακών	351
4.7.2	Κυλινδρικός Πυκνωτής	352
4.7.3	Σφαιρικός Πυκνωτής	353
4.7.4	Απομονωμένος Αγωγός	354
4.7.5	Συνδυασμοί Πυκνωτών	354
4.7.6	Ενέργεια Πυκνωτή	360
4.8	Ρεύμα και Αντίσταση	362
4.8.1	Το Ηλεκτρικό Ρεύμα	364
4.8.2	Πυκνότητα Ρεύματος	365
4.8.3	Ειδική Αγωγιμότητα και Ειδική Αντίσταση	365
4.8.4	Αντίσταση	366
4.8.5	Συνδυασμοί Αντιστάσεων	368



Οι συνοπτικές αυτές σημειώσεις γράφτηκαν για να εξυπηρετήσουν τους φοιτητές του μαθήματος HY112-Φυσική Ι, που προσφέρεται από το Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Δεδομένου ότι ο συγγραφέας δεν είναι Φυσικός (και δεν απευθύνεται σε τέτοιους), οι σημειώσεις αυτές έχουν μια λιγότερο αυστηρή προσέγγιση, βάζοντας σε πρώτο πλάνο τη διαισθητική ερμηνεία, τις βασικές γενικές γνώσεις, και τη μεθοδολογία λύσεων προβλημάτων, χωρίς να υστερεί στη μαθηματική ακρίβεια ή στη φυσική θεώρηση των πραγμάτων.

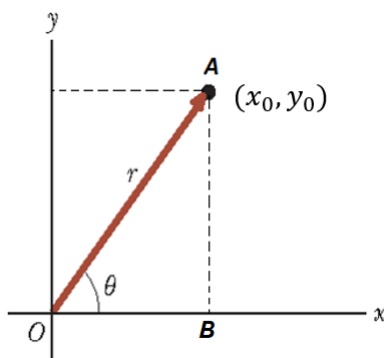
1.1 Μαθηματικό Υπόβαθρο

Στο σύνολό της, η Φυσική αξιοποιεί σε πολύ μεγάλο βαθμό τα Μαθηματικά, καθώς τα τελευταία προσφέρουν ένα ολοκληρωμένο και ακριβές πλαίσιο μελέτης της. Κάποια από τα μαθηματικά αυτά θεωρούνται στη συνέχεια ως γνωστά. Όμως, οι “παλινωδίες” του εκπαιδευτικού συστήματος ή καταστάσεις έκτακτης ανάγκης (όπως η πανδημία του Covid19 το 2020) αναγκάζουν πολλές φορές τους φοιτητές να προσέρχονται στη μελέτη της ύλης της Φυσικής με ελλιπές μαθηματικό υπόβαθρο. Μια προσπάθεια (αρκετά επιφανειακή αλλά που τουλάχιστον προσφέρει ένα ελάχιστο τέτοιο υπόβαθρο) να καλυφθεί αυτή η έλλειψη γίνεται σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο.

1.2 Διανύσματα

Μια και το επόμενο κεφάλαιο αποτελεί το ξεκίνημα της μελέτης της Κλασικής Μηχανικής, και συγκεκριμένα της Κινητικής, είναι απαραίτητο να κάνουμε μια μικρή εισαγωγή στην έννοια του **διανύσματος**. Σκεφτείτε ότι όταν κινείστε στο σπίτι σας και θέλετε να περιγράψετε την κίνησή σας αυτή δεν αρκεί να ορίσετε τη θέση σας στο σπίτι αλλά και το προς τα που κατευθύνεστε (μέσα/έξω από την κουζίνα, μέσα/έξω από το μπαλκόνι, προς/από το υπνοδωμάτιο κλπ). Ένα τέτοιο μέγεθος που περιγράφεται τόσο από έναν αριθμό όσο και από μια “κατεύθυνση” είναι το διάνυσμα. Ένα διάνυσμα δεν είναι τίποτε άλλο από ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλ. ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει αρχή και τέλος, με το τέλος του να συμβολίζεται με ένα βέλος, όπως στο Σχήμα 1.1. Ένα τέτοιο διάνυσμα $\vec{OA}$ έχει τρία χαρακτηριστικά:

- **Μέτρο** $|\vec{OA}|$ ή OA , που δεν είναι τίποτε άλλο από το μήκος του διανύσματος (πάντα θετικός πραγματικός αριθμός)



Σχήμα 1.1: Διάνυσμα.

- **Διεύθυνση**, η οποία αποτελεί την ευθεία (και όλες τις παράλληλές της) πάνω στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα $\vec{OA}$
- **Φορά**, η οποία καθορίζεται από το αν το διάνυσμα ξεκινά από το σημείο O και τερματίζει στο σημείο A ή το αντίθετο

Πολλές φορές η διεύθυνση και η φορά ονομάζονται με μια λέξη **κατεύθυνση**.

Όταν - και αυτό θα είναι ο κανόνας στη συνέχεια - ένα διάνυσμα σχεδιάζεται με αρχή το σημείο O ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και πέρας ένα σημείο A με συντεταγμένες (x_0, y_0) , τότε λέμε ότι το διάνυσμα $\vec{OA}$ έχει συντεταγμένες (x_0, y_0) . Η τιμή x_0 ονομάζεται τετμημένη και η y_0 τεταγμένη, με το ζεύγος να ονομάζεται **καρτεσιανές συντεταγμένες**. Εύκολα μπορούμε να περιγράψουμε λοιπόν ένα διάνυσμα με βάση τις καρτεσιανές του συντεταγμένες στο επίπεδο.

Ένα άλλο δημοφιλές ζεύγος αριθμών που περιγράφουν ένα διάνυσμα είναι οι περιφημες **πολικές συντεταγμένες**¹ και οι οποίες μπορούν πολύ εύκολα να προκύψουν από τις καρτεσιανές. Δείτε στο Σχήμα 1.1 το ορθογώνιο τρίγωνο OAB που σχηματίζεται από το διάνυσμα $\vec{OA}$ και τον οριζόντιο άξονα x' . Αν γράψουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ έχουμε

$$\sin(\theta) = \eta\mu(\theta) = \frac{y_0}{r} \quad (1.1)$$

$$\cos(\theta) = \sigma\upsilon\nu(\theta) = \frac{x_0}{r} \quad (1.2)$$

$$\tan(\theta) = \epsilon\varphi(\theta) = \frac{y_0}{x_0} \quad (1.3)$$

με r την υποτείνουσα του τριγώνου αυτού, $r = \sqrt{(AB)^2 + (OB)^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, τότε μπορούμε να λύσουμε ως προς x_0, y_0 τις δυο πρώτες σχέσεις:

$$x_0 = r \cos(\theta) \quad (1.4)$$

$$y_0 = r \sin(\theta) \quad (1.5)$$

και έτσι οι καρτεσιανές συντεταγμένες μας γράφονται

$$(x_0, y_0) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \quad (1.6)$$

και το διάνυσμα ως

$$\vec{OA} = (x_0, y_0) \quad (1.7)$$

¹Όχι εξ' αιτίας της θερμοκρασίας τους ή κάτι τέτοιο...

Βλέπετε ότι ουσιαστικά οι συντεταγμένες μας εξαρτώνται από το μέτρο του διανύσματος $\vec{OA}$, που εδώ ονομάσαμε $r = |\vec{OA}|$, και από τη γωνία θ που σχηματίζει ο οριζόντιος άξονας $x'x$ και το διάνυσμα $\vec{OA}$. Αυτή η εξάρτηση μας οδηγεί να γράψουμε τις πολικές συντεταγμένες ως

$$\langle (r, \theta) \rangle \quad (1.8)$$

ή απλούστερα

$$(r, \theta) \quad (1.9)$$

με $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Η γωνία θ όμως; Πώς τη βρίσκουμε; Μα από την τελευταία σχέση των τριγωνομετρικών αριθμών της, όπως τους παρουσιάσαμε παραπάνω:

$$\tan(\theta) = \varepsilon\varphi(\theta) = \frac{y_0}{x_0} \implies \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \quad (1.10)$$

με $\tan^{-1}(\cdot)$ να είναι η συνάρτηση της *αντίστροφης εφαπτομένης* (ή του τόξου εφαπτομένης), που πολλές φορές γράφεται και ως $\arctan(\cdot)$. Οπότε συνολικά

$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \quad (1.11)$$

Προσέξτε όμως στο παρακάτω παράδειγμα μια επιπλοκή που μπορεί να συμβεί – και πρέπει να ελέγχετε – στην περίπτωση υπολογισμού της γωνίας θ .

Παράδειγμα 1.1:

Βρείτε την πολική μορφή των διανυσμάτων με συντεταγμένες $(x_0, y_0) = (1, 1)$ και $(x_0, y_0) = (-1, -1)$.

Λύση: Για το διάνυσμα $(x_0, y_0) = (1, 1)$ θα έχουμε

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{1}{1} = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \quad (1.12)$$

αποτελέσματα που συμβαδίζουν με τη θέση του διανύσματος στο επίπεδο. Για το διάνυσμα $(x_0, y_0) = (-1, -1)$ θα έχουμε

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{-1}{-1} = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \quad (!!!) \quad (1.13)$$

πράγμα που προφανώς είναι λάθος, καθώς η γωνία του διανύσματος είναι η $5\pi/4$ (ή $-3\pi/4$). Το παραπάνω “σφάλμα” οφείλεται στο ότι το τόξο εφαπτομένης επιστρέφει πάντα τιμές στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$. Πρέπει να προσθέσετε $\pm\pi$ στο αποτέλεσμα σας για να καταλήξετε στη σωστή γωνία².

■

Υπάρχει σαφής σχέση των προσήμων των x_0, y_0 και του αποτελέσματος της $\tan^{-1}(\cdot)$, και για να μην έχουμε την ανάγκη ελέγχου της γωνίας κάθε φορά, μπορείτε να χρησιμοποιείτε την παρακάτω σχέση.

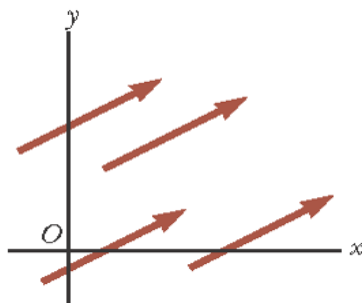
$$\phi = \angle z = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \\ \text{απροσδιόριστη}, & x = y = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

²Για τους/τις πιο mathematically oriented φοιτητές/τριες, μπορείτε να σκεφτείτε τη σχέση $\tan(\theta) = \lambda \iff \theta = k\pi + \tan^{-1}(\lambda), k \in \mathbb{Z}$

1.2.1 Ιδιότητες Διανυσμάτων

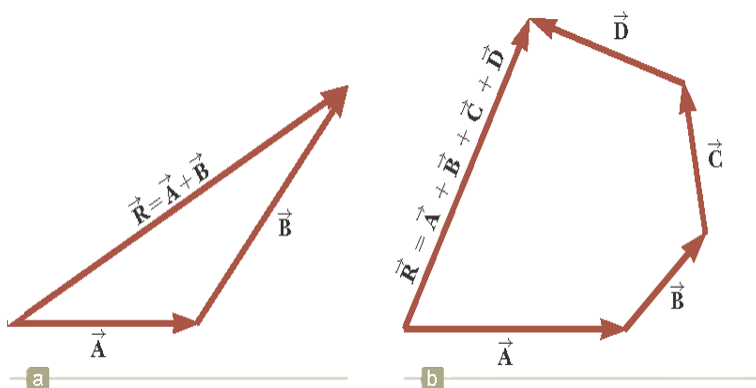
Ας παραθέσουμε τις πιο χρήσιμες ιδιότητες των διανυσμάτων.

- **Ισότητα διανυσμάτων:** δυο διανύσματα λέγονται **ίσα** αν έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια διεύθυνση και φορά (κατεύθυνση). Όλα τα διανύσματα του Σχήματος 1.2 είναι ίσα.



Σχήμα 1.2: Ίσα διανύσματα.

- **Πρόσθεση διανυσμάτων:** μπορούμε να προσθέσουμε γεωμετρικά δυο διανύσματα αν τοποθετήσουμε την αρχή του ενός στο πέρας του άλλου, όπως στο Σχήμα 1.3(α), όπου το διάνυσμα $\vec{B}$ έχει τοποθετηθεί στη “μύτη” του διανύσματος $\vec{A}$. Το άθροισμα $\vec{A} + \vec{B}$ είναι το διάνυσμα με αρχή την αρχή του $\vec{A}$ και πέρας το πέρας του διανύσματος $\vec{B}$. Η ίδια φιλοσοφία βρίσκεται πίσω από κάθε άθροισμα διανυσμάτων, όσα κι αν είναι αυτά (Σχήμα 1.3(β)).



Σχήμα 1.3: Άθροισμα διανυσμάτων.

- **Αντιμεταθετικότητα:** η ιδιότητα της αντιμεταθετικότητας μας λέει ότι

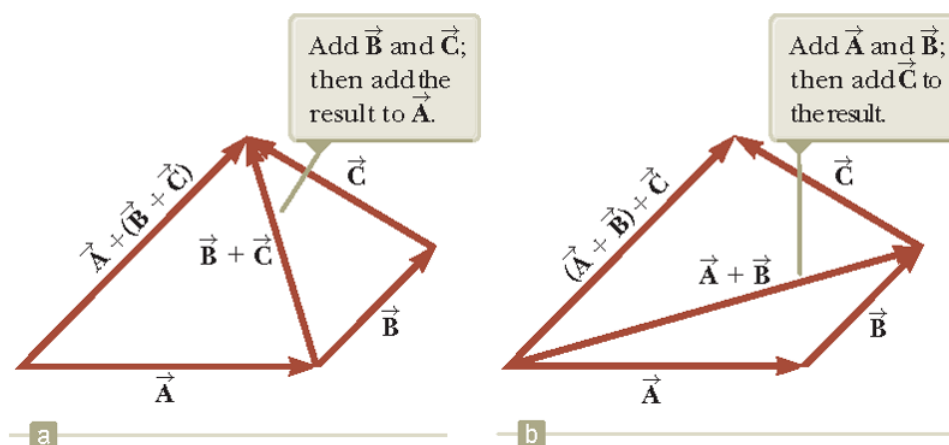
$$\vec{B} + \vec{A} = \vec{A} + \vec{B} \quad (1.15)$$

ή με άλλα λόγια, μπορεί κανείς να προσθέσει το διάνυσμα $\vec{A}$ στο διάνυσμα $\vec{B}$ ή το αντίστροφο. Δεν έχει σημασία δηλαδή με ποιά σειρά προσθέτετε δυο ή περισσότερα διανύσματα.

- **Προσεταιριστικότητα:** η ιδιότητα της προσεταιριστικότητας μας λέει ότι

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} \quad (1.16)$$

ή με άλλα λόγια, ότι το άθροισμα τριών ή περισσότερων διανυσμάτων μπορεί να γίνει με όποια σειρά μας βολεύει. Δείτε το Σχήμα 1.4.

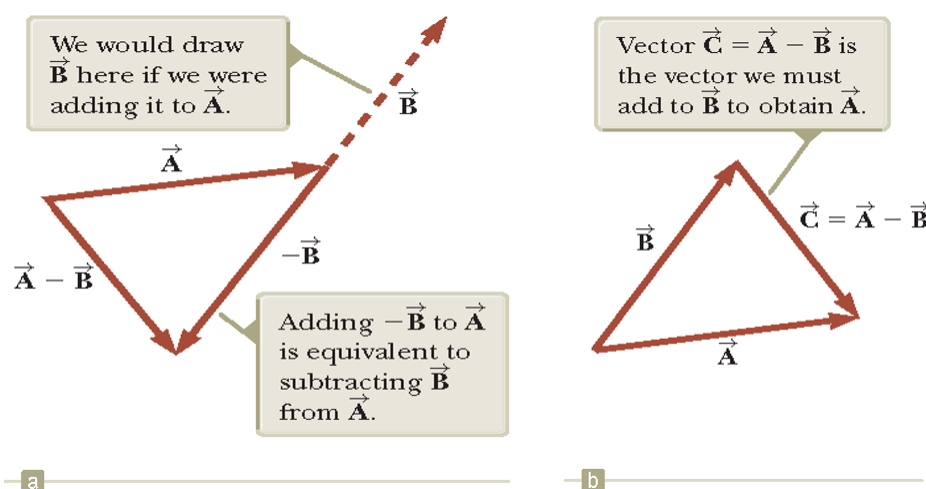


Σχήμα 1.4: Ιδιότητα της προσεταιριστικότητας.

- **Αρνητικό διάνυσμα:** το αρνητικό διάνυσμα $-\vec{A}$ ενός διανύσματος $\vec{A}$ ορίζεται ως το διάνυσμα που όταν προστεθεί στο διάνυσμα $\vec{A}$ μας δίνει το μηδενικό διάνυσμα, δηλ.

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0} \quad (1.17)$$

Με άλλα λόγια, το αρνητικό του διανύσματος $\vec{A}$ είναι το διάνυσμα με αρχή το πέρας του $\vec{A}$ και πέρας την αρχή του $\vec{A}$. Με χρήση του αρνητικού διανύσματος μπορούμε να ορίσουμε πράξεις όπως η αφαίρεση διανυσμάτων. Δείτε το Σχήμα 1.5(α). Σε αυτό το σχήμα, θέλουμε να βρούμε το



Σχήμα 1.5: Αφαίρεση διανυσμάτων.

διάνυσμα $\vec{A} - \vec{B}$ ή αλλιώς το διάνυσμα $\vec{A} + (-\vec{B})$, αν γνωρίζουμε τα διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}$. Γνωρίζουμε πως να προσθέτουμε γεωμετρικά διανύσματα, ας το εκμεταλλευτούμε. Σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\vec{B}$ στο πέρας του διανύσματος $\vec{A}$ σαν να θέλαμε να τα προσθέσουμε. Τότε, σχεδιάζουμε το διάνυσμα $-\vec{B}$ που είναι το διάνυσμα με ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά από το $\vec{B}$. Στη συνέχεια προσθέτουμε γεωμετρικά τα δυο διανύσματα $\vec{A}$ και $-\vec{B}$ και βρίσκουμε το αποτέλεσμα. Στο Σχήμα 1.5(β), βλέπετε μια άλλη θεώρηση της αφαίρεσης $\vec{A} - \vec{B}$. Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}$ έχουν κοινή αρχή (όπως συμβαίνει συχνά σε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy). Μπορείτε να βρείτε το διάνυσμα $\vec{C}$ που πρέπει να προστεθεί στο διάνυσμα $\vec{B}$ για να πάρουμε το διάνυσμα $\vec{A}$; Αυτό είναι το διάνυσμα $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$! Γιατί; Δείτε:

$$\vec{B} + \vec{C} = \vec{B} + (\vec{A} - \vec{B}) = \vec{B} - \vec{B} + \vec{A} = \vec{A} \quad (1.18)$$

- **Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό:** η ιδιότητα αυτή μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά ως

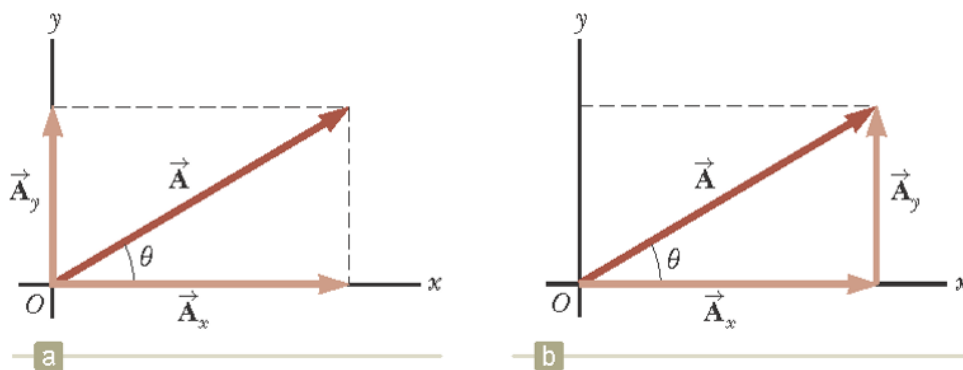
$$\vec{B} = m\vec{A}, \quad m \in \mathbb{R} \implies |\vec{B}| = |m||\vec{A}| \text{ και } \begin{cases} \vec{B} \uparrow\uparrow \vec{A}, & m > 0 \\ \vec{B} \uparrow\downarrow \vec{A}, & m < 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

Το σύμβολο $\uparrow\uparrow$ υποδηλώνει ότι δυο διανύσματα είναι *ομόρροπα*, δηλ. έχουν ίδια διεύθυνση και φορά, ενώ το σύμβολο $\uparrow\downarrow$ δηλώνει ότι δυο διανύσματα είναι *αντίρροπα*, δηλ. έχουν ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά. Άρα ο πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό μεταβάλλει το μέτρο του διανύσματος (αν $|m| \neq 1$), ενώ αν $m < 0$ τότε του αλλάζει και τη φορά. Σε καμία περίπτωση ο πολλαπλασιασμός με αριθμό δε μεταβάλλει τη διεύθυνση (την ευθεία πάνω στην οποία κείται) του διανύσματος.

1.2.2 Ανάλυση σε συνιστώσες

Είναι σχεδόν βέβαιο ότι με λίγη μελέτη δε θα έχετε πρόβλημα να κατανοήσετε καμία από της παραπάνω ιδιότητες των διανυσμάτων, διότι όπως τις παρουσιάσαμε οι περισσότερες έχουν μόνο γεωμετρική ερμηνεία. Θα θέλαμε να μπορούμε να βάλουμε στο παιχνίδι τις συντεταγμένες των διανυσμάτων που συναντήσαμε στην αρχή. Ένας πολύ βολικός τρόπος να το κάνουμε αυτό είναι η περίφημη **ανάλυση σε συνιστώσες** ενός διανύσματος. Με αυτόν τον τρόπο, όλες οι προηγούμενες ιδιότητες μπορούν να “αριθμητικοποιηθούν”.

Η ανάλυση σε συνιστώσες βασίζεται σε μια απλή έννοια: την προβολή ενός διανύσματος επάνω στους άξονες ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy . Δείτε το Σχήμα 1.6(a). Αν φέρετε την προβολή του

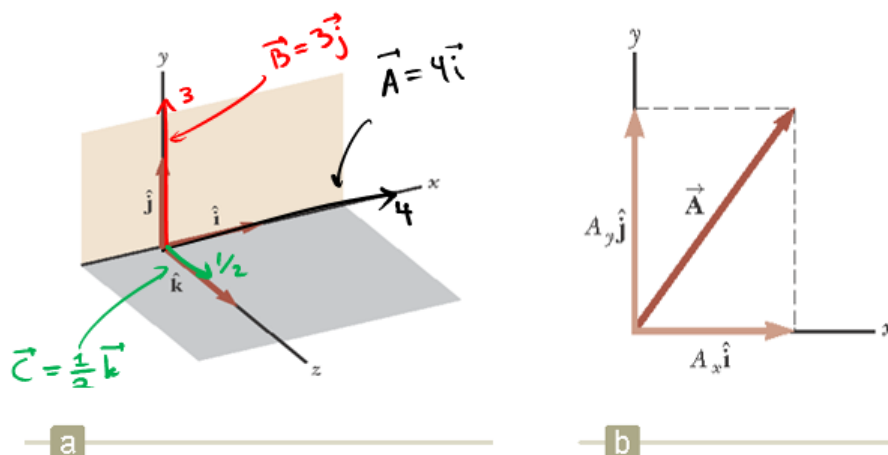


Σχήμα 1.6: Ανάλυση σε συνιστώσες.

διανύσματος $\vec{A}$ επάνω στους δυο άξονες (δηλ. το διάνυσμα που ορίζεται αν φέρετε μια κάθετη προς τους άξονες από το πέρας του διανύσματος $\vec{A}$) τότε δημιουργούνται δυο διανύσματα $\vec{A}_x, \vec{A}_y$. Αν μεταφέρετε το διάνυσμα $\vec{A}_y$ παράλληλα έτσι ώστε η αρχή του να συναντήσει το πέρας του διανύσματος $\vec{A}_x$, τότε μπορείτε να τα προσθέσετε γεωμετρικά - δείτε το Σχήμα 1.6(b) - και να παρατηρήσετε ότι

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \quad (1.20)$$

Ένα ακόμα βήμα προς την απλοποίηση της κατάστασης γίνεται αν “εξοπλίσουμε” κάθε άξονα του συστήματος συντεταγμένων με ένα **μοναδιαίο διάνυσμα**. Με αυτόν τον τρόπο μπορείτε να εκφράσετε κάθε διάνυσμα που βρίσκεται στο σύστημα συντεταγμένων συναρτήσει των μοναδιαίων διανυσμάτων. Για παράδειγμα, στον τριδιάστατο χώρο που ζούμε, χρειαζόμαστε τρία μοναδιαία διανύσματα για να περιγράψουμε ένα οποιοδήποτε σημείο του χώρου (κι έτσι το διάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτό): αν κρεμάσετε μια μπάλα από το ταβάνι ενός μεγάλου, παραλληλόγραμμου δωματίου, πως θα περιγράψετε τη θέση της; Θα πρέπει να μιλήσετε για το πόσο απέχει από το πάτωμα, πόσο από τον έναν κάθετο τοίχο σε αυτό, και πόσο από τον άλλο. Με άλλα λόγια θα μιλήσετε με όρους *μήκους*, *πλάτους*, *ύψους*, και πιθανότατα θα χρησιμοποιήσετε τη μονάδα του ενός μέτρου για να ορίσετε τη θέση της μπάλας. Ακριβώς αυτό το ρόλο του “ενός μέτρου” παίζουν τα μοναδιαία διανύσματα. Έχουμε συμφωνήσει να τα ονομάζουμε $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ και να



Σχήμα 1.7: Μοναδιαία διανύσματα στο χώρο και στο επίπεδο.

τα αντιστοιχίζουμε στους άξονες x , y , z του τριδιάστατου χώρου, αντίστοιχα, όπως στο Σχήμα 1.7(a). Τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ έχουν τρία ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά:

- Έχουν μέτρο μονάδα: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$.
- Είναι κάθετα μεταξύ τους: $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$.

Ελάχιστες φορές θα μας απασχολήσει ο τριδιάστατος χώρος, οπότε ας μείνουμε στο διδιάστατο επίπεδο, όπου θα χρησιμοποιήσουμε τα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$, όπως στο Σχήμα 1.7(b), όπου μπορούμε να γράψουμε το διάνυσμα $\vec{A}$ ως

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} \quad (1.21)$$

όπου τώρα τα A_x , A_y είναι οι αριθμητικές τιμές που καταλήγει το πέρας των διανυσμάτων $A_x \vec{i}$ και $A_y \vec{j}$ πάνω στους βαθμονομημένους άξονες x , y . Για παράδειγμα, το διάνυσμα $\vec{A}$ με συντεταγμένες $(3, -2)$ μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j} \quad (1.22)$$

δηλ. οι συνιστώσες του είναι οι $\vec{A}_x = 3\vec{i}$ και $\vec{A}_y = -2\vec{j}$.

Πως είναι χρήσιμη μια τέτοια ανάλυση σε περιπτώσεις αθροίσματος διανυσμάτων; Σκεφτείτε ένα διάνυσμα $\vec{R}$ το οποίο αποτελείται από το άθροισμα $\vec{A} + \vec{B}$, τα οποία σας είναι γνωστά, όπως στο Σχήμα 1.8. Αναλύοντας σε συνιστώσες θα έχουμε

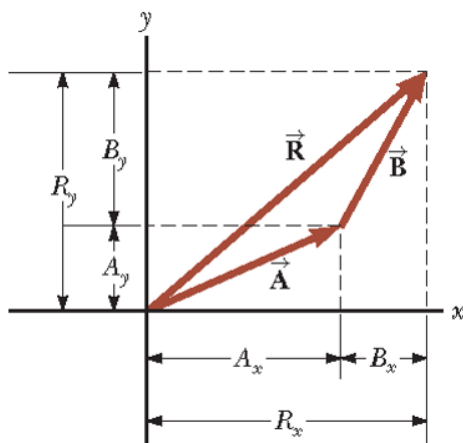
$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} \quad (1.23)$$

$$= (A_x \vec{i} + A_y \vec{j}) + (B_x \vec{i} + B_y \vec{j}) \quad (1.24)$$

Τα διανύσματα που σχετίζονται με το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{i}$ ουσιαστικά βρίσκονται στον ίδιο άξονα - τον x' , ενώ αυτά που σχετίζονται με το $\vec{j}$ βρίσκονται επάνω στον άξονα $y'y$. Η πρόσθεση διανυσμάτων που βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι τετριμμένη γεωμετρικά, καθώς το άθροισμά τους θα βρίσκεται πάλι πάνω στον ίδιο άξονα που βρίσκονται και τα επιμέρους διανύσματα. Καταλαβαίνετε ότι για να βρείτε το άθροισμα τους απλά πρέπει να προσθέσετε τους συντελεστές τους, δηλ.

$$\vec{R} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} \quad (1.25)$$

$$= R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \quad (1.26)$$



Σχήμα 1.8: Ανάλυση σε συνιστώσες στην πρόσθεση διανυσμάτων.

$$= \vec{R}_x + \vec{R}_y \quad (1.27)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για να εκφράσουμε ένα άθροισμα διανυσμάτων συναρτήσει των μοναδιαίων διανυσμάτων απλά προσθέτουμε μεταξύ τους όλες τις επιμέρους συνιστώσες των διανυσμάτων που εμπλέκονται στο άθροισμα. Άραγε - και για να θυμηθούμε τι έχουμε μάθει ως τώρα - πως θα ήταν η πολική μορφή του παραπάνω διανύσματος $\vec{R}$;

$$|\vec{R}| = R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2} \quad (1.28)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x} = \tan^{-1} \left(\frac{A_y + B_y}{A_x + B_x} \right) \quad (1.29)$$

Παράδειγμα 1.2:

Βρείτε το άθροισμα των διανυσμάτων

$$\vec{A} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \quad (1.30)$$

$$\vec{B} = 2\vec{i} - 4\vec{j} \quad (1.31)$$

τόσο σε καρτεσιανή όσο και σε πολική μορφή.

Λύση: Για την καρτεσιανή

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (2\vec{i} + 2\vec{j}) + (2\vec{i} - 4\vec{j}) = 4\vec{i} - 2\vec{j} \quad (1.32)$$

άρα το διάνυσμα $\vec{A} + \vec{B}$ περιγράφεται από τις συντεταγμένες $(4, -2)$. Η πολική του μορφή περιγράφεται από το μέτρο του και τη γωνία που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα, δηλ.

$$|\vec{C}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad (1.33)$$

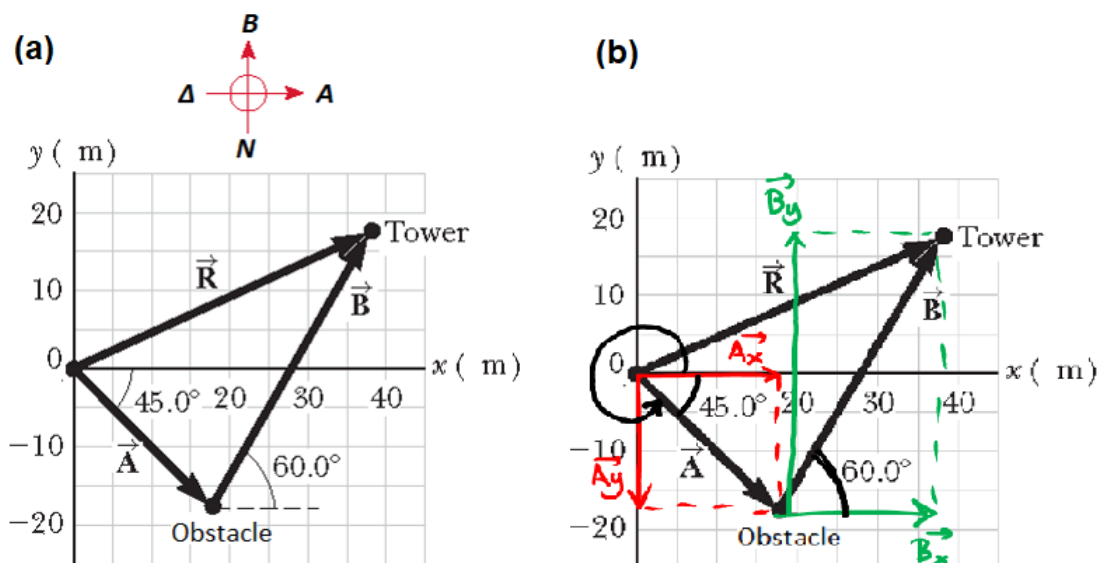
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-2}{4} \right) = \tan^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) \approx -26.5^\circ \quad (1.34)$$

Σχεδιάστε το διάνυσμα στο επίπεδο και επιβεβαιώστε ότι οι παραπάνω τιμές είναι λογικές.

Παράδειγμα 1.3:

Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25 m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το “στέλνει” 40 m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει τον πύργο ελέγχου του (Δείτε το Σχήμα 1.9).

- (α') Αναλύστε τις συνιστώσες του ρομπότ για κάθε κίνησή του.
 (β') Ορίστε τις συνιστώσες της συνολικής μετατόπισης $\vec{R}$ του ρομπότ. Βρείτε μια έκφραση για το $\vec{R}$ με όρους μοναδιαίων διανυσμάτων.
 (γ') Τι θα συνέβαινε αν το ρομπότ έπρεπε να επιστρέψει στο σημείο αφετηρίας του, μετά την επαφή του με τον πύργο ελέγχου του; Ποιες συνιστώσες θα περιέγραφαν την πορεία του; Ποια θα ήταν η κατεύθυνση του ρομπότ;



Σχήμα 1.9: Κίνηση ρομπότ στο αεροδρόμιο.

Λύση:

Αρχικά, στο σύστημα συντεταγμένων μας με κέντρο το σημείο αφετηρίας του ρομπότ, η γωνία των 40° στο Σχήμα 1.9 είναι ίση με -45° . Μπορούμε να μεταφέρουμε το διάνυσμα $\vec{B}$ παράλληλα ώστε η αρχή του να ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων. Δε θα το κάνουμε εδώ, για να φαίνονται καλύτερα οι συνιστώσες του.

- (α') Προβάλλουμε τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ στους δυο άξονες, παίρνοντας τις συνιστώσες $\vec{A}_x, \vec{A}_y, \vec{B}_x, \vec{B}_y$. Τα διανύσματα της κίνησης φαίνονται στο Σχήμα 1.9(b). Για καθένα από αυτά θα έχουμε

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} \quad (1.35)$$

με

$$A_x = |\vec{A}| \cos(\theta) = 25 \cos(-45^\circ) = \frac{25\sqrt{2}}{2} \approx 17.7 \text{ m} \quad (1.36)$$

$$A_y = |\vec{A}| \sin(\theta) = 25 \sin(-45^\circ) = -\frac{25\sqrt{2}}{2} \approx -17.7 \text{ m} \quad (1.37)$$

με τις τιμές να προέρχονται από τριγωνομετρία στα ορθογώνια τρίγωνα που περιλαμβάνουν τις γωνίες των -45° και 60° . Αντίστοιχα,

$$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} \quad (1.38)$$

με

$$B_x = |\vec{B}| \cos(\theta) = 40 \cos(60^\circ) = 40 \frac{1}{2} = 20 \text{ m} \quad (1.39)$$

$$B_y = |\vec{B}| \sin(\theta) = 40 \sin(60^\circ) = 40 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 34.7 \text{ m} \quad (1.40)$$

(β') Είναι

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \quad (1.41)$$

$$= (A_x + B_x) \vec{i} + (A_y + B_y) \vec{j} \quad (1.42)$$

$$= (37.7 \text{ m}) \vec{i} + (17.0 \text{ m}) \vec{j} \quad (1.43)$$

(γ') Η πορεία του από τον πύργο ελέγχου ως τη συμβολή των αξόνων περιγράφεται από το διάνυσμα

$$\vec{R} = -\vec{R} \quad (1.44)$$

οπότε

$$\vec{R} = -\vec{R} = (-37.7 \text{ m}) \vec{i} - (17.0 \text{ m}) \vec{j} \quad (1.45)$$

Οπότε

$$|\vec{R}| = \sqrt{(-37.7)^2 + (-17.0)^2} \approx 41.35 \text{ m} \quad (1.46)$$

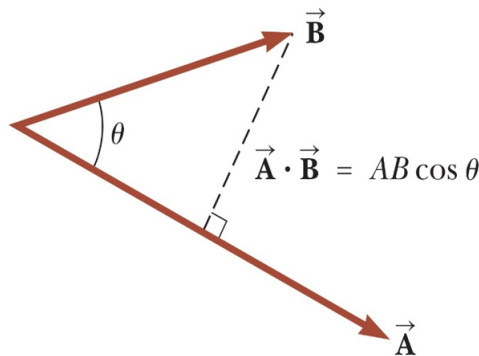
και

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-17.0}{-37.7} \right) \approx 24.2^\circ \quad (1.47)$$

που προφανώς δεν αντιστοιχεί στο διάνυσμα που έχουμε, άρα με χρήση της Σχέσης (1.14), η σωστή απάντηση είναι $\theta \approx -155.7^\circ$ ή $\theta \approx 204.2^\circ$.

1.2.3 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Θεωρήστε δυο διανύσματα $\vec{A}$, $\vec{B}$ όπως στο Σχήμα 1.10. Το **εσωτερικό γινόμενο** τους είναι μια βαθμωτή



Σχήμα 1.10: Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

ποσότητα (αριθμός) που ορίζεται ως

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta) = AB \cos(\theta) \quad (1.48)$$

με θ τη μεταξύ τους γωνία. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $B \cos(\theta)$ δεν είναι άλλη από το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\vec{B}$ επάνω στο $\vec{A}$. Η προβολή αυτή μπορεί να γραφεί ως $\vec{B}_{\perp A} = B \cos(\theta) \vec{A}$. Άρα το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να διατυπωθεί ως το μέτρο του διανύσματος $\vec{A}$ επί το μέτρο της προβολής του $\vec{B}$ στο $\vec{A}$. Μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου είναι:

- Αντιμεταθετικότητα: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- Επιμεριστικότητα: $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

Από τον ορισμό μπορούμε να ξεχωρίσουμε τις παρακάτω ειδικές περιπτώσεις:

- $\vec{A} \perp \vec{B} \iff \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$
- $\vec{A} \uparrow \uparrow \vec{B} \iff \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|$
- $\vec{A} \uparrow \downarrow \vec{B} \iff \vec{A} \cdot \vec{B} = -|\vec{A}||\vec{B}|$

Πώς μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την ανάλυση σε συνιστώσες όταν έχουμε να κάνουμε με εσωτερικά γινόμενα; Κατ' αρχάς, από τις ακριβώς προηγούμενες ιδιότητες μπορούμε να εξάγουμε ότι

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad (1.49)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \quad (1.50)$$

Με βάση αυτά, αν έχουμε δυο διανύσματα $\vec{A}$, $\vec{B}$ που γράφονται ως

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad (1.51)$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k} \quad (1.52)$$

τότε το εσωτερικό τους γινόμενο καταλήγει να είναι πολύ απλό!

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.53)$$

Προφανώς για κίνηση στο επίπεδο, η συνιστώσα X_z δε θα μας απασχολήσει.

Παράδειγμα 1.4:

Βρείτε το εσωτερικό γινόμενο και τη γωνία μεταξύ δυο διανυσμάτων

$$\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} \quad (1.54)$$

$$\vec{B} = -\vec{i} + 2\vec{j} \quad (1.55)$$

Λύση: Θα έχουμε

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos(\theta) \quad (1.56)$$

αλλά δε γνωρίζουμε τη γωνία θ ! Οπότε πρέπει να δοκιμάσουμε την εύρεση του εσωτερικού γινομένου με χρήση συνιστωσών και των σχέσεων (1.49,1.50).

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j}) = -2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot 1 = 4 \quad (1.57)$$

Η γωνία τώρα μπορεί να βρεθεί εύκολα ως

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{4}{\sqrt{2^2 + 3^2} \sqrt{(-1)^2 + 2^2}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{4}{\sqrt{65}} \right) \approx 60.25^\circ \quad (1.58)$$

Μπορείτε να σχεδιάσετε τα διανύσματα στο επίπεδο και να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα;

1.3 Παράγωγος

Αυτή η παράγραφος προσφέρεται ως υπενθύμιση των πολύ βασικών στοιχείων της έννοιας της παραγώγου, ώστε να προχωρήσουμε μετά στην έννοια του ολοκληρώματος. Αν $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση του x τότε ορίζουμε την παράγωγο $f'(x)$ ή $\frac{d}{dx}f(x)$ ως

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1.59)$$

Η παράγωγος εκφράζει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η συνάρτηση $f(x)$ συναρτήσει του x κοντά στο x_0 . Με παρόμοιο τρόπο ορίζουμε τη 2η, 3η, n -οστή παράγωγο και συμβολίζουμε ως

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x), \quad f'''(x) = \frac{d^3}{dx^3}f(x), \quad f^{(n)} = \frac{d^{(n)}}{dx^{(n)}}f(x) \quad (1.60)$$

Η παράγωγος $f'(x_0)$ ερμηνεύεται γεωμετρικά ως ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που εφάπτεται στη συνάρτηση $f(x)$ στο σημείο $x = x_0$, υπό την προϋπόθεση βέβαια ότι η παράγωγος είναι πεπερασμένος πραγματικός αριθμός. Η εφαπτομένη στο σημείο $x = x_0$ της συνάρτησης $f(x)$ γράφεται ως

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (1.61)$$

Οι παρακάτω πίνακες συνοψίζουν γνωστούς κανόνες παραγώγισης, καθώς και τις παραγώγους κάποιων γνωστών συναρτήσεων που θα μας χρησιμεύσουν στη συνέχεια.

Κανόνες Παραγώγισης			
Κανόνας	Παράγωγος	Κανόνας	Παράγωγος
Άθροισμα	$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$	Σύνθεση	$(f(g(x)))' = g'(x)f'(g(x))$
Πηλίκο	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$	Σταθερά	$c' = 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}$
Γινόμενο	$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	Αντίστροφη	$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

Πίνακας 1.1: Πίνακας Κανόνων Παραγώγισης.

Γνωστές Παράγωγοι			
Συνάρτηση	Παράγωγος	Συνάρτηση	Παράγωγος
e^{ax}	$ae^{ax}, \quad a \in \mathbb{R}$	x^n	$nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{R}, x > 0$
$\ln(f(x))$	$f'(x) \frac{1}{f(x)}$	$\sin(f(x))$	$f'(x) \cos(f(x))$
$\cos(f(x))$	$-f'(x) \sin(f(x))$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

Πίνακας 1.2: Πίνακας Γνωστών Παραγώγων.

1.4 Ολοκλήρωση

Χαλαρά μιλώντας, η ολοκλήρωση είναι μια πράξη αντίστροφη της παραγώγισης. Θα προσπαθήσουμε σε αυτήν την παράγραφο να δώσουμε τα πολύ βασικά στοιχεία της πράξης της ολοκλήρωσης, καθώς για μια

αναλυτική μελέτη θα απαιτούνταν μέχρι και ξεχωριστό σύγγραμμα. Ας ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα. Ξέρουμε ότι

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2 \quad (1.62)$$

Αν θέλαμε να βρούμε ποιά συνάρτηση πρέπει να παραγωγίσουμε για να πάρουμε τη συνάρτηση $3x^2$, τότε η παραπάνω σχέση θα μας έλεγε ότι η αυτή είναι η συνάρτηση x^3 . Συμβολικά

$$\int 3x^2 dx = x^3 \quad (1.63)$$

με $\int$ το σύμβολο της ολοκλήρωσης. Γενικότερα, όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $F(x)$, αναζητούμε μια συνάρτηση $f(x)$ - η οποία ονομάζεται παράγουσα - την οποία αν παραγωγίσουμε θα πάρουμε την $F(x)$, δηλ. αναζητούμε μια συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει

$$f'(x) = F(x) \quad (1.64)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα ονομάζεται **αόριστο**, γιατί δεν ορίζουμε ρητά σε ποιο διάστημα του x ολοκληρώνουμε - θα καταλάβετε τη διαφορά όταν το συγκρίνουμε παρακάτω με ένα **ορισμένο** ολοκλήρωμα. Ένα αόριστο ολοκλήρωμα είναι πάντα μια συνάρτηση μιας ανεξάρτητης μεταβλητής (όπως το x εδώ). Το σύμβολο dx δηλώνει τη μεταβλητή ολοκλήρωσης και δεν παίζει κάποιο ρόλο³ στην όλη διαδικασία, εκτός από κάποιες συγκεκριμένες περιπτώσεις.

Στο προηγούμενο παράδειγμα είπαμε ότι

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2 \quad (1.65)$$

Όμως ισχύει και

$$\frac{d}{dx}(x^3 + c) = 3x^2 \quad (1.66)$$

για κάθε $c \in \mathbb{R}$, αφού η παράγωγος μιας σταθεράς είναι μηδέν. Άρα είναι πιο σωστό να πούμε ότι

$$\int 3x^2 dx = x^3 + c, \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad (1.67)$$

Πιο γενικά λοιπόν, αν $F(x) = f'(x)$ θα πρέπει να ισχύει

$$\int F(x) dx = f(x) + c, \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad (1.68)$$

Αντίθετα, ένα **ορισμένο** ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$\int_a^b F(x) dx \quad (1.69)$$

και υπολογίζεται ως

$$\int_a^b F(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a) \quad (1.70)$$

Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι πάντα αριθμός και όχι συνάρτηση (στα πλαίσια του μαθήματος), και προφανώς δεν περιλαμβάνει ποτέ κάποια σταθερά c στο αποτέλεσμα. Γεωμετρικά, ένα ορισμένο ολοκλήρωμα από το a ως το b μπορεί να ερμηνευτεί ως η “επιφάνεια” κάτω από τη συνάρτηση $F(x)$, η οποία ορίζεται από την ευθεία $x = a$, την ευθεία $x = b$, και τον άξονα x' .

Παρακάτω βλέπετε δυο πίνακες με τις πιο γνωστές ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και τα πιο χρήσιμα ζεύγη ολοκληρωμάτων.

Γνωστά Ολοκληρώματα			
A/A	Ιδιότητα	A/A	Ιδιότητα
1	$\int af(x)dx = a \int f(x)dx, a \in \mathbb{R}$	2	$\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
3	$\int_a^a f(x)dx = 0$	4	$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$
5	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$	6	$\int_a^b cdx = c(b-a)$

Πίνακας 1.3: Πίνακας Ιδιοτήτων Ολοκληρωμάτων.

Γνωστά Ολοκληρώματα			
A/A	Ολοκλήρωμα	A/A	Ολοκλήρωμα
1	$\int dx = x + c, c \in \mathbb{R}$	2	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, c \in \mathbb{R}, n \neq -1$
3	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	4	$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$
5	$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$	6	$\int e^x dx = e^x + c$
7	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log(a)} + c$	8	$\int xe^x dx = (x-1)e^x + c$

Πίνακας 1.4: Πίνακας Γνωστών Ολοκληρωμάτων.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.5:

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int (x^2 + 3x + 2)dx, \int_0^1 (x^2 + 3x + 2)dx \quad (1.71)$$

Λύση: Ψάχνουμε μια συνάρτηση $f(x)$ της οποίας η παράγωγος θα είναι $x^2 + 3x + 2$. Ας δοκιμάσουμε την $x^3 + 3x^2 + 2x$. Θα είναι

$$(x^3 + 3x^2 + 2x)' = 3x^2 + 6x + 2 \quad (1.72)$$

Βλέπετε ότι η μόνη διαφορά με τη συνάρτηση που ψάχνουμε είναι στους συντελεστές του πολυωνύμου. Θα θέλαμε να λείπει το 3 από το $3x^2$ και το 6 να ήταν 3 (δηλ. το μισό) στον όρο $6x$. Ας δοκιμάσουμε λοιπόν τη συνάρτηση

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)' = \frac{1}{3}3x^2 + \frac{3}{2}2x + 2 = x^2 + 3x + 2 \quad (1.73)$$

Βρήκαμε λοιπόν τη ζητούμενη συνάρτηση της οποίας η παράγωγος μας δίνει αυτή που υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμά μας. Οπότε

$$\int (x^2 + 3x + 2)dx = \int \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)' dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + c \quad (1.74)$$

³Μιλώντας χωρίς αυστηρότητα και στα πλαίσια χρήσης του ολοκληρώματος.

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα, δεν αλλάζει σε τίποτα η σκέψη πίσω από τον υπολογισμό του. Η παραπάνω γραμμή μετατρέπεται σε

$$\int_0^1 (x^2 + 3x + 2)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right)' dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{32}{6} \quad (1.75)$$

Το τελευταίο σημαίνει ότι η επιφάνεια κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $x^2 + 3x + 2$ από το σημείο $x = 0$ ως το σημείο $x = 1$ είναι ίση με $23/6$.

Παράδειγμα 1.6:

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int e^{ax} dx, \quad \int_0^1 e^{ax} dx \quad (1.76)$$

Λύση: Ψάχνουμε μια συνάρτηση $f(x)$ της οποίας η παράγωγος θα είναι e^{ax} . Ας δοκιμάσουμε την ίδια συνάρτηση. Είναι

$$(e^{ax})' = (ax)' e^{ax} = ae^{ax} \implies \left(\frac{1}{a} e^{ax} \right)' = e^{ax} \quad (1.77)$$

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $f(x) = \frac{1}{a} e^{ax}$. Οπότε

$$\int e^{ax} dx = \int \left(\frac{1}{a} e^{ax} \right)' dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c \quad (1.78)$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα δεν αλλάζει κάτι στη φιλοσοφία, εκτός από την παραπάνω γραμμή που γίνεται

$$\int_0^1 e^{ax} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{a} e^{ax} \right)' dx = \frac{1}{a} e^{ax} \Big|_0^1 = \frac{1}{a} (e^a - 1) \quad (1.79)$$

1.4.1 Αλλαγή μεταβλητής

Κάποιες φορές τα ολοκληρώματα που θα συναντήσουμε (στον ηλεκτρομαγνητισμό κυρίως) δε θα μπορούμε να τα λύσουμε με τη μέθοδο της παραγούσας, όπως παραπάνω. Σε αυτές τις περιπτώσεις, μπορούμε να καταφύγουμε στη λύση έτοιμων πινάκων ολοκληρωμάτων αλλά πολλές φορές ίσως μια απλή αλλαγή μεταβλητής στο δοσμένο ολοκλήρωμα να μας λύνει τα χέρια.

Η τεχνική αυτή μπορεί να συνοψισθεί ως εξής. Αν

$$\int F(g(x))g'(x)dx \quad (1.80)$$

το ζητούμενο ολοκλήρωμα, τότε μπορούμε να θέσουμε $u = g(x)$, με $du = g'(x)dx$. Σε περίπτωση ορισμένου ολοκληρώματος με άκρα a, b τότε $u_a = g(a)$ και $u_b = g(b)$. Έτσι το ολοκλήρωμά μας θα γράφεται

$$\int F(u)du \quad (1.81)$$

ή σε περίπτωση που είναι ορισμένο

$$\int_{u_a}^{u_b} F(u)du \quad (1.82)$$

με $u = g(x)$, όπως είπαμε. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.7:

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 2x \sqrt{x^2 + 1} dx \quad (1.83)$$

Λύση: Δεν είναι απλό να βρεί κανείς την παράγουσα της συνάρτησης $2x \sqrt{x^2 + 1}$, οπότε μπορεί να καταφύγει σε άλλες τεχνικές όπως η αλλαγή μεταβλητής. Ας θέσουμε

$$u = x^2 + 1 = g(x) \quad (1.84)$$

και χρησιμοποιώντας τις δοσμένες σχέσεις

$$\frac{d}{dx} u = g'(x) = 2x \implies du = 2x dx \quad (1.85)$$

Τα άκρα του ολοκληρώματος μεταβάλλονται ως

$$u_0 = g(0) = 1 \quad (1.86)$$

$$u_1 = g(1) = 2 \quad (1.87)$$

Το ολοκλήρωμά μας τώρα μπορεί να γραφεί ως

$$\int_0^1 2x \sqrt{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} (2x dx) = \int_1^2 \sqrt{u} du \quad (1.88)$$

με το τελευταίο ολοκλήρωμα να υπολογίζεται εύκολα! Θα έχουμε

$$\int_1^2 u^{1/2} du = \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{2}{3} (\sqrt{2^3} - \sqrt{1^3}) = \frac{2}{3} (\sqrt{8} - 1) \quad (1.89)$$

■

Θέλετε να δοκιμάσετε τα παρακάτω, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής;

Παράδειγμα 1.8:

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \log(e^x + e^{-x}) + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (1.90)$$

$$\int_0^1 x e^{-x^2/2} dx = 1 - e^{-1/2} \quad (1.91)$$

$$\int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{3} \quad (1.92)$$

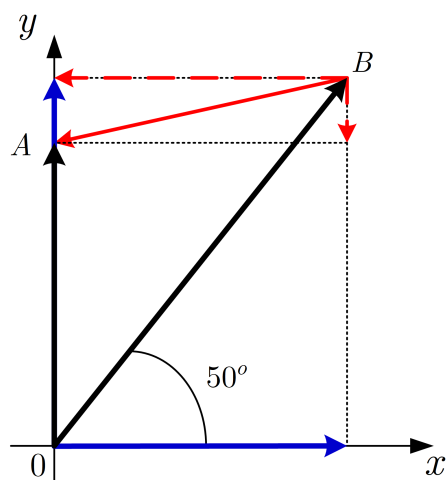
Λύση: Δική σας. :)

1.5 Ασκήσεις

Παράδειγμα 1.9:

Ένας εξερευνητής χειμερινών ορεινών περιοχών πέφτει σε χιονοθύελλα στο δρόμο της επιστροφής του προς την κατασκήνωση. Κανονικά, θα έπρεπε να ταξιδεύει 5.6 χιλιόμετρα βόρεια, αλλά όταν κόπασε η χιονοθύελλα κατάλαβε ότι ταξίδεψε 7.8 χιλιόμετρα υπό γωνία 50° βορειοανατολικά (γωνία με τον άξονα x' -δύση προς ανατολή). Πόση απόσταση και σε ποιά κατεύθυνση πρέπει να ταξιδέψει πλέον για να φτάσει στην κατασκήνωση;

Λύση: Δείτε το Σχήμα 1.11. Ζητούμε το διάνυσμα $\vec{BA}$ σε πολική μορφή, και παρατηρούμε ότι



Σχήμα 1.11: Σχήμα Άσκησης 1.9.

$$\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} \quad (1.93)$$

Από εκφώνηση ξέρουμε ότι $|\vec{OA}| = 5.6$ και $|\vec{OB}| = 7.8$. Αναλύοντας σε συνιστώσες

$$\vec{OB} = OB_x \vec{i} + OB_y \vec{j} = OB \cos(50^\circ) \vec{i} + OB \sin(50^\circ) \vec{j} = 5.013 \vec{i} + 5.975 \vec{j} \text{ km} \quad (1.94)$$

$$\vec{OA} = OA_x \vec{i} + OA_y \vec{j} = 0 \vec{i} + OA_y \vec{j} = OA_y \vec{j} = 5.6 \vec{j} \text{ km} \quad (1.95)$$

αφού το $\vec{OA}$ βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$. Άρα

$$\vec{BA}_x = \vec{OA}_x - \vec{OB}_x = OA_x \vec{i} - OB_x \vec{i} = 0 \vec{i} - OB \cos(50^\circ) \vec{i} = -OB \cos(50^\circ) \vec{i} = -5.013 \vec{i} \quad (1.96)$$

$$\vec{BA}_y = \vec{OA}_y - \vec{OB}_y = OA_y \vec{j} - OB_y \vec{j} = 5.6 \vec{j} - 5.975 \vec{j} = -0.375 \vec{j} \text{ km} \quad (1.97)$$

Έτσι

$$\vec{BA} = -5.013 \vec{i} - 0.375 \vec{j} \text{ km} \quad (1.98)$$

Οπότε

$$|\vec{BA}| = \sqrt{(-5.013)^2 + (-0.375)^2} = 5.027 \text{ km} \quad (1.99)$$

και

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-0.375}{-5.013} \right) = 4.3^\circ \quad (1.100)$$

που προφανώς δεν αντιστοιχεί στη σωστή γωνία, αφαιρώντας π όμως παίρνουμε $\theta = 175.7^\circ$.

Παράδειγμα 1.10:

Ένα μυρμήγκι, που έχει “τρελαθεί” από την αφύσικη ζέστη του Ηρακλείου, κινείται βαριεστημένα σε ένα xy επίπεδο. Πραγματοποιεί τέσσερις στάσεις, με συντεταγμένες $(30, 40)$, $(b_x, -70)$, $(-20, c_y)$, $(-80, -70)$ (όλες εκφρασμένες σε cm). Η συνολική μετατόπιση των τεσσάρων στάσεων του έχει συντεταγμένες $(-140, -20)$.

(α') Βρείτε τα b_x , c_y .

(β') Ποιό είναι το μέτρο και η κατεύθυνση (γωνία σε σχέση με οριζόντιο άξονα) της συνολικής του μετατόπισης;

Λύση:

Κάθε ζεύγος συντεταγμένων αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα μετατόπισης. Κάθε διάνυσμα μπορεί να αναλυθεί στις επιμέρους συνιστώσες και γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των x -συνιστωσών πρέπει να ισούται με τη x -συνιστώσα της συνολικής μετατόπισης. Ακριβώς το ίδιο και για την y -συνιστώσα. Άρα

(α') Στον x -άξονα

$$30 + b_x - 20 - 80 = -140 \iff b_x = -70.0 \text{ cm} \quad (1.101)$$

και στον y -άξονα

$$40 - 70 + c_y - 70 = -20 \iff c_y = 80.0 \text{ cm} \quad (1.102)$$

(β') Η συνολική μετατόπιση έχει συντεταγμένες $(-140.0, -20.0)$ οπότε

$$|\vec{d}| = \sqrt{(-140)^2 + (-20)^2} = 141.42 \text{ cm} \quad (1.103)$$

Η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της συνολικής μετατόπισης με τον άξονα x' είναι

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-20}{-140}\right) \approx 8.13^\circ \quad (1.104)$$

που προφανώς δεν αντιστοιχεί στο σωστό αποτέλεσμα γιατί το διάνυσμα $(-140, -20)$ βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο ενώ η γωνία που βρήκαμε μόλις στο 1ο, οπότε αφαιρώντας 180° παίρνουμε

$$\theta = 171.87^\circ \quad (1.105)$$

Παράδειγμα 1.11:

Στο γνωστό παιχνίδι του γκολφ, έχετε τρεις προσπάθειες για να βάλετε το μπαλάκι μέσα στην τρύπα, χτυπώντας το διαδοχικά. Μια και δεν είστε και ο Tiger Woods, εξαντλείτε όλες σας τις προσπάθειες. Στο πρώτο χτύπημα, το μπαλάκι μετακινείται 3.66 μέτρα βόρεια, στο δεύτερο 1.83 μέτρα νοτιοανατολικά, και στο τελευταίο (που βάζετε και το μπαλάκι στην τρύπα) 0.91 νοτιοδυτικά. Υποθέτοντας γωνίες $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = -45^\circ$, $\theta_3 = -135^\circ$, ποιό είναι το μέτρο και η κατεύθυνση της μετατόπισης που απαιτείται ώστε το μπαλάκι να καταλήξει στην τρύπα με την πρώτη προσπάθεια;

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 1.12, και έχοντας $d_1 = 3.66$, $d_2 = 1.83$, $d_3 = 0.91$, αναλύουμε σε συνιστώσες και έχουμε

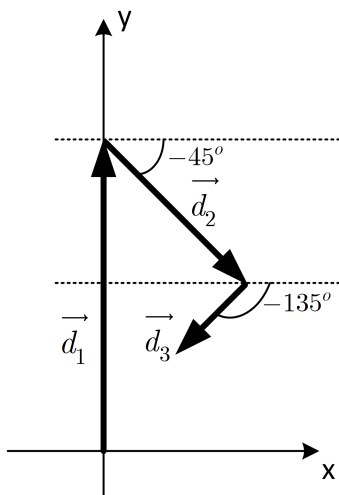
$$d_x = d_1 \cos(\theta_1) + d_2 \cos(\theta_2) + d_3 \cos(\theta_3) \quad (1.106)$$

$$= d_1 \cos(90^\circ) + d_2 \cos(-45^\circ) + d_3 \cos(-135^\circ) \quad (1.107)$$

$$= 0.65 \text{ m} \quad (1.108)$$

και

$$d_y = d_1 \sin(\theta_1) + d_2 \sin(\theta_2) + d_3 \sin(\theta_3) \quad (1.109)$$



Σχήμα 1.12: Χτυπήματα golf.

$$= d_1 \sin(90^\circ) + d_2 \sin(-45^\circ) + d_3 \sin(-135^\circ) \quad (1.110)$$

$$= 1.72 \text{ m} \quad (1.111)$$

Οπότε

$$|\vec{d}| = \sqrt{0.65^2 + 1.72^2} = 1.83 \text{ m} \quad (1.112)$$

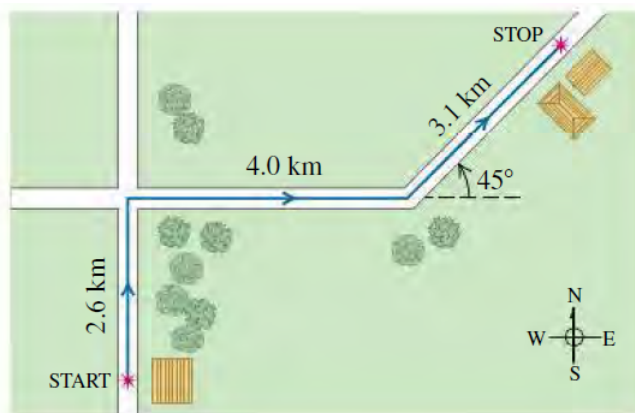
Τέλος η γωνία θα είναι

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1.72}{0.65}\right) = 69.3^\circ \quad (1.113)$$

η οποία είναι σωστή, καθώς το διάνυσμα $\vec{d}$ βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

Παράδειγμα 1.12:

Ένας ταχυδρόμος οδηγεί το φορτηγό που παραδίδει τα δέματα κατά μήκος της διαδρομής που φαίνεται στο Σχήμα 1.13.

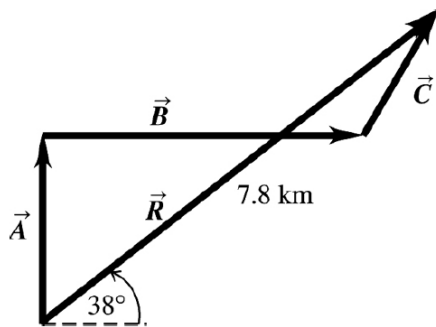


Σχήμα 1.13: Σχήμα Άσκησης 1.12.

Χρησιμοποιώντας την ανάλυση σε συνιστώσες, υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση (σε σχέση με τον άξονα x') της συνολικής μετατόπισής του (από START ως STOP).

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 1.14. Θέτουμε τη συμβολή των αξόνων στην αρχή του διανύσματος $\vec{A}$. Αναλύοντας κάθε



Σχήμα 1.14: Λύση Άσκησης 1.12.

διάνυσμα σε συνιστώσες, θα έχουμε

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \quad (1.114)$$

$$R_x \vec{i} + R_y \vec{j} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + C_x \vec{i} + C_y \vec{j} \quad (1.115)$$

Από το σχήμα

$$A_x = 0 \quad (1.116)$$

$$B_y = 0 \quad (1.117)$$

οπότε

$$R_x \vec{i} + R_y \vec{j} = A_y \vec{j} + B_x \vec{i} + C_x \vec{i} + C_y \vec{j} \quad (1.118)$$

και άρα

$$R_x = B_x + C_x \quad (1.119)$$

$$R_y = A_y + C_y \quad (1.120)$$

με

$$B_x = 4.0, \quad (1.121)$$

$$C_x = |\vec{C}| \cos(45^\circ) = 3.1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.55 \sqrt{2} \quad (1.122)$$

$$A_y = 2.6 \quad (1.123)$$

$$C_y = |\vec{C}| \sin(45^\circ) = 3.1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.55 \sqrt{2} \quad (1.124)$$

Άρα

$$R_x = 1.55 \sqrt{2} + 4.0 = 6.192 \quad (1.125)$$

$$R_y = 2.6 + 1.55 \sqrt{2} = 4.782 \quad (1.126)$$

Έτσι

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{6.192^2 + 4.782^2} = 7.823 \text{ m} \quad (1.127)$$

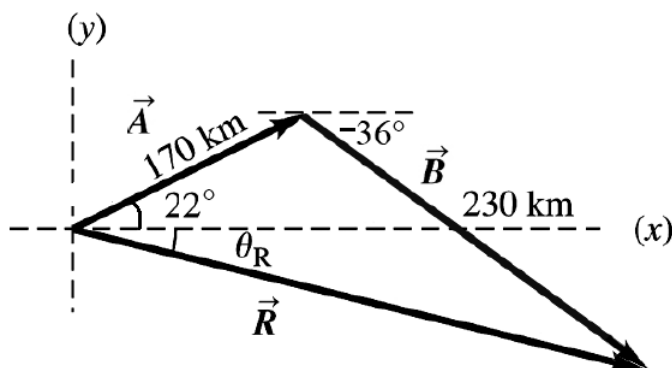
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{R_y}{R_x} \right) = 37.678^\circ \quad (1.128)$$

Παράδειγμα 1.13:

Ένα αεροπλάνο απογειώνεται από το Ηράκλειο και πετά 170 χιλιόμετρα υπό γωνία 22° , μετά στρίβει και πετά άλλα 230 χιλιόμετρα υπό γωνία -36° , και τελικά εκτελεί αναγκαστική προσγείωση σε ένα μικρό νησί. Όταν το αεροδρόμιο στείλει αποστολή διάσωσης, σε ποιά κατεύθυνση και πόσο μακριά πρέπει αυτό να πετάξει ώστε να φτάσει κατ' ευθείαν στο αεροσκάφος; Όλες οι γωνίες είναι με αναφορά τον άξονα $x'x$.

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 1.15.



Σχήμα 1.15: Σχήμα Άσκησης 1.13.

Θέτουμε τη συμβολή των αξόνων στο αεροδρόμιο. Έστω $\vec{R}$ το διάνυσμα της συνολικής μετατόπισης. Αναλύοντας σε συνιστώσες, θα έχουμε

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} \quad (1.129)$$

$$R_x \vec{i} + R_y \vec{j} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + B_x \vec{i} + B_y \vec{j} \quad (1.130)$$

με

$$A_x = |\vec{A}| \cos(22^\circ) = 157.62, \quad (1.131)$$

$$B_x = |\vec{B}| \cos(-36^\circ) = 186.07 \quad (1.132)$$

$$A_y = |\vec{A}| \sin(22^\circ) = 63.683 \quad (1.133)$$

$$B_y = |\vec{B}| \sin(-36^\circ) = -135.19 \quad (1.134)$$

Αρα

$$R_x = A_x + B_x = 343.69 \quad (1.135)$$

$$R_y = A_y + B_y = -71.507 \quad (1.136)$$

Έτσι

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 351.05 \text{ km} \quad (1.137)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x} = \tan^{-1} \frac{-71.507}{343.69} = -11.753^\circ \quad (1.138)$$

Παράδειγμα 1.14:

Έστω δυο διανύσματα

$$\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} \text{ m} \quad (1.139)$$

$$\vec{b} = 6\vec{i} + 8\vec{j} \text{ m} \quad (1.140)$$

Βρείτε

- (α') το μέτρο και τη γωνία του διανύσματος $\vec{a}$
- (β') το μέτρο και τη γωνία του διανύσματος $\vec{b}$
- (γ') το μέτρο και τη γωνία του διανύσματος $\vec{a} + \vec{b}$
- (δ') το μέτρο και τη γωνία του διανύσματος $\vec{b} - \vec{a}$
- (ε') το μέτρο και τη γωνία του διανύσματος $\vec{a} - \vec{b}$
- (ς') τη γωνία μεταξύ του διανύσματος $\vec{b} - \vec{a}$ και του $\vec{a} - \vec{b}$

Λύση:

(α') Θα είναι

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5 \text{ m} \quad (1.141)$$

και

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-3}{4} = -36.87^\circ \quad (1.142)$$

(β') Θα είναι

$$|\vec{b}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ m} \quad (1.143)$$

και

$$\theta = \tan^{-1} \frac{8}{6} = 53.13^\circ \quad (1.144)$$

(γ') Θα είναι

$$\vec{a} + \vec{b} = (10 \text{ m})\vec{i} + (5 \text{ m})\vec{j} \quad (1.145)$$

οπότε

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11.18 \text{ m} \quad (1.146)$$

και

$$\theta = \tan^{-1} \frac{5}{10} = 26.565^\circ \quad (1.147)$$

(δ') Θα είναι

$$\vec{b} - \vec{a} = (2 \text{ m})\vec{i} + (11 \text{ m})\vec{j} \quad (1.148)$$

οπότε

$$|\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{2^2 + 11^2} = 11.18 \text{ m} \quad (1.149)$$

και

$$\theta = \tan^{-1} \frac{11}{2} = 79.69^\circ \quad (1.150)$$

(ε') Θα είναι

$$\vec{a} - \vec{b} = (-2 \text{ m})\vec{i} - (11 \text{ m})\vec{j} \quad (1.151)$$

οπότε

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-11)^2} = 11.18 \text{ m} \quad (1.152)$$

και

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-11}{-2} - 180^\circ = -100.30^\circ \quad (1.153)$$

(ς') Παρατηρούμε ότι

$$\vec{a} - \vec{b} = -(\vec{b} - \vec{a}) \quad (1.154)$$

άρα τα διανύσματα είναι αντίρροπα, και η μεταξύ τους γωνία θα είναι ίση με 180° .

Παράδειγμα 1.15:

Τρία διανύσματα δίνονται ως

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \quad (1.155)$$

$$\vec{b} = -\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k} \quad (1.156)$$

$$\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \quad (1.157)$$

Υπολογίστε τα

(α') $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$

(β') $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$

Λύση:

(α') Είναι

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) \quad (1.158)$$

$$= (3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}) \cdot (\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) \quad (1.159)$$

$$= 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 = -9 \quad (1.160)$$

(β') Είναι

$$\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = (3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}) \cdot (-3\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}) \quad (1.161)$$

$$= 3 \cdot (-3) + 3 \cdot (-6) + (-2) \cdot 1 = -29 \quad (1.162)$$

Παράδειγμα 1.16:

Το διάνυσμα $\vec{B}$ προστίθεται στο διάνυσμα $\vec{A}$ και το αποτέλεσμα είναι $6\vec{i} + \vec{j}$. Αν το $\vec{B}$ αφαιρεθεί από το $\vec{A}$ το αποτέλεσμα είναι $-4\vec{i} + 7\vec{j}$. Ποιό είναι το μέτρο του $\vec{A}$ και ποιό του $\vec{B}$;

Λύση:

Θα είναι

$$\vec{B} + \vec{A} = 6\vec{i} + \vec{j} \quad (1.163)$$

και

$$\vec{A} - \vec{B} = -4\vec{i} + 7\vec{j} \quad (1.164)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη

$$2\vec{A} = 2\vec{i} + 8\vec{j} \implies \vec{A} = \vec{i} + 4\vec{j} \quad (1.165)$$

Άρα

$$|\vec{A}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} = 4.123 \quad (1.166)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη

$$2\vec{B} = 10\vec{i} - 6\vec{j} \implies \vec{B} = 5\vec{i} - 3\vec{j} \quad (1.167)$$

Άρα

$$|\vec{B}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = 5.831 \quad (1.168)$$

Παράδειγμα 1.17:

Σας δίνονται δυο διανύσματα $\vec{d} = 5\vec{i} - 6.5\vec{j}$ και $\vec{b} = 3.5\vec{i} - 7\vec{j}$. Ένα τρίτο διάνυσμα $\vec{c}$, βρίσκεται στο xy επίπεδο. Το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{d}$ και το εσωτερικό του γινόμενο με το διάνυσμα $\vec{b}$ ισούται με 15. Βρείτε τις συνιστώσες του διανύσματος $\vec{c}$.

Λύση:

Έστω $\vec{d} = 5\vec{i} - 6.5\vec{j}$ και $\vec{b} = 3.5\vec{i} - 7\vec{j}$, ενώ $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j}$. Ισχύει ότι

$$\vec{d} \cdot \vec{c} = 0 \iff 5c_1 - \frac{13}{2}c_2 = 0 \quad (1.169)$$

γιατί καθετότητα σημαίνει εσωτερικό γινόμενο μηδέν. Επίσης

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 15 \iff \frac{7}{2}c_1 - 7c_2 = 15 \quad (1.170)$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$\vec{c} = -\frac{390}{49}\vec{i} - \frac{300}{49}\vec{j} \quad (1.171)$$

Παράδειγμα 1.18:

Υπολογίστε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων ως προς x :

$$(\alpha') \quad y(x) = \ln(\cos(x))$$

$$(\gamma') \quad y(x) = (3x - 2)^4(5x^2 + 3)^{2/3}$$

$$(\beta') \quad y(x) = [\ln(x^2 + 1)]^2 - \ln[(x^2 + 1)^2]$$

$$(\delta') \quad y(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$$

Λύση:

(α')

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{d}{dx} \ln(\cos(x)) = (\cos(x))' \frac{1}{\cos(x)} = -\sin(x) \frac{1}{\cos(x)} = -\tan(x) \quad (1.172)$$

(β')

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{d}{dx} ([\ln(x^2 + 1)]^2 - \ln[(x^2 + 1)^2]) = \frac{d}{dx} [\ln(x^2 + 1)]^2 - \frac{d}{dx} \ln[(x^2 + 1)^2] \quad (1.173)$$

$$= 2(x^2 + 1)' \ln(x^2 + 1) \frac{1}{x^2 + 1} - 2(x^2 + 1)' \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{4x}{x^2 + 1} \ln(x^2 + 1) - \frac{4x}{x^2 + 1} \quad (1.174)$$

$$= \frac{4x(\ln(x^2 + 1) - 1)}{x^2 + 1} \quad (1.175)$$

(γ')

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{d}{dx}(3x - 2)^4(5x^2 + 3)^{2/3} = (5x^2 + 3)^{2/3} \frac{d}{dx}[(3x - 2)^4] + (3x - 2)^4 \frac{d}{dx}[(5x^2 + 3)^{2/3}] \quad (1.176)$$

$$= 12(3x - 2)^3(5x^2 + 3)^{2/3} + \frac{2}{3}(5x^2 + 3)^{-1/3}(10x)(3x - 2)^4 \quad (1.177)$$

$$= 12(3x - 2)^3(5x^2 + 3)^{2/3} + \frac{2(10x)(3x - 2)^4}{3(5x^2 + 3)^{1/3}} \quad (1.178)$$

$$= \frac{12(3x - 2)^3(5x^2 + 3)}{(5x^2 + 3)^{1/3}} + \frac{2(10x)(3x - 2)^4}{3(5x^2 + 3)^{1/3}} \quad (1.179)$$

$$= \frac{36(3x - 2)^3(5x^2 + 3) + 2(10x)(3x - 2)^4}{3(5x^2 + 3)^{1/3}} \quad (1.180)$$

$$= \frac{4(3x-2)^3(60x^2-10x+27)}{3(5x^2+3)^{1/3}} \quad (1.181)$$

(δ')

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{d}{dx} \frac{x^2+2}{x^2-1} = \frac{(x^2+2)'(x^2-1) - (x^2-1)'(x^2+2)}{(x^2-1)^2} \quad (1.182)$$

$$= \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+2)}{(x^2-1)^2} = -\frac{6x}{(x^2-1)^2} \quad (1.183)$$

Παράδειγμα 1.19:

Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$(\alpha') \int_{-2}^0 (x^2-4)^2 dx$$

$$(\gamma') \int \frac{(2x+1)(x-1)}{\sqrt{x}} dx$$

$$(\beta') \int_1^2 \left(2x^3 + \frac{5}{x^4}\right) dx$$

$$(\delta') \int \left[\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right) \right] dx$$

Λύση:

(α')

$$\int_{-2}^0 (x^2-4)^2 dx = \int_{-2}^0 (x^4-8x^2+16) dx = \int_{-2}^0 x^4 dx - 8 \int_{-2}^0 x^2 dx + 16 \int_{-2}^0 dx \quad (1.184)$$

$$= \frac{x^5}{5} \Big|_{x=-2}^{x=0} - 8 \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-2}^{x=0} + 16x \Big|_{x=-2}^{x=0} \quad (1.185)$$

$$= 0 + \frac{32}{5} - 8 \left(0 + \frac{8}{3}\right) + 16(0+2) = \frac{256}{15} \quad (1.186)$$

(β')

$$\int_1^2 \left(2x^3 + \frac{5}{x^4}\right) dx = \int_1^2 2x^3 dx + \int_1^2 \frac{5}{x^4} dx = 2 \int_1^2 x^3 dx + 5 \int_1^2 x^{-4} dx \quad (1.187)$$

$$= 2 \frac{x^4}{4} \Big|_{x=1}^{x=2} + 5 \frac{-x^{-3}}{3} \Big|_{x=1}^{x=2} = 8 - \frac{1}{2} - \frac{5}{3} \left(\frac{1}{8} - 1\right) = \frac{215}{24} \quad (1.188)$$

(γ')

$$\int \frac{(2x+1)(x-1)}{\sqrt{x}} dx = \int (2x+1)(x-1)x^{-1/2} dx = \int (2x^{3/2} - x^{1/2} - x^{-1/2}) dx \quad (1.189)$$

$$= 2 \int x^{3/2} dx - \int x^{1/2} dx - \int x^{-1/2} dx \quad (1.190)$$

$$= \frac{4}{5} x^{5/2} + c_1 - \frac{2}{3} x^{3/2} + c_2 - 2x^{1/2} + c_3 \quad (1.191)$$

$$= \frac{4}{5} x^{5/2} - \frac{2}{3} x^{3/2} - 2\sqrt{x} + c \quad (1.192)$$

(δ')

$$\int \left[\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right) \right] dx = \int \frac{1}{x^3} dx + \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x} dx \quad (1.193)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + c_1 - \frac{1}{x} + c_2 - \log(|x|) + c_3 \quad (1.194)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \log|x| + c \quad (1.195)$$



2. Μηχανική

2.1 Εισαγωγή

2.2 Κίνηση σε Μια Διάσταση

Ως **μονοδιάστατη** ή **κίνηση σε μια διάσταση** ορίζουμε την κίνηση ενός σώματος σε έναν οριζόντιο ή κατακόρυφο άξονα. Ως **σώμα** θεωρούμε ένα αδιάστατο σωματίδιο, δηλ. ένα σωματίδιο με απειροστά μικρό μέγεθος. Το σώμα όπως το ορίσαμε αποτελεί ένα **μοντέλο** πραγματικών σωμάτων, που τα τελευταία έχουν βέβαια μη αμελητέες διαστάσεις. Παρ' ότι λοιπόν τα πραγματικά σώματα δεν είναι αδιάστατα, το μοντέλο που υιοθετούμε εδώ είναι ιδιαίτερα αποδοτικό, βολικό, και χρήσιμο – οπότε θα το εφαρμόζουμε σε κάθε πρόβλημα που θα μας απασχολήσει.

Η κινητική - κι όχι μόνο η μονοδιάστατη - καθορίζεται από λίγους ορισμούς, ιδιαίτερα απλούς και εύκολους, που όμως χρειάζονται προσοχή. Αυτοί είναι:

1. Η **θέση** ενός σώματος
2. Η **μετατόπιση** ενός σώματος
3. Η **ταχύτητα** ενός σώματος
4. Η **επιτάχυνση** ενός σώματος

2.2.1 Θέση

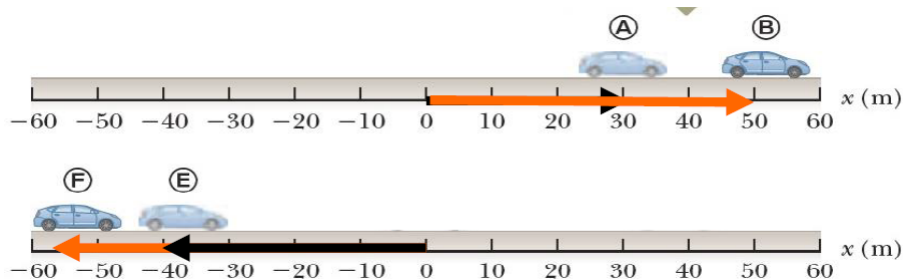
Η **θέση** $\vec{x}$ ενός σώματος επάνω στον άξονα αναφοράς δεν είναι τίποτε άλλο από ένα διάνυσμα που ορίζει την τοποθεσία του σώματος σε σχέση με το σημείο αναφοράς (συνήθως το 0). Η θέση αποτελεί διανυσματικό μέγεθος: η διεύθυνση του διανύσματος θέσης θα είναι υποχρεωτικά παράλληλη της ευθείας που γίνεται η κίνηση. Θα θεωρήσουμε ότι η κίνηση γίνεται επάνω σε ένα βαθμονομημένο άξονα και το πρόσημο του σημείου που βρίσκεται το σώμα θα μας υποδηλώνει τη φορά του διανύσματος θέσης. Η θέση του σώματος μπορεί να είναι θετική ή αρνητική - ως αλγεβρική τιμή. Θετική τιμή σημαίνει ότι το διάνυσμα ξεκινά από ένα σημείο αναφοράς και καταλήγει σε κάποια θετική τιμή του άξονα. Αντίθετα έχουν τα πράγματα για την αρνητική τιμή. Για παράδειγμα, τα διανύσματα θέσης

$$\vec{x} = 2\vec{i}, \quad \vec{x} = 4\vec{j} \quad (2.1)$$

υποδηλώνουν ένα σώμα που βρίσκεται στις θετικές τιμές ενός οριζόντιου ή κατακόρυφου άξονα. Αντίθετα, τα διανύσματα θέσης

$$\vec{x} = -2\vec{i}, \quad \vec{x} = -4\vec{j} \quad (2.2)$$

υποδηλώνουν ένα σώμα που βρίσκεται στις αρνητικές τιμές ενός οριζόντιου ή κατακόρυφου άξονα. Δείτε το Σχήμα 2.1, όπου ένα σώμα (αυτοκίνητο μεν, αλλά θεωρείται ως σημείο δε) βρίσκεται σε διαφορετικές θέσεις επάνω σε έναν οριζόντιο άξονα, και έχουμε σημειώσει τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης, τα οποία ξεκινούν πάντα από το σημείο 0. Βλέπετε ότι σε θετικά σημεία του βαθμονομημένου άξονα, το διάνυσμα θέσης έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά ενώ σε αρνητικά σημεία του άξονα η κατεύθυνση του είναι προς τα αριστερά. Η θέση μπορεί να είναι μεταβαλλόμενο διάνυσμα ως προς το χρόνο t , οπότε αρκετές φορές θα



Σχήμα 2.1: Διανύσματα θέσης σε μονοδιάστατη κίνηση.

το γράφουμε ως $\vec{x}(t)$.

2.2.2 Μετατόπιση

Η **μετατόπιση** $\Delta\vec{x}$ αφορά τη μεταβολή θέσης ενός σώματος. Ας δούμε τον ορισμό:

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i \quad (2.3)$$

με τους δείκτες i, f (ναι, υπάρχει overlap συμβόλων, με το i να είναι εδώ δείκτης ενώ πριν το είχαμε συναντήσει ως μοναδιαίο διάνυσμα – κάντε λίγο υπομονή, υπάρχουν περισσότερα μεγέθη απ’ όσα υπάρχουν γράμματα στην Ελληνικά και Αγγλική αλφάβητο μαζί ☺) να υποδηλώνουν τις λέξεις initial-αρχική και final-τελική, για τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης. Οπότε το $\vec{x}_f$ είναι ένα διάνυσμα που δηλώνει την τελική θέση ενός σωματιδίου και $\vec{x}_i$ το διάνυσμα αρχικής θέσης του σωματιδίου. Άρα η μετατόπιση αποτελεί τη **διαφορά** δυο διανυσμάτων - ως εκ τούτου, αποτελεί κι αυτή ένα διάνυσμα! Ως τέτοιο, θα έχει κι αυτό μέτρο, διεύθυνση, και φορά, όπως κάθε διάνυσμα: η διεύθυνση του θα είναι αναγκαστικά παράλληλη του άξονα κίνησης, το μέτρο του θα εξαρτάται από την αρχική και την τελική θέση του σώματος, ενώ η φορά της θα εξαρτάται από ένα πρόσημο. Ποιό πρόσημο; Ας κάνουμε μια απλή σύμβαση:

- Αν

$$\Delta\vec{x} = x_f\vec{i} - x_i\vec{i} = (x_f - x_i)\vec{i} \quad (2.4)$$

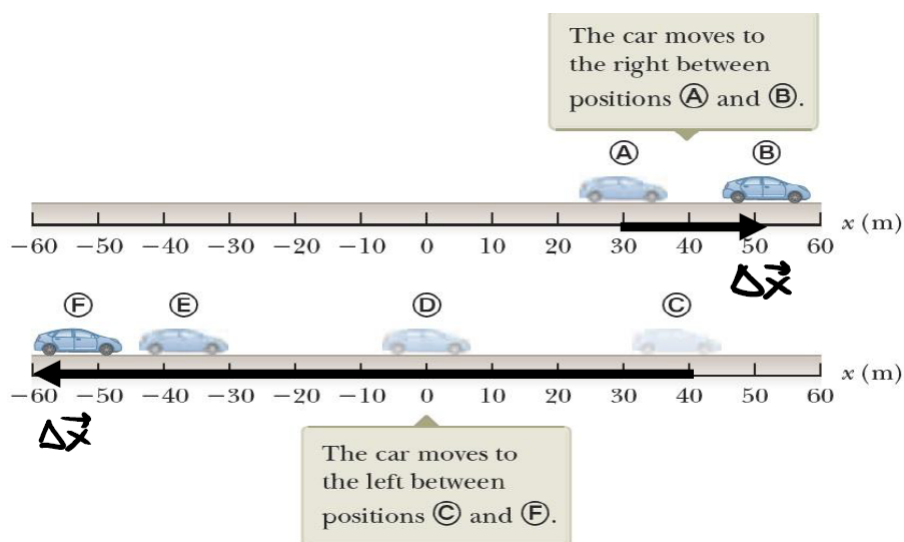
τότε αν $x_f - x_i > 0$, τότε το σώμα κινήθηκε από τα αριστερά προς τα δεξιά, και άρα το διάνυσμα μετατόπισης θα “κοιτάζει” προς τα δεξιά.

- Αν

$$\Delta\vec{x} = x_f\vec{i} - x_i\vec{i} = (x_f - x_i)\vec{i} \quad (2.5)$$

τότε αν $x_f - x_i < 0$, το σώμα κινήθηκε από τα δεξιά προς τα αριστερά, και άρα το διάνυσμα μετατόπισης θα “κοιτάζει” προς τα αριστερά.

Οι τιμές x_i, x_f όπως παρουσιάστηκαν στα παραπάνω δυο σημεία δεν αποτελούν διανύσματα αλλά την τιμή του βαθμονομημένου άξονα στην οποία βρίσκεται το σώμα στην αρχική και στην τελική του θέση. Δείτε το Σχήμα 2.2. Στο επάνω σχήμα, η τιμή x_i του σώματος είναι 30 m ενώ η τιμή x_f είναι 50 m. Οπότε



Σχήμα 2.2: Διάνυσμα μετατόπισης.

$$\Delta x = x_f - x_i = 50 - 30 = 20 \text{ m} \quad (2.6)$$

που είναι θετική ποσότητα, οπότε καταλαβαίνουμε ότι το σώμα μετατοπίστηκε προς τα δεξιά, δηλ. $\Delta \vec{x} = (20 \text{ m})\vec{i}$. Αντίθετα, στο κάτω σχήμα η τιμή x_i του σώματος είναι 40 m ενός η τιμή x_f είναι -60 m. Οπότε

$$\Delta x = x_f - x_i = -60 - 40 = -100 \text{ m} \quad (2.7)$$

που είναι αρνητική ποσότητα, οπότε καταλαβαίνουμε ότι το σώμα μετατοπίστηκε προς τα αριστερά, δηλ. $\Delta \vec{x} = (-100 \text{ m})\vec{i}$.

Προσέξτε το εξής σημείο: η μετατόπιση $\Delta \vec{x}$ δεν είναι το ίδιο με την απόσταση d που διανύει ένα σώμα. Σκεφτείτε το εξής παράδειγμα: ας υποθέσουμε ότι ένας δρομέας προπονείται σε ένα στάδιο που διαθέτει μόνο έναν ευθύγραμμο τάπητα. Ο αθλητής πραγματοποιεί πολλά “πάνω-κάτω” στον τάπητα και μπορούμε εύκολα να υποθέσουμε ότι η απόσταση που διανύει αντιστοιχεί σε μερικά χιλιόμετρα. Αν όμως υποθέσουμε ότι η αρχική του θέση είναι στην εκκίνηση του τάπητα και η τελική του θέση ξανά εκεί (αφού τελειώνοντας την προπόνηση επιστρέφει ξανά στην αφετηρία), τότε η μετατόπιση του είναι μηδενική, καθώς τα διανύσματα αρχικής και τελικής θέσης είναι τα ίδια! Ακόμα όμως κι αν τελειώσει την προπόνηση του σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο του ευθύγραμμου τάπητα, το διάνυσμα μετατόπισης δε θα είναι μηδενικό αλλά σίγουρα το μέτρο του θα είναι πολύ μικρότερο της συνολικής απόστασης που διένυσε κατά την προπόνηση του.¹

2.2.3 Ταχύτητα

Η έννοια της ταχύτητας σας είναι επίσης γνωστή από την καθημερινότητα. Ταχύτητα σημαίνει ουσιαστικά πόσο γρήγορα τρέχετε, δηλ. *πόσο γρήγορα μεταβάλλετε τη θέση σας*. Με άλλα λόγια, πόσο μεταβάλλεται η θέση σας σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα – άρα στην έννοια της ταχύτητας υπεισέρχεται και η έννοια του χρόνου. Ας ξεκινήσουμε από τη **μέση ταχύτητα**, που ορίζεται ως

$$\vec{u}_{avg} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \quad (2.8)$$

Από τον παραπάνω ορισμό, καταλαβαίνετε ότι η μέση ταχύτητα είναι διάνυσμα κι αυτή: έχει μέτρο, διεύθυνση, φορά. Το μέτρο της αποτελεί το μέτρο του λόγου $\Delta \vec{x}/\Delta t$, η διεύθυνση είναι παράλληλη του άξονα στον οποίο γίνεται η κίνηση, και η φορά είναι όμοια με τη φορά του διανύσματος μετατόπισης

¹Απλά μην πείτε ποτέ σε έναν αθλητή δρόμων ότι στην προπόνηση του η μετατόπιση του ήταν μηδενική :-)

$\Delta\vec{x}$. Γιατί; Γιατί προφανώς ο παρονομαστής Δt είναι πάντα θετικός, οπότε δε μεταβάλλει τη φορά του διανύσματος του αριθμητή όταν διαιρείται με αυτόν². Παρατηρήστε ότι απαιτούνται δυο σημεία για τον ορισμό της μέσης ταχύτητας: ένα αρχικό και ένα τελικό, όπως και στον ορισμό της μετατόπισης. Τέλος, τι μπορούμε να πούμε για την ποσότητα $\Delta t = t_f - t_i$; Είναι προφανώς οι χρονικές στιγμές στις οποίες μετρήσαμε τις θέσεις $\vec{x}_f$, $\vec{x}_i$, και Δt είναι η χρονική “απόσταση” μεταξύ των δυο χρονικών στιγμών. Για τη μέση ταχύτητα μπορούμε να γράψουμε επίσης ότι

$$\vec{u}_{avg} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} \quad (2.9)$$

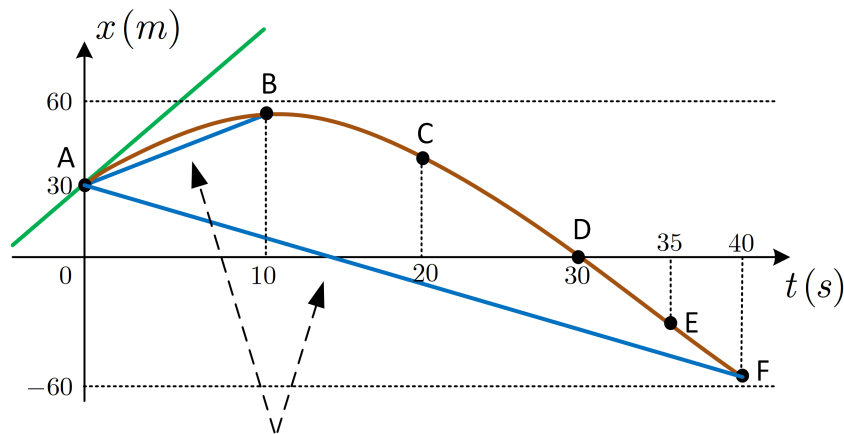
για και το διάνυσμα της μέσης ταχύτητας δεν μπορεί να βρίσκεται κάπου αλλού εκτός του άξονα x' όπου γίνεται η κίνηση.

Ενώ λοιπόν η μέση ταχύτητα είναι διάνυσμα, η **μέση αριθμητική ταχύτητα** είναι μονόμετρο μέγεθος και ορίζεται από το λόγο

$$s_{avg} = \frac{d}{\Delta t} \quad (2.10)$$

όπου d η απόσταση που διένυσε το σώμα. Προσέξτε τη λεπτή διαφορά – σκεφτείτε ξανά το παράδειγμα με το δρομέα: ο δρομέας που προπονείται πάνω-κάτω σε ευθύγραμμο τμήμα ξεκινά και τελειώνει την προπόνηση του από την αφετηρία. Το διάνυσμα της μετατόπισης του είναι μηδενικό, και έτσι και η μέση του ταχύτητα είναι μηδενική. Προφανώς η μέση αριθμητική ταχύτητα του είναι πολύ διαφορετική του μηδενός.

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα. Δείτε το Σχήμα 2.3. Βλέπετε ένα διάγραμμα θέσης ενός σώματος



Ευθείες **AB** και **AF**: Η κλίση τους ισούται με τη μέση ταχύτητα

Σχήμα 2.3: Διάγραμμα θέσης - χρόνου σώματος.

συναρτήσεως του χρόνου (καφέ καμπύλη). Το σώμα ξεκινά στη θέση (A), η οποία είναι η $x_A = 30$ m, στην οποία και πατάμε το χρονόμετρο μας ($t_A = 0$). Στην συνέχεια το σώμα κινείται στη θέση (B), (C), κλπ, ως και τη θέση (F). Ας πάρουμε τις θέσεις (A), (B). Η τιμή της μέσης ταχύτητας θα είναι

$$u_{avg_{A \rightarrow B}} = \frac{\Delta x_{A \rightarrow B}}{\Delta t} = \frac{55 - 30}{10 - 0} = 2.5 \text{ m/s} \quad (2.11)$$

δηλ. $\vec{u}_{avg_{A \rightarrow B}} = (2.5 \text{ m/s})\vec{i}$, με φορά ίδια με τη φορά του διανύσματος $\Delta\vec{x}$.

Αν τώρα φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία (A), (B), τότε αυτό βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία με κλίση - μαντέψτε! - $\lambda = 2.5$! Δε θα σας κάνει εντύπωση αν σκεφτείτε ότι έχετε δυο σημεία

²Θυμηθείτε τον πολλαπλασιασμό αριθμού με διάνυσμα του Κεφαλαίου 1.

με συντεταγμένες (A) (t_1, x_1) , (B) (t_2, x_2) και σχηματίζετε το λόγο $(x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$, που είναι ακριβώς ο συντελεστής ευθείας της ευθείας που περνά από τα (A), (B). Ταυτόχρονα, είναι και ο ορισμός της μέσης ταχύτητας!

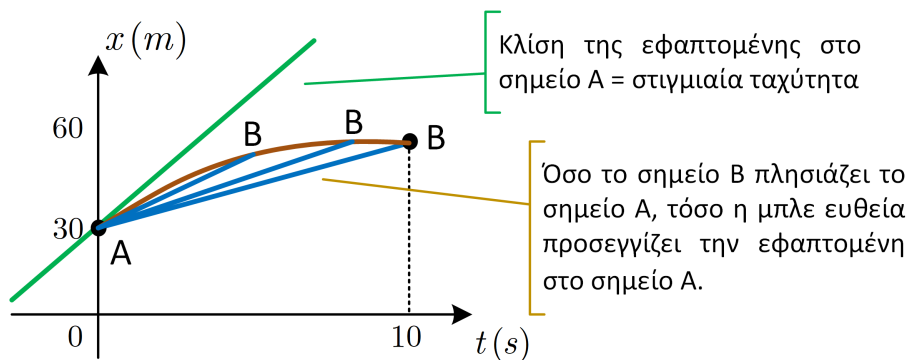
Αν επίσης φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία (A), (F), τότε αυτό βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία με κλίση $\lambda = -9/4$! Επιβεβαιώστε ότι πράγματι η μέση ταχύτητα μεταξύ των σημείων αυτών έχει την τιμή $-9/4$ m/s, με το πρόσημο να δηλώνει ότι το σώμα κινήθηκε από δεξιά προς τα αριστερά.

Η μέση ταχύτητα είναι πρακτικά το διάνυσμα της μετατόπισης πολλαπλασιασμένο με τον αριθμό $1/\Delta t$, δηλ. είναι ένα διάνυσμα ακριβώς όπως η μετατόπιση αλλά είτε μεγαλύτερου είτε μικρότερου μήκους. Η μέση ταχύτητα όπως και η μέση αριθμητική ταχύτητα έχουν μια έννοια “μέσου όρου” καθώς εκφράζουν μεταβολές θέσης ανά χρονικό διάστημα μεταξύ δυο θέσεων, οι οποίες συνήθως απέχουν αρκετά μεταξύ τους. Σε μια μεγάλη μετατόπιση λοιπόν, που το σώμα μπορεί να αλλάξει συνεχώς θέση κατά τη διαδρομή από την αρχική στην τελική θέση, και η οποία μπορεί να εκτελείται σε σημαντικό χρονικό διάστημα, η μέση (αριθμητική) ταχύτητα δε μας δίνει καμιά πληροφορία για το τι συνέβη στο σώμα σε ενδιαμέσες χρονικές στιγμές, ανάμεσα στην αρχική, t_i , και στην τελική, t_f , χρονική στιγμή. Δε θα ήταν καλή ιδέα να γνωρίζουμε την ταχύτητα του σώματος *οποιαδήποτε* χρονική στιγμή; Αυτή την πληροφορία μας τη δίνει η **στιγμιαία ταχύτητα**, η οποία ορίζεται ως

$$\vec{u}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) \quad (2.12)$$

Παρατηρήστε απ’ τον ορισμό ότι η στιγμιαία ταχύτητα όχι μόνο είναι διάνυσμα αλλά φαίνεται να υπολογίζεται από την παράγωγο του διανύσματος θέσης ως προς το χρόνο! Παράγωγος διανύσματος – ακούγεται τρομακτικό αλλά δεν είναι. ☺

Στο ίδιο σχήμα (Σχ. 2.3) έχουμε σχεδιάσει και μια τρίτη ευθεία, με πράσινο χρώμα, την οποία αξίζει να εξετάσουμε ξεχωριστά, στο Σχήμα 2.4. Παρατηρήστε ότι πλησιάζουμε το σημείο (B) όλο και πιο κοντά



Σχήμα 2.4: Διάγραμμα θέσης - χρόνου σώματος μεταξύ (A), (B).

στο σημείο (A). Τι σημαίνει αυτό; Ότι μετράμε μετατοπίσεις $\Delta \vec{x}$ σε όλο και πιο μικρές χρονικές μεταβολές Δt . Μπορούμε δηλαδή να υπολογίσουμε μια μετατόπιση – και άρα μια μέση ταχύτητα – του σώματος οι οποίες συνέβησαν σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt . Τι θα συμβεί αν το σημείο (B) πλησιάζει πάρα πολύ το σημείο (A); Σημαίνει ότι οι μετρήσεις μας θα είναι χρονικά πολύ κοντά μεταξύ τους. Ακόμα περισσότερο, τι θα συμβεί αν το σημείο (B) πλησιάζει “απειροστά κοντά” στο σημείο (A); Τότε προφανώς οι χρονικές στιγμές που μετράμε τείνουν να ταυτιστούν, οπότε $\Delta t \rightarrow 0$, δηλ. υπολογίζουμε πλέον το $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$, το οποίο είναι το όριο του λόγου μεταβολής της θέσης του σώματος ως προς το χρόνο. Με άλλα λόγια, είναι η πρώτη παράγωγος της θέσης ως προς το χρόνο! Όπως γνωρίζετε ήδη, η πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα σημείο μας δίνει την *κλίση της εφαπτομένης* ευθείας που περνά από το σημείο. Ταυτόχρονα, μας δίνει και τη στιγμιαία ταχύτητα του σώματος στο σημείο αυτό!

Ας επαληθεύσουμε όλα τα παραπάνω σε ένα παράδειγμα.

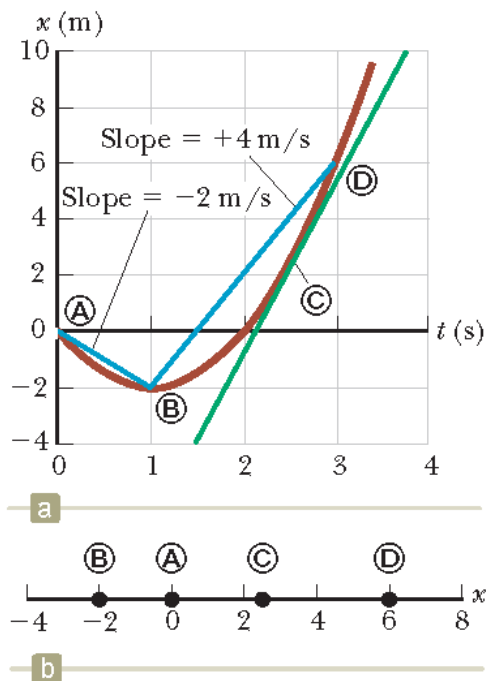
Παράδειγμα 2.1:

Έστω ότι ένα σώμα κινείται στον οριζόντιο άξονα, με τη θέση του να ορίζεται από τη συνάρτηση

$$x(t) = -4t + 2t^2 \quad (2.13)$$

με $x(t)$ τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t σε μέτρα, t το χρόνο σε δευτερόλεπτα, όπως στο Σχήμα 2.5.

- (α') Βρείτε τη μετατόπιση του σώματος στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ ως $t = 3$ s.
 (β') Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα.
 (γ') Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.



Σχήμα 2.5: Παράδειγμα κίνησης σε οριζόντιο άξονα.

Λύση:

Σύμφωνα με το Σχήμα 2.5, οι χρονικές στιγμές $t = 0$, $t = 1$, $t = 3$ αντιστοιχούν στις θέσεις A , B , D , αντίστοιχα. Άρα, για παράδειγμα, $\vec{x}_A = x(t=0)\vec{i}$, και αντίστοιχα για τις υπόλοιπες χρονικές στιγμές.

(α') Για τη μετατόπιση έχουμε

$$\Delta x_{A \rightarrow B} = x_B - x_A = x(t=1) - x(t=0) = -2 - 0 = -2 \text{ m} \quad (2.14)$$

και

$$\Delta x_{B \rightarrow D} = x_D - x_B = x(t=3) - x(t=1) = -12 + 18 - (-2) = 8 \text{ m} \quad (2.15)$$

Οπότε από τα πρόσχημα καταλαβαίνουμε ότι η κίνηση $(A) \rightarrow (B)$ είναι μια κίνηση από δεξιά προς τα αριστερά, ενώ η κίνηση $(B) \rightarrow (D)$ είναι μια κίνηση από τα αριστερά προς τα δεξιά. Τελικά,

$$\Delta \vec{x}_{A \rightarrow B} = (-2 \text{ m})\vec{i} \quad (2.16)$$

$$\Delta \vec{x}_{B \rightarrow D} = (8 \text{ m})\vec{i} \quad (2.17)$$

(β') Αντίστοιχα, η μέση ταχύτητα δίνεται ως

$$u_{avg_{A \rightarrow B}} = \frac{x_B - x_A}{1 - 0} = \Delta x_{A \rightarrow B} = -2 \text{ m/s} \quad (2.18)$$

και

$$u_{avg_{B \rightarrow D}} = \frac{x_D - x_B}{3 - 1} = \Delta x_{B \rightarrow D} = 4 \text{ m/s} \quad (2.19)$$

Επιβεβαιώστε από το σχήμα ότι πράγματι οι κλίσεις των ευθειών έχουν τις τιμές που πρέπει. Οπότε

$$\vec{u}_{avg_{A \rightarrow B}} = (-2 \text{ m/s})\vec{i} \quad (2.20)$$

$$\vec{u}_{avg_{B \rightarrow D}} = (4 \text{ m/s})\vec{i} \quad (2.21)$$

(γ') Για τη στιγμιαία ταχύτητα θα χρειαστεί να παραγωγίσουμε τη συνάρτηση $x(t)$ ή να βρούμε την εφαπτομένη ευθεία στο $t = 2.5$. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τη δεύτερη λύση – προσεγγιστικά, από το σχήμα – οπότε ας δούμε την πρώτη.

$$u(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(-4t + 2t^2) = -4 + 4t \quad (2.22)$$

Για $t = 2.5$, έχουμε $u(2.5) = 6 \text{ m/s}$, και άρα η ταχύτητα θα είναι της μορφής $\vec{u}(2.5) = (6 \text{ m/s})\vec{i}$.

2.2.4 Θέση υπό Σταθερή Ταχύτητα

Έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η περίπτωση όπου ένα σώμα κινείται υπό **σταθερή ταχύτητα**. Αν η τελευταία είναι σταθερή τότε η μέση ταχύτητα ταυτίζεται με τη στιγμιαία ταχύτητα – καταλαβαίνετε γιατί; Αν λοιπόν $u_x = u_{avg} = \text{σταθερή}$, τότε

$$u_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \iff \Delta x = u_{avg} \Delta t \iff x_f - x_i = u_{avg} \Delta t \iff x_f = x_i + u_{avg} \Delta t \quad (2.23)$$

και αν συμβολίσουμε ως u την ταχύτητα (μέση ή στιγμιαία, δεν έχει σημασία πλέον, είναι το ίδιο)

$$x_f = x_i + u(t_f - t_i) \iff x_f = x_i + ut_f \quad (2.24)$$

αν θεωρήσουμε ότι $t_i = 0$, δηλ. ότι πατήσαμε το χρονόμετρο και αρχίσαμε να μελετάμε το πρόβλημα στη θέση x_i . Το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό, όπως είπαμε, και ισούται με

$$u = \frac{d}{\Delta t} \quad (2.25)$$

με d το μήκος της απόστασης που διανύθηκε. Οπότε έχουμε μια έτοιμη σχέση που κυβερνά τη μονοδιάστατη κίνηση υπό σταθερή ταχύτητα!

Σχέσεις Ευθύγραμμης Κίνησης με Σταθερή Ταχύτητα

A/A	Σχέση
1	$x_f = x_i + ut$

Πίνακας 2.1: Πίνακας Σχέσεων Κίνησης με Σταθερή Ταχύτητα.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.2:

Κατά τη διάρκεια ενός δυνατού φταρνίσματος, τα μάτια σας μπορεί να κλείσουν για περίπου 0.5 s. Αν οδηγείτε ένα αυτοκίνητο με σταθερή ταχύτητα 90 km/h και φταρνιστείτε, πόσο μακριά θα κινηθεί το αυτοκίνητό σας κατά το φτάρνισμα;

Λύση:

Θεωρούμε ευθύγραμμη την κίνησή μας σε νοητό άξονα $x'x$, με $x_i = 0$ και $t_i = 0$ τη στιγμή που ξεκινάμε το φτάρνισμα, και x_f , που αναζητούμε, και $t = 0.5$ s ο χρόνος που απαιτείται από την έναρξη ως το σταμάτημα του φταρνίσματος. Η ταχύτητά μας είναι σταθερή και ίση με $u = 90$ km/h, δηλ. $u = 25$ m/s. Άρα από την εξίσωση ευθύγραμμης κίνησης με σταθερή ταχύτητα

$$x_f = x_i + ut = 0 + 25 \cdot 0.5 = 12.5 \text{ m} \quad (2.26)$$

και άρα η θέση του αυτοκινήτου ακριβώς μετά το φτάρνισμα θα είναι

$$\vec{x}_f = (12.5 \text{ m})\vec{i} \quad (2.27)$$

2.2.5 Επιτάχυνση

Όπως ακριβώς ορίσαμε την ταχύτητα ως το πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η θέση ενός σώματος στη μονάδα του χρόνου, δε θα ήταν ωραίο να ορίσουμε το αντίστοιχο για την ταχύτητα, δηλ. πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η ταχύτητα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα; Αυτή ακριβώς είναι η έννοια της **επιτάχυνσης**.

Ας ξεκινήσουμε από τη **μέση επιτάχυνση**, ακολουθώντας ακριβώς το ίδιο σκεπτικό με τις έννοιες της ταχύτητας. Η μέση επιτάχυνση ορίζεται ως

$$\vec{a}_{avg} = \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_f - \vec{u}_i}{t_f - t_i} \quad (2.28)$$

ξανά με τους δείκτες i, f να δηλώνουν μια αρχική και μια τελική μέτρηση. Η μέση επιτάχυνση είναι επίσης διάνυσμα, αφού η ταχύτητα (ο αριθμητής) είναι διάνυσμα. Επίσης, η αλγεβρική τιμή της διατηρεί το ίδιο πρόσημο με τη μεταβολή της ταχύτητας, αφού ο όρος $1/\Delta t$ είναι πάντα θετικός, κι άρα η μέση επιτάχυνση έχει την ίδια φορά με το διάνυσμα της μεταβολής ταχύτητας, $\Delta \vec{u}$.

Συνεχίζοντας, μπορούμε να ορίσουμε τη **στιγμιαία επιτάχυνση** ως το λόγο μεταβολής της ταχύτητας όταν οι χρονικές στιγμές που παίρνουμε τις μετρήσεις μας σχεδόν συμπίπτουν, δηλ. όταν $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{u}(t) \quad (2.29)$$

Όμως γνωρίζουμε ότι η στιγμιαία ταχύτητα ισούται με την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης θέσης $\vec{x}$ ως προς το χρόνο, οπότε

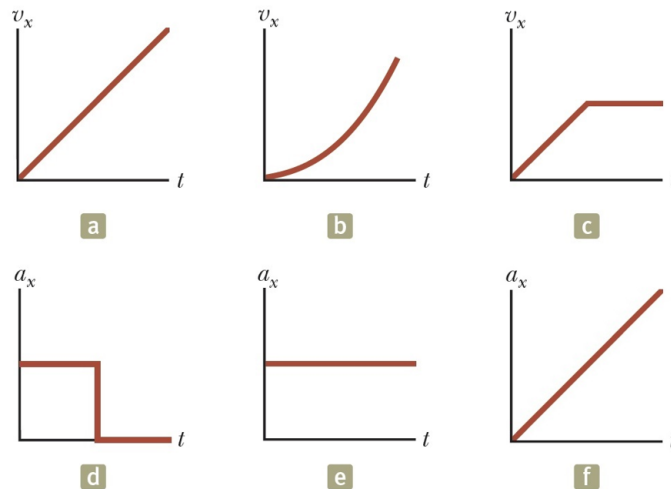
$$\vec{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}(t) \quad (2.30)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.3:

Βρείτε τα ζεύγη ταχύτητας - επιτάχυνσης στα παρακάτω σχήματα του Σχήματος 2.6.

Λύση: Ξέρουμε ότι η επιτάχυνση είναι η πρώτη παράγωγος της ταχύτητας. Οπότε για την ταχύτητα του Σχήματος 2.6(a), ξέρουμε ότι η παράγωγος της είναι μια σταθερά, δηλ. η επιτάχυνση που της αντιστοιχεί φαίνεται στο Σχήμα 2.6(e). Επίσης, το Σχήμα 2.6(b) δείχνει ένα πιθανότατα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο του t . Η παράγωγος του θα είναι ένα πρωτοβάθμιο πολυώνυμο του t , άρα μια πλάγια ευθεία,



Σχήμα 2.6: Παράδειγμα γραφημάτων ταχύτητας - επιτάχυνσης.

δηλ. το Σχήμα 2.6(f). Τέλος, το Σχήμα 2.6(c) δείχνει μια ταχύτητα που περιγράφεται από μια πλάγια ευθεία ακολουθούμενη από μια σταθερή συνάρτηση του t . Παραγωγίζοντας τμηματικά, καταλήγουμε στην επιτάχυνση που περιγράφεται από το Σχήμα 2.6(d).

Παράδειγμα 2.4:

Η θέση ενός σώματος δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = 4 - 27t + t^3 \quad (2.31)$$

με t σε δευτερόλεπτα και $x(t)$ σε μέτρα.

- (α') Βρείτε τη συνάρτηση ταχύτητας ως προς το χρόνο.
- (β') Βρείτε τη συνάρτηση επιτάχυνσης ως προς το χρόνο.
- (γ') Υπάρχει κάποια χρονική στιγμή t_0 που το σωματίδιο είχε $u(t_0) = 0$;

Λύση:

(α') Η συνάρτηση ταχύτητας ως προς το χρόνο είναι η στιγμιαία ταχύτητα. Γνωρίζουμε ότι

$$u(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(4 - 27t + t^3) = -27 + 3t^2 \quad (2.32)$$

(β') Η συνάρτηση επιτάχυνσης ως προς το χρόνο είναι η στιγμιαία επιτάχυνση. Γνωρίζουμε ότι

$$a(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}(-27 + 3t^2) = 6t \quad (2.33)$$

(γ') Μπορούμε εύκολα πλέον να δούμε αν υπάρχει κάποιο t_0 όπου $u(t_0) = 0$, αν λύσουμε την εξίσωση

$$3t_0^2 - 27 = 0 \iff t_0^2 - 9 = 0 \iff t_0 = \pm 3 \text{ s} \quad (2.34)$$

Επιλέγουμε τη θετική χρονική στιγμή $t_0 = 3 \text{ s}$.

2.2.6 Κίνηση υπό Σταθερή Επιτάχυνση

Ακόμα μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη κίνησης υπό *σταθερή επιτάχυνση*. Όπως μπορείτε να καταλάβετε από όσα μόλις διαβάσατε στην προηγούμενη παράγραφο, στην περίπτωση σταθερής επιτάχυνσης, η στιγμιαία ταχύτητα θα είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου t , ενώ η συνάρτηση θέσης ως προς το χρόνο θα είναι δευτεροβάθμιο πολυώνυμο του χρόνου t .

Η κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση μπορεί να περιγραφεί από αρκετές εξισώσεις, εν αντιθέσει με την κίνηση υπό σταθερή ταχύτητα, η οποία είχε μόνο μια εξίσωση περιγραφής. Ας δούμε όλες αυτές τις εξισώσεις συνοπτικά στον Πίνακα 2.2, οι οποίες εξισώσεις είναι όλες αλγεβρικές, καθώς θεωρούμε ότι οι διανυσματικές ποσότητες που περιλαμβάνονται (θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση) “κοιτάζουν” όλες προς τη θετική φορά του άξονα x' . Οι δείκτες i, f σημαίνουν την αρχική και τελική μέτρηση, αντίστοιχα.

Σχέσεις Ευθύγραμμη Επιταχυνόμενης Κίνησης με Σταθερή Επιτάχυνση			
A/A	Σχέση	A/A	Σχέση
1	$u_f = u_i + at$	2	$u_{avg} = (u_i + u_f)/2$
3	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_i + u_f)t$	4	$x_f = x_i + u_{avg}t$
5	$x_f = x_i + u_i t + \frac{1}{2}at^2$	6	$u_f^2 = u_i^2 + 2a(x_f - x_i)$

Πίνακας 2.2: Πίνακας Σχέσεων Επιταχυνόμενης Κίνησης.

Ας τις αποδείξουμε:

1. Λόγω σταθερής επιτάχυνσης,

$$a_{avg} = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u_f - u_i}{t_f - t_i} \quad (2.35)$$

Αν θεωρήσουμε ότι μετράμε το χρόνο μας από την αρχική θέση x_i , τότε $t_i = 0$ και αν θέσουμε $t_f = t$, τότε

$$a = \frac{u_f - u_i}{t} \implies u_f = u_i + at \quad (2.36)$$

2. Η επιτάχυνση είναι σταθερή, άρα η στιγμιαία ταχύτητα θα είναι γραμμική συνάρτηση του t . Για δυο οποιαδήποτε σημεία στην ευθεία

$$u_{avg} = \frac{u_i + u_f}{2} \quad (2.37)$$

3. Από την προηγούμενη σχέση πολλαπλασιάζοντας με t έχουμε

$$u_{avg}t = \frac{1}{2}(u_i + u_f)t \iff x_f - x_i = \frac{1}{2}(u_i + u_f)t \iff x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_i + u_f)t \quad (2.38)$$

4. Από τη Σχέση (2.37) και τη Σχέση (2.38) έχουμε εύκολα

$$x_f = x_i + u_{avg}t \quad (2.39)$$

5. Από τις δυο σχέσεις που έχουμε ήδη αποδείξει

$$u_f = u_i + at \quad (2.40)$$

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_i + u_f)t \quad (2.41)$$

έχουμε

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(2u_i + at)t = x_i + u_i t + \frac{1}{2}at^2 \quad (2.42)$$

6. Λύνοντας τη σχέση

$$u_f = u_i + at \quad (2.43)$$

ως προς t έχουμε

$$t = \frac{u_f - u_i}{a} \quad (2.44)$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_f + u_i)t \quad (2.45)$$

παίρνουμε

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_f + u_i) \frac{u_f - u_i}{a} \quad (2.46)$$

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a(x_f - x_i) \quad (2.47)$$

Προσέξτε ότι οι παραπάνω σχέσεις είναι αλγεβρικές. Τα πρόσημα θα σας καθοδηγήσουν στη σωστή φορά των διανυσμάτων. Μια τυπική σύμβαση που ακολουθείται είναι να ορίζετε τη θετική φορά αυτή προς τα δεξιά, και μην ξεχνάτε να ορίζετε τα σημεία αναφοράς σας (δηλ. από ποιο σημείο μετράτε τη θέση του σώματος – δηλ. που θεωρείτε ότι $x = 0$ – και το σημείο όπου πατάτε το χρονόμετρό σας και μελετάτε το εκάστοτε πρόβλημα – δηλ. πότε ισχύει $t = 0$). Πολλές φορές αυτά τα δυο ταυτίζονται αλλά όχι πάντα.

Μια ιδιαίτερα δημοφιλής κίνηση σε μια διάσταση είναι η **ελεύθερη πτώση**. Στην περίπτωση της ελεύθερης πτώσης έχουμε ως σταθερή επιτάχυνση την επιτάχυνση της βαρύτητας, με μέτρο $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, με φορά προς τα κάτω. Οι εξισώσεις είναι ακριβώς ίδιες (αντικαθιστάτε το x με το y). Σχεδόν πάντα ως θετική φορά ορίζεται η κατακόρυφη προς τα πάνω (δηλ. προς το θετικό ημιάξονα του άξονα $y'y$), οπότε το πρόσημο της επιτάχυνσης της βαρύτητας θα είναι αρνητικό στις εξισώσεις που είδαμε. Δείτε τον παρακάτω Πίνακα 2.3, που ουσιαστικά είναι ο Πίνακας 2.2 γραμμένος με την υπόθεση της κατακόρυφης κίνησης προς τα πάνω, υπό την επίδραση της βαρυτικής επιτάχυνσης.

Σχέσεις Ελεύθερης Πτώσης			
A/A	Σχέση	A/A	Σχέση
1	$u_f = u_i - gt$	2	$u_{avg} = (u_i + u_f)/2$
3	$y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_i + u_f)t$	4	$y_f = y_i + u_{avg}t$
5	$y_f = y_i + u_i t - \frac{1}{2}gt^2$	6	$u_f^2 = u_i^2 - 2g(y_f - y_i)$

Πίνακας 2.3: Πίνακας Σχέσεων Ελεύθερης Πτώσης με $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Για να λύσετε επιτυχώς προβλήματα, πρέπει σε κάθε πρόβλημα να αναρωτηθείτε τα εξής:

Προκαταρκτικά Βήματα Επίλυσης Προβλημάτων Μονοδιάστατης Κίνησης

- Φανταστείτε στο μυαλό σας την κίνησή του σώματος. Ποιό μοντέλο κίνησης περιγράφει την κίνηση του σώματος στο πρόβλημα που μελετώ; Κίνηση υπό σταθερή ταχύτητα; Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση;
- Πού θέτω το σύστημα συντεταγμένων μου – Οxy; Με άλλα λόγια, που θα θέσω τη συμβολή των αξόνων Ο (0,0) με βάση την οποία θα μετρώ τις θέσεις του σώματος κατά την κίνησή του;
- Πότε “πατώ το χρονόμετρό μου”; Δηλ. πότε θεωρώ ότι $t = 0$;
- “Βαφτίστε” τα ενδιαφέροντα στιγμιότυπα της κίνησης του σώματος με γράμματα (Α, Β, Γ, Δ, Ε, κ.ο.κ) και χρησιμοποιήστε τα ως δείκτες των ποσοτήτων που σας ενδιαφέρουν (π.χ. $\vec{x}_A$, $\vec{u}_\Gamma$, κ.ο.κ).

Πολλές φορές θα απαντάμε έμμεσα σε αυτά τα ερωτήματα πριν κάθε λύση, και η σωστή απάντηση στα ερωτήματα αυτά διευκολύνει πάρα πολύ τη λύση, η οποία πιθανόν να είναι απλά θέμα σωστής επιλογής

εξίσωσης.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.5:

Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και κατεύθυνση κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m. Δείτε το Σχήμα 2.7.

- (α') Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.
- (β') Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.
- (γ') Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.
- (δ') Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν $t = 5$.

Λύση:

Θεωρούμε θετική φορά της κίνησης προς τα πάνω, οπότε το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας $\vec{g}$ θα “δείχνει” προς τα κάτω και θα ισούται με $\vec{g} = (-9.8 \text{ m/s}^2)\vec{j}$. Επίσης θεωρούμε σημείο αναφοράς τη θέση (A) – εκεί πατάμε το χρονόμετρό μας και ως προς αυτή τη θέση ορίζουμε τις μετρήσεις μας (είναι δηλαδή το σημείο (0, 0) της κίνησης).

(α') Για τη διαδρομή (A) $\rightarrow$ (B), έχουμε

$$u_B = u_A - gt = 20 - 9.8t \quad (2.48)$$

Στο μέγιστο ύψος, η ταχύτητα είναι μηδενική, δηλ. $u_B = 0$, οπότε

$$0 = 20 - 9.8t \implies t \approx 2.04 \text{ s} \quad (2.49)$$

(β') Στη διαδρομή (A) $\rightarrow$ (B) έχουμε

$$y_B = y_A + u_A t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.50)$$

Γνωρίζουμε ότι $y_A = 0$, $u_A = 20 \text{ m/s}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $t \approx 2.04 \text{ s}$, οπότε

$$y_B \approx 20.4 \text{ m} \implies \vec{y}_B = (20.4 \text{ m})\vec{j} \quad (2.51)$$

Δείτε τον πίνακα με τις εξισώσεις της κίνησης με σταθερή επιτάχυνση. Μπορείτε να λύσετε το παραπάνω ερώτημα με κάποια άλλη από αυτές;

(γ') Θα διανύσουμε τη διαδρομή (A) $\rightarrow$ (C), οπότε

$$u_C^2 = u_A^2 - 2g(y_C - y_A) \quad (2.52)$$

$$= 20^2 - 2 \cdot 9.8(0 - 0) = 20^2 \quad (2.53)$$

$$u_C = \pm 20 \text{ m/s} \quad (2.54)$$

Επιλέγουμε τη λύση $u_C = -20 \text{ m/s}$ γιατί το διάνυσμα της ταχύτητας “δείχνει” προς την αντίθετη φορά από τη θετική! Οπότε θα είναι $\vec{u}_C = (-20 \text{ m/s})\vec{j}$.

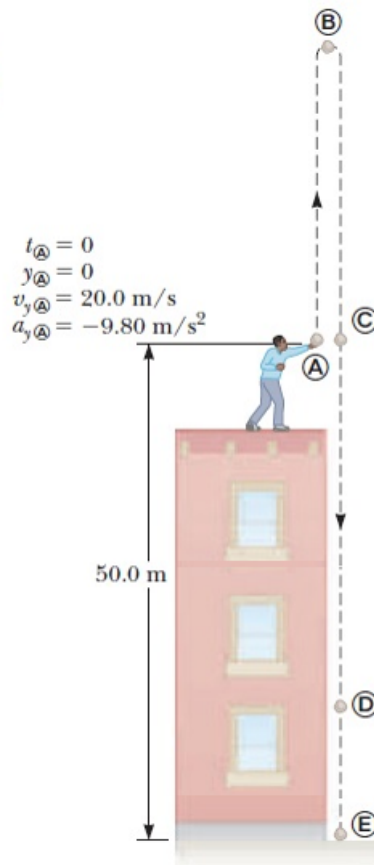
(δ') Έστω (D) το σημείο που βρίσκεται η μπάλα για $t = 5 \text{ s}$. Επιλέγουμε τη διαδρομή (A) $\rightarrow$ (D), κι εκεί έχουμε

$$u_D = u_A - gt = 20 - 9.8 \cdot 5 = -29 \text{ m/s} \implies \vec{u}_D = (-29 \text{ m/s})\vec{j} \quad (2.55)$$

και

$$y_D = y_A + u_A t - \frac{1}{2}gt^2 \Big|_{t=5} = 0 + 20t - \frac{9.8}{2}t^2 \Big|_{t=5} = -22.5 \text{ m} \implies \vec{y}_D = (-22.5 \text{ m})\vec{j} \quad (2.56)$$

Βλέπετε ότι οι απαντήσεις έχουν νόημα από φυσικής άποψης (σωστά πρόσημα).



Σχήμα 2.7: Παράδειγμα ελεύθερης πτώσης.

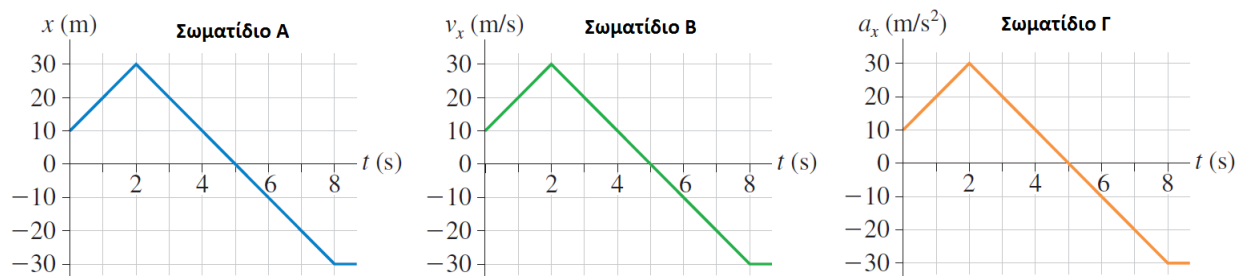
Το παραπάνω πρόβλημα έχει μερικές ενδιαφέρουσες εναλλακτικές: λύστε ξανά τα ερωτήματα (γ-δ) με διαφορετικές αρχικές θέσεις διαδρομής. Επίσης, μπορείτε να τα λύσετε υποθέτοντας ότι $t = 0$ όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση (B). Τα αποτελέσματά σας πρέπει να είναι τα ίδια – είτε αριθμητικά είτε “νοηματικά”! Θα παρατηρήσατε επίσης ότι στις απαντήσεις που δώσαμε, εκφράσαμε τα αποτελέσματα και σε διανυσματική μορφή (όπου αυτό μπορούσε να γίνει). Θέση, μετατόπιση, ταχύτητα, και επιτάχυνση είναι διανυσματικά μεγέθη αλλά κάποιες φορές θα αναφέρουμε απλά τις αλγεβρικές τους τιμές, όταν οι κατευθύνσεις τους ως διανύσματα είναι προφανείς.

Παράδειγμα 2.6:

Τρία σωματίδια κινούνται κατά μήκος του άξονα x , με καθένα να ξεκινά με αρχική ταχύτητα $u_0 = 10$ m/s τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$. Στο Σχήμα 2.8, το γράφημα για το σωματίδιο A συνιστά ένα γράφημα θέσης - χρόνου, το γράφημα για το σωματίδιο B συνιστά ένα γράφημα ταχύτητας - χρόνου, ενώ το γράφημα Γ συνιστά ένα γράφημα επιτάχυνσης - χρόνου. Βρείτε την ταχύτητα καθενός σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 7$ s. **Μη** χρησιμοποιήσετε εξισώσεις κίνησης, παρά μόνο τη γεωμετρία των γραφημάτων.

Λύση:

Διάγραμμα A: Ξέρουμε ότι η στιγμιαία ταχύτητα ισούται με την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης θέσης ως προς το χρόνο. Το διάγραμμα θέσης του σωματιδίου A είναι μια πλάγια ευθεία από $t = 2$ ως $t = 8$ s. Η κλίση της είναι -10 m/s, που είναι η ταχύτητα του σωματιδίου για $t = 7$ s (και για κάθε t από 2 ως 8). Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει κίνηση προς χαμηλότερες τιμές του άξονα x .



Σχήμα 2.8: Διαγράμματα θέσης, ταχύτητας, επιτάχυνσης vs χρόνου.

Διάγραμμα B: Η ταχύτητα του σωματιδίου B για $t = 7$ s μπορεί να βρεθεί κατευθείαν από το διάγραμμα, μια και αυτό είναι διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου, δηλ. στιγμιαίας ταχύτητας. Η ταχύτητα για $t = 7$ s είναι -20 m/s.

Διάγραμμα Γ: Ξέρουμε ότι η ταχύτητα για το σωματίδιο Γ θα δίνεται από το ολοκλήρωμα της συνάρτησης επιτάχυνσης - χρόνου, η οποία συνάρτηση μας είναι διαθέσιμη στο γράφημα Γ. Όμως η ολοκλήρωση σημαίνει πρακτικά την επιφάνεια κάτω από τη συνάρτηση της επιτάχυνσης. Με άλλα λόγια, η ταχύτητα για $t = 7$ s μπορεί να βρεθεί από τη σχέση

$$u_f = u_i + \text{εμβαδόν της καμπύλης επιτάχυνσης μεταξύ } t_i \text{ κι } t_f.$$

Αυτό το εμβαδόν μπορεί να υπολογιστεί ως εξής: το εμβαδό μεταξύ $t = 0$ και $t = 2$ s είναι 40 m/s, το εμβαδό μεταξύ $t = 2$ και $t = 5$ s είναι 45 m/s και το αντίστοιχο μεταξύ $t = 5$ και $t = 7$ είναι -20 m/s. Συνολικά, για $t_i = 0$ και $t_f = 7$ s, η ταχύτητα είναι $10 + 40 + 45 - 20 = 75$ m/s.

Παράδειγμα 2.7:

Μια Porsche προκαλεί ένα Honda σε έναν αγώνα ταχύτητας σε 400 μέτρα. Επειδή η επιτάχυνση της Porsche είναι 3.5 m/s^2 , ενώ αυτή του Honda είναι 3.0 m/s^2 , το Honda παίρνει προβάδισμα στην αφετηρία κατά 1.0 s. Ποιο αυτοκίνητο θα κερδίσει τον αγώνα;

Λύση: Θεωρούμε ως χρονικό σημείο αναφοράς, $t = 0$, τη στιγμή που ξεκινά η Porsche. Τότε, το Honda έχει ήδη ξεκινήσει – ένα δευτερόλεπτο νωρίτερα. Και τα δυο οχήματα μοντελοποιούνται ως σώματα που εκτελούν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση. Οι δείκτες i, f υποδεικνύουν αρχική και τελική μέτρηση, αντίστοιχα. Ο χρόνος που απαιτείται για την Porsche βρίσκεται από τη σχέση

$$x_{Pf} = x_{Pi} + u_{Pi}t + \frac{1}{2}a_P t^2 \quad (2.57)$$

$$400 = 0 + 0 + \frac{1}{2}3.5t^2 \quad (2.58)$$

$$t = 15.1 \text{ s} \quad (2.59)$$

Για το Honda, είναι αντίστοιχα

$$x_{Hf} = x_{Hi} + u_{Hi}t + \frac{1}{2}a_H(t+1)^2 \quad (2.60)$$

$$400 = 0 + 0 + \frac{1}{2}3(t+1)^2 \quad (2.61)$$

$$t = 15.3 \text{ s} \quad (2.62)$$

Άρα η Porsche κερδίζει. Προσέξτε ότι αν θεωρήσουμε ως χρονική αναφορά το χρόνο εκκίνησης του Honda, δε θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τις εξισώσεις για την Porsche, αφού για το πρώτο δευτερόλεπτο, το αμάξι θα ήταν ακίνητο, και μετά θα έκανε ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Συνολικά, η κίνηση αυτή ΔΕΝ περιγράφεται από τις παραπάνω εξισώσεις!

Παράδειγμα 2.8:

Θεωρήστε ότι σας προκαλούν στο παρακάτω παιχνίδι. Ένας φίλος σας κρατά ένα χαρτονόμισμα των 50 ευρώ από την άκρη του, ενώ εσείς τοποθετείτε τον αντίχειρα και το δείκτη του ενός χεριού σας στο κέντρο του χαρτονομίσματος, χωρίς να το ακουμπάτε όμως, όπως στο Σχήμα 2.9. Χωρίς να σας προειδοποιήσει, ο φίλος σας αφήνει το χαρτονόμισμα να πέσει προς το έδαφος. Για να κερδίσετε το χαρτονόμισμα, πρέπει να το πιάσετε στον αέρα χωρίς να κινήσετε καθόλου τον καρπό ή το χέρι σας, παρά μόνο να κλείσετε τα δυο δαχτυλά σας (αντίχειρα και δείκτη). Υποθέστε ότι η αντίδρασή σας είναι η μέση αντίδραση ενός ανθρώπου, δηλαδή 0.2 s, το μήκος του χαρτονομίσματος των 50 ευρώ είναι 14 cm, η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, και η επιτάχυνση της βαρύτητας στη Γη είναι $g_{\text{earth}} = 9.8 \text{ m/s}^2$.

- (α') Πιστεύετε ότι μπορείτε να κερδίσετε ένα τέτοιο παιχνίδι υπό αυτές τις συνθήκες;
- (β') Πόσο θα έπρεπε να ήταν το μήκος ενός χαρτονομίσματος για να μπορούσατε να έχετε ελπίδες υπό αυτές τις συνθήκες;
- (γ') Αν παίζατε το ίδιο παιχνίδι στην επιφάνεια του πλανήτη Άρη, όπου η βαρύτητα έχει μέτρο $g_{\text{mars}} = 0.37g_{\text{earth}} \text{ m/s}^2$, πιστεύετε ότι θα κερδίζατε;



Σχήμα 2.9: Παιχνίδι με χαρτονόμισμα.

Λύση:

- (α') Το χαρτονόμισμα ξεκινά από ηρεμία, $u_i = 0$, και πέφτει με επίδραση βαρυτικής επιτάχυνσης. Μας ενδιαφέρει η άνω άκρη του, και θεωρούμε ότι ένα σωματίδιο βρίσκεται εκεί, που μοντελοποιεί όλο το χαρτονόμισμα. Θεωρούμε $y_i = 0$ στη θέση αυτή, και θετική φορά της κίνησης ορίζουμε αυτήν προς τα πάνω, με το διάνυσμα της βαρυτικής επιτάχυνσης να “δείχνει” προς τα κάτω, $\vec{g} = (-9.8 \text{ m/s}^2)\vec{j} \text{ m/s}^2$. Από εκφώνηση, ο χρόνος που απαιτείται για την κάλυψη της διαδρομής από την αρχική ως την τελική θέση είναι 0.2 s.

Για μια μέση αντίδραση 0.2 s, μπορούμε να βρούμε την απόσταση που θα διανύσει το σωματίδιο (δηλ. η άνω άκρη του χαρτονομίσματος) πέφτοντας:

$$y_f = y_i + u_i t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.63)$$

$$\Delta y = u_i t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.64)$$

$$\Delta y = 0 - \frac{1}{2} 9.8 \cdot 0.2^2 \text{ m} \quad (2.65)$$

$$\Delta y = -0.2 \text{ m} \quad (2.66)$$

ή

$$\Delta \vec{y} = (-0.2 \text{ m})\vec{j} \quad (2.67)$$

Το χαρτονόμισμα, πέφτοντας, διανύει απόσταση ίση με 20 cm, μέχρι να κλείσουμε τα δαχτυλά μας. Η απόσταση μεταξύ του δαχτύλου σας και της κορυφής του χαρτονομίσματος είναι 7 cm. Άρα

δεν μπορούμε να κερδίσουμε το παιχνίδι, καθώς η άνω άκρη του χαρτονομίσματος θα βρίσκεται 13 εκατοστά πιο κάτω από τα δάχτυλά μας όταν τα κλείσουμε.

(β') Με βάση τα παραπάνω, θα έπρεπε να είναι το λιγότερο 40 cm, ώστε σε 0.2 s να διανύσει πέφτοντας 20 cm, και να μπορέσουμε να το πιάσουμε οριακά.

(γ') Για την επιφάνεια του Άρη, το ίδιο παιχνίδι θα έδινε

$$y_f = y_i + u_i t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.68)$$

$$\Delta y = u_i t - \frac{1}{2} g_{mars} t^2 \quad (2.69)$$

$$\Delta y = 0 - \frac{1}{2} 0.37 g_{earth} \cdot 0.2^2 \text{ m} \quad (2.70)$$

$$\Delta y = 0 - \frac{1}{2} 0.37 \cdot 9.8 \cdot 0.2^2 \text{ m} \quad (2.71)$$

$$\Delta y = -0.07252 \text{ m} \quad (2.72)$$

ή

$$\Delta \vec{y} = (-0.07252 \text{ m}) \vec{j} \quad (2.73)$$

Ξανά, δε θα μπορούσαμε να το πιάσουμε, ή θα το πιάναμε οριακά αν είχαμε ελάχιστα γρηγορότερη αντίδραση από 0.2 s.

Παράδειγμα 2.9:

Το είδος εντόμου *Philaenus spumarius* (Σχήμα 2.10) θεωρείται ο καλύτερος άλτης του ζωϊκού βασιλείου. Για να εκτελέσει ένα άλμα, το έντομο αυτό μπορεί να επιταχύνει στα 4 km/s^2 (!!) μέσα σε μια απόσταση 2 mm, για να δυναμώσει τα ειδικά διαμορφωμένα πόδια του^α. Θεωρήστε ότι η επιτάχυνσή του είναι σταθερή.

(α') Βρείτε την ταχύτητα με την οποία το έντομο “απογειώνεται”. Αγνοήστε τη βαρυτική επιτάχυνση.

(β') Μέσα σε πόσο χρονικό διάστημα καταφέρνει να φτάσει αυτήν την ταχύτητα; Αγνοήστε τη βαρυτική επιτάχυνση.

(γ') Πόσο ψηλά θα μπορούσε να φτάσει ένα τέτοιο έντομο;

^αΜη φοβάστε, τρέφεται με χυμούς από τα φυτά, ενώ θεωρείται και αρκετά διαδεδομένο είδος στον κόσμο...



Σχήμα 2.10: Το είδος εντόμου *Philaenus spumarius*.

Λύση: Η κίνηση του εντόμου μοντελοποιείται ως ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση σε έναν κατακόρυφο νοητό άξονα $y'y$. Θεωρούμε θετική φορά της κίνησης προς τα πάνω, με το διάνυσμα της βαρυτικής επιτάχυνσης να “δείχνει” προς τα κάτω, $\vec{g} = -9.8 \text{ m/s}^2$. Η επιτάχυνση που υπόκειται το έντομο κατά την εκτίναξη έχει φορά προς τα πάνω, όμοια με τη θετική φορά της κίνησης που υποθέσαμε. Άρα:

(α') Θεωρώντας αρχική θέση $y_i = 0$ τη θέση συμπίεσης των ποδιών του (ας την πούμε A) και y_f τη θέση έκτασης τους (ας τη συμβολίσουμε με B), στη διαδρομή $A \rightarrow B$, από τη σχέση

$$u_B^2 = u_A^2 + 2a\Delta y \quad (2.74)$$

η ταχύτητα του εντόμου αφού τεντώσει τα πόδια του θα είναι

$$u_B = \sqrt{u_A^2 + 2a\Delta y} = \sqrt{0^2 + 2 \cdot 4000 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 4 \text{ m/s} \quad (2.75)$$

ή

$$\vec{u}_B = (4 \text{ m/s})\vec{j} \quad (2.76)$$

(β') Θεωρώντας ξανά τις ίδιες αρχικές και τελικές θέσεις, και θεωρώντας μηδενική αρχική ταχύτητα, ο χρόνος που απαιτείται για να πιάσει την παραπάνω ταχύτητα είναι

$$u_B = u_A + at \implies t = \frac{u_B - u_A}{a} = \frac{4}{4 \cdot 10^3} = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 1 \text{ ms} \quad (2.77)$$

(γ') Έστω η διαδρομή $B \rightarrow C$, με B τη θέση εγκατάλειψης εδάφους και C η θέση ανωτάτου ύψους. Η μετατόπιση προς τα πάνω (το άλμα δηλαδή) του εντόμου από το σημείο B ως το C , όπου έχει στιγμιαία μηδενική ταχύτητα ($u_B = 0$), είναι

$$u_C^2 = u_B^2 - 2g\Delta y \iff \Delta y = \frac{u_C^2 - u_B^2}{-2g} = \frac{0^2 - 4^2}{-2 \cdot 9.8} = 0.816 \text{ m} \quad (2.78)$$

ή

$$\Delta \vec{y} = (0.816 \text{ m})\vec{j} \quad (2.79)$$

Στην πραγματικότητα, φτάνει περίπου στα 0.7 m.

2.3 Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Μπορούμε πλέον να περάσουμε στην κίνηση σε δυο διαστάσεις, ή αλλιώς, την κίνηση σε ένα επίπεδο. Ο διδιάστατος χώρος κάνει ιδιαίτερη χρήση διανυσμάτων αλλά και ανάλυσης σε συνιστώσες, όπως θα δούμε. Οποσδήποτε η γνώση της μονοδιάστατης κίνησης θα είναι υπερ-πολύτιμη!

2.3.1 Θέση

Θα ακολουθήσουμε την ίδια ροή με τη μονοδιάστατη κίνηση, γιατί μέσω των ομοιοτήτων και των διαφορών θα κατανοήσουμε καλύτερα τη φύση της διδιάστατης κίνησης. Στη μια διάσταση, μας αρκούσε ένα μονόμετρο μέγεθος (αριθμ. τιμή) για να ορίσουμε τη θέση ενός σωματιδίου, καθώς το πρόσημο αυτού καθόριζε και τη φορά του διανύσματος που την περιγράφει. Στις δυο διαστάσεις χρειαζόμαστε το **διάνυσμα θέσης** $\vec{r}$, που είναι ένα διάνυσμα που ξεκινά από το $O(0,0)$ και καταλήγει στη θέση του σωματιδίου στο επίπεδο xy . Στο Σχήμα 2.11 βλέπετε δυο διανύσματα θέσης $\vec{r}_i$, $\vec{r}_f$. Ένα διάνυσμα θέσης μπορεί να περιγραφεί με χρήση μοναδιαίων διανυσμάτων, όπως

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (2.80)$$

Προφανώς, το διάνυσμα θέσης μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση του χρόνου t , καθώς αναμένεται αυτό να μεταβάλλεται όσο το σώμα κινείται στο επίπεδο και προϊόντος του χρόνου:

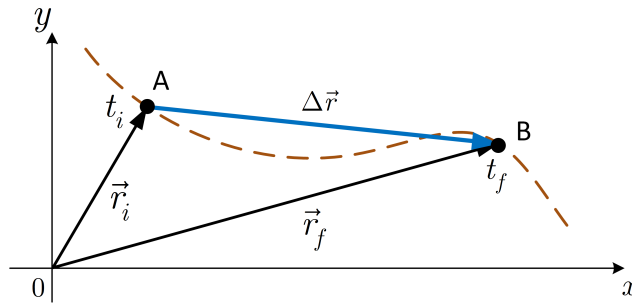
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad (2.81)$$

2.3.2 Μετατόπιση

Όπως και στη μονοδιάστατη κίνηση, μπορούμε να ορίσουμε τη μετατόπιση $\Delta \vec{r}$, που ορίζεται ως

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i \quad (2.82)$$

δηλ. είναι η διανυσματική διαφορά μεταξύ της τελικής και της αρχικής θέσης. Βλέπετε το διάνυσμα μετατόπισης $\Delta \vec{r}$ στο Σχήμα 2.11. Παρατηρήστε ότι δεν εξαρτάται από τη διαδρομή του σώματος από τη θέση (A) ως τη θέση (B).



Σχήμα 2.11: Διανύσματα θέσης.

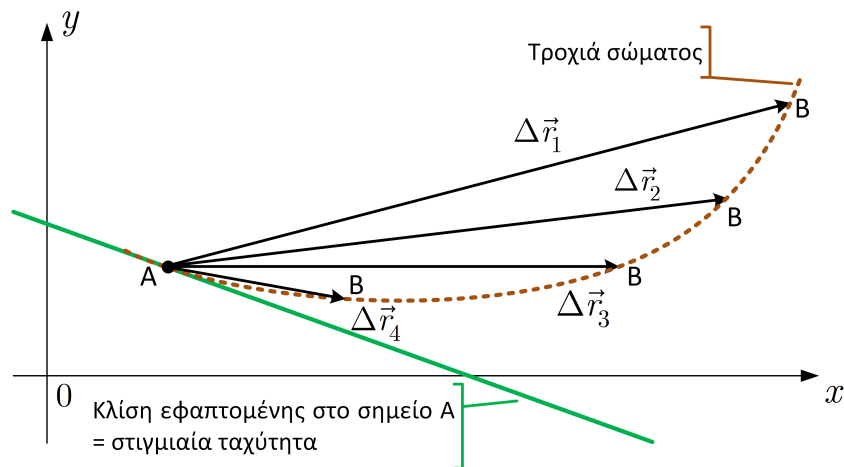
2.3.3 Ταχύτητα

Ορίζουμε τη **μέση ταχύτητα** σε ένα χρονικό διάστημα Δt ως

$$\vec{u}_{avg} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{\Delta t} \quad (2.83)$$

Όπως είναι εμφανές – και πρέπει να έχετε μάθει τώρα πλέον ☺ – η μέση ταχύτητα είναι διάνυσμα με ίδια διεύθυνση και φορά με το $\Delta \vec{r}$. Παρατηρήστε την ομοιότητα του ορισμού με τη μονοδιάστατη κίνηση. Ως διάνυσμα που εξαρτάται από τη μετατόπιση $\Delta \vec{r}$, είναι κι αυτό ανεξάρτητο της διαδρομής.

Αν θέλαμε να μπορούμε να γνωρίζουμε την ταχύτητα ενός σώματος που κινείται στο xy επίπεδο κάθε χρονική στιγμή t , τότε το μέγεθος της **στιγμιαίας ταχύτητας** θα μας είναι εξαιρετικά χρήσιμο. Όμοια με τη μονοδιάστατη κίνηση, μπορούμε να το εξάγουμε ως εξής. Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται ανάμεσα σε δυο σημεία, A και B, όπως στο Σχήμα 2.12. Αν αρχίσουμε να μελετάμε την κίνησή του σε



Σχήμα 2.12: Στιγμιαία ταχύτητα.

όλο και πιο κοντινές στο σημείο A αποστάσεις, δηλ. μετακινώντας το σημείο B όλο και πιο κοντά στο A, τότε οι αντίστοιχες μετατοπίσεις θα είναι $\Delta \vec{r}_1$, $\Delta \vec{r}_2$, $\Delta \vec{r}_3$ κλπ, όπως στο Σχήμα 2.12. Προσέξτε ότι όσο πλησιάζουμε κοντά στο σημείο A, δηλ. όσο η μετατόπιση γίνεται όλο και μικρότερη, η κατεύθυνση του διανύσματος της, $\Delta \vec{r}$, πλησιάζει όλο και περισσότερο την κατεύθυνση της εφαπτομένης στο σημείο A. Αν το σημείο B πλησιάσει απειροστά κοντά, τότε μετράμε τη μέση ταχύτητα σε απειροστά κοντινές χρονικές στιγμές, έτσι ώστε $\Delta t \rightarrow 0$. Αυτή ακριβώς είναι η στιγμιαία ταχύτητα:

$$\vec{u}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \quad (2.84)$$

με $\vec{r}(t)$ να είναι μια συνάρτηση της θέσης του σώματος ως προς το χρόνο. Η κατεύθυνση του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας εφάπτεται στο σημείο στο οποίο τη μετράμε. Ξανά, προσέξτε την ομοιότητα με τη μονοδιάστατη κίνηση.

2.3.4 Θέση υπό Σταθερή Ταχύτητα

Έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η περίπτωση όπου ένα σώμα κινείται υπό **σταθερή ταχύτητα**. Αν η τελευταία είναι σταθερή τότε η μέση ταχύτητα ταυτίζεται με τη στιγμιαία ταχύτητα - πρέπει να σας είναι πλέον προφανές αυτό. Αν λοιπόν $u = u_{avg} = \text{σταθερή}$, τότε

$$\vec{u}_{avg} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \iff \Delta \vec{r} = \vec{u}_{avg} \Delta t \iff \vec{r}_f - \vec{r}_i = \vec{u}_{avg} \Delta t \iff \vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{u}_{avg} \Delta t \quad (2.85)$$

και αν συμβολίσουμε ως $\vec{u}$ την ταχύτητα

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{u}(t_f - t_i) \iff \vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{u}t_f \quad (2.86)$$

αν θεωρήσουμε ότι $t_i = 0$, δηλ. ότι πατήσαμε το χρονόμετρο στη θέση $\vec{r}_i$.

2.3.5 Επιτάχυνση

Όπως ακριβώς ορίσαμε την ταχύτητα ως το πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η θέση ενός σώματος στη μονάδα του χρόνου, δε θα ήταν ενδιαφέρον να ορίσουμε το αντίστοιχο για την ταχύτητα, δηλ. πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η ταχύτητα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα; Αυτή ακριβώς είναι η έννοια της **επιτάχυνσης**.

Ας ξεκινήσουμε από τη **μέση επιτάχυνση**, ακολουθώντας ακριβώς το ίδιο σκεπτικό με τις έννοιες της ταχύτητας. Η μέση επιτάχυνση ορίζεται ως

$$\vec{a}_{avg} = \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_f - \vec{u}_i}{t_f - t_i} \quad (2.87)$$

Η μέση επιτάχυνση είναι επίσης διάνυσμα, αφού η ταχύτητα είναι διάνυσμα. Επίσης, η αλγεβρική τιμή της διατηρεί το ίδιο πρόσημο με τη μεταβολή της ταχύτητας, αφού ο όρος $1/\Delta t$ είναι πάντα θετικός, κι άρα έχει την ίδια φορά με το διάνυσμα της $\Delta \vec{u}$.

Συνεχίζοντας, μπορούμε να ορίσουμε τη **στιγμιαία επιτάχυνση** ως το λόγο μεταβολής της ταχύτητας όταν οι χρονικές στιγμές που παίρνουμε τις μετρήσεις μας σχεδόν συμπίπτουν, δηλ. όταν $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{u}(t) \quad (2.88)$$

Όμως γνωρίζουμε ότι η στιγμιαία ταχύτητα ισούται με την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης θέσης $\vec{x}$ ως προς το χρόνο, οπότε

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) \quad (2.89)$$

2.3.6 Κίνηση υπό Σταθερή Επιτάχυνση

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη κίνησης στο επίπεδο υπό **σταθερή επιτάχυνση**, όμοια με τη μονοδιάστατη κίνηση. Εδώ σιγά σιγά αρχίζουν να έρχονται στο προσκήνιο τα πλεονεκτήματα της γνώσης της μονοδιάστατης κίνησης.

Θα σκεφτόμαστε με βάση την παρακάτω “αρχή”:

Διαιρεί και Βασίλευε - Ανάλυση σε Συνιστώσες

Η κίνηση σε δυο διαστάσεις μπορεί να μοντελοποιηθεί ως δυο ανεξάρτητες ευθύγραμμες κινήσεις σε δυο κάθετους άξονες: τον οριζόντιο άξονα $x'x$ και τον κατακόρυφο άξονα $y'y$.

Έτσι, η κίνηση που συμβαίνει στον έναν άξονα δεν επηρεάζει τον άλλο!

Ας περιγράψουμε τις εξισώσεις που κυβερνούν τη διδιάστατη κίνηση, ξεκινώντας από τους ορισμούς που δώσαμε νωρίτερα. Προφανώς αυτές οι εξισώσεις θα είναι διανυσματικές – δεν μπορούμε πλέον να κάνουμε “κόλπα” με πρόσημα στη διδιάστατη κίνηση, αλλά μην απογοητεύεστε ☹– και θα περιγράφουν δυο πράγματα: τη θέση και την ταχύτητα του σώματος (μην ξεχνάτε, η επιτάχυνση είναι σταθερή). Γνωρίζουμε το διάνυσμα θέσης, το οποίο μπορεί να γραφεί με βάση τα μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου, $\vec{i}, \vec{j}$:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad (2.90)$$

Είδαμε μόλις πριν ότι

$$\vec{u}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}(x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}) = u_x(t)\vec{i} + u_y(t)\vec{j} \quad (2.91)$$

Βλέπουμε ότι η στιγμιαία ταχύτητα αποτελείται από τις στιγμιαίες ταχύτητες στους επιμέρους άξονες, για τις οποίες ξέρουμε ότι

$$u_x = u_{x_i} + a_x t \quad (2.92)$$

$$u_y = u_{y_i} + a_y t \quad (2.93)$$

Αντικαθιστώντας

$$\vec{u}(t) = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} = (u_{x_i} + a_x t)\vec{i} + (u_{y_i} + a_y t)\vec{j} \quad (2.94)$$

$$= (u_{x_i}\vec{i} + u_{y_i}\vec{j}) + (a_x\vec{i} + a_y\vec{j})t \quad (2.95)$$

$$= \vec{u}_i + \vec{a}t \quad (2.96)$$

Αυτή είναι η πρώτη σχέση που περιγράφει τη στιγμιαία ταχύτητα στο επίπεδο. Ξεκινώντας ξανά από το διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad (2.97)$$

μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ από τις γνωστές μας σχέσεις της μονοδιάστατης κίνησης, θα πάρουμε

$$\vec{r}(t) = \left(x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2\right)\vec{i} + \left(y_i + u_{y_i}t + \frac{1}{2}a_y t^2\right)\vec{j} \quad (2.98)$$

$$= (x_i\vec{i} + y_i\vec{j}) + (u_{x_i}\vec{i} + u_{y_i}\vec{j})t + \frac{1}{2}(a_x\vec{i} + a_y\vec{j})t^2 \quad (2.99)$$

$$= \vec{r}_i + \vec{u}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad (2.100)$$

που είναι η δεύτερη ενδιαφέρουσα σχέση που περιγράφει την κίνηση ενός σώματος στο επίπεδο υπό σταθερή επιτάχυνση.

Ας τις γράψουμε μαζί στον Πίνακα 2.4.

Σχέσεις Ευθύγραμμη Επιταχυνόμενης Κίνησης με Σταθερή Επιτάχυνση

A/A	Σχέση	A/A	Σχέση
1	$\vec{u}(t) = \vec{u}_i + \vec{a}t$	2	$\vec{r}(t) = \vec{r}_i + \vec{u}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

Πίνακας 2.4: Πίνακας Διανυσματικών Σχέσεων Επιταχυνόμενης Κίνησης σε Δυο Διαστάσεις.

Πώς πρέπει να προσεγγίζουμε τα προβλήματα που αφορούν διδιάστατη κίνηση;

Προκαταρκτικά Βήματα Επίλυσης Προβλημάτων Διδιάστατης Κίνησης

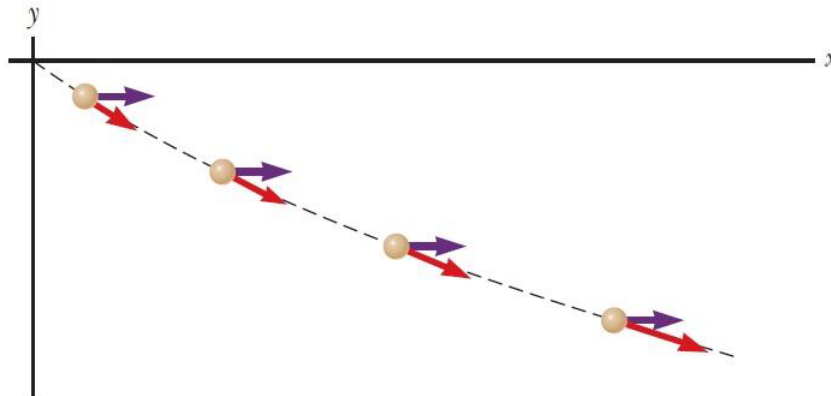
- Φανταστείτε στο μυαλό σας την κίνησή του σώματος. “Σπάστε” την κίνησή του σε δυο άξονες, προβάλλοντας την κίνηση σε αυτούς και αναρωτηθείτε: ποιο μοντέλο κίνησης περιγράφει την κίνηση του σώματος στον x' άξονα στο πρόβλημα που μελετώ; Κίνηση υπό σταθερή ταχύτητα; Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση; ποιο μοντέλο κίνησης περιγράφει την κίνηση του σώματος στον y' άξονα στο πρόβλημα που μελετώ; Κίνηση υπό σταθερή ταχύτητα; Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση;
- Πού θέτω το σύστημα συντεταγμένων μου – Οxy; Με άλλα λόγια, πού θα θέσω τη συμβολή των αξόνων Ο (0,0) με βάση την οποία θα μετρώ τις θέσεις του σώματος κατά την κίνησή του;
- Πότε “πατώ το χρονόμετρό μου”; Δηλ. πότε θεωρώ ότι $t = 0$;
- “Βαφτίστε” τα ενδιαφέροντα στιγμιότυπα της κίνησης του σώματος με γράμματα (Α, Β, Γ, Δ, Ε, κ.ο.κ) και χρησιμοποιήστε τα ως δείκτες των ποσοτήτων που σας ενδιαφέρουν (π.χ. $\vec{x}_A$, $\vec{u}_\Gamma$, κ.ο.κ).

Ωρα για μερικά παραδείγματα ☺!

Παράδειγμα 2.10:

Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα 20 m/s στον x -άξονα, και -15 m/s στον y -άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x -άξονα με μέτρο $a_x = 4 \text{ m/s}^2$, όπως στο Σχήμα 2.13.

- Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή.
- Βρείτε την ταχύτητασε μέτρο και κατεύθυνση όταν $t = 5$, δηλ. τη γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον άξονα των x .
- Βρείτε τις x, y συντεταγμένες του σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή t , και το διάνυσμα θέσης $r(t)$.



Σχήμα 2.13: Παράδειγμα κίνησης στο επίπεδο.

Λύση:

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση στον άξονα x' και ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή ταχύτητα (μηδενική επιτάχυνση) στον y' άξονα. Επιλέγουμε τις συμβατικές θετικές φορές για τους δυο άξονες (δεξιά και επάνω), ενώ σημείο αναφοράς του συστήματος συντεταγμένων είναι το (0,0).

(α') Χρειαζόμαστε το διάνυσμα της ταχύτητας για κάθε t , με άλλα λόγια θέλουμε τη στιγμιαία ταχύτητα $\vec{u}(t)$. Για μια οποιαδήποτε διαδρομή από τη συμβολή των αξόνων ως μια τυχαία τελική θέση, η σχέση

$$\vec{u}_f = \vec{u}_i + \vec{a}t \quad (2.101)$$

$$= (u_{x_i}\vec{i} + u_{y_i}\vec{j}) + (a_x\vec{i} + a_y\vec{j})t \quad (2.102)$$

$$= (20\vec{i} - 15\vec{j}) + (4\vec{i} + 0\vec{j})t \quad (2.103)$$

$$= (20 + 4t \text{ m/s})\vec{i} + (-15 \text{ m/s})\vec{j} \quad (2.104)$$

δηλ.

$$\vec{u}(t) = ((20 + 4t) \text{ m/s})\vec{i} - (15 \text{ m/s})\vec{j} \quad (2.105)$$

Εναλλακτικά, ξέρουμε ότι στον άξονα x' το σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση, άρα η ταχύτητά του σε μια διαδρομή από τη συμβολή των αξόνων ως μια τυχαία θέση περιγράφεται ως

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t = (20 + 4t) \text{ m/s} \implies \vec{u}_{x_f} = ((20 + 4t) \text{ m/s})\vec{i} \quad (2.106)$$

Αντίστοιχα, στον άξονα y' το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, άρα πολύ απλά

$$u_{y_f} = u_{y_i} + a_y t = -15 + 0t = -15 \text{ m/s} \implies \vec{u}_{y_f} = (-15 \text{ m/s})\vec{j} \quad (2.107)$$

Έχουμε τις δυο συνιστώσες της ταχύτητας για κάθε t , μπορούμε να τις προσθέσουμε για να βρούμε το συνολικό διάνυσμα της ταχύτητας ως

$$\vec{u}_f = \vec{u}_{x_f} + \vec{u}_{y_f} = ((20 + 4t) \text{ m/s})\vec{i} + (-15 \text{ m/s})\vec{j} = \vec{u}(t) \quad (2.108)$$

(β') Από το προηγούμενο ερώτημα, για $t = 5 \text{ s}$ έχουμε

$$\vec{u}(5) = (40 \text{ m/s})\vec{i} - (15 \text{ m/s})\vec{j} \quad (2.109)$$

οπότε το μέτρο της ταχύτητας είναι

$$|\vec{u}(5)| = \sqrt{40^2 + (-15)^2} \approx 42.7 \text{ m/s} \quad (2.110)$$

και η γωνία του με τον άξονα x' είναι

$$\theta_{t=5} = \tan^{-1}\left(\frac{-15}{40}\right) \approx -21^\circ \quad (2.111)$$

(γ') Ας μελετήσουμε ξανά την κίνηση κατά άξονες, για μια τυχαία διαδρομή από τη συμβολή των αξόνων ως μια οποιαδήποτε θέση της κίνησης:

- Στον y -άξονα, η κίνηση είναι ευθύγραμμη με σταθερή ταχύτητα, οπότε ισχύει η μόνη σχέση που γνωρίζουμε

$$y_f = y_i + u_y t = -15t \text{ m} \quad (2.112)$$

- Στον x -άξονα, η κίνηση είναι ευθύγραμμη με σταθερή επιτάχυνση, οπότε

$$x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2 = 20t + 2t^2 \text{ m} \quad (2.113)$$

Ουσιαστικά λοιπόν βρήκαμε

$$x(t) = 20t + 2t^2 \text{ m} \implies \vec{x}(t) = ((20t + 2t^2) \text{ m})\vec{i} \quad (2.114)$$

$$y(t) = -15t \text{ m} \implies \vec{y}(t) = (-15t \text{ m})\vec{j} \quad (2.115)$$

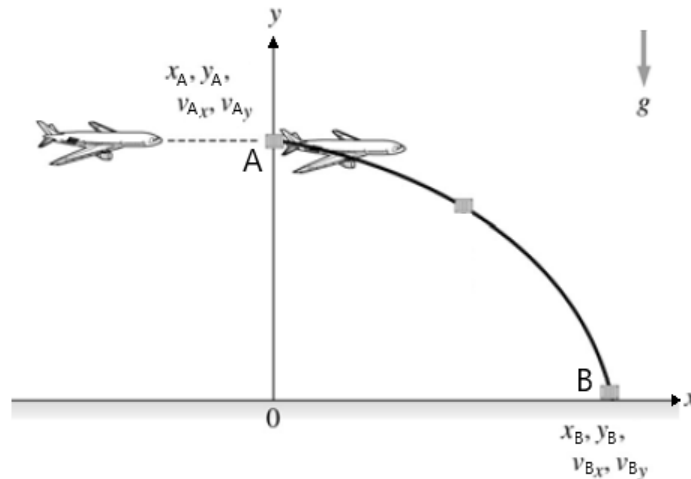
και έτσι το διάνυσμα θέσης γράφεται

$$\vec{r}(t) = \vec{x}(t) + \vec{y}(t) = ((20t + 2t^2) \text{ m})\vec{i} - (15t \text{ m})\vec{j} \quad (2.116)$$

Παράδειγμα 2.11:

Ένα αεροπλάνο της NASA θέλει να ρίξει ένα πακέτο με προμήθειες (φαγητό, εργαλεία) σε επιστήμονες που δουλεύουν σε ένα παγόβουνο στη Γροιλανδία. Το αεροπλάνο εκτελεί οριζόντια πτήση, 100 μέτρα πάνω και παράλληλα από το παγόβουνο, με ταχύτητα 150 m/s. Οι επιστήμονες κατασκεύασαν ένα μικρό στόχο στο έδαφος για να δείξουν στον πιλότο που πρέπει να ρίξει το πακέτο. Πόσα μέτρα πριν το στόχο πρέπει να γίνει η ρίψη ώστε να πέσει το πακέτο στο σωστό σημείο;

Λύση: Δείτε το Σχήμα 2.14. Θέτουμε το σύστημα αξόνων όπως στο σχήμα, με τον άξονα x' ακριβώς



Σχήμα 2.14: Αεροπλάνο που ρίχνει προμήθειες.

πάνω στο έδαφος (και άρα τον άξονα y' κάθετο σε αυτό). Η κίνηση μπορεί να αναλυθεί σε δυο άξονες, οριζόντιο και κατακόρυφο. Προφανώς επιλέγουμε θετική φορά κίνησης προς τα πάνω και προς τα δεξιά για τους δυο άξονες αντίστοιχα. Έστω η διαδρομή $A \rightarrow B$, από το σημείο που το πακέτο απελευθερώνεται από το αεροπλάνο ως το σημείο προσγείωσης. “Πατάμε” το χρονόμετρό μας στο σημείο A. Το σημείο ρίψης θα έχει μεταβλητές με δείκτη A ενώ το σημείο προσγείωσης θα έχει μεταβλητές με δείκτη B. Το πακέτο εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση στο επίπεδο, με σταθερή επιτάχυνση. Το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας δείχνει κατακόρυφα προς το έδαφος και γράφεται ως $\vec{g} = (-9.8 \text{ m/s}^2)\vec{j}$.

Ας αναλύσουμε την κίνηση. Για την κίνηση στον οριζόντιο άξονα, όπου το σώμα εκτελεί κίνηση με σταθερή ταχύτητα, έχουμε

$$x_B = x_A + u_{Ax}t = 0 + 150t = 150t \quad (2.117)$$

Από την κίνηση στον κατακόρυφο άξονα, όπου το σώμα εκτελεί σταθερά επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση και χωρίς αρχική ταχύτητα, έχουμε

$$y_B = y_A + u_{Ay}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \iff 0 = 100 + 0 - \frac{1}{2}9.8t^2 \implies t = \sqrt{\frac{200}{9.8}} = 4.518 \text{ s} \quad (2.118)$$

Από τη Σχέση (2.117), αντικαθιστώντας, έχουμε

$$x_B = 677.7 \text{ m} \implies \vec{x}_B = (677.7 \text{ m})\vec{i} \quad (2.119)$$

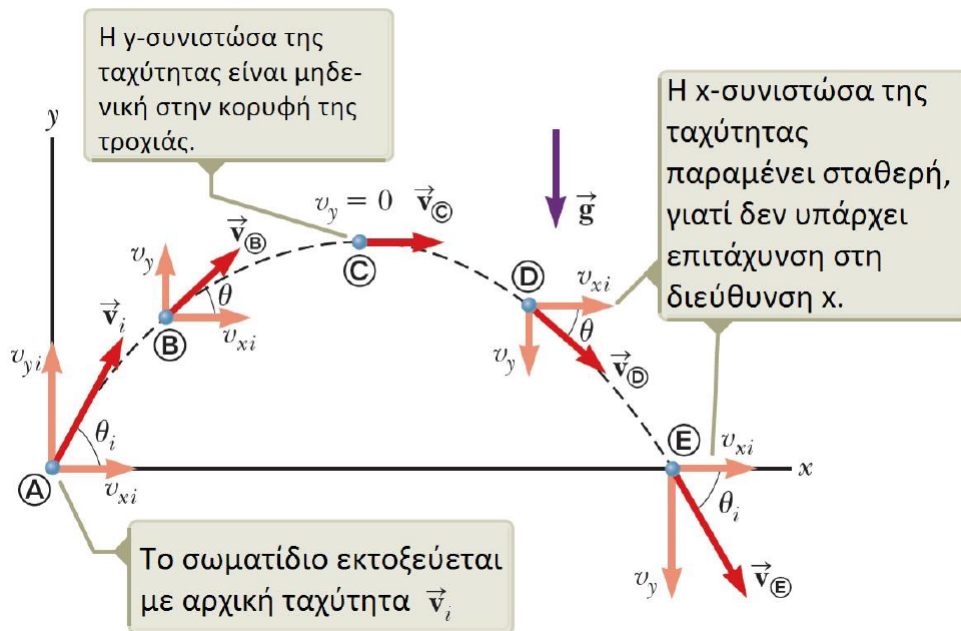
Άρα πρέπει να αφεθεί το πακέτο 677.7 μέτρα πριν το σημείο B.

2.3.7 Βολή

Μια πολύ κλασική κίνηση στο διδιάστατο χώρο είναι η **βολή** – η κίνηση μιας πέτρας όταν την πετάτε στη θάλασσα, ενός βλήματος που φεύγει από όπλο στραμμένο στον αέρα, κλπ. Η μελέτη της δεν είναι διαφορετική από όσα έχουμε δει ως τώρα στην κίνηση σε δυο διαστάσεις, αλλά λόγω της φύσης της έχει μερικά ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που είναι καλό να γνωρίζουμε εκ των προτέρων, καθώς μας απλοποιούν ιδιαίτερα το χειρισμό της. Τα βασικά της χαρακτηριστικά είναι τα εξής:

- Αν αγνοήσουμε τις αντιστάσεις του αέρα (πράγμα που συνήθως κάνουμε), η επιτάχυνση της κίνησης στον x άξονα είναι μηδενική. Θεωρούμε θετική φορά προς τα δεξιά για τον άξονα αυτό.
- Η επιτάχυνση της κίνησης στον y άξονα είναι ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας, $\vec{g} = (-9.8 \text{ m/s}^2)\vec{j}$. Θεωρούμε θετική φορά της κίνησης προς τα πάνω για τον άξονα αυτό.
- Η γωνία θ που εκτελείται η βολή ικανοποιεί τη σχέση $0 < \theta < \pi/2$.

Μπορούμε να δούμε το Σχήμα 2.15 για να καταλάβουμε περισσότερα αναλύοντας την τροχιά της κίνησης. Αν υποθέσουμε ότι το σώμα που βάλλεται εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $\vec{u}_i$ υπό γωνία θ_i , όπως στη



Σχήμα 2.15: Βολή.

θέση (A), τότε αναλύοντας το διάνυσμα της ταχύτητας σε συνιστώσες, έχουμε

$$\vec{u}_{xi} = u_{xi}\vec{i} = u_i \cos(\theta_i)\vec{i} \quad (2.120)$$

$$\vec{u}_{yi} = u_{yi}\vec{j} = u_i \sin(\theta_i)\vec{j} \quad (2.121)$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η x -συνιστώσα της ταχύτητας παραμένει σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια της τροχιάς. Αυτό συμβαίνει γιατί, όπως είπαμε, δεν υπάρχει επιτάχυνση στην κίνηση στο x -άξονα ώστε να μεταβάλλει την ταχύτητα. Με άλλα λόγια, όσον αφορά τον οριζόντιο άξονα το σώμα εκτελεί κίνηση με σταθερή ταχύτητα $\vec{u}_{xi}$. Η μοναδική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση με σταθερή ταχύτητα είναι η

$$x_f = x_i + u_{xi}t \quad (2.122)$$

Παρατηρήστε ότι στα στιγμιότυπα (A), (B), (C) η y -συνιστώσα της ταχύτητας μειώνεται διαρκώς ως ότου μηδενιστεί στη θέση (C). Σε όλο το κομμάτι αυτό της κίνησης, η ταχύτητα μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση

$$u_y = u_{y_i} + gt \quad (2.123)$$

με $g = -9.8 \text{ m/s}^2$. Στο υπόλοιπο της τροχιάς της κίνησης – στιγμιότυπα (C), (D), (E) – η y -συνιστώσα της ταχύτητας μεγαλώνει κατά μέτρο και έχει φορά προς τα κάτω, μέχρι το σημείο επιστροφής (E) όπου η γωνία πτώσης είναι ίδια με την αρχική γωνία θ_i , και δεδομένου ότι η x -συνιστώσα δεν αλλάζει, δεν μπορεί να αλλάξει και η y -συνιστώσα. Οπότε η στιγμιαία ταχύτητα σε αυτή τη θέση είναι ίδια σε μέτρο με την αρχική ταχύτητα. Τέλος, η y -συνιστώσα της κίνησης περιγράφεται από τις γνωστές μας σχέσεις της επιταχυνόμενης κίνησης με σταθερή επιτάχυνση:

$$u_{y_f} = u_{y_i} - gt \quad (2.124)$$

$$u_{avg} = \frac{1}{2}(u_{y_i} + u_{y_f}) \quad (2.125)$$

$$y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{y_i} + u_{y_f})t \quad (2.126)$$

$$y_f = y_i + u_{avg}t \quad (2.127)$$

$$y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.128)$$

$$u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i) \quad (2.129)$$

Ας γράψουμε τις δυο διανυσματικές σχέσεις της διδιάστατης κίνησης, προσαρμοσμένες στη βολή. Δείτε τον Πίνακα 2.5.

Διανυσματικές Εξισώσεις Βολής			
A/A	Σχέση	A/A	Σχέση
1	$\vec{u}(t) = \vec{u}_i + \vec{g}t$	2	$\vec{r}(t) = \vec{r}_i + \vec{u}_i t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

Πίνακας 2.5: Διανυσματικές εξισώσεις βολής.

Βλέπετε ότι δεν έχουν καμία διαφορά με αυτές που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, μόνο που πλέον ξέρουμε εξ' αρχής την πληροφορία της επιτάχυνσης³.

Εύρος Βολής

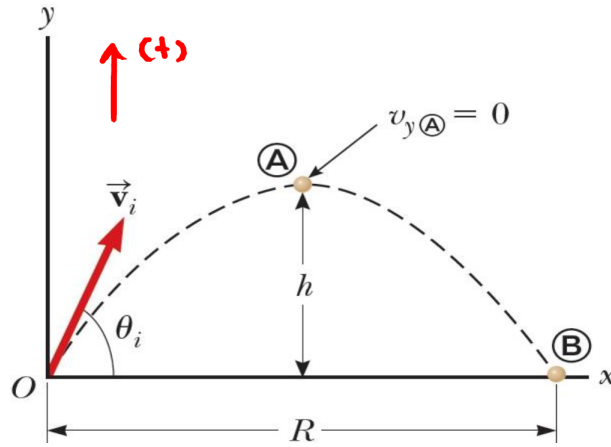
Το εύρος βολής θεωρείται η οριζόντια απόσταση R μεταξύ του σημείου εκτόξευσης και του σημείου πτώσης, όπως στο Σχήμα 2.16, υπό την προϋπόθεση ότι βρίσκονται στο ίδιο νοτιό οριζόντιο επίπεδο – σε διαφορετική περίπτωση, δεν μπορούμε να μιλήσουμε για εύρος αλλά για κάποια οριζόντια απόσταση d από το σημείο εκτόξευσης. Θεωρούμε την αρχή του συστήματος συντεταγμένων μας στο σημείο που ξεκινά η βολή και μελετούμε τη διαδρομή $O \rightarrow B$. Στον x -άξονα, η κίνηση του σώματος είναι ευθύγραμμη με σταθερή ταχύτητα, οπότε

$$x_B = x_O + u_x t \iff x_B - x_O = u_x t \iff R = u_x t = u_i \cos(\theta_i)t \quad (2.130)$$

Στον y -άξονα η κίνηση είναι ευθύγραμμη επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση, οπότε

$$y_B = y_O + u_{y_O}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.131)$$

³Το μέτρο της οποίας μπορεί όμως να αλλάξει, είτε σε διαφορετικές περιοχές της Γης είτε σε ειδικές καταστάσεις – εμείς πάντα όμως θα θεωρούμε ότι ισούται με 9.8 m/s^2 .



Σχήμα 2.16: Εύρος και Μέγιστο Ύψος βολής.

$$0 = 0 + u_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.132)$$

$$\frac{1}{2}gt^2 = u_{y0}t \quad (2.133)$$

$$\frac{1}{2}gt = u_i \sin(\theta_i) \quad (2.134)$$

$$t = \frac{2u_i \sin(\theta_i)}{g} \quad (2.135)$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$R = u_i \cos(\theta_i) \frac{2u_i \sin(\theta_i)}{g} = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g} \quad (2.136)$$

Έτσι

$$R = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g} \quad (2.137)$$

Μπορείτε να αποδείξετε ότι συμπληρωματικές τιμές της αρχικής γωνίας θ_i οδηγούν σε ίδια τιμή του εύρους βολής;

Μέγιστο Ύψος Βολής

Το μέγιστο ύψος βολής θεωρείται το μέγιστο κατακόρυφο ύψος που φτάνει ένα σώμα που βάλλεται. Με άλλα λόγια, το ύψος h όπου $\vec{u}_{y_h} = 0$, όπως στο Σχήμα 2.16. Θεωρούμε την αρχή του συστήματος συντεταγμένων μας στο σημείο που ξεκινά η βολή. Ας δουλέψουμε στη διαδρομή $O \rightarrow A$. Γνωρίζουμε ότι για την y -συνιστώσα της κίνησης στη βολή από την αρχική θέση $(0, 0)$ ως τη θέση μέγιστου ύψους (A) ισχύει

$$y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.138)$$

$$h = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.139)$$

$$= 0 + u_i \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.140)$$

Επίσης μεταξύ των ίδιων θέσεων ισχύει

$$u_{y_f} = u_{y_i} - gt \iff t = \frac{u_{y_i}}{g} \quad (2.141)$$

Αντικαθιστώντας

$$h = u_i \sin(\theta_i) \left(\frac{u_{yi}}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{u_{yi}}{g} \right)^2 \quad (2.142)$$

και εφόσον $u_{yi} = u_i \sin(\theta_i)$, καταλήγουμε ότι

$$h = \frac{u_i^2 \sin^2(\theta_i)}{2g} \quad (2.143)$$

Συνολικά λοιπόν για το εύρος και το μέγιστο ύψος βολής θα έχουμε τις σχέσεις του Πίνακα 2.6.

Εξισώσεις Μέγιστου Ύψους και Εύρους Βολής			
Ποσότητα	Σχέση	Ποσότητα	Σχέση
Μέγιστο Ύψος	$h = \frac{u_i^2 \sin^2(\theta_i)}{2g}$	Εύρος	$R = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g}$

Πίνακας 2.6: Μέγιστο ύψος και εύρος βολής.

Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.12:

Ο Γιάννης Αντετοκούνμπο σουτάρει την μπάλα υπό γωνία 40 μοιρών με το οριζόντιο επίπεδο, σε απόσταση 10 μέτρων από το καλάθι. Το ύψος του είναι 2.0 μέτρα και το ύψος της μπασκέτας είναι 3.0 μέτρα^α.



Σχήμα 2.17: Ο Γιάννης.

- (α') Ποιά είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς της;
- (β') Με ποιιά ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλώ (υποθέστε ότι αρκεί η μπάλα να φτάσει τη στεφάνη);
- (γ') Ποιό είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει η μπάλα;
- (δ') Τι υποθέσεις πρέπει να κάνετε ώστε να χρησιμοποιήσετε τον τύπο του εύρους βολής R για να βρείτε την αρχική ταχύτητα;

^α Στην πραγματικότητα, τα αντίστοιχα ύψη είναι 2.11 και 3.05 μέτρα.

Λύση:

- (α') Η επιτάχυνση της μπάλας είναι σταθερή και ίση με $\vec{g} = (-9.8 \text{ m/s}^2)\vec{j}$ σε όλη τη διάρκεια της τροχιάς της, αν θεωρήσουμε αμελητέα την αντίσταση του αέρα. Η επιτάχυνση δεν αλλάζει σε διαφορετικά σημεία της τροχιάς – η ερώτηση είναι σκόπιμα παραπλανητική. ☹

- (β') Θεωρούμε σημείο αναφοράς τη θέση O , δηλ. τη θέση που η μπάλα φεύγει από τα χέρια του Γιάννη. Η μπάλα καταλήγει στο καλάθι στη θέση A . Στον άξονα $x'x$ της κίνησης της μπάλας, η μπάλα εκτελεί κίνηση με σταθερή ταχύτητα, άρα

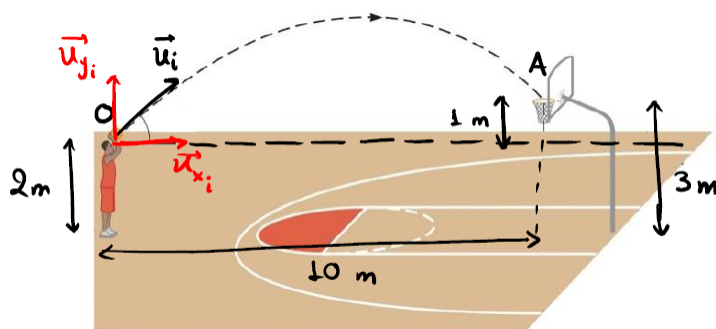
$$x_A = x_O + u_{xO}t \iff 10 = 0 + u_O \cos(\theta_O)t \implies t = \frac{10}{u_O \cos(40)} \quad (2.144)$$

Στον $y'y$ άξονα, η μπάλα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση (τη βαρυτική). Τότε, η θέση της μπάλας μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση

$$y_A = y_O + u_{yO}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.145)$$

$$1 = 0 + u_O \sin(\theta_O)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.146)$$

$$1 = u_O \sin(40)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.147)$$



Σχήμα 2.18: Ο Γιάννης σουτάρει.

και αντικαθιστώντας το χρόνο t , έχουμε

$$1 = 10 \tan(40) - \frac{1}{2}g \frac{100}{u_O^2 \cos^2(40)} \implies u_O = 10.7 \text{ m/s} \quad (2.148)$$

- (γ') Το μέγιστο ύψος που φτάνει η μπάλα είναι

$$h = \frac{u_O^2 \sin^2(\theta_O)}{2g} = 2.4 \text{ m} \quad (2.149)$$

Προσέξτε, η μέτρηση αυτή γίνεται με σημείο αναφοράς το ύψος του Γιάννη. Συνολικά, μετρώντας από το έδαφος, το μέγιστο ύψος είναι $h = 2 + 2.4 = 4.4 \text{ m}$.

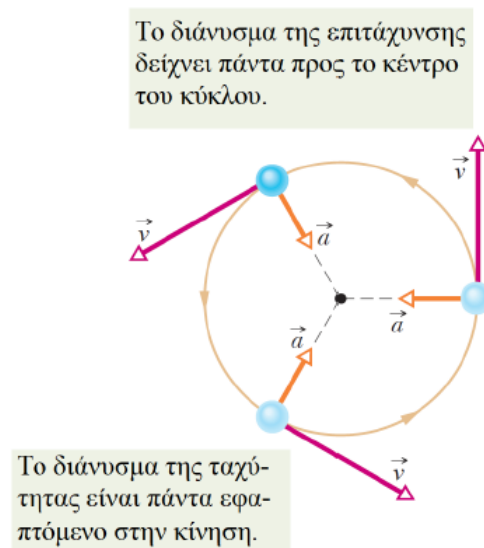
- (δ') Για να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του εύρους βολής, πρέπει να υποθέσουμε ότι το ύψος της στεφάνης είναι κι αυτό 2.0 m ή ότι ο Γιάννης σουτάρει από ύψος 3.0 m, ώστε η θέση O και η θέση A να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο παράλληλο με το έδαφος. Αν υποθέσουμε, πιο ρεαλιστικά, ότι ο Γιάννης σουτάρει την μπάλα από ύψος 3.0 μέτρων, τότε η θέση O και η θέση A συνδέονται με μια ευθεία παράλληλη στο έδαφος. Τότε το εύρος βολής θα μας δίνει

$$R = \frac{u_O^2 \sin(2\theta_O)}{g} \iff 10 = \frac{u_O^2 \sin(80)}{9.8} \implies u_O = \sqrt{\frac{98}{\sin(80)}} = 9.97 \text{ m/s} \quad (2.150)$$

Καταλαβαίνετε γιατί το αποτέλεσμα είναι διαφορετικό με το ερώτημα (β);

2.3.8 Κυκλική Κίνηση

Η κυκλική κίνηση είναι μια ιδιαίτερη περίπτωση διδιάστατης κίνησης όπου το σώμα κινείται σε κύκλο ή σε κυκλικό τόξο που απέχει r από το κέντρο της κίνησης, όπως στο Σχήμα 2.19.



Σχήμα 2.19: Σώμα σε κυκλική κίνηση.

Μας ενδιαφέρει η **ομαλή** κυκλική κίνηση, όπου η αριθμητική ταχύτητα του σώματος είναι σταθερή. Όπως καταλαβαίνετε από το Σχήμα 2.19, η ταχύτητα – ως διάνυσμα – δεν είναι σταθερή και μάλιστα είναι πάντα εφαπτόμενη στην καμπύλη της κίνησης με φορά προς την κατεύθυνση της κίνησης. Αφού η ταχύτητα λοιπόν δεν είναι σταθερή, το σώμα επιταχύνεται! Θυμηθείτε: η επιτάχυνση είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας, και η τελευταία δεν είναι μονόμετρο μέγεθος αλλά διανυσματικό! Μεταβολή στην κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας σημαίνει παρουσία επιτάχυνσης! Η επιτάχυνση του αυτή είναι σταθερή κατά μέτρο και έχει την κατεύθυνση που φαίνεται στο Σχήμα 2.19, η οποία είναι ακτινικά “προς τα μέσα”, προς το κέντρο του κύκλου που διαγράφει το κινούμενο σώμα. Προφανώς κι εδώ, η επιτάχυνση ως διανυσματικό μέγεθος δεν είναι σταθερό. Η τόσο σημαντική αυτή επιτάχυνση δε θα μπορούσε να μην έχει όνομα: **κεντρομόλος επιτάχυνση**. Μπορεί κανείς να δείξει – όχι εύκολα – ότι το μέτρο της είναι

$$a = \frac{u^2}{r} \quad (2.151)$$

με u το μέτρο της ταχύτητας και r την ακτίνα του κύκλου.

Πόσο χρόνο άραγε χρειάζεται ένα σώμα να διατρέξει την περιφέρεια του κύκλου μια φορά; Το μήκος του κύκλου είναι $2\pi r$, και η ταχύτητα κίνησης έχει μέτρο u , άρα εύκολα συμπεραίνουμε ότι ο χρόνος που απαιτείται είναι

$$T = \frac{2\pi r}{u} \quad (2.152)$$

Η τόσο σημαντική αυτή χρονική ποσότητα ονομάζεται **περίοδος**.

Τέλος, καταλαβαίνετε από τις παραπάνω σχέσεις ότι ανάλογα την απόσταση r από το κέντρο του κύκλου, η ταχύτητα ενός σώματος

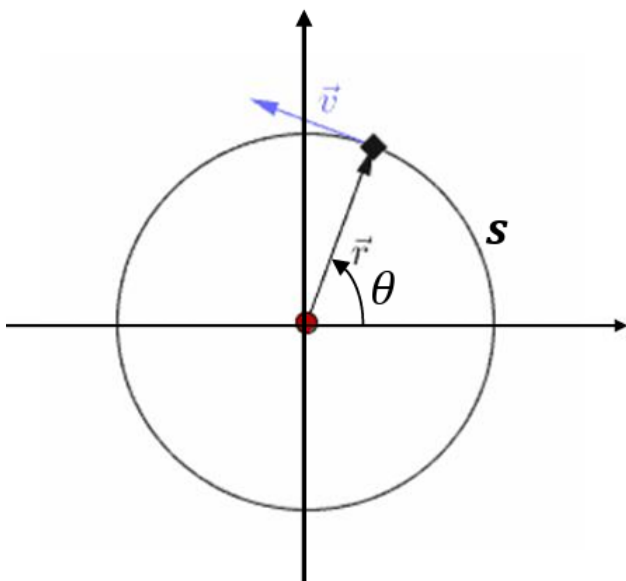
$$u = \frac{2\pi r}{T} \quad (2.153)$$

πρέπει να αλλάζει αν θέλουμε να διατρέχουμε τον κύκλο σε ίδιο χρονικό διάστημα (ίδια περίοδο) T . Με

βάση αυτή τη σχέση μπορούμε να ξαναγράψουμε την κεντρομόλο επιτάχυνση ως

$$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{2\pi v}{T} \quad (2.154)$$

Όμως εκτός της ταχύτητας υπάρχει ένα ακόμα μέγεθος που μας πληροφορεί για το ρυθμό με τον οποίο η ακτίνα της κυκλικής κίνησης διαγράφει γωνίες και το οποίο μέγεθος είναι ανεξάρτητο της απόστασης από το κέντρο του κύκλου. Ας ξεκινήσουμε ορίζοντας την περιφέρεια **γωνιακή θέση** του σώματος: αντί για τις γνωστές σας (x, y) συντεταγμένες, εκφράζουμε καλύτερα τη θέση του σωματιδίου συναρτήσει της απόστασης r από το κέντρο του κύκλου, και της γωνίας θ που αυτή διαγράφει ως προς τον άξονα x' . Αυτή η αναπαράσταση μοιάζει αρκετά με την πολική μορφή που γνωρίζουμε ήδη. Δείτε το Σχήμα 2.20.



Σχήμα 2.20: Γωνιακή θέση.

Από τη Γεωμετρία ξέρουμε ότι

$$\theta_{rad} = \frac{s}{r} \quad (2.155)$$

Αντίστοιχα με όσα έχουμε δει, η **γωνιακή μετατόπιση** ορίζεται ως

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i \quad (2.156)$$

με i, f τους συνήθεις δείκτες κάποιας αρχικής και τελικής γωνιακής θέσης, αντίστοιχα. Ο λόγος

$$\omega_{avg} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \quad (2.157)$$

ονομάζεται **μέση γωνιακή ταχύτητα**, και – όπως φαντάζεστε – αν $\Delta t \rightarrow 0$, τότε παίρνουμε τη **στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα**, δηλ.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{avg} = \frac{d}{dt}\theta(t) \quad (2.158)$$

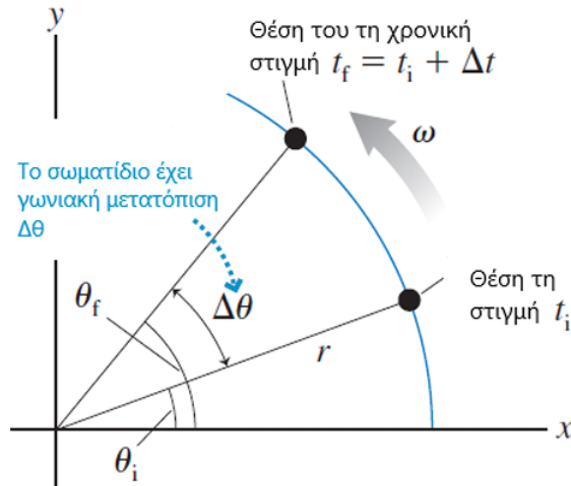
Η γωνιακή ταχύτητα ισούται με το ρυθμό μεταβολής της γωνιακής θέσης κατά την κυκλική κίνηση. Στην **ομαλή κυκλική κίνηση**, η μέση και η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα ταυτίζονται. Άρα $\omega = \omega_{avg}$, και λύνοντας τη Σχέση (2.157) ως προς τον αριθμητή παίρνουμε

$$\Delta\theta = \omega\Delta t \iff \theta_f - \theta_i = \omega(t_f - t_i) \quad (2.159)$$

Αν υποθέσουμε ότι $\theta_i = 0$ και ότι πατάμε το χρονόμετρό μας όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση θ_i , τότε

$$\theta_f = \theta_i + \omega t \quad (2.160)$$

Δείτε το Σχήμα 2.21.



Σχήμα 2.21: Γωνιακή θέση κατά την ομαλή κυκλική κίνηση.

Τέλος, μπορείτε εύκολα να δείξετε (κάντε το!) ότι

$$u = r\omega \quad (2.161)$$

$$a = r\omega^2 \quad (2.162)$$

Παράδειγμα 2.13:

Οι δορυφόροι που εκτοξεύονται στο διάστημα τοποθετούνται σε κυκλική τροχιά με τέτοιο τρόπο ώστε να μένουν συνεχώς πάνω από ένα σταθερό σημείο της Γης όσο αυτή γυρίζει. Αυτές οι τροχιές ονομάζονται *γεωσύγχρονες τροχιές*. Η ακτίνα της Γης είναι 6.37×10^6 m και το ύψος του δορυφόρου σε γεωσύγχρονη τροχιά είναι 3.58×10^7 m. Βρείτε την ταχύτητα και το μέτρο της επιτάχυνσης ενός δορυφόρου σε μια τέτοια τροχιά. Θεωρήστε ότι ένας δορυφόρος εκτελεί μια πλήρη περιστροφή μέσα σε 24 ώρες.

Λύση:

Ο δορυφόρος εκτελεί μια πλήρη περιστροφή σε 24 ώρες, δηλ. σε $T = 24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ s. Η ακτίνα της κίνησης του δορυφόρου με βάση το κέντρο της Γης είναι $r = 6.37 \cdot 10^6 + 3.58 \cdot 10^7 = 4.22 \cdot 10^7$ m. Έτσι, η ταχύτητα του δορυφόρου έχει μέτρο

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} = 3.07 \cdot 10^3 \text{ m/s} \quad (2.163)$$

και διεύθυνση που εφάπτεται στην καμπύλη της κίνησης και φορά προς τη φορά κίνησης του δορυφόρου. Η επιτάχυνση θα έχει μέτρο

$$a = \frac{u^2}{r} = 0.223 \text{ m/s}^2 \quad (2.164)$$

με κατεύθυνση ακτινικά προς το κέντρο της Γης.

Παράδειγμα 2.14:

Η άκρη του ελαστικού του αυτοκινήτου σας, ακτίνας $r = 0.3$ m, περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω , εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση. Πόση είναι η γωνιακή ταχύτητα όταν το αυτοκίνητο τρέχει με ταχύτητα $u = 54$ km/h;

Λύση:

Κατ' αρχάς πρέπει να μετατρέψουμε την ταχύτητα σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο, δηλ.

$$u = 54 \text{ km/h} \Rightarrow u = \frac{54000}{3600} = 15 \text{ m/s} \quad (2.165)$$

Γνωρίζουμε ότι

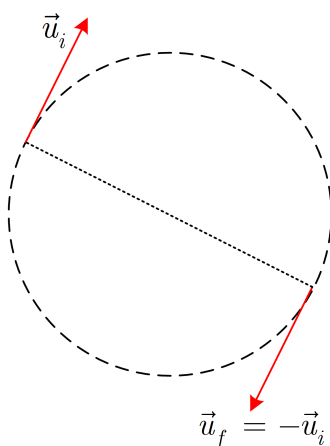
$$u = r\omega \Rightarrow \omega = \frac{u}{r} = \frac{15}{0.3} = 50 \text{ rad/s} \quad (2.166)$$

Παράδειγμα 2.15:

Οι πιλότοι μαχητικών αεροσκαφών προβληματίζονται όταν έχουν να πάρουν πολύ κλειστές στροφές λόγω της κεντρομόλου επιτάχυνσης. Καθώς αυτή αυξάνεται μπορεί να συμβεί μια κατάσταση γνωστή ως g-LOC, όπου ο πιλότος χάνει τις αισθήσεις του λόγω της προώθησης του αίματος από τον εγκέφαλο στα πόδια, πράγμα που προκαλεί εγκεφαλική υποξία. Ποιό είναι το μέτρο της επιτάχυνσης (σε μονάδες g) ενός αεροσκάφους που μπαίνει σε οριζόντια κυκλική στροφή με ταχύτητα $\vec{u}_i = 400\vec{i} + 500\vec{j}$ m/s για χρόνο $t = 24$ s και βγαίνει από τη στροφή (πριν κλείσει πλήρη κύκλο) με ταχύτητα $\vec{u}_f = -400\vec{i} - 500\vec{j}$ m/s;

Λύση:

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα εισόδου είναι αντίρροπο με το διάνυσμα εξόδου. Αυτό μπορεί να συμβεί αν το σκάφος εκτελέσει τη μισή διαδρομή της περιφέρειας του κύκλου, από τη στιγμή που η εκφώνηση μας πληροφορεί ότι το σκάφος δεν εκτελεί κανένα πλήρη κύκλο κατά την κίνησή του. Δείτε το Σχήμα 2.22. Από τα δεδομένα, έχουμε ότι ο χρόνος που απαιτείται για τη διαδρομή είναι $t = T/2 = 24$ s. Επίσης, η



Σχήμα 2.22: Αεροσκάφος σε κυκλική κίνηση.

ταχύτητα εισόδου (ή εξόδου) έχει μέτρο

$$|\vec{u}| = u = \sqrt{400^2 + 500^2} \approx 640.31 \text{ m/s} \quad (2.167)$$

Η ακτίνα της κίνησης δίνεται από τη σχέση

$$u = \frac{2\pi r}{T} \implies r = \frac{uT}{2\pi} = 4891.6 \text{ m} \quad (2.168)$$

Οπότε το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης θα είναι

$$a = \frac{u^2}{r} = 83.81 \text{ m/s}^2 \quad (2.169)$$

που αντιστοιχεί σε περίπου $a/g = 8.5 \implies 8.5 \text{ g}$.

2.4 Οι Νόμοι της Κίνησης

Ως τώρα μελετήσαμε κινήσεις σωμάτων: ορίσαμε θέσεις, ταχύτητες, επιταχύνσεις, αλλά δε μας ενδιέφερε καθόλου το **αίτιο** της κίνησης. Ήρθε η ώρα να μελετήσουμε κι αυτό! ☺ Μπορούμε να βρούμε κίνητρο για την ενασχόλησή μας με την αιτία της κίνησης αν θέσουμε κάποια ερωτήματα:

- Γιατί αλλάζει η κίνηση ενός αντικειμένου;
- Τι προκαλεί την κίνηση ή την ακινησία του;
- Γιατί είναι συνήθως πιο εύκολο να κινήσουμε ένα μικρό από ένα μεγάλο αντικείμενο;

Κλειδιά για τις απαντήσεις σε όλα τα ερωτήματα είναι δυο έννοιες:

- **Δύναμη – Force - F** που ασκείται στο αντικείμενο που κινείται
- **Μάζα – Mass - m** του αντικειμένου

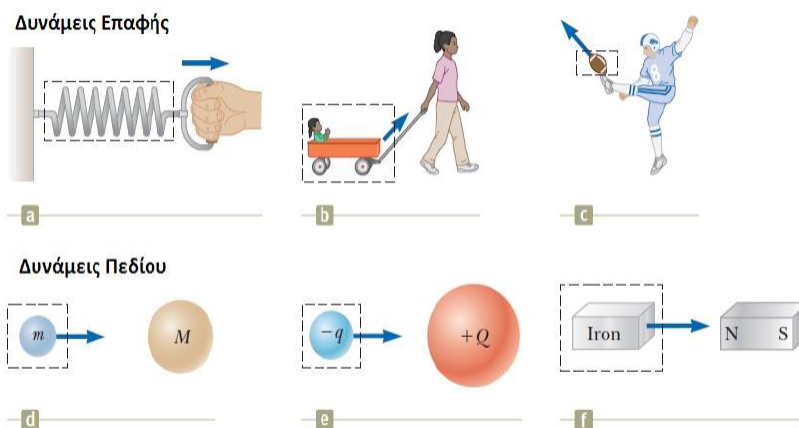
Ας τις δούμε μια-μια και ας τις αναλύσουμε.

2.4.1 Δύναμη

Η έννοια της δύναμης μας είναι γνωστή από την καθημερινότητά μας. Όταν πετάμε μια μπάλα, σπρώχνουμε μια ντουλάπα, ή ανοίγουμε ένα συρτάρι ουσιαστικά αλληλεπιδρούμε με αντικείμενα μέσω μυικής δράσης, δηλ. τους ασκούμε κάποια **δύναμη**, με αποτέλεσμα να αλλάζουμε την κινητική τους κατάσταση: αλλάζουμε την ταχύτητά τους! Άρα ένα πρώτο συμπέρασμα είναι ότι μια δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα αλλάζει πάντα την ταχύτητά του; Όχι! Γιατί στα προηγούμενα παραδείγματα η μπάλα μπορεί να είναι πάρα πολύ βαριά, η ντουλάπα μεγάλη και γεμάτη ρούχα, ενώ το συρτάρι μπορεί να είναι κλειδωμένο. Όμως μπορούμε με ασφάλεια να συμπεράνουμε ότι **αν κάτι προκαλεί την αλλαγή στην κινητική κατάσταση ενός αντικειμένου, αυτό είναι η παρουσία δυνάμεων**.

Σύμφωνα με την κλασική θεώρηση της Φυσικής υπάρχουν δυο κατηγορίες δυνάμεων: *δυνάμεις επαφής* και *δυνάμεις πεδίου*. Η φωτογραφία του Σχήματος 2.23 είναι ιδιαίτερα επεξηγηματική για το είδος των κατηγοριών αυτών. Πρέπει όμως να σημειωθεί ότι η κατηγοριοποίηση της Εικόνας 2.23 είναι κάπως παρωχημένη. Σήμερα, οι επιστήμονες έχουν ταξινομήσει τις δυνάμεις σε τέσσερις θεμελιώδεις κατηγορίες:

- (α') βαρυτικές,
- (β') ηλεκτρομαγνητικές,



Σχήμα 2.23: Δυνάμεις επαφής και δυνάμεις πεδίου.

(γ') ασθενείς πυρηνικές, και

(δ') ισχυρές πυρηνικές.

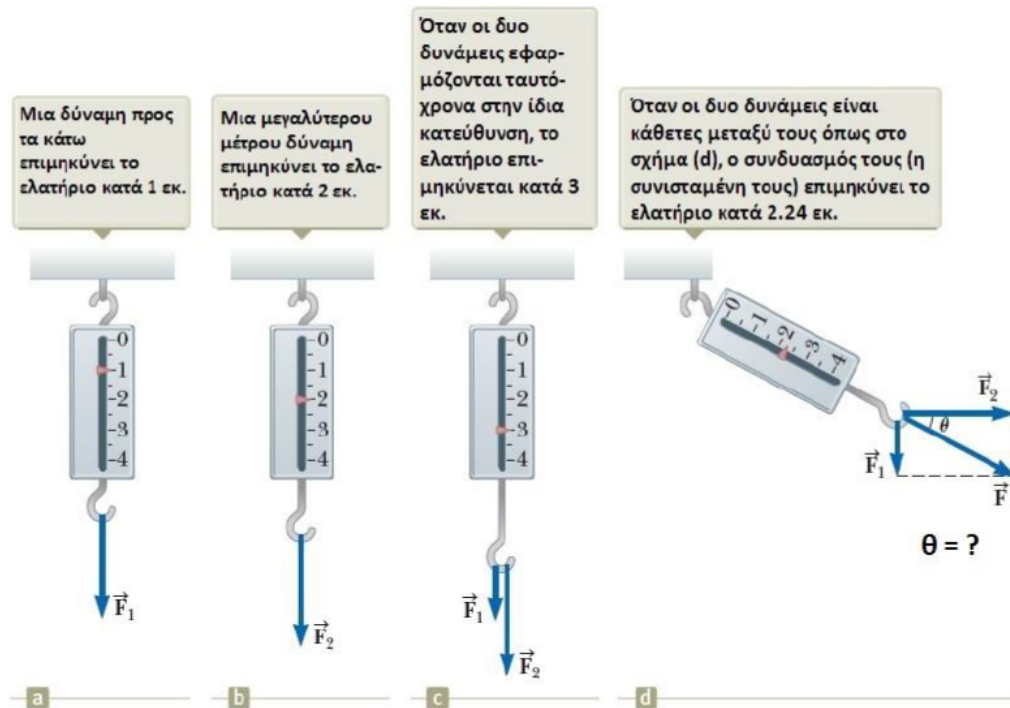
Παρατηρήστε ότι πολλές κοινές από την καθημερινότητά σας δυνάμεις όπως η ώθηση (σπρώξιμο) και η έλξη (τράβνηγμα), δυνάμεις τάσης νημάτων και ελατηρίου, και δυνάμεις τριβής δε φαίνεται να ανήκουν στις παραπάνω κατηγορίες. Αυτό σημαίνει ότι κάθε μία από αυτές τις δυνάμεις είναι στην πραγματικότητα μια εκδήλωση κάποιας ή κάποιων από τις παραπάνω θεμελιώδεις δυνάμεις.

Για παράδειγμα, σκεφτείτε μια μπάλα που στέκεται ακίνητη σε ένα οριζόντιο τραπέζι. Θα δούμε στην συνέχεια ότι στην μπάλα ασκούνται δυο δυνάμεις: η δύναμη του βάρους της και η κάθετη δύναμη που ασκεί το τραπέζι σε αυτή. Έχειδειχθεί ότι η κάθετη αυτή δύναμη – στο ατομικό επίπεδο – περιγράφεται ως εκδήλωση της ηλεκτρικής δύναμης μεταξύ φορτισμένων σωματιδίων μέσα στα άτομα των δύο επιφανειών σε επαφή (μπάλα - τραπέζι). Επειδή το βάρος της μπάλας “πιέζει” την επιφάνεια τραπεζιού στην οποία στηρίζεται, τα άτομα στην επιφάνεια του τραπεζιού συμπίεζονται και απομακρύνονται από τις θέσεις ισορροπίας τους. Οι ηλεκτρικές δυνάμεις μεταξύ των υποατομικών σωματιδίων δημιουργούν δυνάμεις “επαναφοράς” που “πιέζουν” προς τα πάνω την μπάλα σε μια προσπάθεια να αποκαταστήσουν την ισορροπία στην ατομική κλίμακα.

Επίσης, θα μιλήσουμε σύντομα για δυνάμεις τάσης σε νήματα (σχοινιά) και δυνάμεις ελατηρίου επάνω σε σώματα. Στην πραγματικότητα, αυτές είναι το αποτέλεσμα παρόμοιων παραμορφώσεων στις υποατομικές διατάξεις ισορροπίας. Όταν εφαρμόζεται τάση σε ένα σχοινί, οι συνεκτικές ηλεκτρικές δυνάμεις μεταξύ των ατόμων στο σχοινί προκαλούν τη μετάδοση της δύναμης, από σωματίδιο σε σωματίδιο, στο άλλο άκρο του σχοινιού και σε οποιοδήποτε αντικείμενο είναι δεμένο το σχοινί. Ομοίως, όταν τα ελατήρια τεντώνονται ή συμπιέζονται, τα υποατομικά σωματίδια ασκούν ανομοιόμορφες ηλεκτρικές δυνάμεις το ένα στο άλλο για να επαναφέρουν το ελατήριο στην κατάσταση ισορροπίας του (κατάσταση φυσικού μήκους του). Η τριβή είναι επίσης ένα παράδειγμα ηλεκτρικής δύναμης στο ότι, καθώς δύο επιφάνειες βρίσκονται σε στενή επαφή μεταξύ τους, υπάρχουν ηλεκτρικές έλξεις μεταξύ των υποατομικών σωματιδίων σε αυτές. Πρέπει να εφαρμοστούν άλλες δυνάμεις για να “σπάσουν” αυτούς τους προσωρινούς δεσμούς και να προκαλέσουν ολίσθηση – και άρα κίνηση – μεταξύ των επιφανειών. Φυσικά τέτοιες περιγραφές δυνάμεων είναι πολύ σημαντικές και ως γνώση και ως εφαρμογή, αν μελετούμε τις δυνάμεις σε μικροκοσμική κλίμακα. Για τις δικές μας ανάγκες, τέτοιες περιγραφές δεν είναι χρήσιμες – περιλαμβάνουν αρκετή περιττή πληροφορία.

Επιστρέφοντας στην έννοια της δύναμης, η τυπική μονάδα μέτρησης της δύναμης του Διεθνούς Συστήματος (S.I.) είναι το 1 Newton, ανεξάρτητα από το είδος της δύναμης που μετράται, και συνήθως γράφουμε 1 N. Πολύ σύντομα θα δούμε με τι ισούται αυτή η μονάδα μέτρησης. Σημειώστε ότι στην

περίπτωση πολύ γνωστών σας δυνάμεων όπως η τριβή, οποιαδήποτε μέτρηση δύναμης είναι στην πραγματικότητα η μέτρηση των συσσωρευτικών επιπτώσεων εκατομμυρίων ηλεκτρικών δυνάμεων που δρουν ταυτόχρονα. Παρ' όλα τα παραπάνω, εμείς θα μελετήσουμε δυνάμεις στο “μακροσκοπικό” τους επίπεδο, χωρίς να μας απασχολεί ιδιαίτερα τι συμβαίνει στο “μικροσκοπικό” επίπεδο. Η δύναμη λοιπόν είναι η αιτία μεταβολής της κινητικής κατάστασης ενός σώματος. Είναι η δύναμη μονόμετρο μέγεθος; Μπορούμε να το ελέγξουμε πειραματικά. Δείτε το Σχήμα 2.24. Αν τραβήξουμε ένα ελατήριο προς τα κάτω με μια δύναμη



Σχήμα 2.24: Η διανυσματική φύση της δύναμης.

μέτρου F_1 , τότε αυτό θα επιμηκυνθεί, έστω, κατά 0.01 m. Αν το τραβήξουμε με μεγαλύτερη δύναμη F_2 , τότε αυτό θα επιμηκυνθεί έστω κατά 0.02 m. Τώρα αν εφαρμόσουμε τις δυο αυτές δυνάμεις ταυτόχρονα, το ελατήριο θα επιμηκυνθεί κατά 0.03 m. Τέλος, αν οι δυο δυνάμεις είναι κάθετες μεταξύ τους, η συνολική (ή συνισταμένη δύναμη επιμηκύνει το ελατήριο κατά 0.024 m. Το μέτρο αυτής της δύναμης εξαρτάται από τη γωνία θ ανάμεσα στις δυο δυνάμεις. Μπορούμε να βρούμε ότι

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-F_1}{F_2}\right) \quad (2.170)$$

και αν θεωρήσουμε ότι η δύναμη είναι ανάλογη της μετατόπισης του ελατηρίου από τη θέση ισορροπίας – κάτι που πράγματι ισχύει, όπως θα δούμε αργότερα – τότε

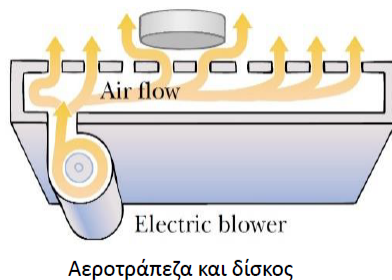
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-kx_1}{kx_2}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{0.01}{0.02}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx -26.6^\circ \quad (2.171)$$

Είναι εμφανές λοιπόν από το απλό αυτό πείραμα ότι **η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος: έχει μέτρο, διεύθυνση, και φορά.**

Υπεύθυνος για όλη τη θεωρία αλληλεπιδράσεων μέσω δύναμης είναι ο Isaac Newton, Άγγλος φυσικός και μαθηματικός. Θεωρείται ο πατέρας της Κλασικής Φυσικής καθώς διατύπωσε τα εργαλεία και τις έννοιες για τη μελέτη του φυσικού κόσμου, βασισμένος στις παρατηρήσεις του Galileo και του Kepler. Μεταξύ άλλων, είναι διάσημος για τη διατύπωση των περιφημων **τριών Νόμων της Κίνησης**. Αξίζει φυσικά να τους γνωρίσουμε.

2.4.2 Πρώτος Νόμος του Newton

Φανταστείτε μια αεροτράπεζα (ένα τραπέζι που φυσά αέρα κάθετα στην επιφάνεια του και προς τα πάνω, σαν αυτά που έχετε δει σε πάρκα διασκέδασης) και ένα δίσκο, όπως στο Σχήμα 2.25. Η αεροτράπεζα



Σχήμα 2.25: Αεροτράπεζα και δίσκος.

προσομοιώνει μια επιφάνεια χωρίς τριβές, δηλ. κρατά το δίσκο σε ελάχιστη απόσταση από την επιφάνεια της ώστε να μην ασκείται κάποια δύναμη στο δίσκο και αυτός να μπορεί να κινείται σχεδόν ελεύθερα. Αν τοποθετήσουμε απλά το δίσκο στην αεροτράπεζα, αυτός θα παραμείνει ακίνητος. Εμείς, ως παρατηρητές της όλης κατάστασης, είμαστε ακίνητοι δίπλα στην αεροτράπεζα: δεν πειράζουμε την αεροτράπεζα ή το δίσκο, ούτε αλληλεπιδρούμε με όποιον άλλο τρόπο μαζί τους. Η αεροτράπεζα, ο δίσκος, κι εμείς συνιστούμε ένα λεγόμενο **σύστημα αναφοράς**. Ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο ένα αντικείμενο δεν αλληλεπιδρά με άλλα αντικείμενα και έχει μηδενική επιτάχυνση ονομάζεται **αδρανειακό σύστημα αναφοράς**.

Αν τώρα ανέβουμε σε ένα τρένο μαζί με την αεροτράπεζα και το δίσκο, και παρατηρήσουμε την ίδια διάταξη ενώ το τρένο κινείται με **σταθερή ταχύτητα**, είμαστε ξανά σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Ξανά, δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ μας και η επιτάχυνση του δίσκου είναι μηδενική. Άρα, οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, είναι κι αυτό αδρανειακό.

Σκεφτείτε όμως την παρακάτω κατάσταση: το τρένο αρχίζει ξαφνικά να επιταχύνει. Επιταχύνει μάλιστα ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς της επιφάνειας της Γης. Έτσι, ένας παρατηρητής στο έδαφος, εκτός του τρένου, θα σας πει ότι – παρ' όλο που για σας μέσα στο τρένο ο δίσκος φαίνεται να επιταχύνει, καθώς ολισθαίνει πάνω από την αεροτράπεζα με τον ίδιο τρόπο που ολισθαίνουν τα χαρτιά που βάζετε στο ταμπλώ του αυτοκινήτου όταν ξεκινάτε απότομα σταματημένοι/ες σε ένα φανάρι – ο ίδιος βλέπει μεν το δίσκο να ολισθαίνει ως προς το τραπέζι, αλλά ως προς το έδαφος κινείται με την ίδια ταχύτητα! Έτσι, παρ' όλο που για μας ως επιβάτες του τρένου, το τρένο επιταχύνει ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς της Γης – κι έτσι εμείς παρατηρούμε μια φαινομενική επιτάχυνση του δίσκου ως προς εμάς – καθιστώντας έτσι το σύστημα αναφοράς μας ως **μη αδρανειακό**, υπάρχει ένα άλλο σύστημα αναφοράς που να είναι αδρανειακό. Με την ευκαιρία, ας αναφέρουμε ότι η τάση ενός αντικειμένου να αντιδρά σε οποιαδήποτε μεταβολή της κινητικής του κατάστασης ονομάζεται **αδράνεια**.

Μπορούμε λοιπόν να διατυπώσουμε τον **Πρώτο Νόμο του Newton**: απουσία εξωτερικών δυνάμεων και παρουσία αδρανειακού συστήματος αναφοράς, ένα αντικείμενο σε ηρεμία παραμένει σε ηρεμία και ένα αντικείμενο σε κίνηση με σταθερή ταχύτητα παραμένει σε κίνηση με σταθερή ταχύτητα. Με άλλα λόγια, όταν δεν επιδρά καμιά δύναμη σε ένα αντικείμενο (ή το σύνολο των δυνάμεων που επιδρούν έχει διανυσματικό άθροισμα μηδέν – θυμηθείτε, οι δυνάμεις είναι διανύσματα, και ως τέτοια μπορούν να έχουν άθροισμα μηδέν!), η επιτάχυνση του αντικειμένου είναι μηδενική. Η μαθηματική διατύπωση του παραπάνω Νόμου είναι η εξής:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad (2.172)$$

Ως τώρα λοιπόν έχουμε τα εξής συμπεράσματα:

- Ένα σώμα που επιταχύνει πρέπει να υπόκειται σε κάποια δύναμη, ειδικά κινείται με σταθερή ταχύτητα ή είναι ακίνητο
- Η δύναμη είναι το αίτιο της μεταβολής της κίνησης ενός σώματος

Κρατήστε επίσης ότι ως διανυσματική εξίσωση, μπορεί να αναλυθεί σε συνιστώσες κατά άξονες, όπως κάθε διάνυσμα, δηλ.

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \quad (2.173)$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \quad (2.174)$$

$$\sum \vec{F}_z = \vec{0} \quad (2.175)$$

2.4.3 Δεύτερος Νόμος του Newton

Σας είναι προφανές από την καθημερινή εμπειρία σας ότι διαφορετικά αντικείμενα χρειάζονται διαφορετικό μέτρο δύναμης για να μεταβάλλουν την κατάσταση κίνησης τους: δεν μπορείτε να κουνήσετε μια ντουλάπα κι ένα ποτήρι εφαρμόζοντας το ίδιο μέτρο δύναμης. Με άλλα λόγια, αντιστέκονται περισσότερο ή λιγότερο στη μεταβολή της κίνησης τους. Έχετε αναρωτηθεί το γιατί; Αν ναι, σίγουρα γνωρίζετε την απάντηση: γιατί έχουν διαφορετική **μάζα**. Η μάζα είναι ιδιότητα ενός σώματος που ορίζει “πόση” αντίσταση παρουσιάζει στην προσπάθεια μεταβολής της ταχύτητας του. Η μονάδα μέτρησης της μάζας στο S.I. είναι το **χιλιόγραμμα ή κιλό - kg**. Η έννοια της μάζας λοιπόν παίζει καθοριστικό ρόλο στη διατύπωση του **Δεύτερου Νόμου του Newton**. Μόλις λίγες γραμμές πριν, ο 1ος Νόμος του Newton μας εξήγησε τι συμβαίνει σε ένα σώμα όταν το άθροισμα των δυνάμεων (ή η συνισταμένη δύναμη) που ασκούνται επάνω του ισούται με μηδέν. Αμέσως τώρα θα διατυπώσουμε το 2ο Νόμο, όπου και θα δούμε τι συμβαίνει όταν μια ή περισσότερες δυνάμεις ασκούνται επάνω στο σώμα, με τη συνισταμένη τους να είναι διάφορη του μηδενός!

Σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η επιτάχυνση ενός σώματος είναι

- ευθέως ανάλογη της συνολικής δύναμης $\sum \vec{F}$ που ασκείται στο σώμα
- αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του, m

Με μαθηματικά, οι παραπάνω παρατηρήσεις διατυπώνονται ως

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} \quad (2.176)$$

που γράφεται στην πιο γνώριμη σας μορφή

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (2.177)$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να βρούμε και τη μονάδα μέτρησης της δύναμης: είναι $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$, που για προφανείς λόγους ονομάστηκε Newton και συμβολίζεται με το γράμμα N. Κι εδώ, ως διανυσματική εξίσωση που είναι η παραπάνω, μπορεί να αναλυθεί σε συνιστώσες κατά άξονες, όπως κάθε διάνυσμα, δηλ.

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \quad (2.178)$$

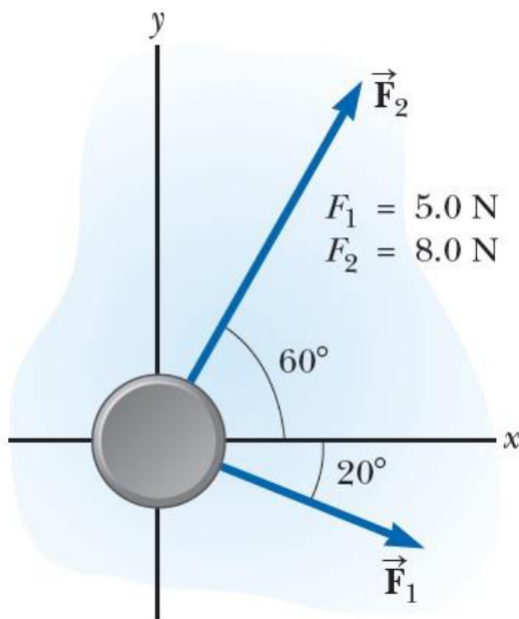
$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y \quad (2.179)$$

$$\sum \vec{F}_z = m\vec{a}_z \quad (2.180)$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.16:

Ένας δίσκος του hockey στον πάγο, μάζας 0.3 kg, ολισθαίνει ελεύθερα σε οριζόντια επιφάνεια πάγου. Δυο μπαστούνια τον χτυπούν ταυτόχρονα, με δυνάμεις και υπό γωνίες όπως στην Εικόνα 2.26. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της επιτάχυνσης του δίσκου.



Σχήμα 2.26: Παράδειγμα 2ου Νόμου Newton.

Λύση:

Ο πάγος προσομοιώνει επιφάνεια χωρίς τριβές. Η επιτάχυνση θα είναι προς την ίδια κατεύθυνση με τη συνισταμένη των δυνάμεων, λόγω του 2ου Νόμου του Newton. Η γωνία των 20° του σχήματος είναι στην πραγματικότητα -20° , έτσι όπως μας δίνεται. Θεωρούμε το δίσκο να βρίσκεται στη συμβολή ενός συστήματος αξόνων και θα χρησιμοποιήσουμε ανάλυση σε συνιστώσες. Από το 2ο Νόμο του Newton στο επίπεδο θα έχουμε

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \quad (2.181)$$

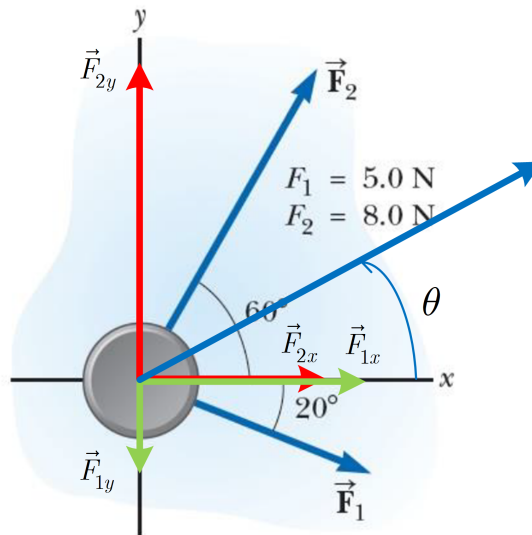
οπότε αρκεί να βρούμε τις επιμέρους συνιστώσες της επιτάχυνσης. Στην προσπάθειά μας αυτή θα πρέπει να δουλέψουμε κατά άξονες και να εφαρμόσουμε το 2ο Νόμο του Newton σε αυτούς. Ας αναλύσουμε τις δυνάμεις σε άξονες, όπως στο Σχήμα 2.27, και ας χρησιμοποιήσουμε και τα μοναδιαία διανύσματα. Στον άξονα x , θα έχουμε

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \iff \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} = m\vec{a}_x \quad (2.182)$$

$$F_{1x}\vec{i} + F_{2x}\vec{i} = ma_x\vec{i} \quad (2.183)$$

$$a_x\vec{i} = \frac{F_{1x}\vec{i} + F_{2x}\vec{i}}{m} \quad (2.184)$$

$$a_x\vec{i} = \frac{F_1 \cos(-20^\circ)\vec{i} + F_2 \cos(60^\circ)\vec{i}}{0.3} = (29 \text{ m/s}^2)\vec{i} \quad (2.185)$$



Σχήμα 2.27: Παράδειγμα 2ου Νόμου Newton – ανάλυση σε συνιστώσες.

Όμοια, στον άξονα y , έχουμε

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y \iff \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} = m\vec{a}_y \quad (2.186)$$

$$F_{2y}\vec{j} + F_{1y}\vec{j} = ma_y\vec{j} \quad (2.187)$$

$$a_y\vec{j} = \frac{F_{2y}\vec{j} + F_{1y}\vec{j}}{m} \quad (2.188)$$

$$a_y\vec{j} = \frac{F_2 \sin(60)\vec{j} + F_1 \sin(-20)\vec{j}}{0.3} = (17 \text{ m/s}^2)\vec{j} \quad (2.189)$$

Οπότε

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = (29 \text{ m/s}^2)\vec{i} + (17 \text{ m/s}^2)\vec{j} \quad (2.190)$$

Μπορούμε να βρούμε αν θέλουμε το μέτρο και την κατεύθυνση του διανύσματος της επιτάχυνσης ως

$$|\vec{a}| = \sqrt{29^2 + 17^2} \approx 33.6 \text{ m/s}^2 \quad (2.191)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{17}{29}\right) \approx 30.3^\circ \quad (2.192)$$

Μπορούμε όμως να δούμε και μια εναλλακτική λύση, που βασίζεται στην επιλογή **θετικής φοράς** του συστήματος αξόνων, και στην εύρεση των προσήμων των αναπαραστάσεων, όπως γινόταν στις εξισώσεις της κινητικής! Ας δούμε αυτή τη λύση, ορίζοντας θετικές φορές των κινήσεων τις συμβατικές (πάνω και δεξιά). Τα διανύσματα που “κοιτάζουν” προς τις θετικές φορές θα έχουν θετικό πρόσημο στις εξισώσεις μας ενώ όσα “κοιτάζουν” προς τις αρνητικές φορές θα έχουν αρνητικό πρόσημο.

Ξεκινώντας πάλι με τον x άξονα,

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \iff \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} = m\vec{a}_x \quad (2.193)$$

Ως εδώ η λύση μας είναι ίδια με πριν. Τώρα, με την επιλογή θετικής φοράς, μπορούμε να “πετάξουμε” το διανυσματικό συμβολισμό και να πάμε σε καθαρά αλγεβρικές εξισώσεις με βάση τα μέτρα των διανυσμάτων: τα διανύσματα $\vec{F}_{1x}$ και $\vec{F}_{2x}$ έχουν φορά προς το θετικό ημιάξονα του x , άρα θα έχουν θετικό πρόσημο. Έτσι,

$$F_{1x} + F_{2x} = ma_x \iff a_x = \frac{F_{1x} + F_{2x}}{m} \quad (2.194)$$

$$a_x = \frac{F_1 \cos(20) + F_2 \cos(60)}{0.3} = 29 \text{ m/s}^2 \quad (2.195)$$

όπου εδώ χρησιμοποιήσαμε τις γωνίες με την απόλυτη τιμή τους. Όμοια, στον άξονα y , έχουμε

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y \iff \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} = m\vec{a}_y \quad (2.196)$$

Κι εδώ έχουμε τα ίδια ακριβώς βήματα. Όμως, το διάνυσμα $\vec{F}_{1y}$ “κοιτάζει” προς τον αρνητικό ημιάξονα του y' , άρα μπορούμε να “πετάξουμε” τα διανύσματα από την εξίσωσή μας και να βάλουμε αρνητικό πρόσημο στο F_{1y} (και θετικό πρόσημο στο F_{2y}). Έτσι,

$$F_{2y} - F_{1y} = ma_y \iff a_y = \frac{F_{2y} - F_{1y}}{m} \quad (2.197)$$

$$a_y = \frac{F_2 \sin(60) - F_1 \sin(20)}{0.3} = 17 \text{ m/s}^2 \quad (2.198)$$

ξανά με την απόλυτη τιμή των γωνιών.

Προσέξτε λοιπόν τα βήματα: με την τοποθέτηση των σωστών προσήμων στις δυνάμεις με βάση τους άξονές μας και τη φορά τους, υπολογίσαμε στη συνέχεια τα μέτρα των δυνάμεων, παίρνοντας τις γωνίες κατ' απόλυτη τιμή (έτσι ώστε να μη μας αλλάξουν το πρόσημο, που έχουμε ήδη καθορίσει “manually”). Εν τέλει καταλήξαμε πάλι στο ίδιο αποτέλεσμα,

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = (29 \text{ m/s}^2) \vec{i} + (17 \text{ m/s}^2) \vec{j} \quad (2.199)$$

και

$$|\vec{a}| = \sqrt{29^2 + 17^2} \approx 33.6 \text{ m/s}^2 \quad (2.200)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{17}{29}\right) \approx 30.3^\circ \quad (2.201)$$

■

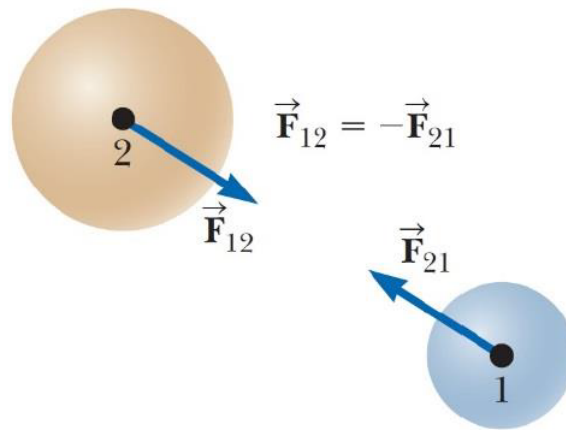
Πώς πρέπει λοιπόν να προσεγγίζουμε τα προβλήματα που αφορούν δυνάμεις στο επίπεδο;

Προκαταρκτικά Βήματα Επίλυσης Προβλημάτων Δυνάμεων στο Επίπεδο

- Θέστε το σύστημα συντεταγμένων σας Oxy σε κάποια βολική θέση. Φανταστείτε στο μυαλό σας τις δυνάμεις που δρουν στο πρόβλημα. “Σπάστε” τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα που σας ενδιαφέρει σε δυο άξονες, προβάλλοντας τες σε αυτούς και αναρωτηθείτε: ποιές δυνάμεις ασκούνται στο σώμα στον άξονα x' ; Ποιές δυνάμεις ασκούνται στο σώμα στον άξονα y' ;
- “Βαφτίστε” τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα με δείκτες ($\vec{F}_{1x}$, $\vec{F}_{2y}$, κ.ο.κ.).
- Αναρωτηθείτε ποιοί νόμοι του Newton εφαρμόζονται σε κάθε άξονα: το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα ή βρίσκεται ακίνητο; Πρώτος νόμος του Newton! Το σώμα επιταχύνεται; Δεύτερος νόμος του Newton!
- Γράψτε τις διανυσματικές εξισώσεις κατά άξονες με βάση όσα επιλέξατε πριν.
- “Πετάξτε” τα διανύσματα και περάστε σε αλγεβρικές εξισώσεις βάζοντας αρνητικά πρόσημα σε διανύσματα που “κοιτάζουν” προς τον αρνητικό ημιάξονα του εκάστοτε άξονα και υπολογίζοντας το μέτρο όλων των διανυσμάτων που εμπλέκονται.

2.4.4 Τρίτος Νόμος του Newton

Ο Τρίτος Νόμος του Newton είναι ίσος ο πιο γνωστός απ' όλους, καθώς αποδίδεται εκλαϊκευμένα με τη φράση “δράση - αντίδραση”. Πιο τυπικά, αν δυο σώματα αλληλεπιδρούν, η δύναμη $\vec{F}_{12}$ που ασκείται από



Σχήμα 2.28: Τρίτος Νόμος του Newton.

το σώμα 1 στο σώμα 2 είναι ίση σε μέτρο και αντίθετη σε κατεύθυνση από τη δύναμη $\vec{F}_{21}$ που ασκείται από το σώμα 2 στο σώμα 1, δηλ.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (2.202)$$

Δείτε το Σχήμα 2.28. Προσέξτε ότι οι δυο δυνάμεις που αναφέρει ο 3ος νόμος ασκούνται σε *διαφορετικά* σώματα – ΟΧΙ στο ίδιο!

Ίσως το πιο χαρακτηριστικό ζεύγος δυνάμεων που ικανοποιούν τον 3ο νόμο του Newton είναι **η δύναμη που ασκεί η Γη σε όλα τα σώματα πάνω της και η δύναμη που αυτά τα σώματα ασκούν επάνω στη Γη**. Μάλιστα, η δύναμη που ασκεί η Γη σε όλα τα σώματα πάνω της ονομάζεται **βαρυτική δύναμη**, συμβολίζεται ως $\vec{F}_g$, και έχει φορά προς το κέντρο της Γης. Πρακτικότερα, είναι πάντα κάθετη στο επίπεδο του εδάφους με φορά προς τα κάτω. Αυτή είναι μια δύναμη που θα συναντάμε διαρκώς σε όλα τα προβλήματα.

2.4.5 Η δύναμη του βάρους

Μια και την αναφέραμε μόλις, η **βαρυτική δύναμη** ή η **δύναμη του βάρους** που ασκείται σε ένα σώμα είναι η δύναμη που τραβά ένα σώμα προς το κέντρο της Γης – δηλ. με διεύθυνση κάθετη στο έδαφος και φορά προς τα κάτω. Προφανώς υποθέτουμε ότι το έδαφος είναι αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Ως εκ τούτου μπορεί ναδειχθεί εύκολα από το 2ο νόμο του Newton σε ένα σώμα που πέφτει ελεύθερα ότι η βαρυτική δύναμη που ασκείται πάνω του ισούται με

$$\vec{F}_g = m\vec{g} = m(-g)\vec{j} = -mg\vec{j} \quad (2.203)$$

Αυτό σημαίνει ότι το μέτρο της βαρυτικής δύναμης ισούται με το γινόμενο της μάζας του σώματος επί την επιτάχυνση της βαρύτητας. Η ίδια δύναμη ασκείται και σε ένα σώμα που βρίσκεται ήρεμο σε οποιοδήποτε σημείο στη Γη.

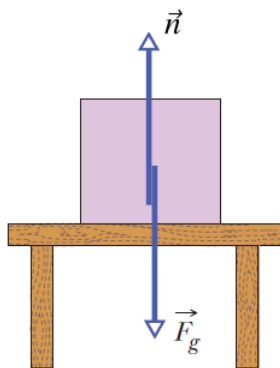
2.4.6 Η κάθετη δύναμη

Αφού λοιπόν μόλις είπαμε ότι η βαρυτική δύναμη ασκείται σε ένα σώμα σε ηρεμία οπουδήποτε στη Γη, γιατί αυτό δεν επιταχύνεται; Ο λόγος φυσικά είναι ότι κάποια άλλη δύναμη εξουδετερώνει τη δράση της βαρυτικής δύναμης, κρατώντας το σώμα σε ισορροπία. Ακόμα και εσείς, που κάθεστε – ελπίζω – και διαβάσετε αυτές τις σημειώσεις, ισορροπείτε, καθώς η δύναμη του βάρους εξ' αιτίας της Γης σας τραβά προς το κέντρο της αλλά η δύναμη που ασκεί η καρέκλα/καναπές/κρεβάτι επάνω σας είναι ίση σε μέτρο αλλά αντίθετης φοράς με την προαναφερθείσα δύναμη. Η **κάθετη δύναμη** είναι η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα από μια επιφάνεια πάνω στην οποία βρίσκεται. Η διεύθυνσή της είναι πάντα κάθετη στην επιφάνεια και η φορά της πάντα “μακριά” από την επιφάνεια.

Αν εφαρμόσουμε τον 1ο νόμο του Newton σε ένα σώμα που ισορροπεί σε μια επιφάνεια, όπως στο Σχήμα 2.29, τότε στον άξονα $y'y$ θα ισχύει

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{n} + \vec{F}_g = \vec{0} \iff \vec{n} = -\vec{F}_g \quad (2.204)$$

καθώς οι μόνες δυνάμεις που του ασκούνται είναι η βαρυτική δύναμη και η κάθετη δύναμη από την επιφάνεια. Θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω, έχουμε



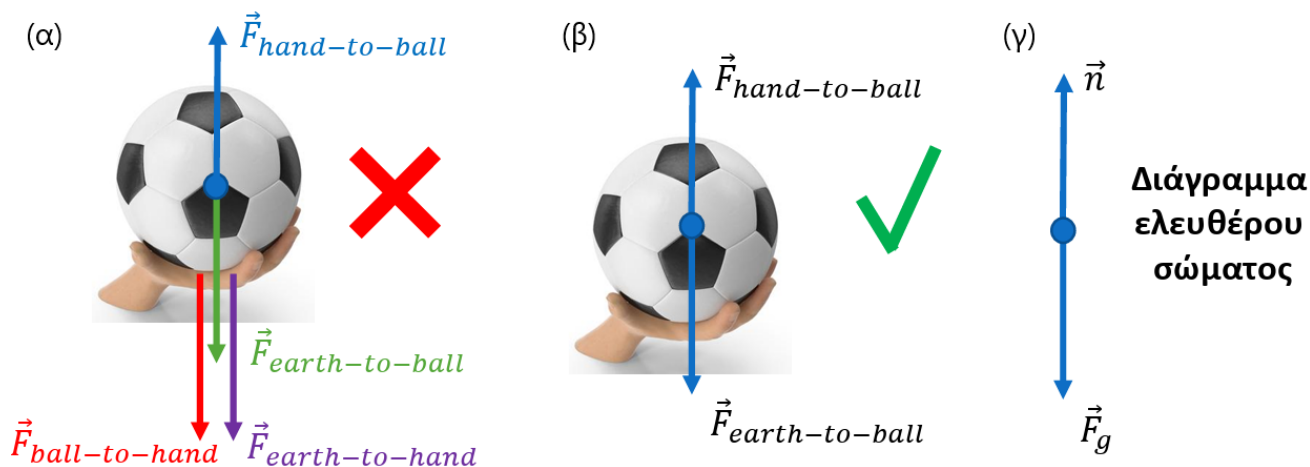
Σχήμα 2.29: Δύναμη βάρους και κάθετη δύναμη.

$$n - F_g = 0 \iff n = F_g = mg \quad (2.205)$$

Άρα η κάθετη δύναμη από μια επιφάνεια πάνω σε ένα σώμα έχει μέτρο ίσο με mg – ίδιο με τη βαρυτική δύναμη – και κατεύθυνση αντίθετη (στην πλειονότητα των περιπτώσεων) της βαρυτικής δύναμης.

2.4.7 Επιλογή Δυνάμεων σε ένα Πρόβλημα

Δείτε το Σχήμα 2.30(α). Βλέπετε μια μπάλα που ισορροπεί (δεν κινείται) επάνω σε ένα χέρι. Πόσες και



Σχήμα 2.30: Δυνάμεις σε ένα πρόβλημα.

ποιές δυνάμεις ασκούνται στα σώματα του σχήματος; Η απάντηση είναι τέσσερις:

- Η δύναμη που ασκεί η μπάλα στο χέρι, $\vec{F}_{ball-to-hand}$.

- Η δύναμη που ασκεί η Γη στη μπάλα, $\vec{F}_{\text{earth-to-ball}}$ (η βαρυτική δύναμη).
- Η δύναμη που ασκεί το χέρι στην μπάλα, $\vec{F}_{\text{hand-to-ball}}$ (η κάθετη δύναμη που μόλις πριν μάθαμε).
- Η δύναμη που ασκεί η Γη στο χέρι, $\vec{F}_{\text{earth-to-hand}}$.

Υπάρχουν άλλες δυο δυνάμεις, που ασκεί η μπάλα και το χέρι στη Γη, την οποία δεν έχουμε ζωγραφίσει στο σχήμα και άρα δεν έχουμε συμπεριλάβει τις δυνάμεις αυτές. Είναι προφανές ότι κάποιες από αυτές που έχουμε σχεδιάσει δε μας ενδιαφέρουν. Το πιθανότερο είναι ότι το σώμα που μας ενδιαφέρει είναι η μπάλα. Άρα, όπως στο Σχήμα 2.30(β), σχεδιάζουμε μόνο αυτές που ασκούνται πάνω του. Μια λιγότερο καλλιτεχνική αλλά απείρως χρήσιμη αναπαράσταση είναι αυτή του **διαγράμματος ελευθέρου σώματος**, που ουσιαστικά μοντελοποιεί την μπάλα ως μια κουκκίδα (αδιάστατο σωματίδιο) που από αυτή ξεκινούν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο πραγματικό σώμα (μπάλα). Θα χρησιμοποιούμε πολύ αυτού του είδους την αναπαράσταση, την οποία βλέπετε στο Σχήμα 2.30(γ).

2.4.8 Ανάλυση με βάση τους Τρεις Νόμους

Το “οπλοστάσιο” των τριών νόμων είναι ιδιαίτερα πολύτιμο στην ανάλυση πάρα πολλών προβλημάτων. Αν θυμηθούμε την Κινητική, είχαμε παρουσιάσει δυο μοντέλα:

- κίνηση υπό σταθερή ταχύτητα
- κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση

Μπορούμε σε αυτά τα δυο να προσθέσουμε άλλα δυο μοντέλα, τα οποία βασίζονται σε όσα έχουμε συζητήσει σε αυτήν την παράγραφο:

- σώμα σε ισορροπία: μηδενική επιτάχυνση, δηλ. κίνηση με σταθερή ταχύτητα ή ακινησία ($\vec{a} = 0$)
- σώμα σε επιτάχυνση λόγω εξωτερικών δυνάμεων: σταθερή επιτάχυνση ($\vec{a} \neq 0$)

Στην πρώτη περίπτωση, η συνισταμένη των δυνάμεων πρέπει να είναι μηδενική

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad (2.206)$$

Στη δεύτερη περίπτωση, η επιτάχυνση πρέπει να είναι μη μηδενική, οπότε

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (2.207)$$

Παράδειγμα 2.17:

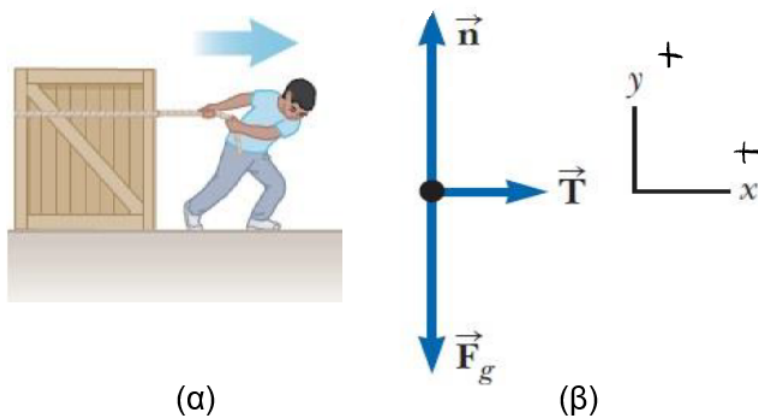
Ένας νεαρός τραβά ένα κιβώτιο όπως στο Σχήμα 2.31(α).

(α') Βρείτε την επιτάχυνση που ασκείται στο κιβώτιο.

(β') Βρείτε τη δύναμη που ασκεί το δάπεδο επάνω στο κιβώτιο.

Λύση:

Με βάση όσα έχουμε πει, μπορούμε να κάνουμε το **διάγραμμα ελευθέρου σώματος** του προβλήματος για να απλοποιήσουμε την κατάσταση και να διευκολυνθούμε στη λύση. Δείτε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος στο Σχήμα 2.31(β). Στο κιβώτιο ασκείται η δύναμη από το νεαρό, ας την πούμε $\vec{T}$, που το τραβά προς τα δεξιά. Επίσης, ασκείται η δύναμη $\vec{n}$ η οποία είναι η κάθετη δύναμη που ασκεί το έδαφος στο κιβώτιο ως αντίδραση στη δύναμη $\vec{F}_g$ που ασκεί το κιβώτιο στο έδαφος εξ' ατίας του βάρους του. Έτσι, το διάγραμμα ελευθέρου σώματος περιλαμβάνει τρεις δυνάμεις. Μπορούμε τώρα να απαντήσουμε στις ερωτήσεις.



Σχήμα 2.31: Σχήμα Παραδείγματος 2.17.

(α') Το κιβώτιο επιταχύνεται μόνο στον οριζόντιο άξονα, λόγω της δύναμης που του ασκεί ο νεαρός. Έτσι, στον x -άξονα, έχουμε

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \iff \vec{T} = m\vec{a}_x \implies a_x = \frac{T}{m} \quad (2.208)$$

με το πρόσημο του T να έχει καθοριστεί ως θετικό, αφού “κοιτάζει” προς το θετικό ημιάξονα του άξονα x' . Στον y -άξονα, το κιβώτιο ισορροπεί, οπότε δεν επιταχύνεται, άρα $a_y = 0$.

(β') Στον y -άξονα, το κιβώτιο ισορροπεί, οπότε

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y \iff \vec{n} + \vec{F}_g = 0 \implies n - F_g = 0 \implies n = F_g \quad (2.209)$$

Έτσι η δύναμη που ασκεί το δάπεδο στο κιβώτιο ισούται κατά μέτρο με τη δύναμη του βάρους του κιβωτίου.

2.4.9 Πολλαπλά Μοντέλα

Το προηγούμενο παράδειγμα είναι αρκετά απλό αλλά δείχνει ξεκάθαρα μερικά πολύ βασικά σημεία που εφαρμόζονται σε πλειάδα προβλημάτων. Τα σημεία αυτά είναι τα εξής:

Αναγνώριση Πολλαπλών Μοντέλων ανά Άξονα

Σε ένα πρόβλημα, είναι απολύτως δυνατόν να έχετε διαφορετικά μοντέλα ανάλυσης σε διαφορετικούς άξονες. Στο προηγούμενο πρόβλημα

- Ισορροπία στον άξονα y
- Επιτάχυνση στον άξονα x

Σε ένα πρόβλημα, είναι απολύτως δυνατό (και επιθυμητό πολλές φορές) να περιγραφεί η κίνηση ενός σώματος από πολλαπλά μοντέλα ανάλυσης – την ίδια στιγμή! Στο προηγούμενο πρόβλημα

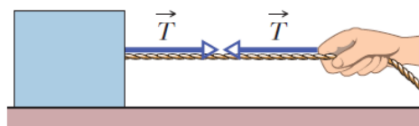
- Σώμα υπό επίδραση δύναμης στον άξονα x
- Σώμα υπό επίδραση σταθερής επιτάχυνσης στον άξονα x

Πρέπει να είστε σε θέση να αναγνωρίζετε τόσο τα διαφορετικά μοντέλα κατά άξονες όσο και τα πολλαπλά μοντέλα στον ίδιο άξονα.

2.4.10 Τροχαλίες και Νήματα

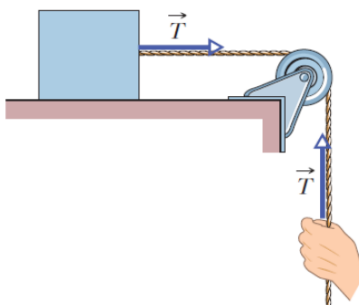
Σε πολλά προβλήματα που θα συναντήσουμε, θα δούμε να συμμετέχουν στην κίνηση ενός σώματος διάφορα νήματα (το θεωρητικό μοντέλο των καλωδίων, των αλυσιδών, και των σχοινιών) και τροχαλίες (κυλινδρικά μέρη που περιστρέφονται γύρω από έναν άξονα).

Έστω ένα τεντωμένο νήμα (ή καλώδιο ή σχοινί ή άλλο παρόμοιο) που δένεται σε ένα σώμα, όπως στο Σχήμα 2.32. Θεωρούμε το νήμα ως αβαρές (με αμελητέα μάζα σε σχέση με τα υπόλοιπα σώματα) και ανελαστικό (δεν “τεντώνεται” και δε “συμπιέζεται”, εκτός αν το πρόβλημα αναφέρει ρητά κάτι διαφορετικό). Αν



Σχήμα 2.32: Σώμα και νήμα.

τραβήξουμε το σώμα μέσω του νήματος με το χέρι μας, το νήμα τραβά το σώμα με δύναμη $\vec{T}$ με κατεύθυνση μακριά από το σώμα και κατά μήκος του νήματος. Αντίστοιχα, μια δύναμη ίδιου μέτρου αλλά αντίθετης κατεύθυνσης ασκείται πάνω στο χέρι μας. Η δύναμη αυτή συχνά αναφέρεται ως *τάση του νήματος* και συμβολίζεται με $\vec{T}$, καταχρηστικά με το ίδιο σύμβολο διανύσματος με την προαναφερθείσα δύναμη. Σχεδόν πάντα, μας ενδιαφέρει η δύναμη που το νήμα τραβά το σώμα και όχι η δύναμη που το νήμα τραβά το χέρι μας ☺, οπότε αυτή η ασυνέπεια στο συμβολισμό δε θα μας απασχολεί. Εξαιρεση αποτελεί μια κατάσταση όπου δυο σώματα ενώνονται με νήμα και το ένα κινεί το άλλο, όπως στο Παράδειγμα 2.21. Αντίστοιχα, δείτε την τροχαλία του Σχήματος 2.33. Θεωρούμε επίσης τις τροχαλίες ως αβαρείς και λείες (χωρίς τριβές)



Σχήμα 2.33: Τροχαλία, σώμα, και νήμα.

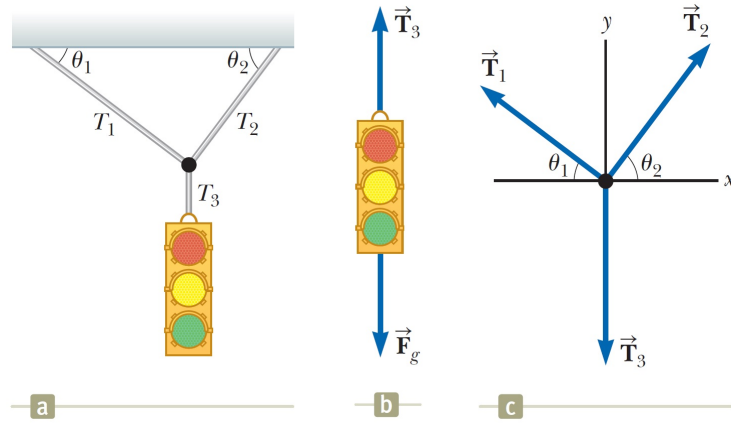
κατά την κύλισή τους. Όπως παρατηρείτε, ισχύουν τα ίδια φαινόμενα όπως και με το οριζόντιο νήμα του Σχήματος 2.32 αλλά αυτή τη φορά οι δυο τάσεις δεν είναι συνευθειακές – εδώ ξεκάθαρα φαίνεται ότι δεν μπορεί αυτές οι δυο δυνάμεις να έχουν το ίδιο διανυσματικό “όνομα”, όμως κι εδώ μόνο μια δύναμη θα μας απασχολεί, αυτή του νήματος πάνω στο σώμα, με την εξαίρεση πολλών σωμάτων που είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με νήμα. Εξακολουθούν όμως αυτές οι δυο δυνάμεις να έχουν το ίδιο μέτρο.

Παράδειγμα 2.18:

Ένα φανάρι με βάρος 122 N κρέμεται από ένα καλώδιο, που κρέμεται από άλλα δυο καλώδια, όπως στο Σχήμα 2.34. Οι γωνίες θ_1, θ_2 είναι ίσες με 37 και 53 μοίρες αντίστοιχα. Τα πάνω καλώδια σπάνε αν δεχθούν δύναμη μεγαλύτερη από 100 N (το καθένα). Μπορεί να συμβεί αυτό; Σας δίνεται ότι $\cos(37^\circ) = \sin(53^\circ) = 0.8$, $\cos(53^\circ) = \sin(37^\circ) = 0.6$.

Λύση:

Το συνολικό Σχήμα 2.34(α) είναι όμορφο αλλά δε μας βοηθά ιδιαίτερα στη λύση. Ας το χωρίσουμε σε δυο

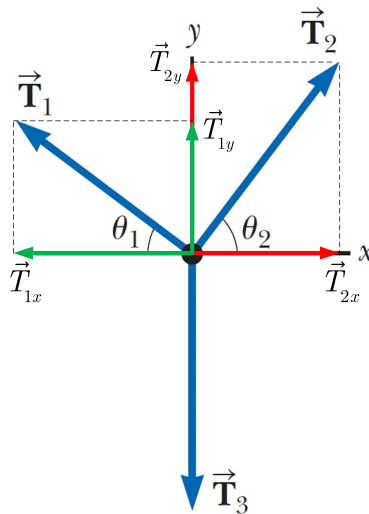


Σχήμα 2.34: Φανάρι και καλώδια.

υποσχήματα, στο Σχήμα 2.34(β) και στο Σχήμα 2.34(γ), δηλ. επικεντρωνόμαστε στο φανάρι και στη ζεύξη των καλωδίων. Ας υπολογίσουμε τα μέτρα των τάσεων T_1 , T_2 που ασκούν τα καλώδια στο φανάρι. Αν έστω μια από αυτές είναι μεγαλύτερη από 100 N τότε το αντίστοιχο καλώδιο θα σπάσει. Υποθέτουμε ότι το όλο σύστημα ισορροπεί στιγμιαία, με το που κρεμάται το φανάρι στη ζεύξη των καλωδίων. Ας δούμε το Σχήμα 2.34(β). Στο φανάρι ασκείται η δύναμη του βάρους, $\vec{F}_g = m\vec{g}$ και η τάση $\vec{T}_3$ λόγω του καλωδίου που το κρατά. Επειδή υπάρχει ισορροπία στον κατακόρυφο αυτό άξονα έχουμε

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \iff \vec{T}_3 + \vec{F}_g = \vec{0} \implies T_3 - F_g = 0 \implies T_3 = F_g = mg = 122 \text{ N} \quad (2.210)$$

με τα πρόσημα να προκύπτουν θεωρώντας θετική φορά του συστήματος συντεταγμένων προς τα πάνω (οπότε το $\vec{F}_g$ θα έχει αρνητικό πρόσημο κατά τη μετατροπή του σε αλγεβρική τιμή). Αυτή είναι η πρώτη σχέση μας. Μεταφερόμαστε στο Σχήμα 2.34(γ) τώρα. Εδώ έχουμε τρεις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στη ζεύξη των καλωδίων: τις τάσεις $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{T}_3$, με την τελευταία να οφείλεται στη δύναμη του βάρους του φαναριού. Επειδή οι δυνάμεις δεν είναι μεταξύ τους κάθετες, είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να αναλύσουμε κατά άξονες τις τάσεις $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$. Δείτε το Σχήμα 2.35, που αποτελεί το διάγραμμα ελευθέρου σώματος του προβλήματός μας. Στον άξονα x' , υποθέτοντας θετική φορά του άξονα προς τα δεξιά, ισχύει



Σχήμα 2.35: Φανάρι και καλώδια: διάγραμμα ελευθέρου σώματος.

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \iff \vec{T}_{1x} + \vec{T}_{2x} = \vec{0} \implies -T_{1x} + T_{2x} = 0 \implies T_{1x} = T_{2x} \quad (2.211)$$

και αφού

$$T_{1x} = T_1 \cos(\theta_1) \quad (2.212)$$

$$T_{2x} = T_2 \cos(\theta_2) \quad (2.213)$$

έχουμε – αντικαθιστώντας τις τιμές

$$T_1 \cos(\theta_1) = T_2 \cos(\theta_2) \implies T_1 = \frac{3}{4} T_2 \quad (2.214)$$

Στον $y'y$ άξονα, υποθέτοντας θετική φορά του άξονα προς τα πάνω, έχουμε

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{T}_{1y} + \vec{T}_{2y} + \vec{T}_3 = \vec{0} \implies T_{1y} + T_{2y} - T_3 = 0 \implies T_3 = T_{1y} + T_{2y} \quad (2.215)$$

και αφού

$$T_{1y} = T_1 \sin(\theta_1) \quad (2.216)$$

$$T_{2y} = T_2 \sin(\theta_2) \quad (2.217)$$

έχουμε

$$122 = T_1 \sin(\theta_1) + T_2 \sin(\theta_2) = 0.6T_1 + 0.8T_2 \quad (2.218)$$

Από τις δυο σχέσεις που καταλήξαμε μελετώντας τους δυο άξονες, λύνουμε ως προς T_1 , T_2 και παίρνουμε

$$T_1 = 73.4 \text{ N και } T_2 = 97.4 \text{ N} \quad (2.219)$$

Άρα τελικά κανένα σχοινί δε θα σπάσει. ■

Πώς θα λύναμε το πρόβλημα αυτό χρησιμοποιώντας τα μοναδιαία διανύσματα και μετρώντας τις γωνίες ως $\hat{\theta}_2 = \theta_2$ και $\hat{\theta}_1 = \pi - \theta_1$; Στον άξονα $x'x$ θα είχαμε

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \iff \vec{T}_{1x} + \vec{T}_{2x} = \vec{0} \quad (2.220)$$

$$T_{1x} \vec{i} + T_{2x} \vec{i} = 0 \vec{i} \quad (2.221)$$

$$T_1 \cos(\hat{\theta}_1) \vec{i} + T_2 \cos(\hat{\theta}_2) \vec{i} = 0 \vec{i} \quad (2.222)$$

$$(T_1 \cos(\pi - \theta_1) + T_2 \cos(\theta_2)) \vec{i} = 0 \vec{i} \quad (2.223)$$

$$(-T_1 \cos(\theta_1) + T_2 \cos(\theta_2)) \vec{i} = 0 \vec{i} \quad (2.224)$$

$$T_2 \cos(\theta_2) \vec{i} = T_1 \cos(\theta_1) \vec{i} \quad (2.225)$$

και στον άξονα $y'y$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{T}_{1y} + \vec{T}_{2y} + \vec{T}_3 = \vec{0} \quad (2.226)$$

$$T_1 \sin(\hat{\theta}_1) \vec{j} + T_2 \sin(\hat{\theta}_2) \vec{j} - T_3 \vec{j} = 0 \vec{j} \quad (2.227)$$

$$T_1 \sin(\pi - \theta_1) \vec{j} + T_2 \sin(\theta_2) \vec{j} - T_3 \vec{j} = 0 \vec{j} \quad (2.228)$$

$$(T_1 \sin(\theta_1) + T_2 \sin(\theta_2)) \vec{j} = T_3 \vec{j} \quad (2.229)$$

που οδηγούν πρακτικά στις ίδιες εξισώσεις που καταλήξαμε και πριν.

Παράδειγμα 2.19:

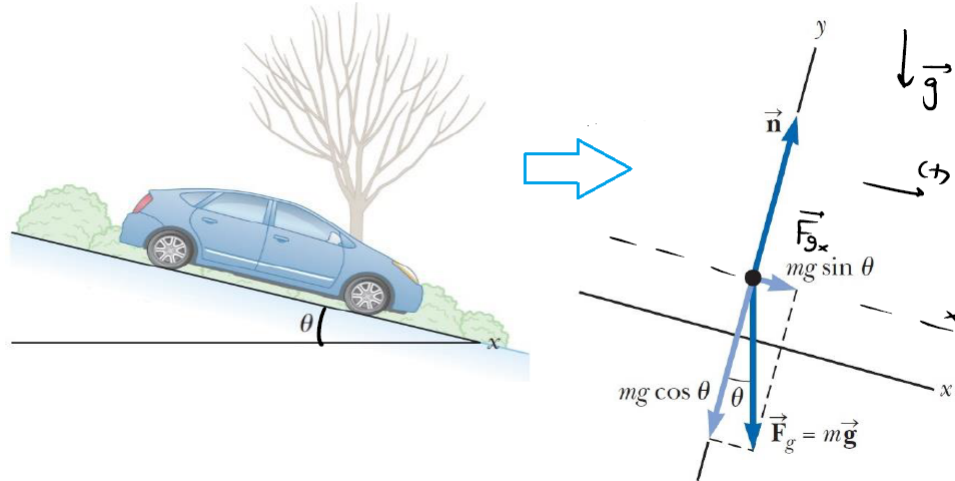
Ένα αυτοκίνητο μάζας m αφήνεται να κινηθεί χωρίς τριβές σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ .

(α') Βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου.

(β') Αν το αυτοκίνητο αφεθεί από την κορυφή του κεκλιμένου που απέχει απόσταση d από το τέρμα του, πόσο χρόνο χρειάζεται για να φτάσει στο τέρμα και πόση ταχύτητα θα έχει όταν φτάσει εκεί;

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 2.36 αριστερά. Μπορούμε να κάνουμε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος του προβλήματος,



Σχήμα 2.36: Αυτοκίνητο σε κεκλιμένο.

όπως το βλέπετε στο Σχήμα 2.36 δεξιά. Στο αυτοκίνητο ασκούνται οι εξής δυνάμεις: η δύναμη του βάρους, $\vec{F}_g = m\vec{g}$, και η δύναμη του δαπέδου επάνω στο αυτοκίνητο, $\vec{n}$. Η τελευταία είναι πάντα κάθετη στο επίπεδο που βρίσκεται το σώμα (αυτοκίνητο). Για να αναλύσουμε το πρόβλημα, είναι βολικό να δουλέψουμε κατά άξονες. Επιλέγουμε ως οριζόντιο άξονα τον άξονα παράλληλο στο κεκλιμένο, και ως κατακόρυφο άξονα έναν άξονα κάθετο στον προηγούμενο, με τη συμβολή των αξόνων να βρίσκεται ακριβώς επάνω στο σώμα. Η δύναμη $\vec{n}$ είναι ήδη παράλληλη με τον κατακόρυφο άξονα ενώ η δύναμη του βάρους $\vec{F}_g$ όχι, οπότε θα αναλύσουμε την τελευταία κατά άξονες σε $\vec{F}_{gx}$ και $\vec{F}_{gy}$. Παρατηρήστε ότι η δοθείσα γωνία θ ταυτίζεται με τη γωνία θ μεταξύ του διανύσματος $\vec{F}_g$ και $\vec{F}_{gy}$, ως γωνίες με αντίστοιχες πλευρές κάθετες.

(α') Η κίνηση πραγματοποιείται στον x -άξονα. Μόνο μια δύναμη ασκείται κατά μήκος του x -άξονα, η $\vec{F}_{gx}$. Από την τριγωνομετρία του σχήματος, και αφού το διάνυσμα $\vec{F}_{gx}$ έχει φορά προς το θετικό ημιάξονα, έχουμε

$$F_{gx} = mg \sin(\theta) \quad (2.230)$$

Το αυτοκίνητο επιταχύνεται στον άξονα x , οπότε ισχύει

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \iff \vec{F}_{gx} = m\vec{a}_x \implies F_{gx} = ma_x \iff mg \sin(\theta) = ma_x \iff a_x = g \sin(\theta) \quad (2.231)$$

Προφανώς δεν υπάρχει κίνηση στον κατακόρυφο άξονα, οπότε $\vec{a}_y = 0$. Συνολικά λοιπόν

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = g \sin(\theta) \vec{i} + 0 \vec{j} = g \sin(\theta) \vec{i} \quad (2.232)$$

(β') Το πρόβλημα ζητάει χρόνο t , οπότε επιβάλλεται να θυμηθούμε τις εξισώσεις της κινητικής! Στον άξονα x , το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, οπότε ας υποθέσουμε μια

διαδρομή $A \rightarrow B$, μήκους d , από την κορυφή ως τη βάση του κεκλιμένου. Θέτουμε το σύστημα αξόνων στην κορυφή του κεκλιμένου και θεωρούμε $t_A = 0$. Αφήνοντας ($u_{xA} = 0$) το σώμα από την κορυφή του κεκλιμένου, έχουμε

$$x_f = x_i + u_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2.233)$$

$$x_B = x_A + u_{xA}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2.234)$$

$$d = 0 + 0t + \frac{1}{2}g \sin(\theta)t^2 \quad (2.235)$$

$$t^2 = \frac{2d}{g \sin(\theta)} \quad (2.236)$$

$$t = \sqrt{\frac{2d}{g \sin(\theta)}} \quad (2.237)$$

Για την ταχύτητα στο τέarma του κεκλιμένου θα έχουμε

$$u_f = u_i + a_x t \quad (2.238)$$

$$u_B = u_A + a_x t \quad (2.239)$$

$$u_B = 0 + g \sin(\theta)t \quad (2.240)$$

$$= g \sin(\theta) \sqrt{\frac{2d}{g \sin(\theta)}} \quad (2.241)$$

$$= \sqrt{2dg \sin(\theta)} \quad (2.242)$$

δηλ.

$$\vec{u}_B = \left(\sqrt{2dg \sin(\theta)} \right) \vec{i} \quad (2.243)$$

Παράδειγμα 2.20:

Οι ζώνες ασφαλείας και οι αερόσακοι σώζουν τις ζωές μας μειώνοντας τις δυνάμεις που ασκούνται επάνω στον οδηγό και στους επιβάτες κατά τη διάρκεια μιας σύγκρουσης. Τα μοντέρνα αυτοκίνητα σχεδιάζονται ώστε να έχουν στο μπροστινό μέρος την περίφημη “ζώνη θράυσης”, η οποία είναι η περιοχή του αυτοκινήτου που καταστρέφεται εύκολα και απορροφά έτσι το μεγαλύτερο μέρος της ισχύος της σύγκρουσης. Κατά τη σύγκρουση, η καμπίνα του επιβάτη επιβραδύνεται σε μια απόσταση περίπου 1 μέτρου, όσο το μπροστινό μέρος του αυτοκινήτου θρυμματίζεται. Ένας επιβάτης που φορά ζώνη ασφαλείας επιβραδύνεται μαζί με το αυτοκίνητο. Αντίθετα, ένας επιβάτης που δε φορά ζώνη θα συνεχίσει να κινείται προς τα εμπρός κατά τη σύγκρουση, και μάλιστα χωρίς απώλεια ταχύτητας (1ος Νόμος του Newton), μέχρι να χτυπήσει στο τζάμι ή στο ταμπλό του αυτοκινήτου. Αυτές οι επιφάνειες έχουν σχεδιαστεί να είναι άκαμπτες, κι έτσι ο δύστυχος επιβάτης επιβραδύνεται μόλις για 5 χιλιοστά (!!!!).

- (α') Ένας επιβάτης μάζας 60 κιλών πρόκειται να υποστεί σύγκρουση. Η ταχύτητα του αυτοκινήτου τη στιγμή της σύγκρουσης είναι 15 m/s (δηλ. 54 χιλιόμετρα την ώρα). Εκτιμήστε τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στον επιβάτη αν φοράει ζώνη.
- (β') Εκτιμήστε τη συνισταμένη δύναμη που τελικά σταματά τον επιβάτη αν αυτός δε φορά ζώνη.
- (γ') Πώς συγκρίνονται αυτές οι παραπάνω τιμές με το βάρος του επιβάτη;
- (δ') Ποιό το ηθικό δίδαγμα του προβλήματος; ☺

Λύση:

Θεωρούμε ότι ο επιβάτης κινείται προς τα δεξιά και ευθύγραμμα, είτε λόγω της επιβράδυνσης που δημιουργείται από τη ζώνη και τον αερόσακο είτε λόγω της επιβράδυνσης που δημιουργείται από το τζάμι ή το ταμπλό του αυτοκινήτου.

- (α') Για να εφαρμόσουμε το 2ο Νόμο του Newton, χρειάζεται να υπολογίσουμε την επιτάχυνση. Μοντελοποιούμε τον επιβάτη ως σωματίδιο που ξεκινά μια διαδρομή $A \rightarrow B$ από την πλάτη του καθίσματος ως ένα μέτρο δεξιότερα, μετά τη λήξη της σύγκρουσης. Από τις εξισώσεις κίνησης στη διαδρομή αυτή

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a_x \Delta x \quad (2.244)$$

$$u_B^2 = u_A^2 + 2a_x \Delta x \quad (2.245)$$

$$a_x = \frac{u_B^2 - u_A^2}{2\Delta x} \quad (2.246)$$

$$= \frac{0 - 15^2}{2} = -112.5 \text{ m/s}^2 \quad (2.247)$$

δηλ.

$$\vec{a}_x = (-112.5 \text{ m/s}^2)\vec{i} \quad (2.248)$$

οπότε

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \implies F = ma = m(-112.5) = 60 \cdot (-112.5) = -6750 \text{ N} \quad (2.249)$$

Άρα η συνισταμένη δύναμη, $\sum \vec{F} = (-6750 \text{ N})\vec{i}$, θα είναι μέτρου 6750 N, με φορά προς τα αριστερά.

- (β') Χρησιμοποιώντας την ίδια προσέγγιση όπως πριν

$$F = ma = 60 \cdot \frac{0 - 15^2}{2 \cdot 0.005} = -1350000 \text{ N} \quad (2.250)$$

Άρα η δύναμη, $\sum \vec{F} = (1350000 \text{ N})\vec{i}$, θα είναι τώρα μέτρου 1350000 N, με φορά προς τα αριστερά. Τρεις τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη!!!

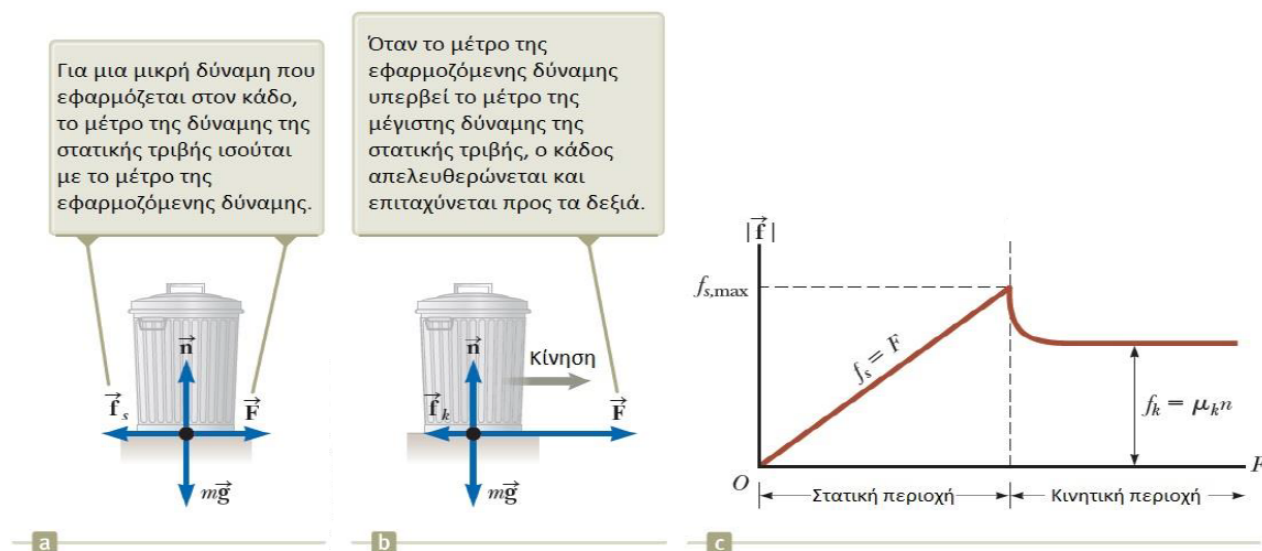
- (γ') Το βάρος του επιβάτη είναι $B = 60 \cdot 9.8 = 588 \text{ N}$. Οι δυνάμεις στα παραπάνω ερωτήματα είναι 11.5 και 2300 φορές το βάρος του επιβάτη, αντίστοιχα!!
- (δ') Μην ξεχνάτε να φοράτε ζώνη!

2.4.11 Δυνάμεις Τριβής

Ως τώρα έχουμε δει αρκετά πράγματα για την κίνηση και τις δυνάμεις που ασκούνται επάνω σε σώματα. Ας φέρουμε τις γνώσεις μας λίγο πιο κοντά στην πραγματικότητα, βάζοντας στο παιχνίδι τις **δυνάμεις τριβής** – τις οποίες αγνοήσαμε ως τώρα. Είναι ιδιαίτερα σημαντικές γιατί, μεταξύ πολλών άλλων, αποτελούν το λόγο που μπορούμε και περπατάμε, που γράφουμε με το μολύβι ή το στυλό σε ένα χαρτί, που τα κορδόνια των παπουτσιών μας παραμένουν δεμένα όταν τα δένουμε, κλπ. Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι **η δύναμη τριβής είναι μια δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση ενός σώματος που εφάπτεται σε μια επιφάνεια**. Άρα είναι μια δύναμη που εγείρεται σε ένα σώμα λόγω της επαφής του με μια επιφάνεια.

Υπάρχουν διάφορα είδη τριβής, όπως η στατική τριβή, η τριβή ολίσθησης, η τριβή ρευστών, κλπ. Εμείς θα ασχοληθούμε με τις δυο πρώτες: τη **στατική τριβή** και την **τριβή ολίσθησης**.

Δείτε το Σχήμα 2.37(a). Έστω ότι προσπαθούμε να κινήσουμε οριζόντια ένα βαρύ κάδο, σπρώχνοντάς τον. Ας χρησιμοποιήσουμε τη διαίσθησή μας: ασκούμε μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ αλλά έστω ότι αυτή η δύναμη δεν είναι ικανή να κινήσει τον κάδο, καθώς ο τελευταίος είναι γεμάτος και “βαρύς”. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι λόγω της ισορροπίας του κάδου (αφού είναι ακίνητος), πρέπει να ισχύει ο 1ος Νόμος του Newton στον άξονα x' . Στον άξονα αυτό, θα έχουμε τη δύναμη που ασκούμε εμείς στον κάδο, την $\vec{F}$, και αναγκαστικά πρέπει να υπάρχει και άλλη μια δύναμη, έστω $\vec{f}_s$, η οποία έχει ίδιο μέτρο κι αντίθετη κατεύθυνση με τη δύναμη $\vec{F}$, έτσι ώστε ο κάδος να ισορροπεί – οι δυο δυνάμεις “εξουδετερώνουν” η μια την άλλη. Αν βάλουμε παραπάνω δύναμη, δηλ. αυξήσουμε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ αλλά πάλι δεν μπορούμε να κινήσουμε τον κάδο, τότε καταλαβαίνουμε ότι πρέπει να αυξήθηκε και το μέτρο της δύναμης $\vec{f}_s$



Σχήμα 2.37: Δύναμη τριβής.

έτσι ώστε να ισχύει ξανά η ισορροπία στον x άξονα. Αυτή η δύναμη $\vec{f}_s$ ονομάζεται **δύναμη στατικής τριβής**. Άρα η στατική τριβή αποτελεί μια δύναμη $\vec{f}_s$ που αντιστέκεται στην κίνηση και στη δύναμη που προσπαθεί να την προκαλέσει, και ασκείται στον κάδο όσο αυτός δεν κινείται. Με άλλα λόγια, προσπαθούμε να κινήσουμε τον κάδο χωρίς να τα καταφέρνουμε εφαρμόζοντας μια δύναμη $\vec{F}$ σε αυτόν. Αυτή η δύναμη $\vec{F}$ ισούται κατά μέτρο με τη δύναμη στατικής τριβής $\vec{f}_s$. Προφανώς η φορά της καθεμιάς είναι αντίθετη της άλλης, όπως αναφέραμε. Όσο λοιπόν ισχύει $F = f_s$, ο κάδος δεν κινείται, παρ' όλα αυτά υπάρχει η στατική τριβή που εμποδίζει ακριβώς την κίνηση αυτή⁴. Όταν το μέτρο της εφαρμοζόμενης δύναμης $\vec{F}$ ξεπεράσει ένα κατώφλι, τότε ο κάδος απελευθερώνεται και επιταχύνεται προς τα δεξιά, όπως στο Σχήμα 2.37(b). Από εκείνη τη στιγμή και μετά, η στατική τριβή $\vec{f}_s$ μετατρέπεται στη λεγόμενη **τριβή ολισθήσεως**, $\vec{f}_k$. Η τελευταία σχετίζεται πάντα με ένα σώμα σε κίνηση και μπορεί να αποδειχθεί ότι το μέτρο της δίνεται ως

$$f_k = \mu_k n \quad (2.251)$$

με μ_k το λεγόμενο **συντελεστή τριβής ολισθήσεως** και n το μέτρο της κάθετης δύναμης από το έδαφος στον κάδο. Προφανώς, όσο ο κάδος δεν κινείται, θα πρέπει να ισχύει

$$f_s \leq \mu_s n \quad (2.252)$$

με μ_s το λεγόμενο **συντελεστή στατικής τριβής**. Η ισότητα ισχύει μόνο στην περίπτωση που το σώμα είναι έτοιμο να ολισθήσει, και τότε λέμε ότι η **στατική τριβή παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή της**. Προσέξτε, οι σχέσεις αυτές είναι αλγεβρικές και όχι διανυσματικές. Οι τιμές των συντελεστών τριβής μ_s , μ_k εξαρτώνται από το είδος των επιφανειών που εφάπτονται. Για παράδειγμα, όταν καουτσούκ και ξηρή άσφαλτος εφάπτονται (περίπτωση ελαστικού και οδοστρώματος), ο συντελεστής στατικής τριβής έχει τιμή $\mu_s \approx 0.9 - 1.0$ ενώ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης εκτιμάται ως $\mu_k \approx 0.7 - 0.8$. Ως άλλο παράδειγμα, όταν καουτσούκ και χιόνι εφάπτονται, οι συντελεστές έχουν πολύ μικρές τιμές, $0.10 - 0.35$ και $0.08 - 0.25$ ⁵, αντίστοιχα, ανάλογα με το είδος χιονιού, τη θερμοκρασία, και το είδος του καουτσούκ. Η διεύθυνση της δύναμης τριβής (οποιασδήποτε εκ των δυο) είναι πάντα παράλληλη με την επιφάνεια στην οποία εφάπτεται το σώμα και η φορά της είναι πάντα αντίθετη στην κίνηση (ή στην προσπάθεια κίνησης) σε σχέση με την επιφάνεια.

⁴Εν αντιθέσει με τη διαίσθησή μας ότι δυνάμεις τριβής αναπτύσσονται μόνο σε περιπτώσεις κίνησης και όχι ακινησίας.

⁵Βγάζουν νόημα οι αριθμοί αυτοί με βάση τη διαίσθησή σας; Όχι ως τιμές αλλά ως μεγέθη...

Η προσέγγιση που περιγράψαμε αποτελεί ένα απλό αλλά λειτουργικό μοντέλο τριβής. Στην πραγματικότητα η δύναμη τριβής αποτελεί το διανυσματικό άθροισμα πολλών δυνάμεων που συμβαίνουν σε ατομικό επίπεδο μεταξύ των επιφανειών που εφάπτονται. Όμως μια τόσο λεπτομερής περιγραφή δε μας είναι πρακτικά χρήσιμη.

Ας δούμε τέσσερα παραδείγματα.

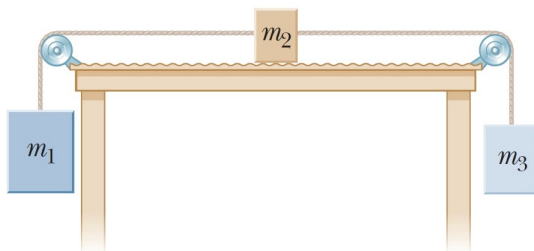
Παράδειγμα 2.21:

Τρία σώματα είναι συνδεδεμένα με αβαρές και ανελαστικό σχοινί επάνω σε ένα μη λείο τραπέζι, όπως στο Σχήμα 2.38. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα μάζας m_2 και στο τραπέζι ισούται με $\mu_k = 0.35$. Τα σώματα έχουν μάζες $m_1 = 4 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, και $m_3 = 2 \text{ kg}$, ενώ οι τροχαλίες είναι αβαρείς και χωρίς τριβές.

(α') Σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα.

(β') Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της επιτάχυνσης κάθε σώματος.

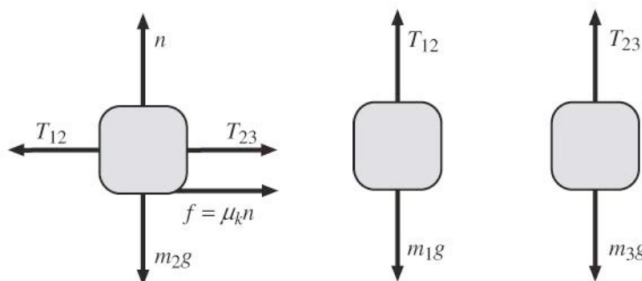
(γ') Βρείτε τις τάσεις T_{12} , T_{32} των σχοινιών στα δυο σώματα που κρέμονται.



Σχήμα 2.38: Τρία σώματα δεμένα με σχοινί.

Λύση:

(α') Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα. Δείτε το Σχήμα 2.39. Αντιλαμβανόμαστε ότι



Σχήμα 2.39: Τρία σώματα δεμένα με σχοινί - Δυνάμεις.

το σώμα μάζας m_1 θα τραβήξει τα άλλα δυο σώματα προς το μέρος του. Άρα θα επιταχυνθεί προς τα κάτω, ενώ τα άλλα δυο σώματα m_2, m_3 , θα επιταχυνθούν προς τα αριστερά και προς τα πάνω, αντίστοιχα. Θεωρούμε θετική φορά της οριζόντιας και κάθετης κίνησης τη συμβατική: προς τα δεξιά και προς τα πάνω, αντίστοιχα.

(β') Εδώ θα κάνουμε μια λίγο διαφορετική λύση. Ας συμβολίσουμε με a το μέτρο της επιτάχυνσης $\vec{a}_1 = -a\vec{j}$ του σώματος m_1 , της επιτάχυνσης $\vec{a}_2 = -a\vec{i}$ του σώματος m_2 , και της επιτάχυνσης $\vec{a}_3 = +a\vec{j}$ του m_3 . Προσέξτε ότι τα πρόσημα σχετίζονται με τη φορά του εκάστοτε διανύσματος επιτάχυνσης. Επίσης, έστω $\vec{T}_{12}$ η τάση του αριστερού νήματος, και $\vec{T}_{23}$ η τάση του δεξιού νήματος. Για το σώμα

μάζας m_1 , έχουμε επιτάχυνση στον y -άξονα, οπότε είναι

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y \quad (2.253)$$

$$\vec{T}_{12} + m_1\vec{g} = m_1\vec{a} \quad (2.254)$$

$$T_{12} - m_1g = -m_1a \quad (2.255)$$

λόγω της σύμβασής μας για τη θετική φορά της κατακόρυφης κίνησης. Για το σώμα μάζας m_2 , αφού κινείται επιταχυνόμενα στον x -άξονα με την επιτάχυνση να “δείχνει” προς τα αριστερά, είναι

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \quad (2.256)$$

$$\vec{T}_{12} + \vec{f}_k + \vec{T}_{23} = m_2\vec{a}_x \quad (2.257)$$

$$-T_{12} + f_k + T_{23} = -m_2a \quad (2.258)$$

$$-T_{12} + \mu_k n + T_{23} = -m_2a \quad (2.259)$$

και αφού ισορροπεί στον y -άξονα,

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \quad (2.260)$$

$$\vec{n} + m_2\vec{g} = \vec{0} \quad (2.261)$$

$$n - m_2g = 0 \quad (2.262)$$

$$n = m_2g \quad (2.263)$$

Με όμοια διαδικασία, για το σώμα μάζας m_3 που επιταχύνεται στον κατακόρυφο άξονα με φορά διανύσματος επιτάχυνσης προς τα πάνω, έχουμε

$$\sum \vec{F}_y = m_3\vec{a}_y \quad (2.264)$$

$$T_{23} - m_3g = m_3a \quad (2.265)$$

Έχουμε λοιπόν τρεις εξισώσεις

$$T_{12} - m_1g = -m_1a \quad (2.266)$$

$$-T_{12} + \mu_k m_2 n + T_{23} = -m_2a \quad (2.267)$$

$$T_{23} - m_3g = m_3a \quad (2.268)$$

οι οποίες γράφονται, βάζοντας την επιτάχυνση a μόνη της με θετικό πρόσημο, ως

$$-T_{12} + 39.2 = 4a \quad (2.269)$$

$$T_{12} - 0.35(9.8) - T_{23} = a \quad (2.270)$$

$$T_{23} - 19.6 = 2a \quad (2.271)$$

Λύνοντας το σύστημα, παίρνουμε

$$a = 2.31 \text{ m/s}^2 \quad (2.272)$$

με κατεύθυνση προς τα κάτω για το σώμα μάζας m_1 , αριστερά για το σώμα μάζας m_2 , επάνω για το σώμα μάζας m_3 .

(γ') Αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$T_{12} = 29.99 \text{ N} \quad (2.273)$$

$$T_{23} = 24.24 \text{ N} \quad (2.274)$$

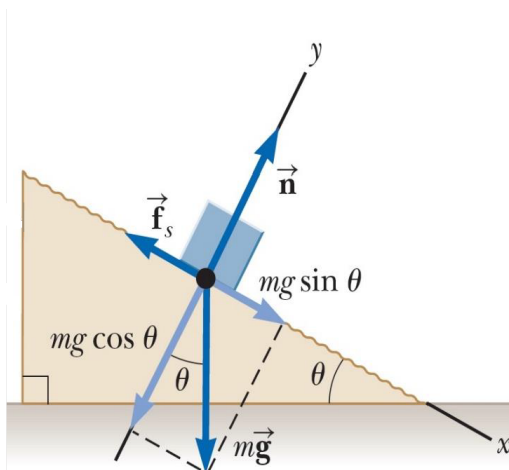
με κατεύθυνση των αντίστοιχων διανυσμάτων όπως στο Σχήμα 2.39.

Παράδειγμα 2.22:

Θεωρούμε ακίνητο σώμα μάζας m τοποθετημένο σε επιφάνεια με τριβές υπό γωνία θ . Αυξάνουμε τη γωνία θ μέχρι το σώμα να ολισθήσει. Δείξτε ότι μπορείτε να βρείτε το συντελεστή μ_s μετρώντας την κρίσιμη γωνία θ_c στην οποία το σώμα μόλις αρχίζει να ολισθαίνει.

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 2.40. Επιλέγουμε σύστημα αξόνων στο οποίο ο x -άξονας είναι παράλληλος στο κεκλιμένο



Σχήμα 2.40: Παράδειγμα με τριβές σε κεκλιμένο.

επίπεδο. Οι θετικές φορές είναι οι συμβατικές. Το σώμα ισορροπεί και στους δυο άξονες, οριακά όμως στον x' . Το διάγραμμα ελευθέρου σώματος είναι ήδη σχεδιασμένο στο σχήμα, όπου έχει αναλυθεί κάθε δύναμη στους άξονες μας. Ξέρουμε ότι οριακά ισχύει

$$f_s = \mu_s n \quad (2.275)$$

οπότε πρέπει να εκφράσουμε τη σχέση αυτή με γνωστές μεταβλητές του προβλήματος. Στον x -άξονα, το σώμα ισορροπεί οριακά οπότε

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \iff \vec{f}_s + \vec{F}_{gx} = \vec{0} \implies -f_s + F_{gx} = 0 \implies F_{gx} = f_s = \mu_s n \iff mg \sin(\theta) = \mu_s n \quad (2.276)$$

Στον y -άξονα, το σώμα επίσης ισορροπεί, οπότε

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{n} + \vec{F}_{gy} = \vec{0} \implies n - F_{gy} = 0 \implies n = F_{gy} = mg \cos(\theta) \quad (2.277)$$

Από τις δυο σχέσεις που καταλήξαμε, έχουμε

$$\mu_s mg \cos(\theta) = mg \sin(\theta) \iff \mu_s \cos(\theta) = \sin(\theta) \iff \mu_s = \tan(\theta) \quad (2.278)$$

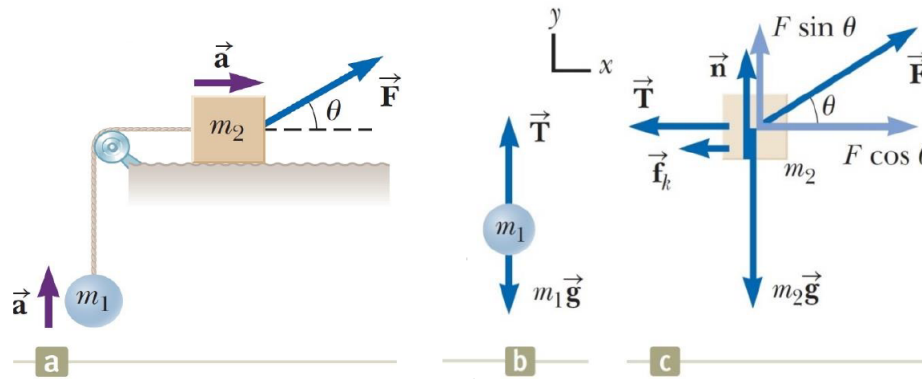
με την τελευταία σχέση να ισχύει αφού μπορούμε να διαιρέσουμε με $\cos(\theta)$, γιατί $\theta \in (0, \pi/2)$ όπου το συνημίτονο είναι μη μηδενικό. Καταλήξαμε λοιπόν στη σχέση

$$\mu_s = \tan(\theta) \quad (2.279)$$

Όταν $\theta = \theta_c$, δηλ. το σώμα μόλις ετοιμάζεται να ολισθήσει, μπορούμε να υπολογίσουμε το συντελεστή στατικής τριβής μ_s .

Παράδειγμα 2.23:

Σώμα μάζας m_2 σε οριζόντιο επίπεδο με τριβές συνδέεται με μια μπάλα μάζας m_1 μέσω αβαρούς/ανελαστικού σχοινιού και αβαρούς, λείου τροχού, όπως στο Σχήμα 2.41(α). Μια δύναμη F ασκείται υπό γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο επάνω στο σώμα και αυτό ολισθαίνει προς τα δεξιά. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι μ_k . Βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης των δυο αντικειμένων.



Σχήμα 2.41: Παράδειγμα με τριβές σε οριζόντιο επίπεδο.

Λύση:

Σχεδιάζουμε πρώτα το διάγραμμα ελεύθερου σώματος και σημειώνουμε τις δυνάμεις, καθώς και την ανάλυσή τους σε συνιστώσες. Οι επιταχύνσεις των δυο σωμάτων είναι διαφορετικές (ως διανύσματα) αλλά έχουν το ίδιο μέτρο, λόγω της παρουσίας αβαρών και ανελαστικών σχοινιών και λείας και αβαρούς τροχαλίας. Με άλλα λόγια, τα σώματα m_1 , m_2 κινούνται “μαζί”. Το ίδιο ισχύει και για τις τάσεις νημάτων για τα δυο σώματα: διαφορετικές ως διανύσματα αλλά με το ίδιο μέτρο. Οι δυνάμεις φαίνονται στα Σχήματα 2.41(β-γ). Θεωρούμε ως θετικές φορές κίνησης τις συμβατικές. Ας ξεκινήσουμε με το σώμα που κρέμεται, μάζας m_1 . Το σώμα αυτό επιταχύνεται προς τα πάνω, άρα

$$\sum \vec{F}_y = m_1 \vec{a}_y \iff \vec{T} + m_1 \vec{g} = m_1 \vec{a}_y \implies T - m_1 g = m_1 a_y = m_1 a \implies T = m_1(a + g) \quad (2.280)$$

Στον x -άξονα, το σώμα m_2 επιταχύνεται, δηλ.

$$\sum \vec{F}_x = m_2 \vec{a}_x \iff \vec{T} + \vec{f}_k + \vec{F}_x = m_2 \vec{a}_x \implies F \cos(\theta) - T - \mu_k n = m_2 a_x = m_2 a \quad (2.281)$$

Αντικαθιστώντας την τάση T του νήματος, έχουμε

$$F \cos(\theta) - m_1(a + g) - \mu_k n = m_2 a \iff a = \frac{F \cos(\theta) - m_1 g - \mu_k n}{m_1 + m_2} \quad (2.282)$$

Στον y -άξονα, το σώμα m_2 ισορροπεί, οπότε

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{n} + \vec{F}_y + m_2 \vec{g} = \vec{0} \implies n + F \sin(\theta) - m_2 g = 0 \implies n = m_2 g - F \sin(\theta) \quad (2.283)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση της επιτάχυνσης

$$a = \frac{F \cos(\theta) - m_1 g - \mu_k(m_2 g - F \sin(\theta))}{m_1 + m_2} \quad (2.284)$$

που είναι και το ζητούμενο.

Παράδειγμα 2.24:

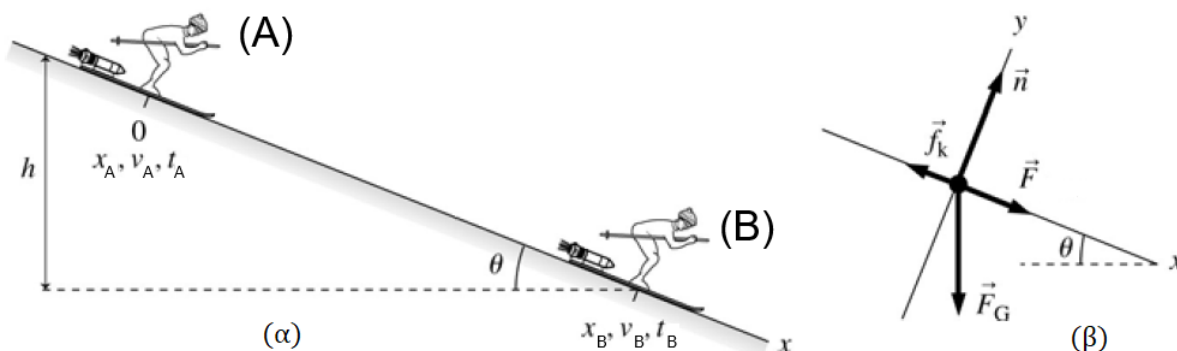
Ο Πάνος, που έχει μάζα 75 kg, ολισθαίνει από ακινησία με τα ενισχυμένα τζετ-σκι του από την κορυφή μιας χιονισμένης πλαγιάς γωνίας 10 μοιρών, με ύψος 50 m, όπως στο Σχήμα 2.42(α). Τα τζετ-σκι του παρέχουν μια σταθερή ώθηση που μοντελοποιείται ως δύναμη μέτρου 200 N. Η ταχύτητα του Πάνου στο τέλος της πλαγιάς είναι 40 m/s. Δείξτε ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του χιονιού και των τζετ-σκι είναι $\mu_k = 0.165$.

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 2.42(α). Επιλέγουμε το σύστημα αξόνων μας να είναι με τον x' παράλληλο στο κεκλιμένο (πλαγιά) και τον y' κάθετο σε αυτό, με το σημείο 0(0,0) στην κορυφή της πλαγιάς. Έστω η διαδρομή $A \rightarrow B$, από την κορυφή ως τη βάση της πλαγιάς. Από το ύψος και τη γωνία που μας δίνεται, και από την τριγωνομετρία του σχήματος, έχουμε ότι το μήκος του κεκλιμένου είναι

$$\frac{h}{\Delta x_{A \rightarrow B}} = \sin \theta \Rightarrow \Delta x_{A \rightarrow B} = \frac{h}{\sin \theta} \quad (2.285)$$

Θεωρούμε θετικές φορές της κίνησης τις συμβατικές. Πατάμε το χρονόμετρο μας για $t_A = 0$. Έστω μια τυχαία θέση τις διαδρομής: δείτε το Σχήμα 2.42(β), όπου έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στον Πάνο, θεωρώντας θετική φορά προς τη βάση της πλαγιάς. Ο Πάνος δεν επιταχύνει στον άξονα



Σχήμα 2.42: Ολίσθηση με τζετ-σκι.

y , άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο νόμο του Newton για να βρούμε τη δύναμη από το κεκλιμένο στον Πάνο.

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{F}_{g_y} + \vec{n} = \vec{0} \implies n - F_g \cos(\theta) = 0 \implies n = F_g \cos(\theta) = mg \cos(\theta) = 724 \text{ N} \quad (2.286)$$

Από τις γνωστές εξισώσεις επιταχυνόμενης κίνησης στον άξονα x' , έχουμε ότι ο Πάνος θα έχει επιτάχυνση που προκύπτει από τη σχέση

$$u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x \Delta x \iff u_{B_x}^2 = u_{A_x}^2 + 2a_x \Delta x_{A \rightarrow B} \implies a_x = \frac{u_B^2 - 0}{2\Delta x_{A \rightarrow B}} = 2.78 \text{ m/s}^2 \quad (2.287)$$

Από το 2ο νόμο του Newton στον άξονα x και από τη σχέση της τριβής ολίσθησεως $f_k = \mu_k n$ έχουμε

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \quad (2.288)$$

$$\vec{F}_{g_x} + \vec{F} + \vec{f}_k = m\vec{a}_x \quad (2.289)$$

$$F_g \sin(\theta) + F - f_k = ma_x \quad (2.290)$$

$$\mu_k = \frac{mg \sin(\theta) + F - ma_x}{n} = 0.165 \quad (2.291)$$

2.5 Ενέργεια

Με όσα έχουμε δει ως τώρα για την Μηχανική, το οπλοστάσιο μας αποτελείται από έννοιες όπως η θέση, η ταχύτητα, η επιτάχυνση, και η δύναμη. Χρησιμοποιώντας παράλληλα τις εξισώσεις της κίνησης και του τρεις νόμους του Newton, μπορούμε να λύσουμε πάρα πολλά προβλήματα... θεωρητικά. Στην πράξη, αντιμετωπίζουμε πολλές φορές δυσκολίες καθώς η πολυπλοκότητα διαφόρων προβλημάτων ανεβαίνει σημαντικά. Χρειαζόμαστε μια διαφορετική προσέγγιση, που θα κάνει τη λύση των προβλημάτων αυτών πιο απλή.

Οι έννοιες που θα συζητήσουμε θα σας φανούν οικείες, αλλά θα τις προσεγγίσουμε με λίγο περισσότερη ακρίβεια. Ας ξεκινήσουμε με μια από αυτές, την έννοια της **ενέργειας**. Γνωρίζετε από την καθημερινότητά σας τη χρήση της λέξης αυτής: το φαγητό μας δίνει ενέργεια για να βγάλουμε μια δύσκολη μέρα, η βενζίνη δίνει ενέργεια στη μηχανή του αυτοκινήτου για να μας πάει μια βόλτα, ο ηλεκτρισμός παρέχει ενέργεια στις συσκευές μας για να δουλέψουν, κ.α. Υπάρχουν πάρα πολλά είδη ενέργειας αλλά ευτυχώς θα μας απασχολήσουν μόνο τρία από αυτά:

- η κινητική ενέργεια, που σχετίζεται με την κίνηση ενός σώματος
- η δυναμική ενέργεια, που σχετίζεται με τη διάταξη ή τη σχετική θέση ενός συνόλου σωμάτων
- η θερμική ενέργεια, που σχετίζεται με τη θερμική κατάσταση ενός σώματος

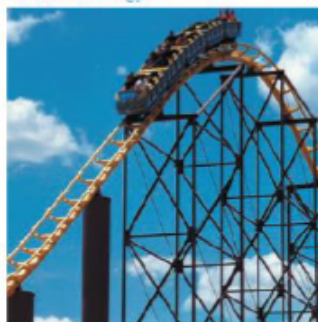
Δείτε το Σχήμα 2.43 για μερικά παραδείγματα τέτοιων ενεργειών. Έχουμε ήδη πει τόσα πράγματα για την

Kinetic energy K



Η κινητική ενέργεια είναι η ενέργεια της κίνησης. Όλα τα κινούμενα αντικείμενα έχουν κινητική ενέργεια. Όσο μεγαλύτερη μάζα ή όσο πιο γρήγορα κινείται ένα αντικείμενο, τόσο μεγαλύτερη η κινητική του ενέργεια.

Potential energy U



Η δυναμική ενέργεια είναι αποθηκευμένη ενέργεια που σχετίζεται με τη θέση ενός αντικείμενου. Το τρενάκι της εικόνας έχει βαρυτική δυναμική ενέργεια που εξαρτάται από τη θέση του (ύψος) πάνω από το έδαφος.

Thermal energy E_{th}



Η θερμική ενέργεια είναι το άθροισμα όλων των μικροσκοπικών κινητικών και δυναμικών ενεργειών των ατόμων και δεσμών που συνιστούν ένα σώμα. Ένα σώμα έχει μεγαλύτερη θερμική ενέργεια όταν είναι ζεστό παρά όταν είναι κρύο.

Σχήμα 2.43: Τρία είδη ενέργειας.

Ενέργεια και ακόμα δεν έχουμε δώσει έναν ορισμό! Η αλήθεια είναι πως η ενέργεια έχει τόσες πολλές μορφές που είναι δύσκολο να οριστεί με σαφήνεια και ακρίβεια. Αποτελεί δηλαδή μια κάπως... “αφηρημένη” έννοια. Θα μπορούσαμε βέβαια να πούμε ότι αποτελεί έναν αριθμό που σχετίζεται με την κατάσταση ενός **συστήματος**. Αν μάθουμε να χειριζόμαστε αυτούς τους αριθμούς, μπορούμε να προβλέψουμε φαινόμενα και να κατασκευάσουμε μηχανές! Επίσης, πολύ ενδιαφέρον είναι ότι κάθε διαδικασία στη φύση αφορά ενέργεια και μεταφορές/μετασχηματισμούς αυτής! Θα ήταν εξαιρετικά χρήσιμο να μπορούμε να περιγράψουμε προβλήματα (και να τα λύνουμε!) με ενεργειακό τρόπο!

2.5.1 Σύστημα

Ας ξεκινήσουμε τη συζήτηση μας από την έννοια του **συστήματος**. Τι είναι ένα σύστημα; Ένα σύστημα είναι ένα απλό σώμα ή ένα σύνολο από σώματα. Επίσης, μπορεί να είναι μια περιοχή ενός χώρου ή κάτι που αλλάζει σχήμα και μέγεθος. Μπορεί, τέλος, να είναι κι ένας συνδυασμός των παραπάνω. Βλέπετε ότι οι αφηρημένες έννοιες συνεχίζονται ☺. Ουσιαστικά τα πάντα μπορεί να είναι ένα σύστημα: από το ίδιο το σύμπαν, ως μια καρφίτσα, ή κάτι ακόμα (πολύ) μικρότερο. Ένα πρώτο βήμα λοιπόν στην ενεργειακή μελέτη ενός φαινομένου είναι η *αναγνώριση* του συστήματος. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό καθώς πολλές φορές αγνοούμε τι συμβαίνει εκτός του συστήματος ή, αν όχι, πρέπει να γνωρίζουμε πως επηρεάζεται εξωτερικά το σύστημα.

Όταν συζητάμε λοιπόν για ένα σύστημα, είτε αγνοούμε είτε ενδιαφερόμαστε για τις **ενεργειακές αλληλεπιδράσεις** με το περιβάλλον του. Στην πρώτη περίπτωση, το σύστημα ονομάζεται **απομονωμένο** ενώ στη δεύτερη, **μη απομονωμένο**. Και στις δυο περιπτώσεις, το σύστημα έχει ενδιαφέρον αν παρουσιάζει μεταβολή στην ενεργειακή του κατάσταση, με κάποιο τρόπο. Στα δικά μας πλαίσια, θα υποθέτουμε ότι κάποιες **δυνάμεις** δρουν στο στο σύστημα και του μεταβάλλουν την ενεργειακή κατάσταση. Επίσης μπορούμε να διακρίνουμε τα συστήματα σε **πολυμελή** και **μονομελή**: η ερμηνεία κάθε όρου είναι προφανής. Ανεξαρτήτως του συστήματος που θα επιλέξουμε, πάντα σε αυτό θα υπάρχει το **σύνορο** ή το **όριο** του συστήματος: μια φανταστική επιφάνεια που διαχωρίζει το σύστημα από το περιβάλλον του.

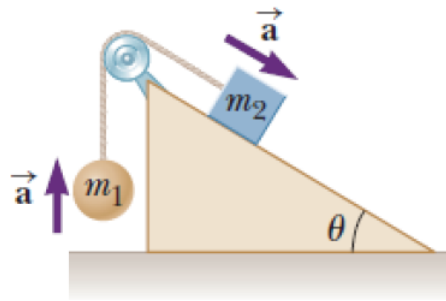
Σκεφτείτε για παράδειγμα ένα σπόγγο που στέκεται σε ένα τραπέζι, όπως στο Σχήμα 2.44. Ας θεωρήσουμε το σύστημα μας να είναι ο σπόγγος. Το σύστημα αυτό είναι **μονομελές και μη απομονωμένο**, καθώς η εξωτερική δύναμη που τον κινεί, καθώς και η δύναμη τριβής από την επιφάνεια που ολισθαίνει, αποτελούν **εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα που επιδρούν ενεργειακά στο σύστημα - σπόγγο**: η δύναμη από το χέρι αλλάζει την **κινητική ενέργεια** του συστήματος ενώ η δύναμη τριβής ολίσθησης αυξάνει την **θερμική ενέργεια** του συστήματος – και της επιφάνειας. Θα μελετήσουμε αυτές τις μεταβολές με λεπτομέρεια αργότερα. Προσέξτε: η απομόνωση ή μη ενός συστήματος εξαρτάται **όχι απλά από την παρουσία ή μη εξωτερικών δυνάμεων** αλλά από το **κατά πόσο αυτές αλληλεπιδρούν ενεργειακά** το σύστημα. Για παράδειγμα, η κάθετη δύναμη από την επιφάνεια που στέκεται ο σπόγγος είναι μια εξωτερική δύναμη στο σύστημα αλλά δεν αλληλεπιδρά ενεργειακά μαζί του – θα το δείξουμε ρητά αργότερα. Το ίδιο και η δύναμη του βάρους του σπόγγου, είναι εξωτερική δύναμη στο σύστημα (οφείλεται στη Γη) αλλά δεν αλληλεπιδρά ενεργειακά με το σύστημα. Τέλος, η επιφάνεια του σπόγγου αποτελεί το **σύνορο** του συστήματος. Αν κάποιος φίλος σας ασκήσει δύναμη επάνω στο σπόγγο με το δάχτυλό του, τότε η δύναμη του είναι μια επιρροή στο σύστημα από το περιβάλλον του, η οποία ασκείται επάνω στο **σύνορο** του συστήματος.



Σχήμα 2.44: Σπόγγος ως σύστημα.

Από την άλλη, μπορεί κανείς να ορίσει ως σύστημα το {σπόγγος, τραπέζι}! Το σύστημα τώρα είναι **πολυμελές**, και **μη απομονωμένο** ξανά, καθώς η δύναμη από το χέρι αποτελεί ξανά εξωτερική “ενεργειακή” παρέμβαση στο σύστημα, που αλλάζει την κινητική ενέργεια ενός από τα μέλη του. Πλέον όμως η δύναμη της τριβής ολίσθησης αποτελεί **εσωτερική** δύναμη του συστήματος, καθώς δρά από ένα σώμα του συστήματος πάνω σε ένα άλλο!

Ένα άλλο παράδειγμα βλέπετε στο Σχήμα 2.45. Μπορούμε εδώ να θεωρήσουμε το σύστημα μας να



Σχήμα 2.45: Λίγο πιο σύνθετο σύστημα.

είναι τα {σώματα μάζας m_1, m_2 και το σχοινί} που τα ενώνει. Αυτό το σύστημα είναι *πολυμελές και μη απομονωμένο*, γιατί στην περίπτωση αυτή οι δυνάμεις του βάρους των σωμάτων, ως *εξωτερικές δυνάμεις* πλέον όμως, μεταβάλλουν ενεργειακά το σύστημα (λόγω των δυνάμεων βάρους, τα σώματα κινούνται), όπως επίσης και δύναμη τριβής που ασκείται στο σώμα μάζας m_2 από την κεκλιμένη επιφάνεια. Οι δυνάμεις από το σχοινί επάνω στα σώματα είναι *εσωτερικές* του συστήματος, και δεν ανήκουν στο περιβάλλον του. Αξίζει να τονιστεί εδώ ξανά ότι η παρουσία εσωτερικών ή εξωτερικών δυνάμεων δε σημαίνει πως υπάρχει οπωσδήποτε ενεργειακό “πάρε-δώσε” μεταξύ του συστήματος και του περιβάλλοντός του ή μεταξύ των μελών του συστήματος. Αυτό είναι κάτι που θα μελετήσουμε στη συνέχεια, όταν θα έχουμε και τα κατάλληλα “όπλα”. Εδώ απλώς απαριθμούμε τις ιδιότητες κάθε συστήματος που μπορούμε να επιλέξουμε. Στο παράδειγμα αυτό, το σύνορο του συστήματος δεν είναι τόσο σαφές αλλά στην πλειονότητα των περιπτώσεων δε θα ασχολούμαστε με αυτό.

Κανείς δε μας απαγορεύει βέβαια να θεωρήσουμε ως σύστημα το {σώματα, σχοινί, και Γη}! Στην περίπτωση αυτή το σύστημα είναι *πολυμελές και μη απομονωμένο*, λόγω της δύναμης τριβής, που αποτελεί *εξωτερική ενεργειακή παρέμβαση* στο σύστημα. Αντίθετα, αφού συμπεριλάβουμε τη Γη, οι δυνάμεις του βάρους είναι *εσωτερικές* πλέον στο σύστημα. Στην περίπτωση που το κεκλιμένο ήταν λείο, *καμία* από τις υπάρχουσες δυνάμεις δεν ανήκει στο περιβάλλον του συστήματος. Όποιες ενεργειακές μεταβολές θα συνέβαιναν στο σύστημα θα οφείλονταν σε όποιες από τις εσωτερικές του δυνάμεις μεταβάλλουν ενεργειακά το σύστημα.

Φυσικά και το σκεφτήκατε! Μπορούμε να θεωρήσουμε ως σύστημα τα πάντα στο σχήμα; Φυσικά! Το σύστημα {σώματα, Γη, κεκλιμένο (λείο ή μη), σχοινί} είναι επίσης *πολυμελές και πλέον απομονωμένο*. Όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στα μέλη του είναι *εσωτερικές* στο σύστημα, και αν συμβαίνουν ενεργειακές μεταβολές σε αυτό, αυτές οφείλονται στις εσωτερικές αυτές δυνάμεις, μια και το σύστημα δε “μιλάει” ενεργειακά με το περιβάλλον του μέσω κάποιων άλλων δυνάμεων.

Είναι πλέον κάπως πιο σαφές ποιές είναι οι πιθανές επιλογές που έχουμε για τον ορισμό ενός συστήματος – και αυτές είναι πολλές! – και ποιές δυνάμεις είναι εσωτερικές ή εξωτερικές στο σύστημα, καθώς και το αν ένα σύστημα είναι πολυμελές ή μονομελές. Το μόνο “σκοτεινό” σημείο είναι το πότε ένα σύστημα είναι απομονωμένο ή μη, καθώς δε μας είναι ξεκάθαρο ποιές δυνάμεις, και με ποιό τρόπο, αλληλεπιδρούν ενεργειακά με ένα σύστημα. Έχουμε συναντήσει πολλές δυνάμεις ως τώρα: εξωτερικές δυνάμεις $\vec{F}$, τη δύναμη του βάρους $\vec{F}_g$, την κάθετη δύναμη από μια επιφάνεια σε ένα σώμα $\vec{n}$, τη δύναμη στατικής τριβής και τριβής ολισθήσεως $\vec{f}_s, \vec{f}_k$, τις δυνάμεις από νήματα $\vec{T}$, και θα γνωρίσουμε και μερικές ακόμα. Μπορούμε εκ των προτέρων να πούμε ποιά/ες από αυτές αλληλεπιδρούν ενεργειακά με ή μέσα σε ένα σύστημα; Αν έχετε αρκετή εμπειρία, ναι, αλλά στην παρούσα φάση καλύτερα όχι, καθώς ο μηχανισμός ενεργειακής αλληλεπίδρασης που θα δούμε σε λίγες γραμμές παρακάτω θα μας απαντά σε αυτό το ερώτημα σε κάθε πρόβλημα που θα συναντήσουμε.

Ταξινόμηση Δυνάμεων και Συστημάτων

Ένα σύστημα μπορεί να ανήκει σε μια από δυο κατηγορίες:

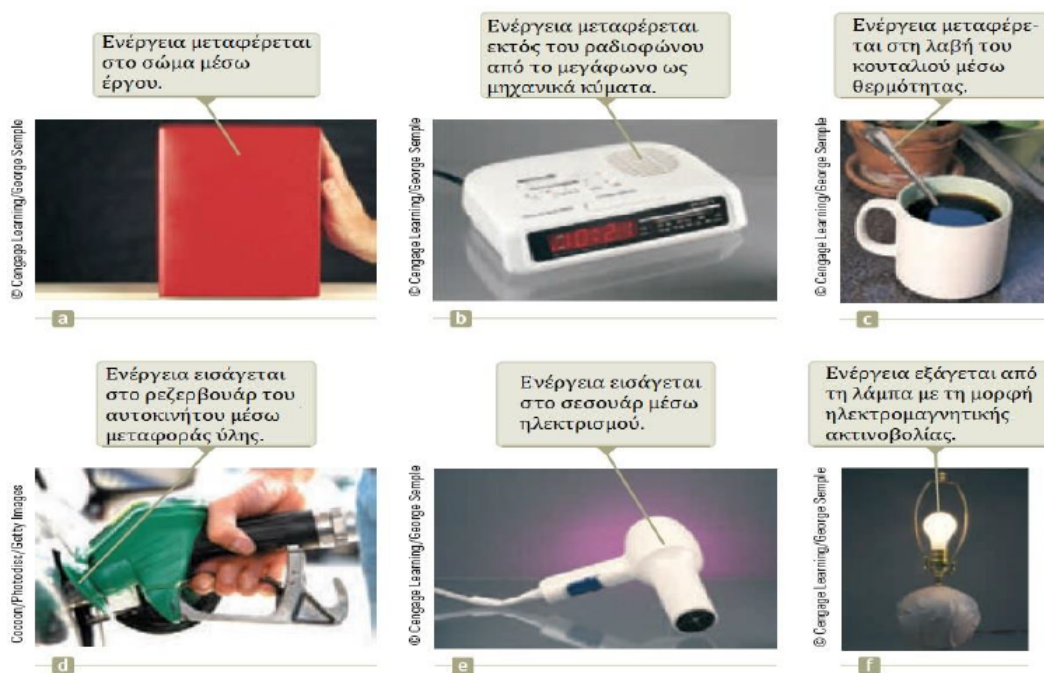
- **Απομονωμένο:** όταν το σύστημα δεν “επικοινωνεί” ενεργειακά με το περιβάλλον του.
- **Μη απομονωμένο:** όταν το σύστημα “επικοινωνεί” ενεργειακά με το περιβάλλον του.

Οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σύστημα διακρίνονται σε μια από δυο κατηγορίες:

- **Εξωτερικές:** όταν δρουν πάνω σε ένα ή περισσότερα μέλη ενός συστήματος και η προέλευση της δύναμης ανήκει στο περιβάλλον του συστήματος.
- **Εσωτερικές:** όταν δρουν μεταξύ των μελών του συστήματος, δηλ. από ένα μέλος του σε ένα άλλο.

Επίσης, τα συστήματα μπορεί να είναι **μονομελή** ή **πολυμελή**, αν στο σύστημα υπάρχει ένα ή περισσότερα μέλη, αντίστοιχα.

Διαισθητικά, καταλαβαίνετε πολύ καλύτερα τα μη απομονωμένα απ’ ό,τι τα απομονωμένα συστήματα: ένα σώμα, που το θεωρούμε ως σύστημα, επικοινωνεί ενεργειακά με το περιβάλλον του αν, για παράδειγμα, κάποια δύναμη $\vec{F}$ το σπρώξει, και έτσι αυτό αποκτήσει **κινητική ενέργεια**, ή αν έρθει κινούμενο σε επαφή με κάποια τραχιά επιφάνεια, αυξάνοντας έτσι τη **θερμική του ενέργεια**, ή αν αλλάξει η θέση του σε σχέση με μια θέση αναφοράς, οπότε αποκτά **δυναμική ενέργεια**. Άραγε, πόσοι τρόποι “ενεργειακής επικοινωνίας” υπάρχουν μεταξύ ενός συστήματος και του περιβάλλοντός του; Δείτε το Σχήμα 2.46 η οποία απεικονίζει τους πιθανούς τρόπους:



Σχήμα 2.46: Τρόποι μεταφοράς ενέργειας από και προς ένα μη απομονωμένο σύστημα.

- Μεταφορά ενέργειας μέσω έργου
- Μεταφορά ενέργειας μέσω μηχανικών κυμάτων
- Μεταφορά ενέργειας μέσω θερμότητας

- Μεταφορά ενέργειας μέσω ύλης
- Μεταφορά ενέργειας μέσω ηλεκτρισμού
- Μεταφορά ενέργειας μέσω ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας

Κάθε παράδειγμα στο Σχήμα 2.46 περιγράφει τον τρόπο μεταφοράς ενέργειας από και προς το σύστημα, και πρέπει να σας είναι αρκετά για να κατανοήσετε – χονδρικά – τις διαφορές μεταξύ αυτών των τρόπων. Όμως, στις συζητήσεις μας μέχρι το τέλος αυτού του Κεφαλαίου, θα μας απασχολήσει μόνο **ένας** τρόπος μεταφοράς ενέργειας από και προς ένα μη απομονωμένο σύστημα ή εντός ενός απομονωμένου συστήματος: η μεταφορά ενέργειας μέσω **του έργου**.

2.5.2 Έργο Σταθερής Δύναμης

Ας ξεκινήσουμε από τα απλά συστήματα, τα **μονομελή**. Ένα μονομελές σύστημα έχει ενδιαφέρον αν είναι **μη απομονωμένο**⁶. Επιστρέφοντας στο απλό παράδειγμα του σπόγγου, ας δούμε το Σχήμα 2.47. Μπο-



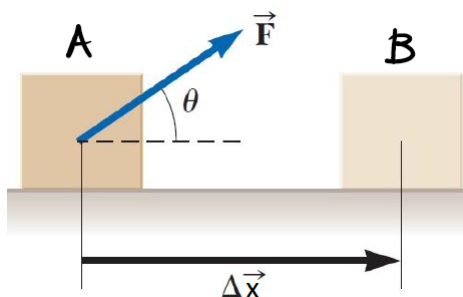
Σχήμα 2.47: Αποτελεσματικότητα δύναμης.

ρούμε να αναρωτηθούμε **πόσο αποτελεσματικοί είμαστε με τη δύναμη που βάζουμε (έστω όμοια σε μέτρο σε όλες τις περιπτώσεις του σχήματος) στο να κινήσουμε το σπόγγο**; Με άλλα λόγια, σε ποιά περίπτωση καταφέρνουμε “καλύτερα” να κινήσουμε το σπόγγο; Αρχίζουμε και σκεφτόμαστε τις έννοιες: δύναμη, μέτρο, κατεύθυνση, μετατόπιση σπόγγου...

Είναι εμφανές ότι στην τελευταία περίπτωση (c) ο σπόγγος δεν κινείται, παρόλο που εφαρμόζουμε δύναμη επάνω του (κάποιος μπορεί να πει ότι παραμορφώνεται λόγω της δύναμης, και υπάρχει μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης – είναι σωστό αυτό αλλά θεωρούμε στη μελέτη μας όλα τα αντικείμενα ως αδιάστατα σώματα κι έτσι δεν ισχύει – για μας – αυτή η θεώρηση). Οπότε σίγουρα θα λέγαμε ότι δεν είμαστε ιδιαίτερα αποτελεσματικοί στην προσπάθειά μας να τον κινήσουμε, παρά τη δύναμη που βάζουμε. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι το **μέτρο της δύναμης** που εφαρμόζουμε δεν αρκεί για να περιγράψουμε την αποτελεσματικότητα μας – σημαντικό ρόλο παίζει η μετατόπιση του σώματος. Στις περιπτώσεις (a,b) είναι εμφανές ότι μπορούμε να μετατοπίσουμε το σπόγγο αλλά όσο αυξάνουμε τη γωνία εφαρμογής της δύναμης, τόσο αυτή η μετατόπιση δυσκολεύει. Άρα στην περίφημη αποτελεσματικότητα μας παίζει ρόλο και η γωνία εφαρμογής, ή με άλλα λόγια, η γωνία **μεταξύ του διανύσματος της δύναμης και του διανύσματος της μετατόπισης**.

Ας τα βάλουμε σε μια σειρά. Δείτε το Σχήμα 2.48. Ένα σύστημα που αποτελείται μόνο από το σώμα του σχήματος μετατοπίζεται σε ευθεία γραμμή από μια σταθερή δύναμη ασκούμενη υπό γωνία θ με το διάνυσμα της μετατόπισης, προκαλώντας μετατόπιση $\Delta \vec{x}$, από ένα σημείο (A) ως ένα σημείο (B). Ορίζουμε

⁶Αν είναι απομονωμένο, το αφήνουμε στην ησυχία του και πάμε για έναν καφέ στο κέντρο του Ηρακλείου, βλέπουμε μια ταινία, ή διαβάζουμε τα μαθήματά μας – πιο ενδιαφέροντα πράγματα απ’ το να κοιτάμε ένα μονομελές απομονωμένο σύστημα...



Σχήμα 2.48: Παράδειγμα για ορισμό έργου δύναμης.

το έργο W που παράγεται στο σύστημα (προσέξτε τη διατύπωση) από τη δύναμη F που ασκείται εξωτερικά στο σύστημα ως το γινόμενο του μέτρου της δύναμης, του μέτρου της μετατόπισης, και του συνημιτόνου της γωνίας ανάμεσα στα δυο τελευταία. Με μαθηματικά

$$W = |\vec{F}||\Delta\vec{x}| \cos(\theta) = F\Delta x \cos(\theta) \quad (2.292)$$

Το μοτίβο “αριθμός επί αριθμός επί το συνημίτονο μιας γωνίας” πρέπει να σας είναι γνωστό. Σας θυμίζει το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων, και πράγματι μπορούμε να γράψουμε το έργο ως εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων, με αυτά να είναι η δύναμη $\vec{F}$ και η μετατόπιση $\Delta\vec{x}$. Έτσι

$$W = |\vec{F}||\Delta\vec{x}| \cos(\theta) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x} \quad (2.293)$$

Όλες τις ιδιότητες εσωτερικού γινομένου μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την έκφραση του έργου. Η μονάδα μέτρησης του έργου είναι $\text{N} \cdot \text{m}$, το οποίο ισούται με ένα Τζάουλ (Joule - J).

Παράδειγμα 2.25:

Ένα σωματίδιο στο xy επίπεδο υπόκειται σε μετατόπιση $\Delta\vec{x} = 2.0\vec{i} + 3.0\vec{j}$ m λόγω μιας σταθερής δύναμης $\vec{F} = 5.0\vec{i} + 2.0\vec{j}$ N που ασκείται στο σωματίδιο. Βρείτε το έργο W που παράγει η δύναμη $\vec{F}$ επάνω στο σωματίδιο.

Λύση:

Εφαρμόζοντας τον ορισμό και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου μοναδιαίων διανυσμάτων, έχουμε

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x} = (5.0\vec{i} + 2.0\vec{j}) \cdot (2.0\vec{i} + 3.0\vec{j}) \quad (2.294)$$

$$= 5\vec{i} \cdot 2\vec{i} + 5\vec{i} \cdot 3\vec{j} + 2\vec{j} \cdot 2\vec{i} + 2\vec{j} \cdot 3\vec{j} \quad (2.295)$$

$$= 10\vec{i} \cdot \vec{i} + 0 + 0 + 6\vec{j} \cdot \vec{j} \quad (2.296)$$

$$= 10 + 6 = 16 \text{ J} \quad (2.297)$$

αφού

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}| \cos(0) = |\vec{i}|^2 = 1 \quad (2.298)$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}||\vec{j}| \cos(0) = |\vec{j}|^2 = 1 \quad (2.299)$$

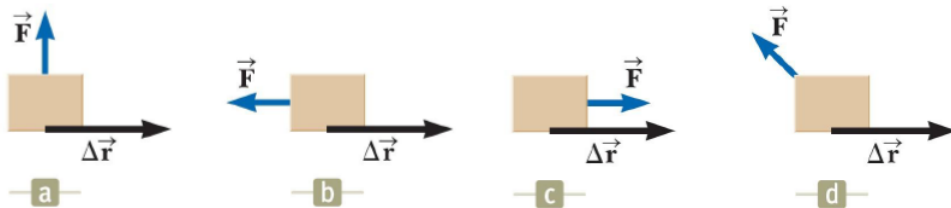
$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}||\vec{j}| \cos(\pi/2) = 0 \quad (2.300)$$

$$\vec{j} \cdot \vec{i} = |\vec{j}||\vec{i}| \cos(\pi/2) = 0 \quad (2.301)$$

Αλήθεια, διακρίνετε τη διαφορά με την κοινή σας αίσθηση για το έργο; Αν όχι, σκεφτείτε το εξής: κρατήστε μια βαριά μπάλα στο ύψος των ώμων για 2'. Στο τέλος των δυο λεπτών, θα έχετε κουραστεί και θα πιστεύετε ότι “παράξατε αρκετό έργο” πάνω στην μπάλα. Η αλήθεια όμως είναι ότι αν εφαρμόσετε τον ορισμό του έργου θα βγάλετε αποτέλεσμα μηδέν! Ο λόγος είναι ότι απλά υποστηρίζατε την μπάλα, δεν τη μετακινήσατε⁷.

Παράδειγμα 2.26:

Κατατάξτε τις παρακάτω περιπτώσεις του Σχήματος 2.49 σε αύξουσα τιμή έργου. Η δύναμη $\vec{F}$ είναι σε κάθε περίπτωση ίδιου μέτρου, όπως και η μετατόπιση $\Delta\vec{r}$.



Σχήμα 2.49: Παράδειγμα περιπτώσεων έργου.

Λύση:

Ίσως σκεφτείτε ότι το μηδενικό έργο είναι η χαμηλότερη τιμή, αλλά για δείτε το Σχήμα 2.49(b). Θα έχουμε

$$W_b = F\Delta x \cos(\pi) = -F\Delta x \quad (2.302)$$

και βλέπουμε ότι το έργο μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές! Θα επανέλθουμε σε αυτό αργότερα. Το ίδιο ισχύει και για το Σχήμα 2.49(d), όπου

$$W_d = F\Delta x \cos(\theta) \quad (2.303)$$

με $\pi < \theta < \pi/2$, οπότε κι εδώ $W_d < 0$. Το Σχήμα 2.49(a) μας δίνει έργο ίσο με μηδέν αφού

$$W_a = F\Delta x \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (2.304)$$

Εδώ έχουμε μια δύναμη η οποία είναι *κάθετη* στη μετατόπιση και παρατηρούμε ότι *δεν παράγει έργο!* Τέλος, η περίπτωση του Σχήματος 2.49(c) δίνει

$$W_c = F\Delta x \cos(0) = F\Delta x \quad (2.305)$$

Εφ' όσον μέσω της δύναμης που ασκούμε σε ένα σύστημα μπορούμε να αλλάξουμε την κινητική του κατάσταση, μπορούμε να πούμε ότι **μεταφέρουμε ενέργεια** στο σύστημα μέσω του έργου. Άρα

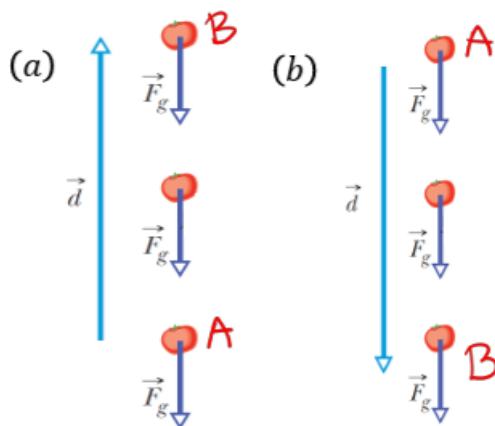
παραγωγή έργου == μεταφορά ενέργειας

Είδαμε ότι το έργο μπορεί να έχει αρνητικό ή θετικό πρόσημο. Ενεργειακά, τι σημαίνει αυτό; Ίσως υποψιάζεστε ήδη (σωστά) ότι αν W είναι το έργο που παράγεται σε ένα σύστημα, τότε θετικό έργο σημαίνει ότι υπάρχει μεταφορά ενέργειας **προς** το σύστημα, ενώ αρνητικό έργο σημαίνει ότι υπάρχει μεταφορά ενέργειας **από** το σύστημα. Σκεφτείτε το εξής παράδειγμα: σπρώχνουμε και επιταχύνουμε ένα βιβλίο μέσω άσκησης οριζόντιας δύναμης. Το έργο που παράγουμε πάνω στο βιβλίο είναι θετικό γιατί η δύναμη που ασκούμε είναι ομόρροπη με τη μετατόπιση. Αντίθετα, σκεφτείτε το εξής παράδειγμα: προσπαθούμε – μάταια – να συγκρατήσουμε ένα άγριο άλογο με ένα λάσο, τραβώντας το λάσο αντίθετα στην κίνηση του αλόγου, ενώ αυτό συνεχίζει να κινείται οριζόντια. Το έργο που παράγουμε είναι αρνητικό γιατί η δύναμη που ασκούμε είναι αντίρροπη με τη μετατόπιση του σώματος (αλόγου).

⁷Φυσικά, ξοδεύετε ενέργεια για να την κρατήσετε ψηλά – καμία αντίρρηση επ' αυτού. Όμως η ενέργειά σας εγκαταλείπει το σώμα σας με τη μορφή *θερμότητας* και όχι έργου πάνω στην μπάλα.

2.5.3 Έργο Δύναμης Βάρους

Μια πολύ δημοφιλής δύναμη είναι η δύναμη του βάρους. Άραγε πώς μπορούμε να βρούμε το έργο που παράγει πάνω σε ένα σώμα; Ας ξεχωρίσουμε τις κινήσεις που μπορεί να κάνει το σώμα. Δείτε το Σχήμα 2.50.



Σχήμα 2.50: Άνοδος και κάθοδος σώματος και δύναμη του βάρους.

- Αν το σώμα ανέρχεται κατακόρυφα προς τα πάνω (Σχήμα 2.50(α)), τότε

$$W_{F_g} = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = F_g d \cos(\pi) = -F_g d = -mgd \quad (2.306)$$

- Αν το σώμα κατέρχεται κατακόρυφα προς τα κάτω (Σχήμα 2.50(β)), τότε

$$W_{F_g} = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = F_g d \cos(0) = F_g d = mgd \quad (2.307)$$

- Αν το σώμα κινείται οριζόντια, το έργο της δύναμης του βάρους ισούται με μηδέν, καθώς η δύναμη του βάρους και το διάνυσμα της μετατόπισης είναι κάθετα μεταξύ τους!
- Σε κάθε άλλη περίπτωση, πρέπει να αναλύσουμε σε συνιστώσες και να ελέγξουμε το έργο που παράγει καθεμιά ξεχωριστά.

Παρατηρήστε τα πρόσημα στα παραπάνω έργα του βάρους. Βγάζουν “νόημα”;

2.5.4 Έργο Κάθετης Δύναμης από Επιφάνεια

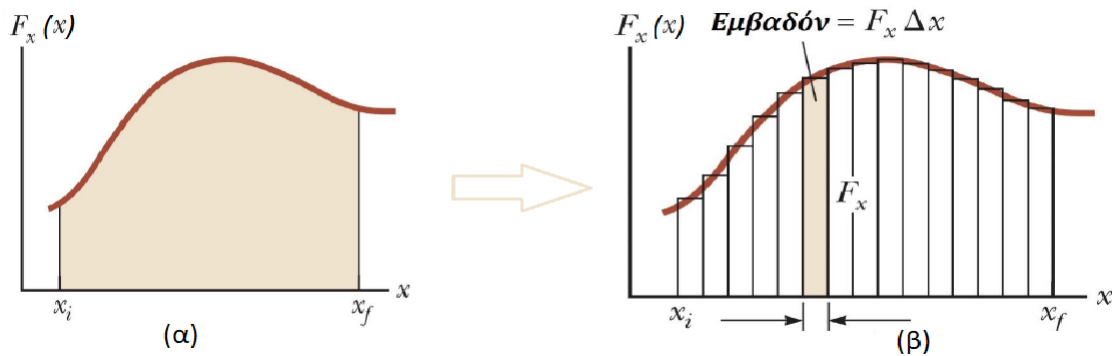
Μια ακόμη συνήθης δύναμη είναι αυτή που ασκεί μια επιφάνεια σε ένα σώμα που βρίσκεται σε επαφή μαζί της, η γνωστή μας δύναμη $\vec{n}$. Η δύναμη αυτή είναι πάντα κάθετη στο επίπεδο που ολισθαίνει ένα σώμα, οπότε για μια απειροστά μικρή μετατόπιση του σώματος, $d\vec{x}$, επάνω στην επιφάνεια, το έργο που παράγει στο σώμα θα είναι

$$W_n = \vec{n} \cdot d\vec{x} = ndx \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (2.308)$$

Να λοιπόν που το έργο της κάθετης δύναμης $\vec{n}$ είναι ίση με μηδέν!

2.5.5 Έργο Μεταβαλλόμενης Δύναμης

Η συζήτησή μας περιστρέφεται τόσο ώρα γύρω από την έννοια του έργου. Ίσως προσέξατε ότι σε όλη τη θεωρία και τα παραδείγματα, η δύναμη που παρήγαγε το έργο ήταν **σταθερή**. Τι γίνεται στην περίπτωση που η δύναμη είναι μεταβαλλόμενου μέτρου; Προφανώς η σχέση του έργου που έχουμε εισάγει δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Τι μπορούμε να κάνουμε τότε; Ας δούμε ένα γενικό παράδειγμα για να κατανοήσουμε



Σχήμα 2.51: Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης.

τη διαδικασία. Δείτε το Σχήμα 2.51(α). Στο σχήμα αυτό βλέπουμε τη x -συνιστώσα μιας δύναμης που μεταβάλλεται κατά μέτρο από ένα σημείο x_i ως ένα σημείο x_f . Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το έργο αυτής της συνιστώσας. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η δύναμη είναι **τμηματικά** σταθερή, δηλ. για πολύ μικρές μετατοπίσεις Δx , η δύναμη $F_x(x)$ είναι σταθερή. Τμηματοποιούμε τον άξονα x λοιπόν σε μικρά τμήματα Δx και υποθέτουμε ότι η τιμή της $F_x(x)$ σε κάθε τέτοιο διάστημα είναι σταθερή, όπως στο Σχήμα 2.51(β). Τότε μπορούμε να πούμε ότι το συνολικό έργο W μπορεί να προσεγγιστεί από τα επιμέρους έργα W_j που παρήχθησαν από μια σταθερή δύναμη. Έτσι

$$W \approx \sum_j W_j \quad (2.309)$$

με

$$W_j = F_{x_j} \Delta x \quad (2.310)$$

αν υποθέσουμε ότι η τμηματοποίηση του άξονα x είναι ομοιόμορφη. Μπορείτε να αναγνωρίσετε ότι το έργο W_j αντιστοιχεί στο εμβαδό του εκάστοτε παραλληλογράμμου με πλευρές F_{x_j} και Δx . Με άλλα λόγια, το συνολικό έργο της δύναμης $\vec{F}_x(x)$ μπορεί να βρεθεί αν αθροίσουμε τα εμβαδά των παραλληλογράμμων που κατασκευάζουμε κάτω από τη συνάρτηση $F_x(x)$. Αν αρχίσουμε να μικραίνουμε πολύ τα διαστήματα Δx – κρατώντας ομοιόμορφη διαμέριση – αρχίζουμε να προσεγγίζουμε όλο και καλύτερα το συνολικό έργο. Αν $\Delta x \rightarrow 0$, τότε το άθροισμα $W \approx \sum_j W_j$ μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x) dx \quad (2.311)$$

Συνολικά

$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x(x) \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x) dx = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F}_x \cdot d\vec{x} \quad (2.312)$$

Παράδειγμα 2.27:

Μια σφαίρα μάζας $m = 0.1$ kg εκτοξεύεται από ένα τουφέκι με κάννη μήκους 0.6 m. Η δύναμη που ασκείται στη σφαίρα από τα αέρια του όπλου είναι

$$F(x) = 15000 + 10000x - 25000x^2 \quad (2.313)$$

με x να μετρείται σε μέτρα και τη δύναμη $F(x)$ σε Newton. Βρείτε το έργο που παράγεται από τα αέρια στη σφαίρα όσο αυτή ταξιδεύει κατά μήκος της κάννης. Θεωρήστε τη διαδρομή ευθύγραμμη.

Λύση:

Θεωρούμε ότι τα αέρια ξεκινούν να παράγουν έργο στη σφαίρα όταν αυτή ξεκινά να κινείται ($x = 0$) έως

όπου αυτή βγει από την κάννη ($x = 0.6$). Η κίνηση θεωρείται ευθύγραμμη, άρα η δύναμη και η μετατόπιση είναι ομόρροπες. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{x} \quad (2.314)$$

$$= \int_0^{0.6} (15000 + 10000x - 25000x^2) dx \quad (2.315)$$

$$= \left(15000x + \frac{10000}{2}x^2 - \frac{25000}{3}x^3 \right) \Big|_0^{0.6} \quad (2.316)$$

$$= 9000 + 18000 - 18000 = 9000 \text{ J} \quad (2.317)$$

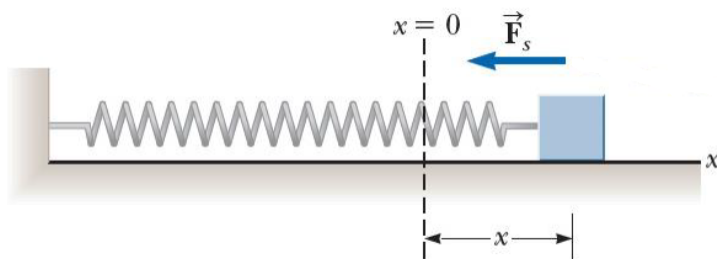
2.5.6 Η δύναμη του ελατηρίου

Μια από τις πιο δημοφιλείς δυνάμεις στη μηχανική, και μάλιστα μεταβαλλόμενου μέτρου, είναι η δύναμη που ασκεί ένα ελατήριο σε ένα σώμα. Τυπικά, ένα ελατήριο έχει ελικοειδές σχήμα, όπως στο Σχήμα 2.52, και συνήθως κατασκευάζεται από χάλυβα. Το ελατήριο κατασκευάζεται έτσι ώστε να μπορεί να αποθηκεύσει ενέργεια (σύντομα θα δούμε τι είδους ενέργεια είναι αυτή). Όταν ένα ελατήριο βρίσκεται στη φυσική



Σχήμα 2.52: Ελικοειδές ελατήριο.

του κατάσταση (ασυμπέστο και μη εκτεταμένο) τότε λέμε ότι βρίσκεται στη **θέση ισορροπίας** του. Ας θεωρήσουμε ως σύστημα ένα σώμα δεμένο πάνω σε ένα ελατήριο. Μετατοπίζουμε το σώμα κατά $x > 0$ από τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου, θεωρώντας ως σημείο αναφοράς $x = 0$ τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου και θετική φορά του άξονα προς τα δεξιά, όπως στο Σχήμα 2.53. Παρατηρούμε ότι κατά την



Σχήμα 2.53: Σώμα σε ελατήριο.

έκταση του ελατηρίου εγείρεται δύναμη $\vec{F}_s$ από το ελατήριο επάνω στο σώμα. Η δύναμη αυτή μεταβάλλεται ανάλογα με την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου (με άλλα λόγια, όσο τεντώνουμε το ελατήριο, τόσο αυξάνεται το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_s$). Έχειδειχθεί ότι η δύναμη αυτή περιγράφεται ως

$$F_s = -kx \quad (2.318)$$

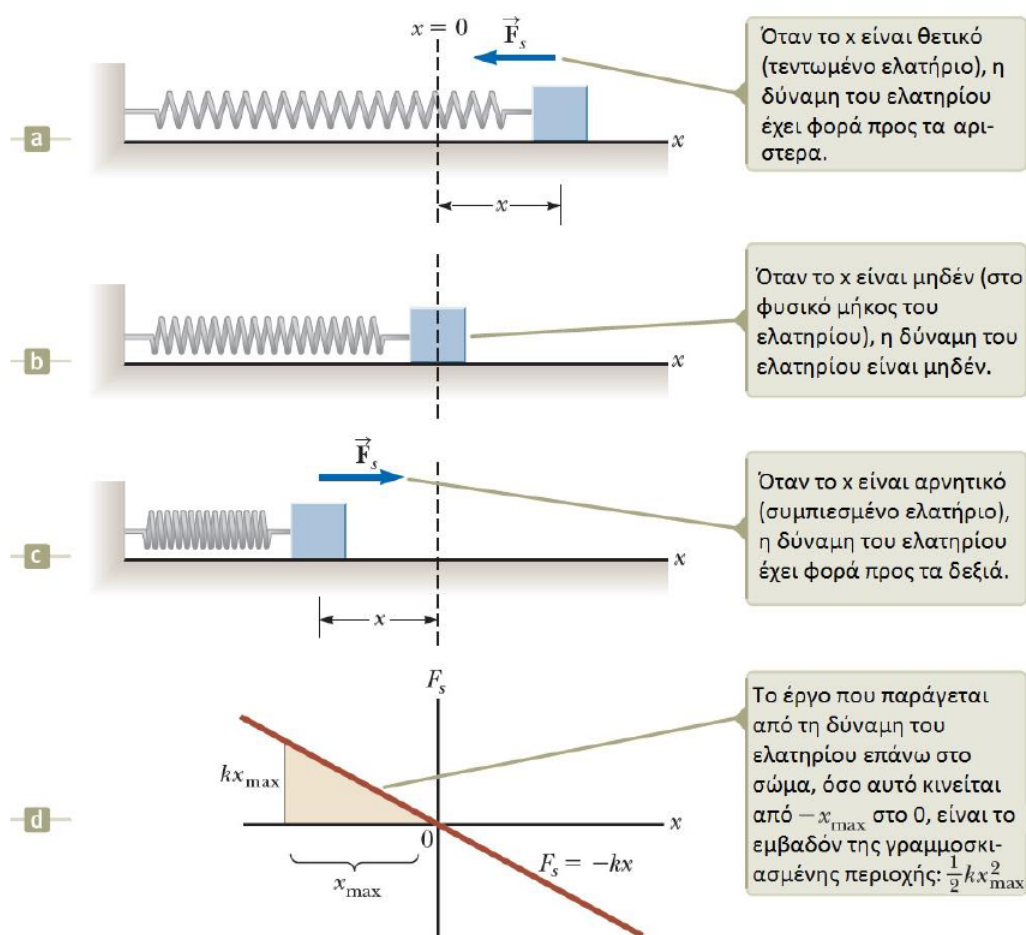
και η σχέση αυτή ονομάζεται **Νόμος του Hooke**. Η σταθερά k έχει τιμή ανάλογη της σκληρότητας του ελατηρίου: μεγάλη τιμή k σημαίνει σκληρό ελατήριο, ενώ μικρή τιμή k υποδηλώνει μαλακό ελατήριο. Προφανώς οι μονάδες της σταθεράς k είναι N/m, έτσι ώστε οι μονάδες του αριστερού μέλους να ισούνται με αυτές του δεξιού. Η διανυσματική μορφή του νόμου του Hooke είναι

$$\vec{F}_s = -k\vec{x} = -kx\vec{i} \quad (2.319)$$

όταν η κίνηση του σώματος γίνεται σε νοητό οριζόντιο άξονα, με το πρόσχημο να υποδηλώνει ότι η φορά της είναι πάντα αντίθετη της μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου και θεωρώντας οριζόντια κίνηση.

2.5.7 Έργο δύναμης ελατηρίου

Ας μελετήσουμε την κίνηση ενός σώματος δεμένου σε ελατήριο, από μια έκταση x σε σχέση με τη θέση ισορροπίας, ως μια συμπίεση κατά την ίδια ποσότητα. Δείτε το Σχήμα 2.54. Να θυμάστε πάντα ότι η



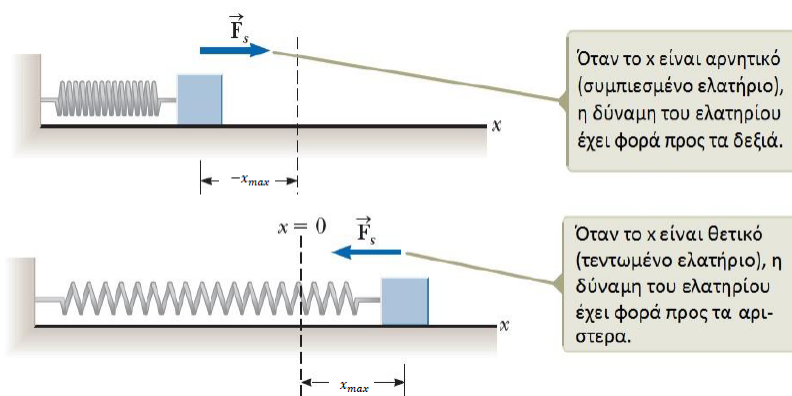
Σχήμα 2.54: Κίνηση σώματος σε ελατήριο.

δύναμη του ελατηρίου είναι μεταβαλλόμενου μέτρου, οπότε αν θέλουμε να υπολογίσουμε το έργο της, ο κλασικός ορισμός του έργου δε θα μας φανεί χρήσιμος. Αντίθετα, θα μας χρειαστεί η Σχέση (2.311). Ας δούμε ένα-ένα τα στιγμιότυπα της κίνησης του Σχήματος 2.54.

- (α') Όταν μετατοπίζουμε το σώμα προς τα δεξιά, το ελατήριο εκτείνεται, η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_s$ έχει φορά αντίθετη της κίνησης, δηλ. προς τα αριστερά. Αφήνουμε το σώμα να κινηθεί.
- (β') Το σώμα επιστρέφει στη θέση ισορροπίας του ($x = 0$), δηλ. το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Τότε η δύναμη του ελατηρίου παύει, στιγμαία, να υφίσταται.
- (γ') Όταν μετατοπίζουμε το σώμα προς τα αριστερά, το ελατήριο συμπίεζεται, η δύναμη του ελατηρίου $\vec{F}_s$ έχει φορά αντίθετη της κίνησης, δηλ. προς τα δεξιά. Αν αφήσουμε το σώμα να κινηθεί, αυτό θα επιστρέφει στη θέση (b) του σχήματος.

(δ') Μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο που παράγεται από τη δύναμη του ελατηρίου επάνω στο σώμα; Μπορούμε εύκολα να το κάνουμε. Αν έχουμε τη γραφική παράσταση δύναμης συναρτήσει της μετατόπισης, τότε το έργο W αποτελεί την επιφάνεια που σχηματίζεται από τη συνάρτηση $F_s(x)$ και τον άξονα x . Η δύναμη είναι γραμμική συνάρτηση του x . Για παράδειγμα, όπως φαίνεται στο σχήμα, το έργο που παράγεται από τη δύναμη του ελατηρίου πάνω στο σώμα όσο αυτό κινείται από $-x_{max}$ (τη μέγιστη μετατόπιση προς τα αριστερά από το σημείο ισορροπίας) ως $x = 0$ (το σημείο ισορροπίας) είναι το εμβαδόν της γραμμικοσκελισμένης περιοχής, που αποτελεί περιοχή εντός ορθογωνίου τριγώνου. Εύκολα βρίσκεται από γεωμετρία ότι το έργο αυτό ισούται με $\frac{1}{2}kx_{max}^2$.

Το έργο της δύναμης $\vec{F}_s$ του ελατηρίου θα μας απασχολήσει αρκετά, οπότε ας βάλουμε λίγο τα μαθηματικά να δουλέψουν για να καταλάβουμε τι συμβαίνει γενικότερα. Ας θεωρήσουμε ότι το ελατήριο συμπιέζεται σε μια μέγιστη τιμή (αρχική θέση $x_i = -x_{max}$) και αφήνεται ελεύθερο. Η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά αντίθετη της κίνησης, δηλ. προς τα δεξιά (αφού συμπιέζουμε προς τα αριστερά), όπως στο Σχήμα 2.55. Ας επιλέξουμε τελική θέση της κίνησης $x_f = 0$, δηλ. τη θέση ισορροπίας κι ας υπολογίσουμε



Σχήμα 2.55: Συμπίεση κι έκταση ελατηρίου.

το έργο της δύναμης του ελατηρίου επάνω στο σώμα κατά τη μετατόπιση του τελευταίου μεταξύ αυτών των δυο θέσεων. Δεδομένου ότι η κίνηση είναι ευθύγραμμη και τα διανύσματα $\vec{F}_s$, $\vec{x}$ είναι ομόρροπα, θα είναι

$$W_s = \int \vec{F}_s \cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\vec{i}) \cdot (dx\vec{i}) = \int_{-x_{max}}^0 (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_{max}^2 \quad (2.320)$$

Παρατηρήστε ότι το έργο της δύναμης του ελατηρίου είναι **θετικό**: η δύναμη αυτή εισήγαγε στο σύστημα {σώμα} ενέργεια ώστε να το φέρει στη θέση ισορροπίας. Ας δούμε τώρα την άλλη όψη.

Έστω ότι το ελατήριο συνεχίζει την πορεία του από τη θέση ισορροπίας ως μια θέση $x_f = x_{max}$. Θεωρούμε αρχική θέση τη θέση ισορροπίας αυτή τη φορά. Η δύναμη του ελατηρίου έχει τώρα φορά προς τα αριστερά. Ποιό είναι το έργο της δύναμης του ελατηρίου τώρα; Κάποιος/α μπορεί να πει “μα ξανά είναι το ίδιο”. Είναι;

$$W_s = \int \vec{F}_s \cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\vec{i}) \cdot (dx\vec{i}) = \int_0^{x_{max}} (-kx)dx = -\frac{1}{2}kx_{max}^2 \quad (2.321)$$

Το έργο της δύναμης του ελατηρίου σε αυτή τη διαδρομή είναι **αρνητικό**! Η δύναμη του ελατηρίου αντιτίθεται στην κίνηση του σώματος που προσπαθεί να απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας, δηλ. η δύναμη του ελατηρίου και η μετατόπιση του σώματος είναι αντίρροπα διανύσματα. Κατά συνέπεια, αφαιρείται ενέργεια από το σύστημα {σώμα}. Επίσης, καταλαβαίνετε ότι το συνολικό έργο της δύναμης $\vec{F}_s$ επάνω στο σώμα από τη θέση $x_i = -x_{max}$ ως τη θέση $x_f = x_{max}$ είναι μηδέν! Αυτό ισχύει για κάθε

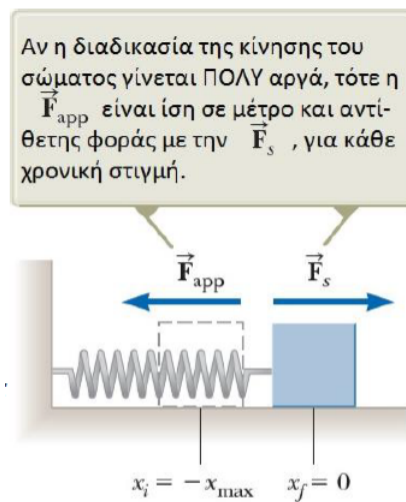
ζεύγος αρχικής - τελικής θέσης που είναι συμμετρικές γύρω από το σημείο ισορροπίας. Όμως, για μια οποιαδήποτε μετατόπιση από μια τυχαία θέση x_i ως μια άλλη τυχαία θέση x_f ισχύει

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \quad (2.322)$$

που καταλαβαίνετε ότι δεν είναι απαραίτητα ίσο με μηδέν.

2.5.8 Έργο εξωτερικής δύναμης σε ελατήριο

Έστω μια εξωτερική δύναμη $\vec{F}_{app}$ που εφαρμόζεται στο σύστημα {σώμα}, όπως στο Σχήμα 2.56. Υποθέστε



Σχήμα 2.56: Έργο εξωτερικής δύναμης σε σώμα δεμένο σε ελατήριο.

ότι η κίνηση του ελατηρίου γίνεται από τη θέση μετατόπισης $x_i = -x_{max}$ ως τη θέση $x_f = 0$ (θέση ισορροπίας). Καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης, το σώμα κινείται πολύ αργά (χωρίς επιτάχυνση), έτσι ώστε σε κάθε στιγμή να ισχύει ότι ισορροπεί:

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \iff \vec{F}_s + \vec{F}_{app} = \vec{0} \quad (2.323)$$

ή αλλιώς

$$\vec{F}_s = -\vec{F}_{app} \quad (2.324)$$

Ας υπολογίσουμε το έργο αυτής της εξωτερικής δύναμης.

$$W_{app} = \int \vec{F}_{app} \cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} (kx\vec{i}) \cdot (dx\vec{i}) = \int_{-x_{max}}^0 kx dx = -\frac{1}{2}kx_{max}^2 \quad (2.325)$$

Με άλλα λόγια

$$W_{app} = -W_s \quad (2.326)$$

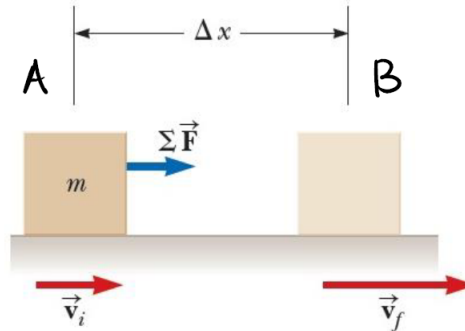
Γενικεύοντας, για οποιαδήποτε μετατόπιση από μια αρχική σε μια τελική θέση,

$$W_{app} = \int_{x_i}^{x_f} kx dx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 = -W_s \quad (2.327)$$

2.5.9 Κινητική Ενέργεια

Βλέπουμε λοιπόν συνεχώς ότι πράγματι το έργο αποτελεί ένα **μηχανισμό μεταφοράς ενέργειας** – έστω μόνο σε αυτά τα απλά συστήματα που συζητάμε. Ένα καλό ερώτημα είναι “τι συμβαίνει σε αυτήν την ενέργεια”; Από τα λίγα που έχουμε συζητήσει – αλλά κυρίως με βάση την καθημερινή εμπειρία σας – καταλαβαίνετε ότι ένα ενδεχόμενο είναι να μεταβάλλει την ταχύτητα ενός σώματος. Εδώ λοιπόν έρχεται ο πρώτος τύπος ενέργειας που θα συναντήσουμε, η οποία ονομάζεται **κινητική ενέργεια**. Ας την εισάγουμε με ένα παράδειγμα.

Δείτε το Σχήμα 2.57. Θεωρούμε ότι το σώμα του σχήματος αποτελεί και το σύστημα που μελετάμε, και



Σχήμα 2.57: Σώμα σε κίνηση υπό επίδραση δύναμης.

το οποίο κινείται από τη θέση (A) στη θέση (B), με μετατόπιση Δx , έχοντας αρχικά μια ταχύτητα $\vec{u}_i = \vec{u}_A$ και καταλήγοντας σε μια ταχύτητα $\vec{u}_f = \vec{u}_B$, λόγω επίδρασης συνισταμένης δυνάμεων $\Sigma \vec{F}$. Έστω ότι αυτή η συνισταμένη είναι σταθερή. Αναγνωρίζετε ότι η κίνηση μπορεί να μοντελοποιηθεί ως επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση. Έτσι από τις εξισώσεις της κίνησης θα είναι

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta x \iff a = \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} \quad (2.328)$$

Ταυτόχρονα, η κίνηση μπορεί να μοντελοποιηθεί ως κίνηση σώματος υπό επίδραση σταθερής δύναμης. Από το 2ο νόμο του Newton, θα έχουμε

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \quad (2.329)$$

και θεωρώντας θετική φορά προς τα δεξιά, έχουμε

$$\Sigma F = ma \iff \Sigma F = m \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} \iff \Sigma F \Delta x = \frac{1}{2}mu_f^2 - \frac{1}{2}mu_i^2 \quad (2.330)$$

Αναγνωρίζετε το πρώτο μέλος; Είναι ο ορισμός του έργου σταθερής δύναμης. Η δύναμη αυτή είναι εξωτερική του συστήματος, οπότε το έργο μπορεί να βαφτιστεί ως W_{ext} . Έτσι

$$W_{ext} = \frac{1}{2}mu_f^2 - \frac{1}{2}mu_i^2 \quad (2.331)$$

Η ποσότητα $\frac{1}{2}mu^2$ θα προκύψει πάρα πολλές φορές στη συνέχεια, οπότε ας της δώσουμε ένα καλό όνομα: θα την ονομάσουμε **κινητική ενέργεια** του συστήματος (σώματος) και θα τη συμβολίζουμε με K . Οπότε τελικά

$$W_{ext} = K_f - K_i = \Delta K \quad (2.332)$$

Η κινητική ενέργεια αναπαριστά το είδος της ενέργειας που σχετίζεται με την κίνηση του σώματος (ή των μελών ενός συστήματος). Μονάδα μέτρησης της είναι προφανώς το J, όπως σε κάθε είδος ενέργειας που θα συναντήσουμε. Η τελευταία σχέση αποτελεί το περίφημο **Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας** - **Έργου** - **ΘΜΚΕΕ** και μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας - Έργου

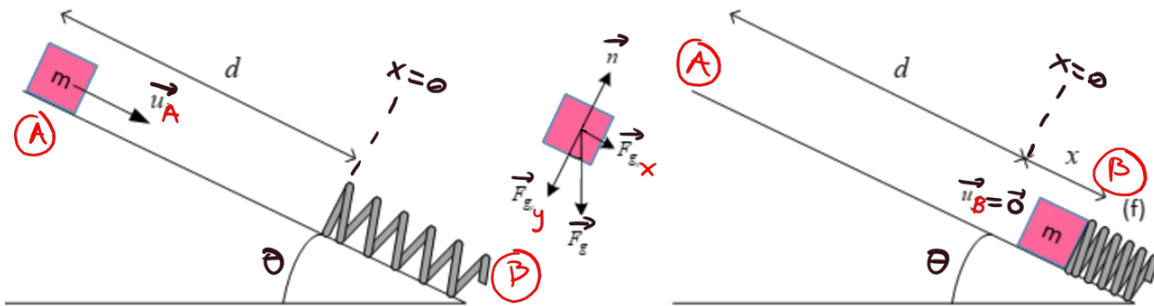
Όταν σε ένα σύστημα παράγεται έργο από μια συνισταμένη δυνάμεων και η μόνη αλλαγή σε αυτό το σύστημα αφορά το μέτρο της ταχύτητας του (ή των μελών του), το συνολικό έργο ισούται με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος:

$$\Delta K = \sum W_{ext} \quad (2.333)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.28:

Λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ έχει ελατήριο σταθεράς k στερεωμένο στο κάτω μέρος του. Ένα κουτί μάζας m τοποθετείται πάνω στο κεκλιμένο σε απόσταση d από το ελατήριο, όπως στο Σχήμα 2.58. Από τη θέση αυτή, το κουτί βάλλεται προς το ελατήριο με ταχύτητα u_0 . Μπορείτε να προβλέψετε πόσο θα έχει συμπιεστεί το ελατήριο όταν το κουτί φτάνει στιγμιαία σε ηρεμία;



Σχήμα 2.58: Σώμα σε κεκλιμένο με ελατήριο στη βάση.

Λύση:

Έστω ότι το ελατήριο ξεκινά από τη θέση (A) και σταματά στιγμιαία στη θέση (B), αφού έχει διανύσει απόσταση $\Delta x = d + x$, με x τη συμπίεση του ελατηρίου. Θέτουμε τους άξονες κίνησης πάνω στο κεκλιμένο, δηλ. ο άξονας x' βρίσκεται πάνω στο κεκλιμένο και ο $y'y$ κάθετος σε αυτό. Θεωρούμε θετικές φορές τις συμβατικές. Θεωρούμε ως σύστημα το {σώμα}, που είναι μονομελές και μη απομονωμένο. Όλες οι δυνάμεις που του ασκούνται είναι εξωτερικές, και είναι η δύναμη του βάρους, η κάθετη δύναμη από το κεκλιμένο, και η δύναμη του ελατηρίου (όταν το σώμα φτάσει κοντά του). Δείτε τις δυνάμεις που δρουν στο σχήμα. Η δύναμη του βάρους αναλύεται σε δυο συνιστώσες,

$$\vec{F}_{gx} = F_{gx} \sin(\theta) \vec{i}, \quad \vec{F}_{gy} = F_{gy} \cos(\theta) \vec{j} \quad (2.334)$$

Θα δουλέψουμε στη διαδρομή $A \rightarrow B$. Ισχύει το ΘΜΚΕΕ σε αυτή τη διαδρομή και διατυπώνεται ως

$$\Delta K_{A \rightarrow B} = \sum W_{ext} = W_n + W_{F_{gx}} + W_{F_{gy}} + W_s \quad (2.335)$$

με όλα τα έργα να υπολογίζονται στη διαδρομή $A \rightarrow B$. Άρα

$$K_B - K_A = 0 + F_g \sin(\theta) \Delta x + 0 + \left(0 - \frac{1}{2} k x^2\right) \quad (2.336)$$

Τα δυο έργα, W_n , $W_{F_{gy}}$ ισούνται με μηδέν λόγω καθετότητας των δυνάμεων στη μετατόπιση του σώματος, ενώ το έργο της δύναμης του ελατηρίου δίνεται ως

$$W_s = \frac{1}{2} k x_A^2 - \frac{1}{2} k x_B^2 = 0 - \frac{1}{2} k x_B^2 = -\frac{1}{2} k x^2 \quad (2.337)$$

Συνεχίζοντας

$$0 - \frac{1}{2}mu_0^2 = mg \sin(\theta)(d + x) - \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.338)$$

$$\frac{1}{2}kx^2 - mg \sin(\theta)x - \left(\frac{1}{2}mu_0^2 + mg \sin(\theta)d\right) = 0 \quad (2.339)$$

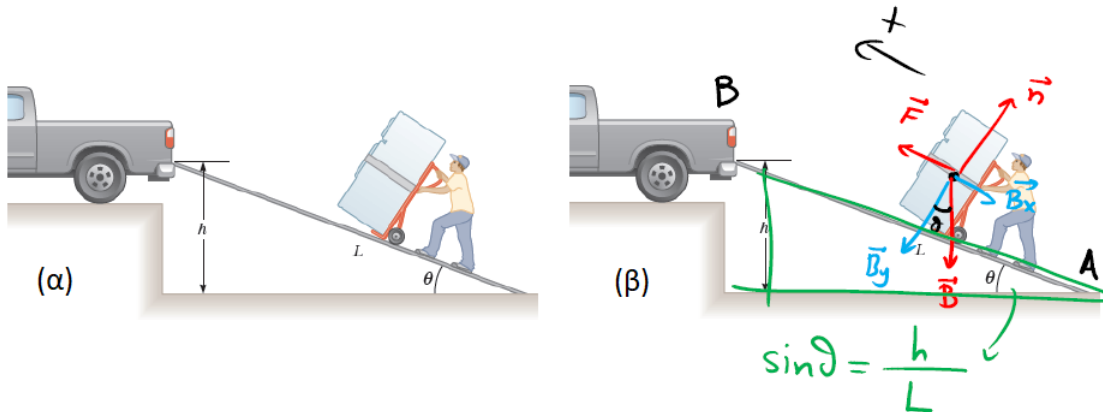
Έχουμε λοιπόν ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς x , το οποίο έχει ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{mg \sin(\theta) \pm \sqrt{(mg \sin(\theta))^2 + 2k\left(\frac{1}{2}mu_0^2 + mg \sin(\theta)d\right)}}{k} \quad (2.340)$$

Από τις δυο ρίζες θα επιλέξουμε τη θετική, γιατί η συμπίεση του ελατηρίου γίνεται προς τη θετική φορά του άξονα $x'x$.

Παράδειγμα 2.29:

Ο φίλος σας θέλει να ανεβάσει το ψυγείο του σε ένα φορτηγό που βρίσκεται σε ύψος h , χρησιμοποιώντας μια ράμπα υπό γωνία θ , όπως στο Σχήμα 2.59(α). Αν το κάνει με σταθερή ταχύτητα, ισχυρίζεται ότι θα απαιτηθεί λιγότερο έργο από μέρους του αν το μήκος της ράμπας L αυξηθεί. Έχει δίκιο; Θεωρήστε ως σύστημα το ψυγείο με το καρότσι μεταφοράς και ότι η δύναμη $\vec{F}$ που ασκεί στο ψυγείο είναι σταθερή.



Σχήμα 2.59: Ανέβασμα ψυγείου σε φορτηγό.

Λύση:

Ας σχεδιάσουμε τις δυνάμεις επάνω στο ψυγείο, όπως στο Σχήμα 2.59(β). Έχουμε τη δύναμη $\vec{F}$ που ασκεί ο φίλος σας στο ψυγείο, η δύναμη $\vec{F}_g = \vec{B}$ του βάρους του ψυγείου (η δύναμη που ασκεί η Γη στο ψυγείο), και η κάθετη δύναμη $\vec{n}$ από τη ράμπα στο ψυγείο. Έστω ότι ορίζουμε ένα σύστημα συντεταγμένων με τον άξονα $x'x$ να είναι παράλληλος στη ράμπα και αναλύουμε όλες τις δυνάμεις δεν είναι συνευθειακές με τους άξονες, όπως η δύναμη του βάρους. Θεωρούμε θετική φορά προς το αριστερό μέρος του άξονα (προς το φορτηγό) και έστω ότι η κίνηση γίνεται από το σημείο (Α) ως το σημείο (Β). Το σύστημα μας είναι το {ψυγείο + καρότσι} (ή ένα ψυγείο με ρόδες ☺), μονομελές (στην ουσία) και μη απομονωμένο. Δεδομένου ότι κινείται με σταθερή (άγνωστη) ταχύτητα, καταλαβαίνουμε ότι η τελευταία θα είναι ίδια τόσο στο σημείο (Α) στη βάση της ράμπας, όσο και στο σημείο (Β) όταν φορτωθεί στο φορτηγό. Οπότε οι κινητικές ενέργειες του συστήματος στα δυο σημεία θα είναι ίδιες! Άρα:

$$\Delta K_{A \rightarrow B} = K_B - K_A = 0 \quad (2.341)$$

Από το ΘΜΚΕΕ από το σημείο (Α) στο σημείο (Β) έχουμε

$$\Delta K_{A \rightarrow B} = W_F + W_{B_x} + W_n + W_{B_y} \quad (2.342)$$

$$0 = W_F + W_{B_x} + W_n + W_{B_y} \quad (2.343)$$

Παρατηρήστε ότι $W_n = W_{B_y} = 0$ αφού οι αντίστοιχες δυνάμεις είναι κάθετες στη μετατόπιση του ψυγείου, οπότε το έργο τους είναι μηδενικό. Έτσι

$$0 = W_F + W_{B_x} + 0 + 0 \quad (2.344)$$

$$0 = W_F + W_{B_x} \quad (2.345)$$

$$W_F = -\vec{B}_x \cdot \Delta \vec{x} \quad (2.346)$$

$$= -B_x \Delta x \cos(\pi) \quad (2.347)$$

$$= -mg \sin(\theta) L \cos(\pi) \quad (2.348)$$

$$= mg \sin(\theta) L \quad (2.349)$$

και από την τριγωνομετρία του σχήματος έχουμε

$$W_F = mgh \quad (2.350)$$

Παρατηρούμε ότι το έργο της δύναμης $\vec{F}$ δεν εξαρτάται από το μήκος της ράμπας L . Άρα ο φίλος μας δεν έχει δίκιο.

Παράδειγμα 2.30:

Δυο σταθερές δυνάμεις ασκούνται σε ένα σώμα μάζας $m = 5 \text{ kg}$ που κινείται στο xy επίπεδο, όπως στο Σχήμα 2.60. Η δύναμη $\vec{F}_1$ έχει μέτρο 25 N και ασκείται υπό γωνία 35° , και η δύναμη $\vec{F}_2$ έχει μέτρο 42 N και ασκείται υπό γωνία 150° . Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το σώμα βρίσκεται στο σημείο $(0, 0)$ και έχει ταχύτητα $(4 \text{ m/s})\vec{i} + (2.5 \text{ m/s})\vec{j}$.

- Εκφράστε τις δυο δυνάμεις με χρήση μοναδιαίων διανυσμάτων.
- Βρείτε τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκείται στο σώμα.
- Δείξτε ότι η επιτάχυνση του σώματος ισούται με

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} = (-3.18 \text{ m/s}^2)\vec{i} + (7.07 \text{ m/s}^2)\vec{j} \quad (2.351)$$

- Θεωρήστε τη χρονική στιγμή $t = 3 \text{ s}$. Βρείτε

- την ταχύτητα του σώματος
- τη θέση του σώματος
- την κινητική του ενέργεια, με τη σχέση $\frac{1}{2}mu_{t=3}^2$
- την κινητική του ενέργεια, με τη σχέση $\frac{1}{2}mu_{t=0}^2 + \sum(\vec{F} \cdot \Delta \vec{r})$
- Τι συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε από τις απαντήσεις σας στα δυο παραπάνω ερωτήματα;

Λύση:

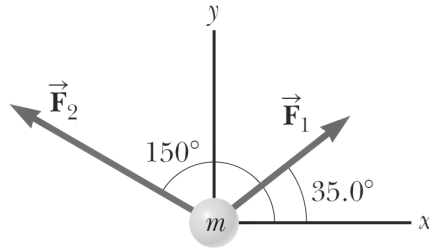
- Οι δυο δυνάμεις γράφονται ως

$$\vec{F}_1 = 25(\cos 35^\circ \vec{i} + \sin 35^\circ \vec{j}) = (20.5 \text{ N})\vec{i} + (14.3 \text{ N})\vec{j} \quad (2.352)$$

$$\vec{F}_2 = 42(\cos 150^\circ \vec{i} + \sin 150^\circ \vec{j}) = (-36.4 \text{ N})\vec{i} + (21.0 \text{ N})\vec{j} \quad (2.353)$$

- Θα είναι

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (-15.9 \text{ N})\vec{i} + (35.3 \text{ N})\vec{j} \quad (2.354)$$



Σχήμα 2.60: Εφαρμογή ΘΜΚΕΕ και η σχέση του με την κινητική.

iii. Η επιτάχυνση του σώματος ισούται με

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m} = (-3.18 \text{ m/s}^2)\vec{i} + (7.07 \text{ m/s}^2)\vec{j} \quad (2.355)$$

iv. Τη χρονική στιγμή $t = 3 \text{ s}$,

(α') θα είναι

$$\vec{u}_f = \vec{u}_i + \vec{a}t = (-5.54 \text{ m/s})\vec{i} + (23.7 \text{ m/s})\vec{j} \quad (2.356)$$

(β') θα είναι

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{u}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = (-2.30 \text{ m})\vec{i} + (39.3 \text{ m})\vec{j} \quad (2.357)$$

(γ') με τη σχέση $\frac{1}{2}mu_{t=3}^2 \approx 1.48 \text{ kJ}$

(δ') με τη σχέση $\frac{1}{2}mu_{t=0}^2 + \sum(\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}) = 55.6 + 1426 \approx 1480 \text{ J}$, δηλ. 1.48 kJ

(ε') Το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας - έργου είναι συνεπές με το 2ο νόμο του Newton.

Παράδειγμα 2.31:

Όταν ένας οδηγός πατάει το γκάζι σε ένα ακίνητο αυτοκίνητο, το αυτοκίνητο επιταχύνει. Για τα πρώτα λίγα δευτερόλεπτα της κίνησής του, η επιτάχυνσή του αυξάνεται με το χρόνο σύμφωνα με την έκφραση

$$a(t) = 1.16t - 0.21t^2 + 0.24t^3 \quad (2.358)$$

με t το χρόνο σε δευτερόλεπτα και την επιτάχυνση $a(t)$ σε m/s^2 . Δείξτε ότι - απουσία τριβών ή άλλης απώλειας ενέργειας - η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του αυτοκινήτου μάζας $m = 1160 \text{ kg}$ κατά το διάστημα $t = 0$ ως $t = 2.5 \text{ s}$ είναι $1.38 \cdot 10^4 \text{ J}$.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι η επιτάχυνση αποτελεί την πρώτη παράγωγο της ταχύτητας, άρα θα πρέπει να ολοκληρώσουμε τη συνάρτηση επιτάχυνσης ως προς t .

$$u(t) = \int_0^t a(u)du = \int_0^t (1.16u - 0.21u^2 + 0.24u^3)du \quad (2.359)$$

$$= 1.16\frac{u^2}{2} - 0.21\frac{u^3}{3} + 0.24\frac{u^4}{4}\bigg|_0^t \quad (2.360)$$

$$= 0.58t^2 - 0.07t^3 + 0.06t^4 \quad (2.361)$$

Για $t = 0$, $u_i = 0$ από εκφώνηση. Σε $t = 2.5 \text{ s}$, θα έχουμε

$$u_f = 0.58 \cdot 2.5^2 - 0.07 \cdot 2.5^3 + 0.06 \cdot 2.5^4 = 4.88 \text{ m/s} \quad (2.362)$$

Άρα η μεταβολή στην κινητική ενέργεια, δεδομένου ότι αρχικά το αυτοκίνητο ήταν ακίνητο, θα είναι

$$\Delta K = K_f - K_i = K_f - 0 = \frac{1}{2}mu_f^2 = 1.38 \cdot 10^4 \text{ J} \quad (2.363)$$

Παράδειγμα 2.32:

Μια δύναμη ασκείται σε ένα σώμα 3.0 kg κι αυτό κινείται με βάση τη σχέση

$$x(t) = 3.0t - 4.0t^2 + 1.0t^3 \quad (2.364)$$

με x σε μέτρα και t σε δευτερόλεπτα. Δείξτε ότι το έργο της δύναμης από $t = 0$ ως $t = 4$ sec είναι $W_F = 528$ J. Θεωρήστε ως σύστημα το σώμα.

Λύση:

Γνωρίζουμε από τις εξισώσεις της Κινητικής ότι η στιγμιαία ταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x(t)$, δηλ.

$$u(t) = \frac{d}{dt}x(t) = 3.0 - 8.0t + 3.0t^2 \quad (2.365)$$

και αντικαθιστώντας για $t = 0$ και $t = 4$ s, παίρνουμε

$$u(0) = 3.0 \text{ m/s και } u(4) = 19 \text{ m/s} \quad (2.366)$$

Από το ΘΜΚΕΕ επάνω στο σύστημα {σώμα}, μονομελές και μη απομονωμένο, στη διαδρομή (A) ως (B), έχουμε

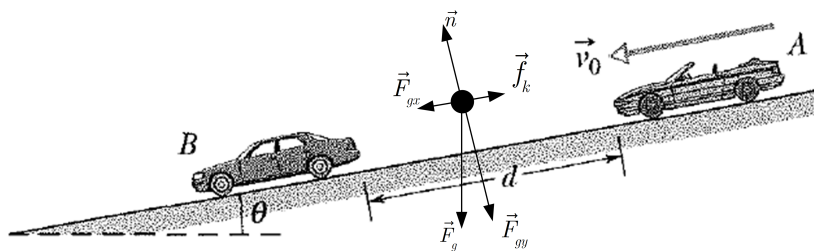
$$\Delta K = W_F \iff W_F = \frac{1}{2}mu(4)^2 - \frac{1}{2}mu(0)^2 = 528 \text{ J} \quad (2.367)$$

Παράδειγμα 2.33:

Καταθέτετε ως ειδικός/η μάρτυρας σε μια περίπτωση ατυχήματος, όταν ένα αυτοκίνητο A χτύπησε στο πίσω μέρος ενός αυτοκινήτου B, που ήταν σταματημένο στο φανάρι σε ένα δρόμο με κλίση $\theta = 12^\circ$ προς τα κάτω, όπως στο Σχήμα 2.61. Τα αμάξια είχαν απόσταση $d = 24.0$ m όταν ο οδηγός του αμαξίου A πάτησε φρένο και το αμάξι του άρχισε να ολισθαίνει. Βρήκατε επίσης ότι η ταχύτητα του αμαξίου A τη στιγμή που πατήθηκαν τα φρένα ήταν $u_A = 18$ m/s. Με ποιά ταχύτητα το αυτοκίνητο A χτύπησε το B αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ήταν

(α') 0.60, σε στεγνό δρόμο

(β') 0.10, σε δρόμο καλυμμένο με υγρά φύλλα δένδρων



Σχήμα 2.61: Σχήμα Άσκησης 2.33.

Λύση:

Τοποθετούμε τους άξονές μας πάνω στο κεκλιμένο, με τον άξονα x' παράλληλο με το κεκλιμένο. Θεωρούμε ως θετικές φορές προς τη βάση του κεκλιμένου και προς τα πάνω για τους άξονες x' , y' αντίστοιχα. Έστω το σύστημα {αυτοκίνητο A}, μονομελές και μη απομονωμένο, στο οποίο ασκούνται οι εξωτερικές δυνάμεις της τριβής, του βάρους, και της κάθετης δύναμης από το κεκλιμένο. Το αυτοκίνητο A εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στον άξονα x' με επιτάχυνση $\vec{a}_x$. Θα δείξουμε τη λύση τόσο με Νόμους του Newton όσο και με το ΘΜΚΕΕ.

(α') Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Newton κατά την κατάβαση του αυτοκινήτου και έχουμε

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \iff \vec{F}_{g_x} + \vec{f}_k = m\vec{a}_x \implies F_{g_x} - f_k = ma_x \quad (2.368)$$

Το σώμα ισορροπεί στον άξονα $y'y$, οπότε από τον 1ο νόμο Newton έχουμε

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{n} + m\vec{g} \cos(\theta) = \vec{0} \implies n - mg \cos(\theta) = 0 \iff n = mg \cos(\theta) \quad (2.369)$$

οπότε η δύναμη τριβής ολίσθησης θα είναι ίση με

$$f_k = \mu_k n = \mu_k mg \cos(\theta) \quad (2.370)$$

Με $\mu_k = 0.6$, παίρνουμε

$$mg \sin(\theta) - \mu_k mg \cos(\theta) = ma_x \iff a_x = g \sin(\theta) - \mu_k g \cos(\theta) = -3.72 \text{ m/s}^2 \quad (2.371)$$

με το αρνητικό πρόσημο να σημαίνει ότι το αμάξι επιβραδύνεται (όπως αναμενόταν). Με αρχική ταχύτητα $u_i = u_A = 18 \text{ m/s}$ και απόσταση $d = 24.0 \text{ m}$ μεταξύ των οχημάτων, από τη γνωστή εξίσωση της επιταχυνόμενης κίνησης στον $x'x$

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a_x \Delta x \iff u_f = \sqrt{u_i^2 + 2a_x d} = 12.07 \text{ m/s} \quad (2.372)$$

Εναλλακτικά, εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕΕ στη διαδρομή $A \rightarrow B$:

$$\Delta K_{A \rightarrow B} = W_{f_k} + W_{F_{g_x}} + W_n = W_{f_k} + W_{F_{g_x}} + 0 = W_{f_k} + W_{F_{g_x}} \quad (2.373)$$

με τις δυνάμεις $\vec{f}_k$, $\vec{F}_{g_x}$, να είναι οι μόνες που παράγουν έργο επάνω στο όχημα. Άρα

$$\Delta K_{A \rightarrow B} = -f_k d + mg \sin(\theta) d \quad (2.374)$$

$$K_B - K_A = -\mu_k mg \cos(\theta) d + mg \sin(\theta) d \quad (2.375)$$

$$\frac{1}{2} m u_B^2 - \frac{1}{2} m u_A^2 = -\mu_k mg \cos(\theta) d + mg \sin(\theta) d \quad (2.376)$$

$$u_B = \sqrt{u_A^2 - 2\mu_k g \cos(\theta) d + 2g \sin(\theta) d} = 12.072 \text{ m/s} \quad (2.377)$$

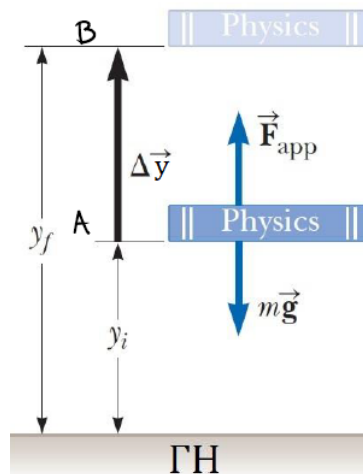
εφαρμόζοντας ξανά την ισορροπία και τον 1ο νόμο Newton στον άξονα $y'y$.

(β') Επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω βήματα, βρίσκουμε αρχικά ότι $a_x = -1.1 \text{ m/s}^2$, και η τελική ταχύτητα είναι $u_f = u_B = 19.385 \text{ m/s}$.

2.5.10 Δυναμική Ενέργεια

Ως τώρα συζητήσαμε για την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων σε ένα σύστημα ενός μόνο σώματος. Σε αυτήν την παράγραφο θα μιλήσουμε για δυο ή περισσότερα σώματα ως μέλη ενός συστήματος και τις **εσωτερικές δυνάμεις** που ασκούνται μεταξύ τους. Με άλλα λόγια, θα βάλουμε στην κουβέντα και **απομονωμένα** συστήματα. Τι ενεργειακό νέο έχουν να μας πουν συστήματα που δεν αλληλεπιδρούν ενεργειακά με το περιβάλλον;;

Θεωρήστε ως σύστημα το {βιβλίο, Γη}, όπως στο Σχήμα 2.62. Μετατοπίζουμε κατακόρυφα και πολύ αργά (έτσι ώστε $\sum \vec{F}_y = \vec{0}$) το βιβλίο από μια θέση (Α), σε αρχικό ύψος $y_i = y_A$ σε μια θέση (Β) σε ύψος $y_f = y_B$, μέσω εξωτερικής δύναμης $\vec{F}_{app}$. Καταλαβαίνετε ότι η ενέργεια του συστήματος αυξάνεται λόγω του έργου της $\vec{F}_{app}$, που είναι θετικό (δύναμη και μετατόπιση ομόρροπες), δηλ. μεταφέρουμε ενέργεια στο σύστημα ανυψώνοντας το βιβλίο. Οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι η δύναμη του βάρους (εσωτερική στο σύστημα, μεταξύ των μελών του) και η δύναμη ανύψωσης του βιβλίου (εξωτερική



Σχήμα 2.62: Σύστημα βιβλίου και Γης.

στο σύστημα). Ανάμεσα στην αρχική και στην τελική θέση δεν υπάρχει καμιά μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος, αφού και στη θέση (A) και στη (B) το βιβλίο έχει την ίδια ταχύτητα (κινήθηκε χωρίς επιτάχυνση). Η ενέργεια που εισάγαμε στο σύστημα δεν μετατράπηκε σε μεταβολή της κινητικής ενέργειας, άρα πρέπει να έχει **αποθηκευτεί σε διαφορετική μορφή!**

Ας σκεφτούμε ότι το βιβλίο θα πέσει στο ύψος $y_i = y_A$ αν το αφήσουμε από τη θέση (B) που το ανεβάσαμε. Οπότε το βιβλίο (και το σύστημα, κατ' επέκταση) πλέον μεταβάλλει την κινητική του ενέργεια πέφτοντας, αφού επιταχύνεται υπό την επίδραση της δύναμης του βάρους του. Πώς απέκτησε την ενέργεια που οδήγησε στη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας; Προφανώς προέρχεται από το έργο της δύναμης $\vec{F}_{app}$ κατά την ανύψωση του βιβλίου νωρίτερα! Η ενέργεια που ήταν **αποθηκευμένη στο σύστημα** πριν το μέλος του (βιβλίο) αφηθεί να πέσει ονομάζεται **δυναμική ενέργεια**. Ας δοκιμάσουμε την έννοια του έργου για την εξωτερική δύναμη που ανυψώνει σταθερά (πολύ αργά) το βιβλίο, έτσι ώστε $\vec{F}_{app} = -\vec{F}_g$, με $\vec{F}_g$ τη δύναμη του βάρους που ασκεί η Γη στο βιβλίο. Θα είναι

$$W_{app} = \vec{F}_{app} \cdot \Delta \vec{y} \quad (2.378)$$

$$= F_{app} \vec{j} \cdot (y_f - y_i) \vec{j} \quad (2.379)$$

$$= F_{app} \vec{j} \cdot (y_B - y_A) \vec{j} \quad (2.380)$$

$$= mgy_B - mgy_A \quad (2.381)$$

$$= U_{gB} - U_{gA} \quad (2.382)$$

$$= \Delta U_g \quad (2.383)$$

με

$$U_g = mgy \quad (2.384)$$

την περιγραφή **βαρυτική δυναμική ενέργεια**. Οπότε το έργο της εξωτερικής δύναμης $\vec{F}_{app}$ κατά την ανύψωση του βιβλίου ισούται με τη **μεταβολή στη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος**.

Άραγε τι θα βρούμε αν υπολογίσουμε το έργο της δύναμης του βάρους στην ίδια διαδρομή;

$$W_{F_g} = \vec{F}_g \cdot \Delta \vec{y} \quad (2.385)$$

$$= -F_g \vec{j} \cdot (y_f - y_i) \vec{j} \quad (2.386)$$

$$= -F_g \vec{j} \cdot (y_B - y_A) \vec{j} \quad (2.387)$$

$$= mgy_A - mgy_B \quad (2.388)$$

$$= U_{gA} - U_{gB} \quad (2.389)$$

$$= -\Delta U_g \quad (2.390)$$

Οπότε το έργο της δύναμης του βάρους $\vec{F}_g$ κατά την ανύψωση του βιβλίου ισούται με την **αρνητική μεταβολή στη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος**.

Σε προηγούμενα παραδείγματα είδαμε ότι το έργο που παράγεται σε ένα σύστημα μπορεί να ισοδυναμεί με μεταβολή στην κινητική ενέργεια του, που μεταφράζεται σε κίνηση των μελών του. Στο παράδειγμα που συζητάμε είδαμε ότι το έργο που παράγεται εμφανίζεται ως βαρυτική δυναμική ενέργεια στο σύστημα, που αναπαριστά μια αλλαγή στη **διάταξη/διαμόρφωση/σύνθεση των μελών του συστήματος**. Με άλλα λόγια, **δυναμική ενέργεια μπορεί να υφίσταται μόνο σε σύστημα τουλάχιστον δυο σωμάτων**⁸. Στην πράξη, πρέπει πάντα να επιλέγουμε μια διάταξη των μελών του συστήματος (διάταξη αναφοράς) όπου η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι μηδενική – όπως η επιφάνεια της Γης, για παράδειγμα, όπου θεωρούμε ότι $y = 0$. Οποιαδήποτε μεταβολή στη θέση κάποιου μέλους του συστήματος σε σχέση με την επιφάνεια της Γης θα οδηγήσει σε μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος. Πολλές φορές το πρόβλημα μας “καθοδηγεί” σχετικά με τη βολικότερη επιλογή για τη διάταξη αναφοράς.

Άραγε η μόνη δυναμική ενέργεια που υπάρχει στη φύση είναι η βαρυτική; Η απάντηση είναι – ευτυχώς ή δυστυχώς – όχι! ☺ Θα δούμε αμέσως τώρα μια άλλη μορφή δυναμικής ενέργειας που μπορεί να έχει ένα σύστημα. Ας επιστρέψουμε στο σώμα δεμένο σε ελατήριο και ας θεωρήσουμε αυτή τη φορά ότι το σύστημα μας είναι το σώμα **και** το ελατήριο (και όχι μόνο το σώμα, όπως είχαμε θεωρήσει σε προηγούμενες παραγράφους)! Η δύναμη του ελατηρίου είναι τώρα εσωτερική στο σύστημα – όπως ήταν η δύναμη του βάρους στο σύστημα {βιβλίο, Γη} πριν. Έχουμε ήδη δείξει ότι για μια εξωτερική δύναμη που ασκείται επάνω στο σώμα-μέλος του συστήματος ισχύει ότι

$$W_{app} = \int_{x_i}^{x_f} kx dx = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2 \quad (2.391)$$

Βλέπετε ότι το έργο που παράγεται στο σύστημα από μια εξωτερική δύναμη εξαρτάται από την αρχική και την τελική θέση των μελών του συστήματος, σε σχέση με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου! Είναι κι αυτό λοιπόν μια **μεταβολή στη διάταξη/σύνθεση/διαμόρφωση των μελών του συστήματος!** Δουλεύοντας όμοια με το παράδειγμα με το βιβλίο, έχουμε

$$W_{app} = \int_{x_i}^{x_f} kx dx = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2 \quad (2.392)$$

$$= U_{sf} - U_{si} = \Delta U_s \quad (2.393)$$

με

$$U_s = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2.394)$$

την **ελαστική δυναμική ενέργεια** που σχετίζεται με το σύστημα {σώμα, ελατήριο}. Παρατηρήστε ότι και εδώ, το έργο της εξωτερικής δύναμης ισούται με τη μεταβολή στην ελαστική δυναμική ενέργεια του συστήματος. Δε νομίζω να σας εκπλήξει ότι επειδή έχουμε δείξει ότι για το έργο της δύναμης του ελατηρίου ισχύει

$$W_s = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2 \quad (2.395)$$

τότε μπορούμε να γράψουμε

$$W_s = -\Delta U_s \quad (2.396)$$

⁸Η σωμάτων και περιοχής ενός χώρου, όπως θα δούμε αργότερα στον ηλεκτρισμό.

Ας συνοψίσουμε τα δυο παραδείγματα για να εντοπίσουμε ομοιότητες και διαφορές:

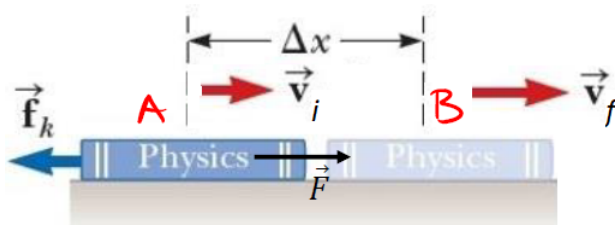
- Σύστημα {σώμα, Γη}
 - Πολυμελές
 - Βαρυτική δυναμική ενέργεια: $U_g = mgy$
 - Διάταξη αναφοράς: συνήθως η επιφάνεια της Γης ($y = 0$)
- Σύστημα {σώμα, ελατήριο}
 - Πολυμελές
 - Ελαστική δυναμική ενέργεια: $U_s = \frac{1}{2}kx^2$
 - Διάταξη αναφοράς: η θέση ισορροπίας του ελατηρίου (θέση φυσικού μήκους - $x = 0$)
- Και στις δυο περιπτώσεις, οι **διαφορές** δυναμικής ενέργειας είχαν σημασία, κι όχι οι τιμές αυτές καθ' αυτές σε κάποια διάταξη των μελών του συστήματος!

Καταλήγουμε λοιπόν να έχουμε δυο μορφές δυναμικής ενέργειας (ως τώρα):

- Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια
- Ελαστική Δυναμική Ενέργεια

2.5.11 Θερμική Ενέργεια

Ας δούμε μια τελευταία μορφή ενέργειας που μπορεί να έχει ένα σύστημα. Δείτε το Σχήμα 2.63. Θεωρήστε



Σχήμα 2.63: Βιβλίο σε τραχιά επιφάνεια.

ότι το σύστημα μας είναι το {βιβλίο}. Έστω ότι μια σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ σπρώχνει το ήδη κινούμενο με αρχική ταχύτητα $u_i = u_A$ βιβλίο επιταχύνοντάς το από μια θέση (A) σε μια θέση (B), μετατοπίζοντας το κατά Δx προς τα δεξιά πάνω σε “τραχιά” επιφάνεια, που υποδηλώνει παρουσία τριβής ολίσθησης $\vec{f}_k$. Το βιβλίο μοντελοποιείται ως σώμα υπό επίδραση σταθερής δύναμης, οπότε ο 2ος Νόμος Newton μας δίνει

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \iff \vec{F} + \vec{f}_k = ma_x \implies F - f_k = ma_x \iff F = ma_x + f_k \quad (2.397)$$

Το βιβλίο μοντελοποιείται ταυτόχρονα ως σώμα υπό σταθερή επιτάχυνση, οπότε από την εξίσωση της κινητικής έχουμε

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a_x\Delta x \implies a_x = \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} \quad (2.398)$$

και άρα

$$F = f_k + m \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} \iff F\Delta x = f_k\Delta x + \Delta K \iff W_F = -W_{f_k} + \Delta K \quad (2.399)$$

αν αναγνωρίσουμε ότι

$$-f_k\Delta x = f_k\Delta x \cos(\pi) = \vec{f}_k \cdot \Delta \vec{x} = W_{f_k} \quad (2.400)$$

ως το έργο της δύναμης τριβής που παράγεται πάνω στο βιβλίο. Οπότε αν θέσει κανείς το ερώτημα “που πήγε η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σύστημα μέσω του έργου της $\vec{F}$,” η απάντηση είναι ότι μετατράπηκε κατά κάποιο ποσοστό σε **αύξηση της κινητικής ενέργειας του βιβλίου** και κατά κάποιο ποσοστό σε **αύξηση της θερμοκρασίας της επιφάνειας και του βιβλίου**, δηλ. του συστήματος {βιβλίο, επιφάνεια}! Η ποσότητα ενέργειας που μετατράπηκε σε αύξηση θερμοκρασίας των επιφανειών ισούται με τη μεταβολή στη συνολική **θερμοκρασία** του συστήματος, καθώς η ενέργεια αυτή μετατράπηκε στην περίφημη **θερμική** ενέργεια του συστήματος: η επιφάνεια **και** το βιβλίο θερμάνθηκαν! Στο εξής, θα ονομάζουμε την ενέργεια που σχετίζεται με τη θερμοκρασία ενός συστήματος ως **θερμική ενέργεια** και θα τη συμβολίζουμε με E_{th} . Με το συμβολισμό αυτό, στο παράδειγμα που συζητάμε θα έχουμε

$$\Delta E_{th} = -W_{f_k} = f_k \Delta x \quad (2.401)$$

Φτάσαμε λοιπόν στο σημείο που μπορούμε να συνοψίσουμε τα είδη ενέργειας που συναντήσαμε:

Είδη Ενέργειας	
Ενέργεια	Μαθηματική μορφή
Κινητική	$K = \frac{1}{2}mv^2$
Ελαστική Δυναμική	$U_s = \frac{1}{2}kx^2$
Βαρυτική Δυναμική	$U_g = mgy$
Θερμική	$E_{th} = f_k \Delta x$

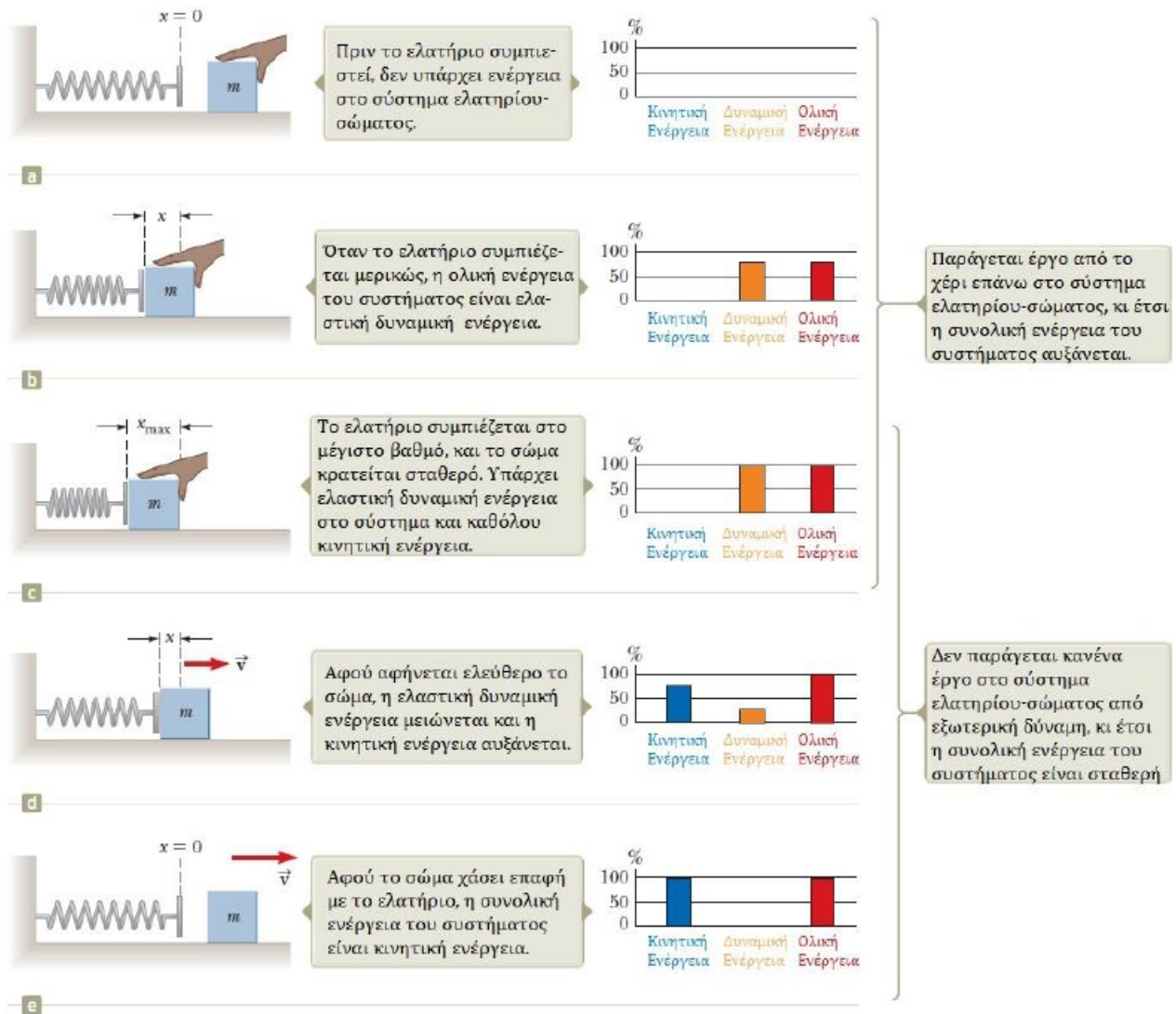
Πίνακας 2.7: Πίνακας Σχέσεων Ενέργειας.

2.5.12 Διαγράμματα Ενέργειας

Ένας εξαιρετικά χρήσιμος, συνοπτικός, συμπαγής, και εύληπτος τρόπος να παρουσιάσει κανείς τις ενεργειακές μεταβολές που συμβαίνουν σε ένα σύστημα είναι μέσω των περιφημων **διαγραμμάτων ενέργειας**. Τα διαγράμματα ενέργειας είναι ραβδογραμματικές αναπαραστάσεις είδους ενέργειας - ποσοστού αυτής, που μπορεί κανείς να σχεδιάσει σε κατάλληλα στιγμιότυπα ενός συστήματος. Ας δούμε το διάγραμμα ενέργειας για ένα σύστημα ελατηρίου - σώματος. Δείτε το Σχήμα 2.64 και διαβάστε προσεκτικά τα επεξηγηματικά σχόλια στα πλαίσια κάθε σχήματος.

Συνολικές Παρατηρήσεις

- Για να μιλήσουμε για **δυναμικές ενέργειες** (κάθε μορφής) χρειαζόμαστε **πολυμελή** συστήματα (διμελή τουλάχιστον).
 - Η δύναμη που σχετίζεται με τη δυναμική ενέργεια πρέπει να είναι **εσωτερική** στο σύστημα. Θυμηθείτε:
 - δύναμη του βάρους στο σύστημα {σώμα, Γη}: σχετίζεται με τη βαρυτική δυναμική ενέργεια
 - δύναμη του ελατηρίου στο σύστημα {ελατήριο, σώμα}: σχετίζεται με την ελαστική δυναμική ενέργεια
- Για να μιλήσουμε για **θερμική ενέργεια** χρειαζόμαστε ξανά **πολυμελή** συστήματα (διμελή τουλάχιστον), με το ένα μέλος να είναι κάποια μη λεία επιφάνεια που ολισθαίνει ένα άλλο μέλος του συστήματος.
 - Η δύναμη που σχετίζεται με τη θερμική ενέργεια είναι **εσωτερική** του συστήματος. Θυμηθείτε: δύναμη τριβής ολίσθησης στο σύστημα {σώμα, τραχιά επιφάνεια}



Σχήμα 2.64: Διαγράμματα Ενέργειας συστήματος ελατηρίου - σώματος.

2.5.13 Πλαίσια Εφαρμογής Δυναμικών και Θερμικών Ενεργειών

Χρειαζόμαστε ένα “ενεργειακό πλαίσιο” μέσα στο οποίο μπορούμε να εφαρμόσουμε τις νέες αυτές ενεργειακές μεταβολές. Γιατί; Δεν έχουμε ήδη το ΘΜΚΕΕ; Δυστυχώς, το ΘΜΚΕΕ αφορά **μονομελή** (ή πολυμελή συστήματα με σώματα που κινούνται ως ένα) συστήματα, όπου οι ενεργειακές μεταβολές που παρουσιάσαμε εκφράζονται μέσω του **έργου** των αντίστοιχων δυνάμεων. Για παράδειγμα, για ένα **μονομελές** σύστημα στο οποίο παράγουν έργο όλες οι πιθανές δυνάμεις που έχουμε συναντήσει, το ΘΜΚΕΕ θα μας δίνει

$$\Delta K = W_F + W_{fk} + W_{F_g} + W_{F_s} \quad (2.402)$$

Είδαμε πριν ότι

$$W_{fk} = -\Delta E_{th} \quad (2.403)$$

$$W_{F_g} = U_{g_i} - U_{g_f} = -\Delta U_g \quad (2.404)$$

$$W_{F_s} = U_{s_i} - U_{s_f} = -\Delta U_s \quad (2.405)$$

ΔΕΝ μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτές τις αντικαταστάσεις στο ΘΜΚΕΕ, καθώς δεν ορίζονται για μονομελή συστήματα – χρησιμοποιήσαμε πολυμέλεια για την εισαγωγή τους! Φυσικά κανείς δε μας απαγορεύει να

γράφουμε

$$W_{f_k} = -f_k \Delta x \quad (2.406)$$

$$W_{F_g} = mgy_i - mgy_f \quad (2.407)$$

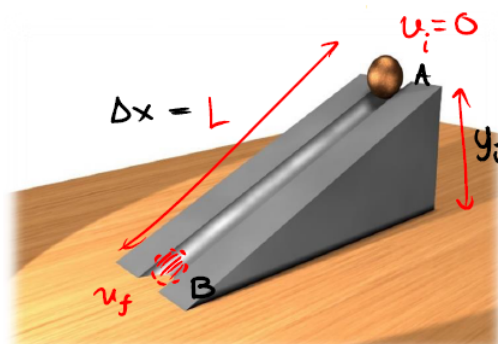
$$W_{F_s} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \quad (2.408)$$

και να λύσουμε τα όποια προβλήματα, αλλά δεν μπορούμε να αναφερθούμε σε **μεταβολές ενέργειας πέραν της κινητικής στο ΘΜΚΕΕ!**

Άραγε ποιό/α ενεργειακό/ά θεώρημα/τα μπορεί να μας επιτρέψει/ουν να χρησιμοποιήσουμε κατ' ευθείαν τις δυναμικές και θερμικές ενέργειες που γνωρίσαμε;

2.5.14 Συντηρητικές και μη συντηρητικές δυνάμεις

Προς την κατεύθυνση του προηγούμενου ερωτήματος, ας συζητήσουμε πρώτα μερικά πράγματα. Θεωρήστε το Σχήμα 2.65. Έστω ότι το σύστημα μας είναι {η μπάλα, το επικλινές, και η Γη}, πολυμελές.



Σχήμα 2.65: Σύστημα μπάλας, επικλινούς, και Γης.

Αφήνουμε την μπάλα στη θέση (A) να ολισθήσει – με τριβές – προς τη βάση του επικλινούς, στη θέση (B). Η απόσταση που ολισθαίνει η μπάλα στο επικλινές παρουσία τριβής ολίσθησης έχει μεγάλη σημασία για το πόση **δυναμική ενέργεια του συστήματος στη θέση (A) μετατρέπεται σε θερμική στη θέση (B)**. Καταλαβαίνετε ότι όσο μεγαλύτερη απόσταση διανύει η μπάλα, τόσο μεγαλύτερο το ποσοστό της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος που μετατρέπεται σε θερμική λόγω του έργου της δύναμης τριβής που παράγεται στο σύστημα. Άρα σε αυτό το σύστημα υπάρχουν δυνάμεις – η τριβή – που **το έργο τους εξαρτάται από το “μονοπάτι” που διατρέχουν**:

$$W_{f_k} = \vec{f}_k \cdot \Delta \vec{x} = -f_k \Delta x = -f_k L \quad (2.409)$$

Αντίθετα, παρατηρήστε τη δύναμη του βάρους. Το έργο που παράγει στο σύστημα είναι

$$W_{F_g} = -mg\vec{j} \cdot (y_f - y_i)\vec{j} = 0 - mgy_i = -mgy_i \quad (2.410)$$

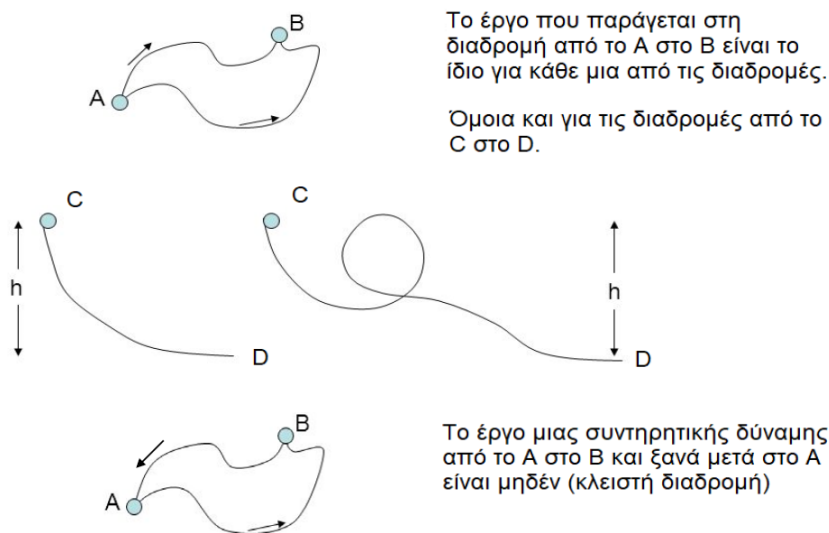
Εδώ, **το έργο εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση της μπάλας, χωρίς να έχει σημασία το “μονοπάτι”** που διανύει η μπάλα για να μεταβεί από τη μια θέση στην άλλη. Βλέπουμε εδώ λοιπόν ότι σε ένα σύστημα μπορούν να δρουν δυνάμεις δυο κατηγοριών:

- **Συντηρητικές (conservative):** δυνάμεις που το έργο τους **δεν** εξαρτάται από τη διαδρομή που διατρέχει το σώμα στο οποίο ασκούνται
- **Μη συντηρητικές (nonconservative):** δυνάμεις που το έργο τους εξαρτάται από τη διαδρομή που διατρέχει το σώμα στο οποίο ασκούνται

Οι **συντηρητικές** δυνάμεις έχουν μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες:

1. Το έργο που παράγεται από μια τέτοια δύναμη σε ένα σώμα που κινείται ανάμεσα σε οποιαδήποτε δυο σημεία είναι ανεξάρτητο της διαδρομής ανάμεσα σε αυτά.
2. Το έργο που παράγεται από μια τέτοια δύναμη σε ένα σώμα που κινείται σε κλειστή διαδρομή είναι μηδέν. Κλειστή ορίζεται η διαδρομή που ακολουθεί ένα σώμα όταν ξεκινά από μια θέση (A) και επιστρέφει πάλι πίσω σε αυτή.

Το Σχήμα 2.66 εξηγεί αυτές ακριβώς τις ιδιότητες των συντηρητικών δυνάμεων, με την προϋπόθεση ότι η κίνηση των σωμάτων στο σχήμα οφείλεται σε μια συντηρητική δύναμη. Προφανώς μια δύναμη που δεν



Σχήμα 2.66: Ιδιότητες συντηρητικών δυνάμεων.

ικανοποιεί έστω μια από τις παραπάνω δυο ιδιότητες ονομάζεται μη συντηρητική. Ένα τέτοιο παράδειγμα δύναμης είναι η τριβή ολισθήσεως που μόλις είδαμε.

2.5.15 Μηχανική Ενέργεια Συστήματος

Σε ένα *πολυμελές* σύστημα μπορούμε να ορίσουμε μερικές ενδιαφέρουσες ποσότητες οι οποίες είναι πολύ χρήσιμες στη μελέτη προβλημάτων. Ορίζουμε το άθροισμα της κινητικής, K , και της (οποιασδήποτε) δυναμικής, U , ενέργειας ως τη **Μηχανική Ενέργεια** του συστήματος:

$$E_{\text{mech}} = K + U \quad (2.411)$$

Προσέξτε ότι η μηχανική ενέργεια μπορεί να οριστεί μονάχα σε ένα σύστημα με περισσότερα από ένα σώματα, καθώς η δυναμική ενέργεια δεν μπορεί να προκύψει σε σύστημα ενός σώματος. Θα δούμε (αργότερα) ότι ένα σύστημα δεν είναι απαραίτητο να αποτελείται από “σώματα” για να έχει δυναμική (και άρα μηχανική) ενέργεια, όμως θα παραμείνει “πολυμελές” (απλά κάποια μέλη του δε θα είναι σώματα).

Από την προηγούμενη συζήτηση πρέπει να καταλάβετε – αν και αποδεικνύεται και πειραματικά – ότι οι μη συντηρητικές δυνάμεις που δρουν σε ένα πολυμελές σύστημα *αλλάζουν* τη μηχανική ενέργεια του συστήματος, ενώ αντίθετα οι συντηρητικές δυνάμεις *τη διατηρούν*! Αυτό είναι ένα ιδιαίτερα χρήσιμο χαρακτηριστικό των δυνάμεων και των αντίστοιχων συστημάτων – τόσο χρήσιμο και σημαντικό που μπορεί να διατυπωθεί ως ενεργειακό θεώρημα: είναι η περίφημη **Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας** - **ΑΔΜΕ**!

Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας

Η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας ενός απομονωμένου (!) πολυμελούς συστήματος σε μια διαδρομή είναι μηδενική μόνον αν στο σύστημα παράγουν έργο αποκλειστικά συντηρητικές δυνάμεις:

$$\Delta E_{\text{mech}} = \Delta K + \Delta U = 0 \iff K_f + U_f = K_i + U_i \quad (2.412)$$

Αφού οι συντηρητικές δυνάμεις είναι λοιπόν τόσο ενδιαφέρουσες, ας δούμε ποιές από αυτές έχουμε γνωρίσει ως τώρα:

(α') Δύναμη του βάρους

- $W_g = \vec{F}_g \cdot \Delta \vec{y} = -mg(y_f - y_i)$
- Εξάρτηση μόνο από την αρχική και τελική θέση
- $W_g = 0$ σε κλειστή διαδρομή ($y_f = y_i$)

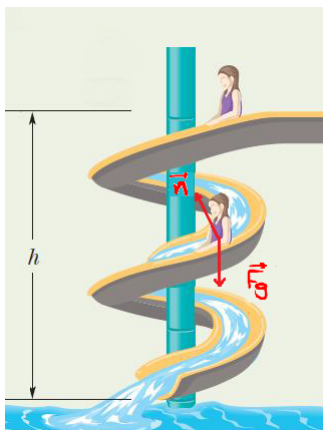
(β') Δύναμη του ελατηρίου

- $W_s = \vec{F}_s \cdot \Delta \vec{x} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$
- Εξάρτηση μόνο από την αρχική και τελική θέση
- $W_s = 0$ σε κλειστή διαδρομή ($x_f = x_i$)

Ας δούμε μερικά παραδείγματα που η Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας μπορεί να εφαρμοστεί.

Παράδειγμα 2.34:

Ένα παιδί μάζας m ολισθαίνει από ακίνητη θέση σε μια νεροτσουλήθρα (χωρίς τριβές) ύψους $h = 8.5$ m. Υποθέστε ότι η νεροτσουλήθρα περιγράφει μια επιφάνεια χωρίς τριβές και βρείτε την ταχύτητα του παιδιού στο τέarma της. Το Σχήμα 2.67 απεικονίζει το πρόβλημα.



Σχήμα 2.67: Παιδί σε νεροτσουλήθρα.

Λύση:

Θεωρούμε ως σύστημα το {παιδί, Γη, και τσουλήθρα}, που είναι πολυμελές. Στο παιδί ασκούνται δυο δυνάμεις. Η δύναμη του βάρους (από τη Γη) $\vec{F}_g$ και η δύναμη της επιφάνειας της νεροτσουλήθρας $\vec{n}$ επάνω στο παιδί, η οποία είναι πάντα κάθετη σε όποια μικρή μετατόπιση του παιδιού. Αντίθετα η δύναμη της

βαρύτητας είναι πάντα κάθετη προς το έδαφος, ανεξάρτητα της μετατόπισης/κλίσης της νεροτσουλήθρας. Η δύναμη του βάρους είναι **συντηρητική** και εσωτερική του συστήματος, και ταυτόχρονα η μόνη που παράγει έργο, καθώς η δύναμη $\vec{n}$ είναι πάντα κάθετη στη μετατόπιση του παιδιού επάνω στην τσουλήθρα, οπότε το έργο της είναι μηδενικό. Άρα το σύστημά μας είναι απομονωμένο. Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ των θέσεων (Α), όπου το παιδί βρίσκεται στην κορυφή της νεροτσουλήθρας, και (Β) όπου το παιδί φτάνει στη βάση της. Θεωρούμε, τέλος ότι στη βάση της τσουλήθρας η βαρυτική δυναμική ενέργεια ισούται με μηδέν. Άρα

$$K_A + U_{gA} = K_B + U_{gB} \iff 0 + mgh = \frac{1}{2}mu_B^2 + 0 \quad (2.413)$$

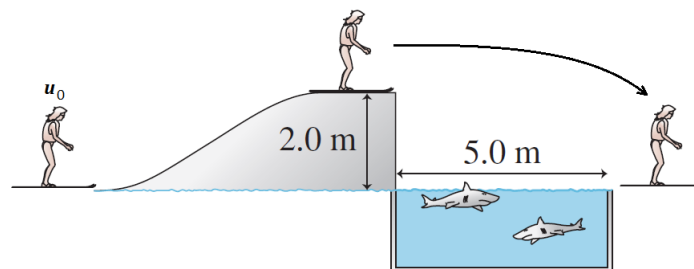
$$mgh = \frac{1}{2}mu_B^2 \quad (2.414)$$

$$u_B^2 = 2gh \quad (2.415)$$

$$u_B = \sqrt{2gh} = 13 \text{ m/s} \quad (2.416)$$

Παράδειγμα 2.35:

Βρήκατε δουλειά σε ένα circus water park για να βγάλετε τα έξοδα των διακοπών σας για το καλοκαίρι που έρχεται. Σε ένα επικίνδυνο ακροβατικό, ένας ακροβάτης πρέπει να ολισθήσει πάνω σε μια ράμπα χωρίς τριβές, σε ύψος 2 μέτρων από το έδαφος, ώστε να περάσει με ταχύτητα πάνω από μια πισίνα μήκους 5 μέτρων, γεμάτη από πεινασμένους καρχαρίες, και να προσγειωθεί με ασφάλεια στην άκρη της πισίνας, όπως στο Σχήμα 2.68. Μια και οι υπεύθυνοι του πάρκου γνωρίζουν ότι παίρνετε το μάθημα της Φυσικής (και ότι είστε μελετηροί/ες φοιτητές/τριες), σας ρωτούν με πόση ελάχιστη αρχική ταχύτητα u_0 πρέπει να ξεκινήσει ο ακροβάτης στη βάση της ράμπας, πριν κάνει το άλμα, ώστε να μην πέσει στην πισίνα με τους καρχαρίες. Τι απαντάτε;



Σχήμα 2.68: Ακροβατικό άλμα.

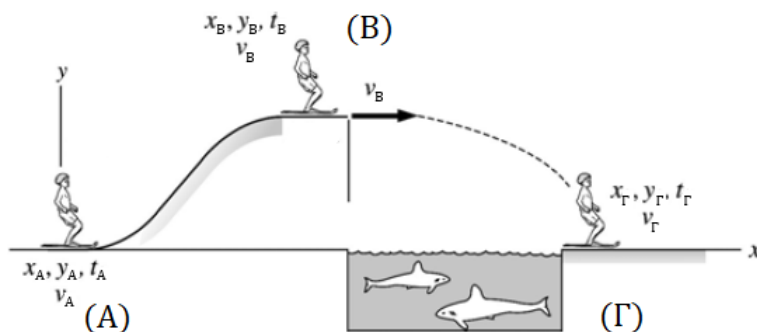
Λύση:

Θεωρούμε ως σύστημα το {ακροβάτης, ράμπα, Γη}. Είναι βολικό να τοποθετήσουμε το σύστημα συντεταγμένων μας στην βάση της ράμπας. Θεωρούμε ως θετικές φορές της κίνησης τις συμβατικές. Θα χρησιμοποιήσουμε τρία στιγμιότυπα της κίνησης, τα Α, Β, Γ, όπως στο Σχήμα 2.69. Ας βρούμε αρχικά τη μικρότερη ταχύτητα u_B που πρέπει να έχει ο ακροβάτης στην κορυφή της ράμπας (Β) ώστε να περάσει πάνω από τους καρχαρίες. Από την κατακόρυφη κίνηση του άλματος από τη θέση (Β) ως τη θέση (Γ), και σύμφωνα με τις εξισώσεις της επιταχυνόμενης κίνησης, έχουμε

$$y_\Gamma = y_B + u_{yB}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (2.417)$$

$$0 = 2 + 0 + \frac{1}{2}9.8t^2 \quad (2.418)$$

$$t = 0.639 \text{ s} \quad (2.419)$$



Σχήμα 2.69: Εκτέλεση άλματος.

Από την οριζόντια κίνηση κατά το άλμα, ο ακροβάτης εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή ταχύτητα, κι έχουμε

$$x_{\Gamma} = x_B + u_{x_B} t \quad (2.420)$$

$$x_B + 5 = x_B + u_{x_B} t \quad (2.421)$$

$$u_B = 7.825 \text{ m/s} \quad (2.422)$$

Αφού βρήκαμε την ταχύτητα u_B που απαιτείται για να περάσει ο ακροβάτης τους καρχαρίες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για να βρούμε την ελάχιστη ταχύτητα $u_0 = u_A$, αφού οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται πάνω του είναι αυτή του βάρους και αυτή του εδάφους, με την τελευταία να μην παράγει έργο λόγω καθετότητας με τη μετατόπιση του ακροβάτη. Άρα το σύστημα είναι απομονωμένο, με μια **συντηρητική** δύναμη να δρα μεταξύ των μελών του. Στη διαδρομή $A \rightarrow B$ έχουμε

$$\Delta E_{\text{mech}} = 0 \quad (2.423)$$

$$K_B + U_{gB} = K_A + U_{gA} \quad (2.424)$$

$$\frac{1}{2} m u_B^2 + m g y_B = \frac{1}{2} m u_A^2 + m g y_A \quad (2.425)$$

$$u_A = \sqrt{u_B^2 + 2g(y_B - y_A)} \quad (2.426)$$

$$u_A = 10 \text{ m/s} \quad (2.427)$$

Παράδειγμα 2.36:

Στην τριλογία ταινιών “Ο Άρχοντας των Δαχτυλιδιών”, πολλές φορές χρειάστηκε η χρήση καταπέλτων για την προστασία (ή την πολιορκία) ενός κάστρου. Υποθέστε ότι είστε ο Aragorn (Εικόνα 2.70α') και προστατεύετε το κάστρο της Gondor. Έχετε στη διάθεσή σας έναν καταπέλτη με τον οποίο μπορείτε να εκτοξεύετε βράχους με αρχική ταχύτητα $u_0 = 14.2 \text{ m/s}$ επάνω από τα τείχη της Gondor, οι οποίοι θα χτυπήσουν τη στρατιά των Orcs που βρίσκεται στην αυλή του κάστρου, $h = 7.2 \text{ m}$ χαμηλότερα από το επίπεδο του καταπέλτη, όπως στο Σχήμα 2.70β'. Με ποιά ταχύτητα θα χτυπήσουν τη στρατιά των Orcs οι βράχοι που εκτοξεύετε;

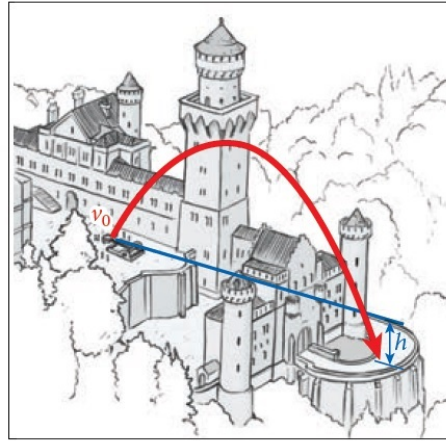
Λύση:

Θεωρούμε ως σύστημα το {βράχος, Γη}. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο βράχο είναι μόνο αυτή του βάρους (θεωρούμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα) και είναι **συντηρητική**, άρα το σύστημά μας είναι πολυμελές κι απομονωμένο. Από την ΑΔΜΕ μεταξύ μιας αρχικής θέσης (θέση εκτόξευσης των βράχων) και μιας τελικής (θέση πρόσκρουσης με τα Orcs), έχουμε ότι

$$\Delta E_{\text{mech}} = 0 \quad (2.428)$$



(α') Aragorn



(β') Χρήση καταπέλτη

Σχήμα 2.70: Καταπέλτες στην Γκόντορ.

$$K_f + U_f = K_i + U_i \quad (2.429)$$

και άρα

$$\frac{1}{2}mu_f^2 + mgy_f = \frac{1}{2}mu_i^2 + mgy_i \quad (2.430)$$

$$\frac{1}{2}u_f^2 + gy_f = \frac{1}{2}u_i^2 + gy_i \quad (2.431)$$

$$u_f = \sqrt{u_i^2 + 2g(y_i - y_f)} \quad (2.432)$$

Για $y_i - y_f = 7.2 \text{ m}$ και $u_i = 14.2 \text{ m/s}$, είναι

$$u_f = 18.5 \text{ m/s} \quad (2.433)$$

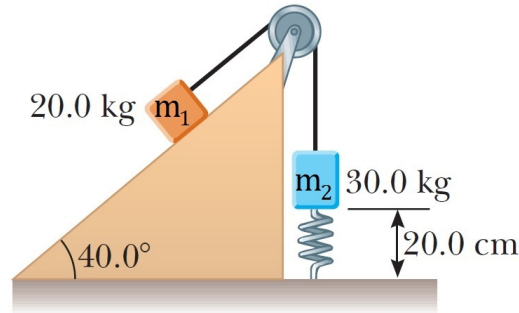
Παράδειγμα 2.37:

Ένα σώμα μάζας $m_1 = 20 \text{ kg}$ είναι δεμένο με ένα άλλο σώμα μάζας $m_2 = 30 \text{ kg}$ μέσω ενός σχοινιού που διαπερνά μια αβαρή και χωρίς τριβές τροχαλία. Το σώμα μάζας m_2 είναι συνδεδεμένο με ένα ελατήριο αμελητέας μάζας και σταθεράς $k = 250 \text{ N/m}$, όπως στο Σχήμα 2.71. Το ελατήριο είναι σε θέση ισορροπίας (ούτε τεντωμένο, ούτε συμπιεσμένο) όταν η διάταξη του συστήματος είναι όπως στο σχήμα, ενώ το κεκλιμένο επίπεδο είναι χωρίς τριβές. Αρχικά, το σώμα μάζας m_1 κατεβαίνει 20 cm προς τη βάση του κεκλιμένου (έτσι ώστε το σώμα μάζας m_2 να βρίσκεται 40 cm επάνω από το έδαφος), και αφήνεται ελεύθερο. Βρείτε την ταχύτητα κάθε σώματος όταν το σώμα μάζας m_2 βρίσκεται σε απόσταση 20 cm επάνω από το έδαφος (δηλ. όταν το ελατήριο δεν είναι τεντωμένο ή συμπιεσμένο, όπως στο σχήμα).

Λύση:

Επιλέγουμε ως σύστημα το {σώματα, ελατήριο, και Γη}, που είναι πολυμελές. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι δυνάμεις βάρους και δυνάμεις ελατηρίου, όλες **συντηρητικές**. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε την ΑΔΜΕ. Επιλέγουμε ως διάταξη μηδενικής δυναμικής ενέργειας για το σύστημα τη διάταξη όπου το σώμα μάζας m_2 έχει το ελατήριο στο φυσικό μήκος του, και το σώμα μάζας m_1 βρίσκεται στη χαμηλότερη θέση του στο επικλινές επίπεδο, ακριβώς πριν το σύστημα αφεθεί ελεύθερο. Αν συμβολίσουμε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια με U_g και την ελαστική δυναμική ενέργεια με U_s , έχουμε

$$\Delta E_{\text{mech}} = 0 \quad (2.434)$$



Σχήμα 2.71: Σώματα, ελατήριο, σε σύνδεση σε επικλινές.

$$E_i^{mech} = E_f^{mech} \quad (2.435)$$

$$K_i + U_{gi} + U_{si} = K_f + U_{gf} + U_{sf} \quad (2.436)$$

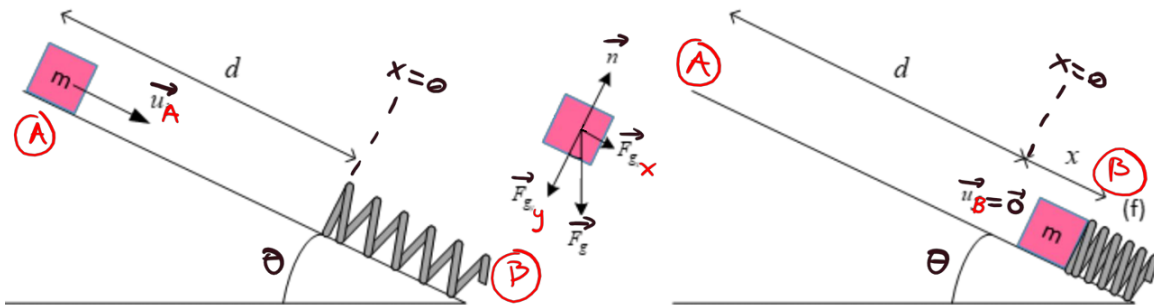
$$0 + m_2gh + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m_{tot}u_f^2 + m_1gh \sin(40^\circ) + 0 \quad (2.437)$$

$$58.8 + 5 = 25u_f^2 + 25.2 \quad (2.438)$$

$$u_f = 1.24 \text{ m/s} \quad (2.439)$$

Παράδειγμα 2.38:

Λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ έχει ελατήριο σταθεράς k στερεωμένο στο κάτω μέρος του. Ένα κουτί μάζας m τοποθετείται πάνω στο κεκλιμένο σε απόσταση d από το ελατήριο, όπως στο Σχήμα 2.72. Από τη θέση αυτή, το κουτί βάλλεται προς το ελατήριο με ταχύτητα u_0 . Μπορείτε να προβλέψετε πόσο θα έχει συμπιεστεί το ελατήριο όταν το κουτί φτάνει στιγμιαία σε ηρεμία;



Σχήμα 2.72: Σώμα σε κεκλιμένο με ελατήριο στη βάση.

Λύση:

Μα έχουμε λύσει αυτό το πρόβλημα ήδη! Είναι ακριβώς ίδιο παράδειγμα με το 2.28! Θέλουμε όμως τώρα να το λύσουμε με το νέο ενεργειακό θεώρημα, την ΑΔΜΕ! Πρέπει να επιλέξουμε ένα σύστημα πολυμελές και απομονωμένο. Ένα τέτοιο είναι το {σώμα, ελατήριο, Γη}, καθώς οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και παράγουν έργο είναι η δύναμη του βάρους (η x -συνιστώσα της, για την ακρίβεια) και η δύναμη του ελατηρίου, **εσωτερικές** και **συντηρητικές** και οι δυο (οι άλλες δυνάμεις, $\vec{n}$, $\vec{F}_g$, παράγουν έργο ίσο με το μηδέν). Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΜΕ στη διαδρομή $A \rightarrow B$. Θεωρούμε ότι ο άξονας x' είναι παράλληλος στο κεκλιμένο και ο y' κάθετος σε αυτό. Ας υποθέσουμε ότι το ύψος που βρίσκεται το σώμα στη θέση (A) ισούται με h και ότι διάταξη αναφοράς για τη βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι η

θέση που το σώμα ακινητοποιείται στιγμιαία στη θέση (B).

$$\Delta E_{mech} = 0 \quad (2.440)$$

$$E_{mech}^A = E_{mech}^B \quad (2.441)$$

$$K_A + U_{gA} + U_{sA} = K_B + U_{gB} + U_{sB} \quad (2.442)$$

$$\frac{1}{2}mu_A^2 + mgh + 0 = 0 + 0 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.443)$$

Από τη γεωμετρία του σχήματος

$$h = (d + x) \sin(\theta) \quad (2.444)$$

οπότε

$$\frac{1}{2}mu_A^2 + mg(d + x) \sin(\theta) + 0 = 0 + 0 + \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx^2 - mg \sin(\theta)x - \left(\frac{1}{2}mu_0^2 + mg \sin(\theta)d \right) = 0 \quad (2.445)$$

Έχουμε λοιπόν – ξανά, όπως και στο Παράδειγμα 2.28 – ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς x , το οποίο έχει ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{mg \sin(\theta) \pm \sqrt{(mg \sin(\theta))^2 + 2k \left(\frac{1}{2}mu_0^2 + mg \sin(\theta)d \right)}}{k} \quad (2.446)$$

Από τις δυο ρίζες θα επιλέξουμε τη θετική, γιατί η συμπίεση του ελατηρίου γίνεται προς τη θετική φορά του άξονα x' .

2.5.16 Συντηρητικές Δυνάμεις και Δυναμική Ενέργεια

Παρατηρήστε το εξής:

- Δύναμη βάρους $\rightarrow$ συντηρητική δύναμη $\rightarrow$ βαρυτική δυναμική ενέργεια
- Δύναμη ελατηρίου $\rightarrow$ συντηρητική δύναμη $\rightarrow$ ελαστική δυναμική ενέργεια
- (peek into the future ☺) Ηλεκτρική δύναμη $\rightarrow$ συντηρητική δύναμη $\rightarrow$ ηλεκτρική δυναμική ενέργεια (που σχετίζεται με το *ηλεκτρικό δυναμικό*)

Παρατηρείτε κάποιο μοτίβο; Μια **συντηρητική** δύναμη σχετίζεται με τη **μεταβολή μιας δυναμικής ενέργειας**!! Ας συζητήσουμε λίγο για αυτό.

Έστω ένα πολυμελές σύστημα που αλλάζει από μια διάταξη των μελών του σε μια άλλη λόγω έργου μιας *εσωτερικής συντηρητικής δύναμης*, $W_{F,int}$, χωρίς επίδραση και παραγωγή έργου άλλων δυνάμεων – άρα μιλάμε για ένα **απομονωμένο** σύστημα. Λόγω αυτής της δύναμης και του έργου της, ένα σώμα από τα μέλη του συστήματος κινείται από μια θέση (A) σε μια θέση (B). Εφόσον κινήθηκε, η κινητική ενέργεια του συστήματος αυξήθηκε: όμως πρέπει *ισόποσα* να μειωθεί η δυναμική του ενέργεια, λόγω της ΑΔΜΕ που ισχύει σε ένα απομονωμένο σύστημα που δρουν μόνο συντηρητικές δυνάμεις!

$$W_{F,int} = \Delta K = -\Delta U = -(U_B - U_A) = U_A - U_B \quad (2.447)$$

Το έργο $W_{F,int}$ που παράγεται από μια εσωτερική συντηρητική δύναμη σε ένα σώμα-μέλος του συστήματος ισούται με την *αρνητική μεταβολή στη δυναμική ενέργεια του συστήματος*. Προσέξτε! Το έργο αυτό παράγεται από μια δύναμη ενός μέλους του συστήματος επάνω σε ένα άλλο μέλος. Έχουμε δει τέτοια παραδείγματα; Βέβαια!

- Όταν ένα σώμα μετακινείται υπό την επίδραση της δύναμης του βάρους: στο σύστημα {Γη, σώμα}, η δύναμη του βάρους είναι *εσωτερική και συντηρητική* δύναμη στο σύστημα.
- Όταν ένα σώμα μετακινείται από μια δύναμη ελατηρίου προς τη θέση ισορροπίας του: στο σύστημα {ελατήριο, σώμα}, η δύναμη του ελατηρίου είναι *εσωτερική και συντηρητική* δύναμη στο σύστημα

Επαναφέρουμε το πρόβλημα: έστω λοιπόν ένα σύστημα από σώματα στο οποίο δρα μια εσωτερική συντηρητική δύναμη $\vec{F}_{int}$, η οποία προκαλεί *αλλαγή στη διάταξη* του συστήματος λόγω π.χ. κίνησης ενός από τα σώματα επάνω σε έναν άξονα x' . Έστω ότι η δύναμη ασκείται από ένα σώμα σε άλλο σώμα υπό γωνία θ με τον άξονα αυτό. Βάσει του ορισμού, το έργο της δύναμης αυτής θα είναι

$$W_{F,int} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} = F \Delta x \cos(\theta) = F_x \Delta x = F_x \Delta x = -\Delta U \quad (2.448)$$

δηλ.

$$\Delta U = -W_{F,int} = -F_x \Delta x \quad (2.449)$$

Ας δούμε τις πιθανές περιπτώσεις για την ποσότητα $F_x \Delta x$:

- Αν $F_x \Delta x > 0 \implies -F_x \Delta x < 0$, τότε $\Delta U < 0$
- Αν $F_x \Delta x < 0 \implies -F_x \Delta x > 0$, τότε $\Delta U > 0$

Με λόγια, αν δύναμη και μετατόπιση είναι **ομόρροπες**, η δυναμική ενέργεια του συστήματος **μειώνεται**. Αν δύναμη και μετατόπιση είναι **αντίρροπες**, τότε η δυναμική ενέργεια του συστήματος **αυξάνεται**!

Μπορούμε να συνδέσουμε αυτή τη γενική διατύπωση με συστήματα που έχουμε ήδη δει; Μα φυσικά! Σκεφτείτε το σύστημα {σώμα, Γη}: η εσωτερική και συντηρητική δύναμη εδώ είναι αυτή του βάρους, $\vec{F}_g$. Υποθέστε ότι ένα σώμα αφήνεται να πέσει από ύψος y_i σε ύψος $y_f < y_i$. Η δύναμη του βάρους και η μετατόπιση είναι ομόρροπες καθώς το σώμα κατέρχεται. Καταλαβαίνετε ότι η (βαρυτική) δυναμική ενέργεια του συστήματος μειώνεται; ☺ Δείτε:

$$\Delta U_g = mgy_f - mgy_i = mg(y_f - y_i) < 0 \iff U_{y_f} - U_{y_i} < 0 \iff U_{y_f} < U_{y_i} \quad (2.450)$$

Υπάρχει άλλο σύστημα που γνωρίζουμε που επιβεβαιώνει τα παραπάνω; Σκεφτείτε το σύστημα {σώμα, ελατήριο}: η εσωτερική και συντηρητική δύναμη εδώ είναι αυτή του ελατηρίου, $\vec{F}_s$. Υποθέστε ότι το σώμα μετατοπίζεται από τη θέση ισορροπίας του λόγω της δύναμης του ελατηρίου, από τη θέση $x_i < 0$ στη θέση $x_f > x_i$. Η δύναμη του ελατηρίου και η μετατόπιση του ελατηρίου από τη θέση ισορροπίας του είναι αντίρροπες. Καταλαβαίνετε ότι η (ελαστική) δυναμική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται; ☺ Δείτε:

$$\Delta U_s = \frac{1}{2} kx_f^2 - \frac{1}{2} kx_i^2 > 0 \iff U_{x_f} - U_{x_i} > 0 \iff U_{x_f} > U_{x_i} \quad (2.451)$$

Η παραπάνω μετατόπιση Δx μπορεί να είναι όσο μικρή θέλουμε, μπορεί να είναι και μια απειροστά μικρή μετατόπιση dx . Τότε η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος, ΔU , θα είναι κι αυτή απειροστά μικρή, dU , δηλ.

$$dU = -F_x dx \implies F_x = -\frac{dU}{dx} \implies U(x) = -\int_{-\infty}^x F_u du + U_i \quad (2.452)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να ισχύει για οποιοδήποτε άξονα, δηλ.

$$F_x = -\frac{dU}{dx}, \quad F_y = -\frac{dU}{dy}, \quad F_z = -\frac{dU}{dz} \quad (2.453)$$

Η συνάρτηση $U(x)$ λέγεται **συνάρτηση δυναμικής ενέργειας του συστήματος** και είναι συνάρτηση της θέσης του σώματος που κινήθηκε εξ αιτίας της συντηρητικής εσωτερικής δύναμης $\vec{F}_x$. Η θέση x όπου $F_x = 0$ (ή, καλύτερα, όπου $U'(x) = 0$) λέγεται **θέση ισορροπίας**. Με βάση αυτή τη συνάρτηση, ένα σύστημα μπορεί να χαρακτηριστεί ως

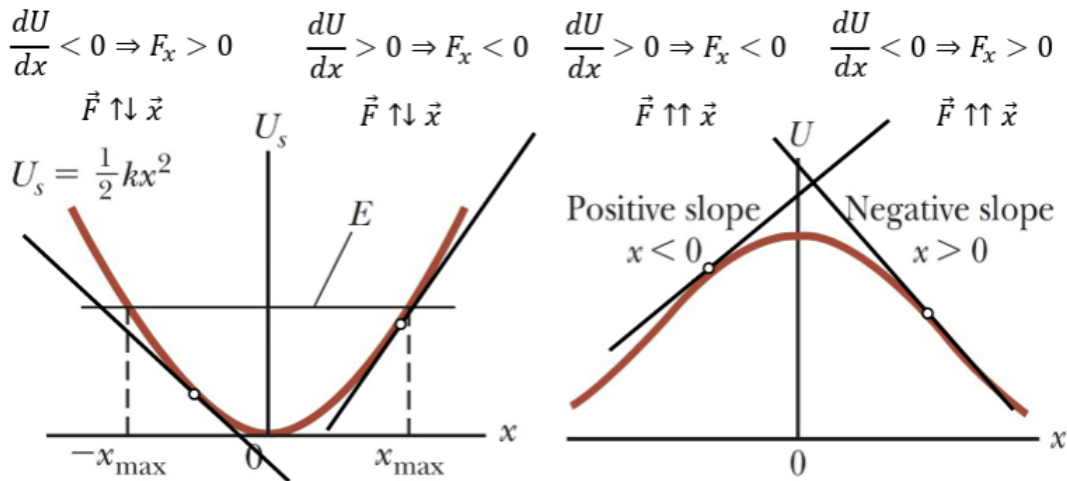
- **ευσταθούς ισορροπίας**: ένα σύστημα ονομάζεται ευσταθούς ισορροπίας όταν οποιαδήποτε μεταβολή μεκρια από τη θέση ισορροπίας του έχει ως συνέπεια την έγερση μιας δύναμης που τείνει να επαναφέρει το σύστημα στη θέση ισορροπίας του.
 - Σύστημα σώματος - ελατηρίου
 - Σύστημα μπίλιας - κυρτού μπωλ - Γης
- **ασταθούς ισορροπίας**: ένα σύστημα ονομάζεται ασταθούς ισορροπίας όταν οποιαδήποτε μεταβολή μεκρια από τη θέση ισορροπίας του έχει ως συνέπεια την έγερση μιας δύναμης που τείνει να απομακρύνει περισσότερο το σύστημα από τη θέση ισορροπίας του.
 - Σύστημα μολυβιού - Γης που ισορροπεί στη μύτη του επάνω σε μια επιφάνεια
 - Σύστημα μπάλας - Γης στην κορυφή ενός λόφου
- Ένα σύστημα λέγεται **ουδέτερης ισορροπίας** αν η θέση ισορροπίας του δεν εξαρτάται από μετατοπίσεις από την αρχική του θέση, δηλ. όταν παραμένει στη νέα του θέση μετά από κάποια μετατόπιση χωρίς να επιστρέφει πίσω στην αρχική του θέση
 - Σύστημα μπάλας - οριζόντιου επιπέδου
 - Σύστημα βιβλίου πλευρικά τοποθετημένου - οριζόντιου επιπέδου

Γιατί είναι τόσο σημαντική η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας; Διότι η **κλίση της εφαπτομένης της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας σε ένα οποιοδήποτε σημείο – με άλλα λόγια, η παράγωγος της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας στο σημείο, $\left. \frac{d}{dx} U(x) \right|_{x=x_0}$ – μας πληροφορεί για την ευστάθεια ή αστάθεια του συστήματος στην περιοχή γύρω από το x_0 !** Θυμηθείτε ότι η εσωτερική συντηρητική δύναμη που εγείρεται στο σύστημα σχετίζεται με τη δυναμική ενέργεια με τη σχέση

$$F_x = -\frac{d}{dx} U(x) \quad (2.454)$$

Άρα η τιμή της παραγώγου της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας σε ένα σημείο x_0 μας πληροφορεί για τη φορά της δύναμης, F_{x_0} , σε σχέση με τη θέση x_0 . Δείτε το Σχήμα 2.73. Αριστερά, παρατηρούμε ένα σύστημα **ευσταθούς** ισορροπίας. Για μετατοπίσεις $x > 0$, η κλίση της εφαπτομένης σε οποιοδήποτε σημείο είναι θετική, οπότε η ποσότητα dU/dx είναι θετική. Προφανώς η ποσότητα $-dU/dx = F_x$ είναι αρνητική, δηλ. $F_x < 0$. Με άλλα λόγια, η δύναμη και η μετατόπιση από το σημείο ισορροπίας είναι **αντίρροπες** για $x > 0$. Άρα η δύναμη τείνει να επαναφέρει το σύστημα στη θέση ισορροπίας του όσο αυτό απομακρύνεται από αυτό. Για μετατοπίσεις $x < 0$, η κλίση της εφαπτομένης σε οποιοδήποτε σημείο είναι αρνητική, οπότε η ποσότητα dU/dx είναι αρνητική. Προφανώς η ποσότητα $-dU/dx = F_x$ είναι θετική, δηλ. $F_x > 0$. Με άλλα λόγια, η δύναμη και η μετατόπιση από το σημείο ισορροπίας είναι **αντίρροπες** για $x < 0$. Άρα η δύναμη τείνει ξανά να **επαναφέρει το σύστημα στη θέση ισορροπίας του όσο αυτό απομακρύνεται από αυτό**. Έτσι, σε κάθε περίπτωση, εγείρεται στο σύστημα μια δύναμη που τείνει να επαναφέρει το σύστημα στη θέση ισορροπίας του. Ένα τέτοιο σύστημα θα μπορούσε να είναι το σύστημα {ελατήριο, σώμα}. Μπορείτε να κάνετε μια παρόμοια περιγραφή για το γράφημα $U(x)$ δεξιά στο Σχήμα 2.73 – θα πρέπει να προκύπτουν **ομόρροπες** δυνάμεις και μετατοπίσεις, που σημαίνει ότι το σύστημα είναι **ασταθούς** ισορροπίας.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ένα πραγματικό σύστημα μπορεί να έχει **περιοχές** ευσταθούς, ασταθούς, και

Σχήμα 2.73: Συναρτήσεις $U(x)$ και ευστάθεια.

ουδέτερης ισορροπίας.

Παράδειγμα 2.39:

Ένα σώμα έχει συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x) = x + \sin(\lambda x)$ με $\lambda = 2 \text{ rad/m}$ και x σε μέτρα στο διάστημα $0 \leq x \leq \pi$.

(α') Βρείτε τις θέσεις ισορροπίας στο διάστημα $[0, \pi]$.

(β') Για καθεμιά από αυτές ελέγξτε το είδος της θέσης ισορροπίας.

Λύση:

(α') Γνωρίζουμε ότι στις θέσεις ισορροπίας ισχύει $F_x = 0$. Επίσης, ξέρουμε ότι

$$F_x = -\frac{d}{dx}U(x) = -\frac{d}{dx}(x + \sin(2x)) = -2\cos(2x) - 1 \quad (2.455)$$

Εξισώνοντας και λύνοντας έχουμε

$$F_x = 0 \iff \cos(2x) = -\frac{1}{2} = \cos(2\pi/3) \quad (2.456)$$

Έτσι

$$2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \iff x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2.457)$$

με $k \in \mathbb{Z}$. Στο διάστημα $[0, \pi]$ έχουμε δυο λύσεις: $x_1 = \pi/3$, $x_2 = 2\pi/3$.

(β') Υπολογίζοντας τη δεύτερη παράγωγο

$$\frac{d^2}{dx^2}U(x) = \frac{d^2}{dx^2}(x + \sin(2x)) = -4\sin(2x) \quad (2.458)$$

και ελέγχοντας την τιμή στα σημεία ισορροπίας

$$\frac{d^2}{dx^2}U(\pi/3) = -4\sin(2\pi/3) < 0 \quad (2.459)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}U(2\pi/3) = -4\sin(4\pi/3) > 0 \quad (2.460)$$

το σημείο x_1 αντιστοιχεί σε τοπικό μέγιστο της συνάρτησης και άρα σημείο (και γύρω του, περιοχή) ασταθούς ισορροπίας, ενώ το σημείο x_2 αντιστοιχεί σε τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης και άρα σημείο (και γύρω του, περιοχή) ευσταθούς ισορροπίας.

Παράδειγμα 2.40:

Η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας για ένα σύστημα σωματιδίων δίνεται ως

$$U(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \quad (2.461)$$

όπου x είναι η θέση στον οριζόντιο άξονα ενός σωματιδίου στο σύστημα.

- (α') Προσδιορίστε τη δύναμη F_x που ασκείται στο σωματίδιο συναρτήσει του x .
- (β') Για ποιές τιμές του x είναι η δύναμη ίση με μηδέν;
- (γ') Σχεδιάστε τα γραφήματα $U(x)$ και F_x ως προς x και υποδείξτε σημεία ασταθούς και ευσταθούς ισορροπίας, αν υπάρχουν.

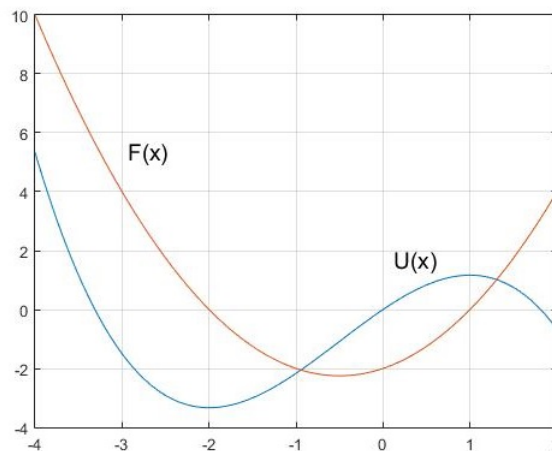
Λύση:

(α') Θα είναι

$$\vec{F}_x = -\frac{d}{dx}U(x)\vec{i} = -(-x^2 - x + 2)\vec{i} = (x^2 + x - 2)\vec{i} \quad (2.462)$$

(β') Η F_x είναι ίση με μηδέν όταν $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1$.

(γ') Τα γραφήματα φαίνονται στο Σχήμα 2.74. Σημείο ευσταθούς ισορροπίας αποτελεί το σημείο $x = -2$,



Σχήμα 2.74: Καμπύλες συνάρτησεων δύναμης - θέσης και δυναμικής ενέργειας - θέσης.

και σημείο ασταθούς ισορροπίας αποτελεί το σημείο $x = 1$, όπως φαίνεται από το γράφημα της $U(x)$.

2.6 Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας

Στις προηγούμενες παραγράφους συζητήσαμε για τους τρόπους μεταφοράς και αποθήκευσης ενέργειας σε ένα σύστημα και εξάγαμε δυο πολύ χρήσιμα “θεωρήματα”, το **Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας - Έργου και την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας**. Για καθένα από αυτά χρειαστήκαμε διαφορετικές υποθέσεις, τόσο στο επίπεδο επιλογής συστήματος όσο και στο επίπεδο των δυνάμεων που παράγουν έργο. Όμως και τα δυο θεωρήματα θεωρούνται ως “υποπεριπτώσεις” μιας πολύ γενικότερης και καθολικότερης αρχής, από το μικρόκοσμο ως το σύμπαν το ίδιο, της **Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας - ΑΔΕ**.

Για να καταλάβουμε καλύτερα την ΑΔΕ και τον τρόπο εφαρμογής της σε διάφορα συστήματα, πρέπει να θυμηθούμε το διαχωρισμό συστημάτων σε **απομονωμένα** και **μη απομονωμένα** συστήματα:

- Ένα **μη απομονωμένο σύστημα** βρίσκεται σε “επικοινωνία” με το περιβάλλον του μέσω μεταφοράς ενέργειας
- Ένα **απομονωμένο σύστημα** δεν μπορεί να επικοινωνήσει ενεργειακά με το περιβάλλον του

2.6.1 Μη Απομονωμένα Συστήματα

Σε ένα μη απομονωμένο σύστημα, αν η συνολική ενέργεια αλλάζει τότε αυτό συμβαίνει μόνον αν η ενέργεια έχει μεταφερθεί από ή προς το περιβάλλον του συστήματος, με κάποιον μηχανισμό. Ουσιαστικά, η παραπάνω πρόταση αποτελεί την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας για ένα μη απομονωμένο σύστημα.

Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας (ΑΔΕ) - Μη Απομονωμένο Σύστημα

Σε ένα μη απομονωμένο σύστημα,

$$\Delta E_{system} = \sum_i T_i \quad (2.463)$$

όπου E_{system} είναι η συνολική ενέργεια του συστήματος (κάθε μορφής), και $\sum_i T_i$ είναι το ποσό της ενέργειας που μεταφέρεται από ή προς το περιβάλλον με κάποιον τρόπο.

Για να θυμηθούμε τους πιθανούς τρόπους μεταφοράς ενέργειας από ή προς ένα σύστημα:

- Μεταφορά ενέργειας μέσω έργου
- Μεταφορά ενέργειας μέσω μηχανικών κυμάτων
- Μεταφορά ενέργειας μέσω θερμότητας
- Μεταφορά ενέργειας μέσω ύλης
- Μεταφορά ενέργειας μέσω ηλεκτρισμού
- Μεταφορά ενέργειας μέσω ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας

Αν συμβολίσουμε κάθε μηχανισμό μεταφοράς από τους παραπάνω, τότε μπορούμε να γράψουμε την ΑΔΕ ως

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{th} = W + T_{thermal} + T_{mech.wave} + T_{material} + T_{electricity} + T_{radiation} \quad (2.464)$$

Αν παρατηρήσετε την παραπάνω σχέση με προσοχή, τότε θα δείτε ότι το ΘΜΚΕΕ είναι ακριβώς η ΑΔΕ για

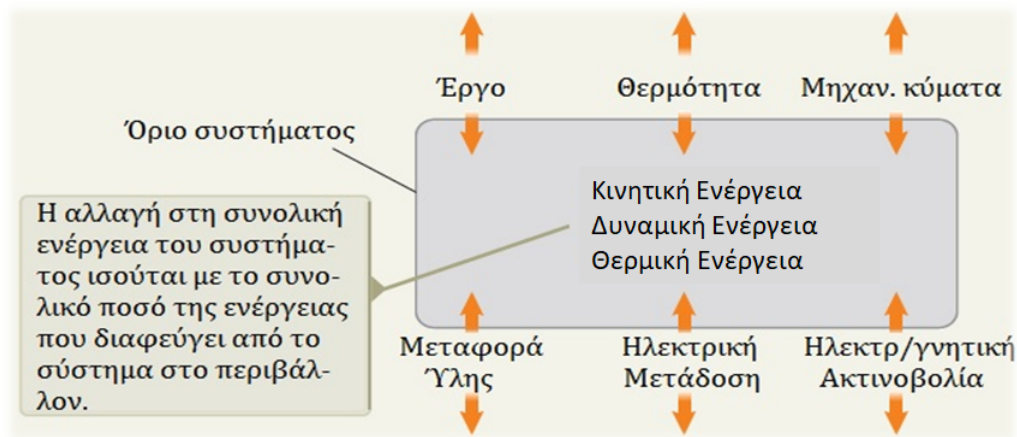
$$\Delta U = \Delta E_{th} = T_{thermal} = T_{mech.wave} = T_{material} = T_{electricity} = T_{radiation} = 0 \quad (2.465)$$

Για μια οπτικοποιημένη έκδοση της ΑΔΕ σε μη απομονωμένα συστήματα, μπορείτε να δείτε το Σχήμα 2.75. Μπορούμε τώρα να συγκεκριμενοποιήσουμε την ΑΔΕ για τα είδη ενέργειας που έχουμε συναντήσει. Στη γενικότερη μορφή της,

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{th} = \sum W_{ext.forces} \quad (2.466)$$

για ένα σύστημα **πολυμελές στο οποίο υπάρχουν μεταβολές δυναμικής και θερμικής ενέργειας, εκτός από μεταβολές κινητικής ενέργειας**. Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση μονομελούς συστήματος, όποιες αλληλεπιδράσεις με το περιβάλλον πρέπει να παρουσιάζονται ως έργα εξωτερικών δυνάμεων. Στην περίπτωση αυτή ισχύει το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας - Έργου, δηλ.

$$\Delta K = \sum W_{ext.forces} \quad (2.467)$$



Σχήμα 2.75: ΑΔΕ σε μη απομονωμένο σύστημα.

αφού ως μονομελές σύστημα, δεν μπορούμε να ορίσουμε θερμικές και δυναμικές ενέργειες (απαιτούνται τουλάχιστον δυο μέλη στο σύστημα). Τέλος, **αν η θερμική ενέργεια μοντελοποιηθεί ως έργο δύναμης τριβής (ή αν δεν υπάρχουν καν τριβές)**, τότε η γενική σχέση της ΑΔΕ μπορεί να γραφεί ως

$$\Delta K + \Delta U = \sum W_{ext, forces} \quad (2.468)$$

2.6.2 Απομονωμένα Συστήματα

Τα απομονωμένα συστήματα παρουσιάζουν το πολύ ελκυστικό χαρακτηριστικό της “κατακράτησης” της συνολικής τους ενέργειας: με άλλα λόγια, δεν υπάρχει διαφυγή ενέργειας με κανένα τρόπο εκτός του συστήματος, ούτε μπορεί κανείς να “ρίξει” ενέργεια μέσα στο σύστημα. Η συνολική ενέργεια παραμένει σταθερή, **δε μεταβάλλεται**. Η Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας στα απομονωμένα συστήματα μπορεί να περιγραφεί ως

Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας (ΑΔΕ) - Απομονωμένο Σύστημα

Σε ένα απομονωμένο σύστημα,

$$\Delta E_{system} = 0 \quad (2.469)$$

όπου E_{system} είναι η συνολική ενέργεια του συστήματος.

Με άλλα λόγια, **σε ένα απομονωμένο σύστημα η ενέργεια μπορεί να αλλάζει μορφές (και οι σχετικές ποσότητες να αλλάζουν) αλλά η συνολική ενέργεια είναι πάντα σταθερή**. Με βάση τα είδη ενέργειας που έχουμε δει ως τώρα, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί πιο αναλυτικά ως

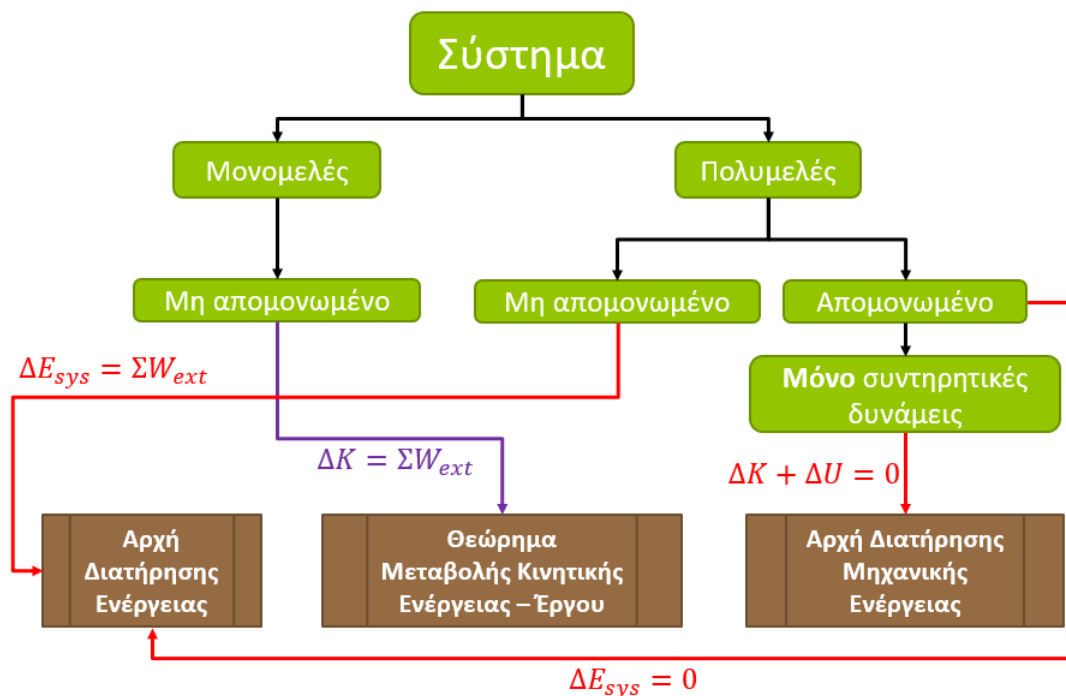
$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{th} = 0 \quad (2.470)$$

Στην περίπτωση που **στο σύστημα παράγουν έργο μόνο συντηρητικές δυνάμεις**, η ΑΔΕ εκπίπτει στην ΑΔΜΕ:

$$\Delta E_{mech} = \Delta K + \Delta U = 0 \quad (2.471)$$

Μπορεί κανείς να συνοψίσει τη στρατηγική επιλογής ενεργειακού θεωρήματος, και γενικότερα επίλυσης προβλημάτων, στο Σχήμα 2.76

Ένα πολύ χαρακτηριστικό παράδειγμα της εφαρμογής της ΑΔΕ σε απομονωμένο ή μη σύστημα (και πόσο ρόλο παίζει η επιλογή συστήματος στον τρόπο προσέγγισης ενός προβλήματος) δίνεται παρακάτω.

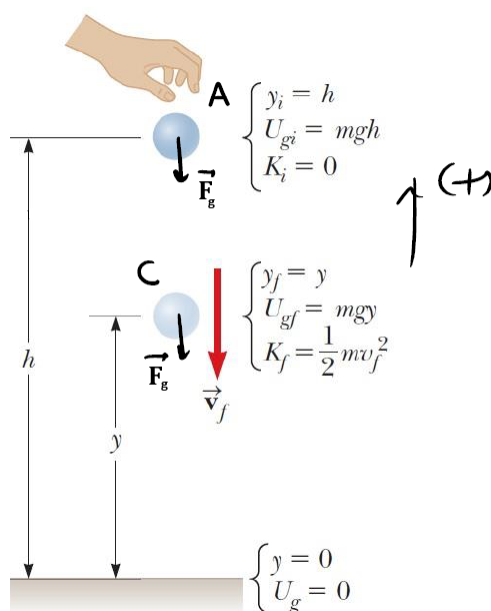


Σχήμα 2.76: Στρατηγική επιλογής ενεργειακού θεωρήματος.

Παράδειγμα 2.41:

Μια μπάλα μάζας m πέφτει από ύψος h , όπως στο Σχήμα 2.77.

- (α') Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας σε ύψος y από το έδαφος. Επιλέξτε ως σύστημα την μπάλα και τη Γη.
 (β') Επαναλάβετε το προηγούμενο ερώτημα θεωρώντας ως σύστημα μόνο την μπάλα.



Σχήμα 2.77: Μπάλα σε ελεύθερη πτώση.

Λύση:

- (α') Θεωρώντας ως σύστημα την μπάλα και τη Γη, το σύστημα αυτό είναι απομονωμένο, καθώς η μόνη δύναμη που ασκείται στην μπάλα και παράγει έργο πάνω της είναι η δύναμη του βάρους, η οποία είναι συντηρητική και εσωτερική στο σύστημα. Αν θεωρήσουμε θετική φορά προς τα πάνω, επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας την επιφάνεια της Γης, και ονομάσουμε τις θέσεις ύψους h και ύψους y με (A) και (C) αντίστοιχα, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΜΕ στη διαδρομή $A \rightarrow C$:

$$\Delta E_{\text{mech}} = 0 \quad (2.472)$$

$$K_A + U_A = K_C + U_C \quad (2.473)$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mu_c^2 + mgy \quad (2.474)$$

$$u_c^2 = 2g(h - y) \quad (2.475)$$

$$u_c = -\sqrt{2g(h - y)} \quad (2.476)$$

με το πρόσημο να υποδηλώνει ότι η φορά του διανύσματος της ταχύτητας είναι αντίθετη της θετικής φοράς που ορίσαμε, δηλ.

$$\vec{u}_c = (-\sqrt{2g(h - y)})\vec{j} \quad (2.477)$$

- (β') Θεωρώντας ως σύστημα την μπάλα, το σύστημα αυτό δεν είναι απομονωμένο, καθώς του ασκείται η δύναμη του βάρους (η ελκτική δύναμη της Γης), η οποία είναι εξωτερική στο σύστημα και παράγει έργο στην μπάλα. Αν θεωρήσουμε θετική φορά προς τα πάνω, και ονομάσουμε τις θέσεις ύψους h και ύψους y με (A) και (C) αντίστοιχα, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΕ (η οποία ουσιαστικά μετατρέπεται σε ΘΜΚΕΕ).

$$\Delta K_{A \rightarrow C} = W_{F_g} \quad (2.478)$$

$$K_C - K_A = \vec{F}_g \cdot \Delta \vec{y} \quad (2.479)$$

$$\frac{1}{2}mu_c^2 - 0 = -mg\vec{j} \cdot (y - h)\vec{j} \quad (2.480)$$

$$\frac{1}{2}mu_c^2 = -mg(y - h) \quad (2.481)$$

$$u_c^2 = 2g(h - y) \quad (2.482)$$

$$u_c = -\sqrt{2g(h - y)} \quad (2.483)$$

αποτέλεσμα που συμφωνεί με το προηγούμενο ερώτημα. ■

Ας δούμε μερικά ακόμα παραδείγματα.

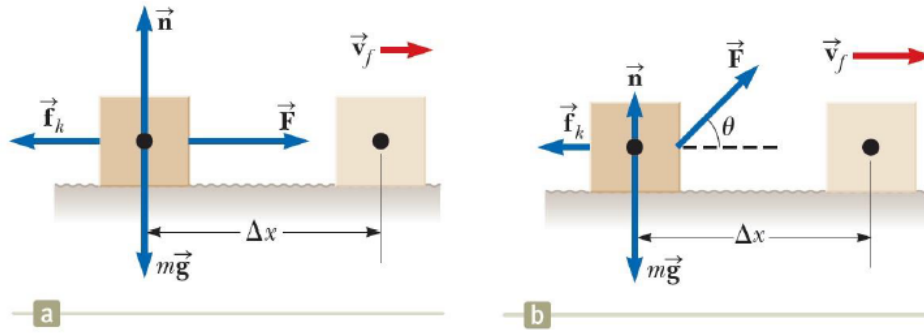
Παράδειγμα 2.42:

Ένα σώμα μάζας $m = 6 \text{ kg}$ σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντιο επιφάνεια με τριβές, λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N , όπως στο Σχήμα 2.78.

- (α') Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m , αν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15 .
 (β') Αν η δύναμη ασκείται υπό γωνία θ , ποιά θα είναι αυτή η γωνία ώστε η ταχύτητα του σώματος μετά από 3 m να είναι η μέγιστη;

Λύση:

- (α') Έστω (A) και (B) οι θέσεις ηρεμίας και μετατόπισης κατά 3 μέτρα , αντίστοιχα. Έστω ότι το σύστημα μας είναι το {σώμα μάζας m , μη λεία επιφάνεια}, το οποίο και είναι μη απομονωμένο καθώς υπάρχει



Σχήμα 2.78: Σώμα σε κίνηση υπό επίδραση δύναμης.

εξωτερική δύναμη $\vec{F}$ που παράγει έργο στο σύστημα. Θεωρούμε σύστημα αξόνων με τον άξονα x' παράλληλο στο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκούνται τέσσερις δυνάμεις: η δύναμη του βάρους, η δύναμη της τριβής ολίσθησης, η κάθετη δύναμη από την επιφάνεια, και η δύναμη με μέτρο $F = 12$ N. Οι δυο πρώτες είναι κάθετες δυνάμεις στη μετατόπιση και έτσι το έργο τους είναι μηδενικό. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΕ ανάμεσα στις θέσεις (A) και (B):

$$\Delta E_{sys}^{A \rightarrow B} = \sum W_{ext} \quad (2.484)$$

$$\Delta K_{A \rightarrow B} + \Delta E_{th} = W_F \quad (2.485)$$

$$K_B - K_A + f_k \Delta x = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} \quad (2.486)$$

$$\frac{1}{2} m u_B^2 + 0 + f_k \Delta x = F \Delta x \quad (2.487)$$

Το σώμα ισορροπεί στον y -άξονα, οπότε ισχύει

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{n} + m\vec{g} = \vec{0} \implies n - mg = 0 \iff n = mg \quad (2.488)$$

Γνωρίζουμε ότι $f_k = \mu_k n$, άρα $f_k = \mu_k mg$. Αντικαθιστώντας στην ενεργειακή σχέση, έχουμε

$$\frac{1}{2} m u_B^2 + \mu_k mg \Delta x = F \Delta x \quad (2.489)$$

$$u_B^2 = \frac{2F \Delta x - 2\mu_k mg \Delta x}{m} \quad (2.490)$$

$$= \sqrt{\frac{2F \Delta x - 2\mu_k mg \Delta x}{m}} \quad (2.491)$$

$$\approx 1.8 \text{ m/s} \quad (2.492)$$

(β') Με μια πρώτη σκέψη θα μπορούσαμε να πούμε ότι πρέπει $\theta = 0$, ώστε όλη η δύναμη να “αναλώνεται” στην κίνηση του σώματος προς τα δεξιά, αφού αν $\theta \neq 0$, η ανάλυση σε συνιστώσες θα μας δώσει μια x -συνιστώσα μικρότερου μέτρου από αυτό της δύναμης $\vec{F}$. Για να δούμε αν είναι σωστή η σκέψη μας.

Στον άξονα y , το σώμα ισορροπεί, και ισχύει

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{n} + \vec{F}_y + m\vec{g} = \vec{0} \implies n = mg - F \sin(\theta) \quad (2.493)$$

Γνωρίζουμε ότι $f_k = \mu_k n$, οπότε

$$f_k = \mu_k (mg - F \sin(\theta)) \quad (2.494)$$

Θεωρώντας το σύστημα {σώμα, επιφάνεια}, θα έχουμε τη δύναμη $\vec{F}$ ως εξωτερική, η οποία παράγει έργο. Εφαρμόζοντας την ΑΔΕ μεταξύ των θέσεων $A \rightarrow B$, έχουμε

$$\Delta E_{sys}^{A \rightarrow B} = \sum W_{ext} \quad (2.495)$$

$$\Delta K_{A \rightarrow B} + \Delta E_{th} = W_F \quad (2.496)$$

$$K_B - K_A + f_k \Delta x = \vec{F}_x \cdot \Delta \vec{x} \quad (2.497)$$

$$K_B - 0 = F_x \Delta x \cos(\theta) - f_k \Delta x \quad (2.498)$$

$$K_B = F \cos(\theta) \Delta x - \mu_k (mg - F \sin(\theta)) \Delta x \quad (2.499)$$

Παρατηρήστε ότι η κινητική ενέργεια στη θέση (B) είναι συνάρτηση της γωνίας θ ! Μπορούμε λοιπόν να βρούμε το μέγιστο της συνάρτησης

$$K_B(\theta) = F \cos(\theta) \Delta x - \mu_k (mg - F \sin(\theta)) \Delta x \quad (2.500)$$

Λύνουμε την εξίσωση

$$\frac{d}{d\theta} K_B(\theta) = 0 \quad (2.501)$$

$$\mu_k F \cos(\theta) \Delta x - F \sin(\theta) \Delta x = 0 \quad (2.502)$$

$$\mu_k = \tan(\theta) \quad (2.503)$$

κι έτσι

$$\theta = \tan^{-1} \mu_k \quad (2.504)$$

$$= \tan^{-1}(0.15) \approx 8.5^\circ \quad (2.505)$$

Άρα για την παραπάνω τιμή της γωνίας θ , η κινητική ενέργεια (και άρα η ταχύτητα) στη θέση (B) θα είναι μέγιστη. Βρείτε αυτήν την ταχύτητα!

Παράδειγμα 2.43:

Θεωρήστε ένα σώμα επάνω σε ένα καρεκλάκι δίπλα σε έναν τοίχο. Το σώμα σπρώχνεται από ένα ελατήριο που είναι δεμένο στον τοίχο, ολισθαίνει κατά μήκος της καρέκλας, και πέφτει στο έδαφος, όπως στην ακολουθία εικόνων του Σχήματος 2.79. Το σώμα έχει μάζα $m = 1.35 \text{ kg}$. Η σταθερά του ελατηρίου είναι $k = 560 \text{ N/m}$ και αρχικά το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά 0.11 m . Το σώμα ολισθαίνει μια απόσταση $d = 0.65 \text{ m}$ επάνω στην καρέκλα, η οποία έχει ύψος $h = 0.75 \text{ m}$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα και στην επιφάνεια της καρέκλας είναι $\mu_k = 0.16$.

(α') Με ποιά ταχύτητα θα φτάσει το σώμα στο έδαφος;

(β') Με ποιά ταχύτητα το σώμα αφήνει την καρέκλα;

Λύση:

(α') Θεωρούμε το σύστημα {σώμα, ελατήριο, Γη}, που είναι πολυμελές και μη απομονωμένο, αφού η εξωτερική δύναμη της τριβής παράγει έργο στο σύστημα. Θεωρούμε σύστημα αξόνων επάνω στο καρεκλάκι, με θετικές φορές τις συμβατικές. Εφαρμόζοντας την ΑΔΕ από το σημείο (A) ως το σημείο (Γ), έχουμε

$$\Delta E_{sys}^{A \rightarrow \Gamma} = \sum W_{ext} \quad (2.506)$$

$$\Delta K^{A \rightarrow \Gamma} + \Delta U_g^{A \rightarrow \Gamma} + \Delta U_s^{A \rightarrow \Gamma} = W_{f_k}^{A \rightarrow \Gamma} \quad (2.507)$$

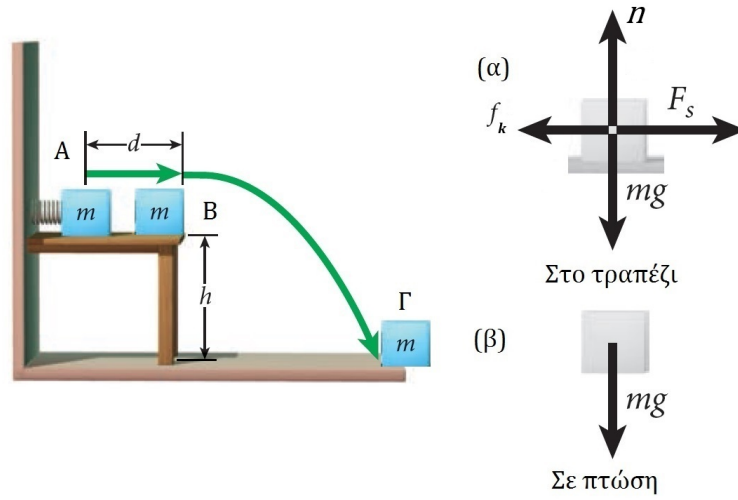
$$K_\Gamma - K_A + U_{g\Gamma} - U_{gA} + U_{s\Gamma} - U_{sA} = -f_k d = -\mu_k n d \quad (2.508)$$

Λόγω ισορροπίας του σώματος στον άξονα $y'y$, ο 1ος νόμος του Newton μας δίνει

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{n} + \vec{F}_g = \vec{0} \implies n = mg \quad (2.509)$$

κι άρα

$$\frac{1}{2} m u_\Gamma^2 - 0 + 0 - mgh + 0 - \frac{1}{2} k x^2 = -\mu_k m g d \quad (2.510)$$



Σχήμα 2.79: Καρεκλάκι σε τοίχο.

$$u_{\Gamma}^2 = \frac{kx^2}{m} + 2gh - 2gd\mu_k \quad (2.511)$$

$$u_{\Gamma}^2 = 17.64 \quad (2.512)$$

$$u_{\Gamma} = 4.2 \text{ m/s} \quad (2.513)$$

(β') Θεωρούμε το σύστημα {σώμα, ελατήριο}, που είναι πολυμελές και μη απομονωμένο, αφού η εξωτερική δύναμη της τριβής παράγει έργο στο σύστημα. Εφαρμόζοντας ΑΔΕ στο σύστημα από το σημείο A ως το σημείο B:

$$\Delta E_{sys}^{A \rightarrow B} = \sum W_{ext} \quad (2.514)$$

$$\Delta K^{A \rightarrow B} + \Delta U_s^{A \rightarrow B} = W_{f_k}^{A \rightarrow B} \quad (2.515)$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 - 0 + 0 - \frac{1}{2}kx^2 = -\mu_k mgd \quad (2.516)$$

$$u_B^2 = \frac{kx^2}{m} - 2gd\mu_k \quad (2.517)$$

$$u_B^2 = 2.98 \quad (2.518)$$

$$u_B = 1.72 \text{ m/s} \quad (2.519)$$

Μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το ίδιο ενεργειακό θεώρημα στο σύστημα {σώμα, ελατήριο, επιφάνεια}, μόνο που τώρα το σύστημα θα ήταν πολυμελές και απομονωμένο, καθώς δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη που να παράγει έργο στο σύστημα. Οπότε θα ήταν

$$\Delta E_{sys}^{A \rightarrow B} = 0 \quad (2.520)$$

$$\Delta K^{A \rightarrow B} + \Delta U_s^{A \rightarrow B} + \Delta E_{th} = 0 \quad (2.521)$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 - 0 + 0 - \frac{1}{2}kx^2 + f_k d = 0 \quad (2.522)$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 - \frac{1}{2}kx^2 + \mu_k mgd = 0 \quad (2.523)$$

$$u_B^2 = \frac{kx^2}{m} - 2gd\mu_k \quad (2.524)$$

$$u_B^2 = 2.98 \quad (2.525)$$

$$u_B = 1.72 \text{ m/s} \quad (2.526)$$

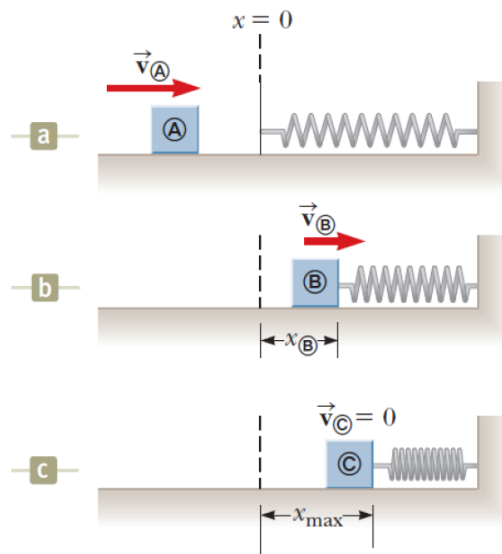
όπως και πριν. Εφαρμόστε εσείς το ΘΜΚΕΕ στο σύστημα {σώμα} και καταλήξτε στο ίδιο αποτέλεσμα!

Παράδειγμα 2.44:

Ένα σώμα μάζας 0.8 kg δέχεται αρχική ταχύτητα $u_A = 1.2 \text{ m/s}$ προς τα δεξιά και συγκρούεται με ελατήριο αμελητέας μάζας και σταθεράς $k = 50 \text{ N/m}$, όπως στο Σχήμα 2.80

(α') Υποθέτοντας επιφάνεια χωρίς τριβές, υπολογίστε τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου.

(β') Υποθέτοντας σταθερή τριβή ολισθήσεως με $\mu_k = 0.5$, αν η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή της επαφής με το ελατήριο είναι $u_A = 1.2 \text{ m/s}$, ποιά είναι τώρα η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου;



Σχήμα 2.80: Σώμα συγκρούεται με ελατήριο.

Λύση:

Επιλέγουμε θετική φορά προς τα δεξιά.

(α') Έστω ότι το σύστημα μας είναι το {ελατήριο, σώμα}. Το σύστημα αυτό είναι πολυμελές και απομονωμένο. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο ελατήριο είναι η δύναμη του ελατηρίου, η δύναμη του βάρους, και η κάθετη δύναμη του επιπέδου στο ελατήριο. Οι δυο τελευταίες δεν παράγουν έργο, ως κάθετες στη μετατόπιση του σώματος. Η δύναμη που απομένει, του ελατηρίου, είναι συντηρητική, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ΑΔΜΕ στη διαδρομή $A \rightarrow C$.

$$\Delta E_{mech}^{A \rightarrow C} = 0 \quad (2.527)$$

$$K_A + U_{sA} = K_C + U_{sC} \quad (2.528)$$

$$\frac{1}{2}mu_A^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kx_{max}^2 \quad (2.529)$$

$$x_{max}^2 = \frac{mu_A^2}{k} \quad (2.530)$$

$$x_{max} = \sqrt{\frac{mu_A^2}{k}} \quad (2.531)$$

$$\approx 0.15 \text{ m} \quad (2.532)$$

(β') Θεωρούμε νέο σύστημα το {σώμα, ελατήριο, επιφάνεια}. Υπάρχει πλέον μη συντηρητική δύναμη στο σύστημα, και το σύστημα είναι πολυμελές και απομονωμένο – προστίθεται η δύναμη της τριβής στις

δυνάμεις που αναφέραμε στο προηγούμενο ερώτημα. Ισχύει η ΑΔΕ στην ίδια διαδρομή.

$$\Delta E_{sys}^{A \rightarrow C} = 0 \quad (2.533)$$

$$\Delta K^{A \rightarrow C} + \Delta U_s^{A \rightarrow C} + \Delta E_{th} = 0 \quad (2.534)$$

$$K_C - K_A + U_{sC} - U_{sA} + \Delta E_{th} = 0 \quad (2.535)$$

$$0 - \frac{1}{2}mu_A^2 + \frac{1}{2}kx_{max}^2 + f_k\Delta x = 0 \quad (2.536)$$

$$0 - \frac{1}{2}mu_A^2 + \frac{1}{2}kx_{max}^2 + \mu_k n\Delta x = 0 \quad (2.537)$$

Λόγω ισορροπίας στον άξονα $y'y$, ο 1ος νόμος Newton μας δίνει

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{F}_g + \vec{n} = \vec{0} \implies n = mg \quad (2.538)$$

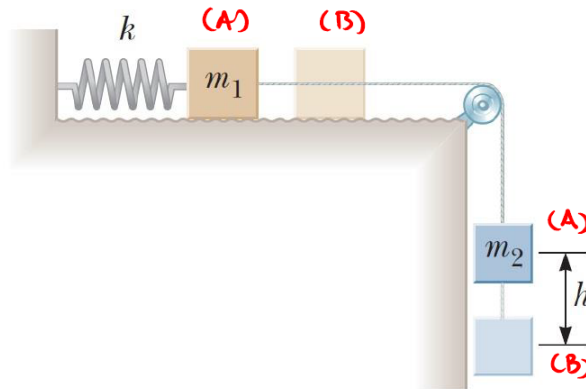
οπότε η τελευταία σχέση παραπάνω μας δίνει

$$50x_{max}^2 + 7.84x_{max} - 1.15 = 0 \quad (2.539)$$

Λύσεις του τριωνύμου αποτελούν οι $x_{max1} = 0.092$ m και $x_{max2} = -0.25$ m, εκ των οποίων αποδεχόμαστε την πρώτη λόγω του ότι είναι θετική, όπως πρέπει να είναι βάσει σχήματος και επιλεγμένης θετικής φοράς.

Παράδειγμα 2.45:

Δυο σώματα είναι συνδεδεμένα με αβαρές και ανελαστικό σχοινί που περνά από τροχαλία χωρίς τριβές. Το σώμα μάζας m_1 βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια με τριβές και συνδέεται με ελατήριο σταθεράς k . Το σύστημα θεωρείται αρχικά σε ηρεμία. Αν το σώμα μάζας m_2 πέφτει απόσταση h πριν έρθει σε ηρεμία, όπως στο Σχήμα 2.81, υπολογίστε το συντελεστή τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα μαζί m_1 και στην οριζόντια επιφάνεια.



Σχήμα 2.81: Σώματα δεμένα με ελατήριο και νήμα με τροχαλία.

Λύση:

Έστω οι θέσεις (A) και (B) του συστήματος, όπως στο Σχήμα 2.81. Έστω το σύστημα {σώματα, ελατήριο, επιφάνεια, Γη}. Το σύστημα είναι απομονωμένο και υπάρχουν μη συντηρητικές δυνάμεις στο σύστημα (δύναμη τριβής). Λόγω της λείας και αβαρούς τροχαλίας καθώς και των ανελαστικών και αβαρών νημάτων, τα δυο σώματα m_1 και m_2 κινούνται μαζί. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας τη θέση του συστήματος στην τελική ισορροπία, στη θέση (B) των δυο σωμάτων. Ισχύει η ΑΔΕ στη διαδρομή $A \rightarrow B$.

$$\Delta E_{sys}^{A \rightarrow B} = 0 \quad (2.540)$$

$$\Delta K^{A \rightarrow B} + \Delta U_g^{A \rightarrow B} + \Delta U_s^{A \rightarrow B} + \Delta E_{th} = 0 \quad (2.541)$$

$$K_B - K_A + U_{gB} - U_{gA} + U_{sB} - U_{sA} + \Delta E_{th} = 0 \quad (2.542)$$

$$0 - 0 + 0 - U_{gA} + U_{sB} - 0 + \Delta E_{th} = 0 \quad (2.543)$$

$$-U_{gA} + U_{sB} + \Delta E_{th} = 0 \quad (2.544)$$

$$-m_2gh + \frac{1}{2}kh^2 + f_kh = 0 \quad (2.545)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$f_k = \mu_k n \quad (2.546)$$

κι από την ισορροπία του σώματος m_1 στον y -άξονα παίρνουμε

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow n - m_1g = 0 \Leftrightarrow n = m_1g \quad (2.547)$$

Άρα

$$f_k = \mu_k m_1g \quad (2.548)$$

Έτσι, αντικαθιστώντας στη Σχέση (2.545)

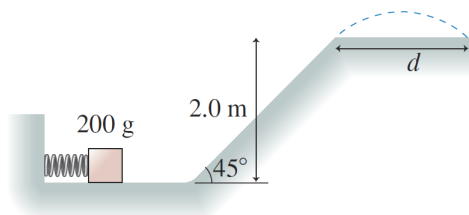
$$-m_2gh + \frac{1}{2}kh^2 + \mu_k m_1gh = 0 \quad (2.549)$$

$$\mu_k = \frac{m_2g - \frac{1}{2}kh}{m_1g} \quad (2.550)$$

που είναι και το ζητούμενο.

Παράδειγμα 2.46:

Το ελατήριο του Σχήματος 2.82 έχει σταθερά $k = 1000 \text{ N/m}$.

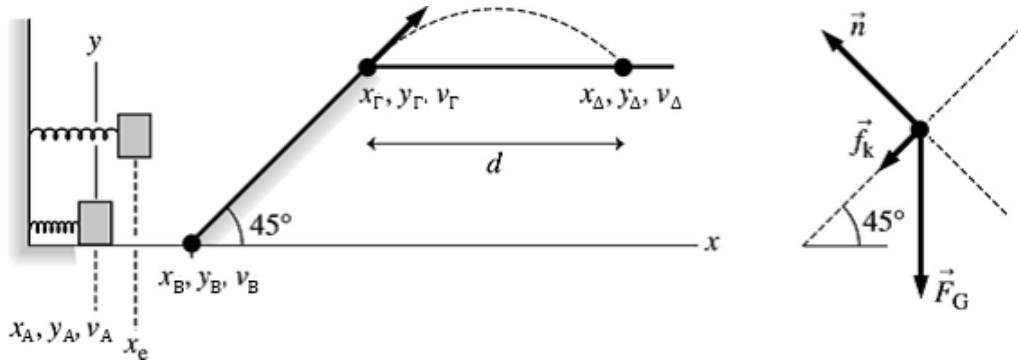


Σχήμα 2.82: Ελατήριο και σώμα.

Συμπιέζεται κατά 15 εκατοστά και στη συνέχεια εκτοξεύει ένα σώμα μάζας 0.2 kg . Η οριζόντια επιφάνεια είναι χωρίς τριβές, αλλά το κεκλιμένο έχει τριβές και ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος και του κεκλιμένου είναι $\mu_k = 0.2$. Πόση απόσταση d διανύει το σώμα στον αέρα;

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 2.83. Θεωρούμε ως σύστημα το {σώμα, επιφάνεια, Γη}. Θεωρούμε 4 σημεία, τα (x_A, y_A) , (x_B, y_B) , (x_Γ, y_Γ) , (x_Δ, y_Δ) . Το σύστημα είναι μη απομονωμένο, καθώς υπάρχει εξωτερική δύναμη, αυτή του ελατηρίου, η οποία παράγει έργο στο σύστημα. Τοποθετούμε το σύστημα συντεταγμένων στο ελεύθερο άκρο του συμπιεσμένου ελατηρίου που έρχεται σε επαφή με το σώμα. Επειδή η οριζόντια επιφάνεια στο κάτω μέρος της ράμπας είναι χωρίς τριβή, η ενέργεια του ελατηρίου εμφανίζεται ως κινητική ενέργεια του σώματος έως ότου αρχίσει το σώμα να ανεβαίνει πάνω στο κεκλιμένο. Παρόλο που θα μπορούσαμε να βρούμε την ταχύτητα u_B καθώς φεύγει το σώμα από το ελατήριο, δεν μας χρειάζεται. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας για να συσχετίσουμε την αρχική δυναμική ενέργεια



Σχήμα 2.83: Ελατήριο και σώμα και διαγράμματα δυνάμεων.

της πηγής με την ενέργεια του σώματος καθώς αρχίζει η κίνηση του στο σημείο 2. Ωστόσο, η παρουσία τριβής απαιτεί να υπολογίσουμε την αύξηση της θερμικής ενέργειας του συστήματος. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΕ στη διαδρομή $(x_A, y_A) \rightarrow (x_\Gamma, y_\Gamma)$.

$$\Delta E_{sys}^{A \rightarrow \Gamma} = \sum W_{ext} \quad (2.551)$$

$$\Delta K^{A \rightarrow \Gamma} + \Delta U_g^{A \rightarrow \Gamma} + \Delta E_{th} = W_s \quad (2.552)$$

$$K_\Gamma - K_A + U_{g\Gamma} - U_{gA} + \Delta E_{th} = W_s \quad (2.553)$$

$$\frac{1}{2}mu_\Gamma^2 - 0 + mgy_\Gamma - 0 + f_k \Delta s = \frac{1}{2}kx_A^2 \quad (2.554)$$

Από το σχήμα βλέπουμε ότι

$$\Delta s = \frac{y_\Gamma}{\sin(\pi/4)} \quad (2.555)$$

και γνωρίζουμε ότι $f_k = \mu_k n = \mu_k mg \cos(\pi/4)$, λόγω της ισορροπίας του σώματος στον άξονα $y'y$. Οπότε

$$\frac{1}{2}mu_\Gamma^2 - 0 + mgy_\Gamma - 0 + f_k \Delta s = \frac{1}{2}kx_A^2 \quad (2.556)$$

$$\frac{1}{2}mu_\Gamma^2 - 0 + mgy_\Gamma - 0 + \mu_k mg \cos(\pi/4) \frac{y_\Gamma}{\sin(\pi/4)} = \frac{1}{2}kx_A^2 \quad (2.557)$$

$$u_\Gamma = \sqrt{\frac{k}{m}x_A^2 - 2gy_\Gamma - 2\mu_k gy_\Gamma \cot(\pi/4)} \quad (2.558)$$

$$= 8.091 \text{ m/s} \quad (2.559)$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε την απόσταση $d = x_\Delta - x_\Gamma$ χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις της επιταχυνόμενης κίνησης στη διαδρομή $(x_\Gamma, y_\Gamma) \rightarrow (x_\Delta, y_\Delta)$, όπου το σώμα εκτελεί βολή. Θεωρούμε ένα νέο σύστημα αξόνων με $x_\Gamma = y_\Gamma = 0$, $t_\Gamma = 0$, και έστω t ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να καλύψει τη διαδρομή. Στον άξονα $y'y$, η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, οπότε θα είναι

$$y_\Delta = y_\Gamma + u_{y\Gamma}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.560)$$

$$0 = 0 + u_\Gamma \sin(\pi/4)t - 4.9t^2 \quad (2.561)$$

$$t(u_\Gamma \sin(\pi/4) - 4.9t) = 0 \quad (2.562)$$

Οι λύσεις του τριωνύμου είναι οι $t = 0$ ή $t = 1.168 \text{ s}$. Στον άξονα $x'x$, η κίνηση είναι ευθύγραμμη με σταθερή ταχύτητα, άρα από την εξίσωση της κινητικής

$$x_\Delta = x_\Gamma + u_{x\Gamma}t \iff d = x_\Delta - x_\Gamma = u_\Gamma \cos(\pi/4)(1.168) = 6.7 \text{ m} \quad (2.563)$$

2.7 Ισχύς

Έχουμε επανηλειμμένως τονίσει ότι το έργο αποτελεί έναν τρόπο μεταφοράς ενέργειας. Αυτό που δε συζητήσαμε καθόλου είναι το πόσο γρήγορα μεταφέρεται η ενέργεια! Αν θέλετε να αγοράσετε έναν κινητήρα για να ανεβάσει 5 ορόφους ένα θάλαμο (ανελκυστήρα) μάζας 1.5 τόνων, έχει σημασία αν το κάνει σε 30 s ή σε 30 min! ☺

Η φράση “πόσο γρήγορα” υποδηλώνει ένα ρυθμό μεταβολής. Τίνος όμως; Προφανώς το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας ή αλλιώς το ρυθμό μεταφοράς της ενέργειας. Αυτός ο ρυθμός ονομάζεται **ισχύς** P :

$$P = \frac{d}{dt}E(t) \quad (2.564)$$

Η μονάδα μέτρησης της ισχύος είναι 1 J/s ή αλλιώς 1 Watt - W. Εναλλακτικά, η ισχύς μπορεί να ιδωθεί ως ο ρυθμός παραγωγής έργου. Σε ένα διάστημα Δt , η μέση ισχύς που παραδίδεται είναι

$$P_{avg} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{W}{\Delta t} \quad (2.565)$$

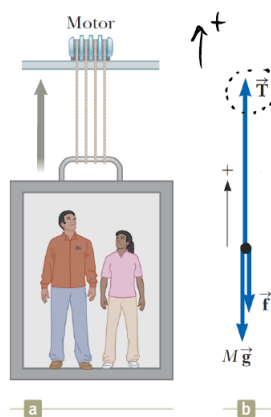
Καταλαβαίνετε ότι αν πάρουμε το όριο για $\Delta t \rightarrow 0$, η μέση ισχύς γίνεται η **στιγμιαία ισχύς**, δηλ.

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P_{avg} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{d}{dt}W = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u} \quad (2.566)$$

Παράδειγμα 2.47:

Ένας ανελκυστήρας έχει μάζα 1600 kg και μεταφέρει επιβάτες με συνολική μάζα 200 kg. Μια σταθερή δύναμη τριβής 4000 N αντιστέκεται στην κίνηση του ανελκυστήρα προς τα πάνω.

- (α') Πόση ισχύ πρέπει να παραδώσει ο κινητήρας του ασανσέρ για να σηκώσει το ασανσέρ και τους επιβάτες του με σταθερή ταχύτητα $u = 3$ m/s;
- (β') Πόση ισχύ πρέπει να παραδώσει ο κινητήρας τη στιγμή που ο ανελκυστήρας κινείται με ταχύτητα u , αν επιταχύνει τον ανελκυστήρα με σταθερή επιτάχυνση $a = 1$ m/s² προς τα πάνω;



Σχήμα 2.84: Κινητήρας και ανελκυστήρας.

Λύση:

- (α') Ξέρουμε ότι $P = \vec{F} \cdot \vec{u}$. Θεωρούμε ως σύστημα το {ανελκυστήρας, επιβάτες} και ότι η θετική φορά της κίνησης είναι προς τα πάνω. Το σύστημα ισορροπεί, καθώς κινείται με σταθερή ταχύτητα. Έτσι

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{T} + \vec{f} + M\vec{g} = \vec{0} \implies T = Mg + f = F \quad (2.567)$$

με M τη συνολική μάζα του συστήματος. Αντικαθιστώντας έχουμε

$$P = (Mg + f)u = 6.5 \cdot 10^4 \text{ W} \quad (2.568)$$

(β') Το σύστημα επιταχύνεται προς τα πάνω, άρα

$$\sum \vec{F}_y = M\vec{a} \iff \vec{T} + \vec{f} + M\vec{g} = M\vec{a} \implies T = f + M(a + g) = F \quad (2.569)$$

Άρα

$$P = \vec{F} \cdot \vec{u} = (f + M(a + g))u = 2.34u \cdot 10^4 \text{ W} \quad (2.570)$$

Παράδειγμα 2.48:

Ένα εργοστάσιο χρησιμοποιεί έναν κινητήρα και ένα καλώδιο για να τραβά ένα μηχάνημα μάζας 300 kg από το χώρο αποθήκευσης ως το χώρο χρήσης του. Πόση ισχύ πρέπει να παρέχει ο κινητήρας αν κινεί το μηχάνημα με ταχύτητα 0.5 m/s. Υποθέστε ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του μηχανήματος και του οριζώντιου πατώματος είναι 0.6.

Λύση: Η δύναμη που ασκείται από τον κινητήρα μέσω του καλωδίου ισούται με την τάση του καλωδίου, $\vec{T}$. Αυτή η δύναμη παράγει έργο στο μηχάνημα με ισχύ $P = \vec{T} \cdot \vec{u} = Tu$, λόγω του ότι τα διανύσματα τάσης και ταχύτητας είναι ομόρροπα. Το μηχάνημα βρίσκεται σε ισορροπία στην οριζόντια κίνησή του, λόγω της κίνησής του με σταθερή ταχύτητα, άρα

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \iff \vec{T} + \vec{f}_k = \vec{0} \implies T - f_k = 0 \iff T = f_k = \mu_k n \quad (2.571)$$

και λόγω ισορροπίας και στον άξονα $y'y$ ισχύει

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{n} + m\vec{g} = \vec{0} \implies n - mg = 0 \iff n = mg \quad (2.572)$$

Αντικαθιστώντας

$$T = \mu_k mg \quad (2.573)$$

και άρα η ισχύς του κινητήρα θα είναι

$$P = Tu = \mu_k mgu = 882 \text{ W} \quad (2.574)$$

2.8 Ασκήσεις

Παράδειγμα 2.49:

Ένας ήπιος έντασης άνεμος μπορεί να επιταχύνει ένα στρογγυλό χαλίκι σε μια οριζόντια γέφυρα με σταθερή επιτάχυνση

$$\vec{a} = (5 \text{ m/s}^2)\vec{i} + (7 \text{ m/s}^2)\vec{j} \quad (2.575)$$

Υποθέστε ότι η γέφυρα αποτελεί ένα λείο xy επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, η ταχύτητα του χαλικιού είναι $(4\text{m/s})\vec{i}$.

(α') Βρείτε το μέτρο της ταχύτητάς του όταν έχει μετατοπιστεί 12 m παράλληλα με τον άξονα x' .

(β') Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητάς του στο παραπάνω ερώτημα με τον άξονα x' .

Λύση:

Το χαλίκι κινείται επιταχυνόμενα με σταθερή επιτάχυνση $a_x = 5 \text{ m/s}^2$ στον άξονα $x'x$ και επιταχυνόμενα με σταθερή επιτάχυνση $a_y = 7 \text{ m/s}^2$ στον άξονα $y'y$. Το χαλίκι έχει αρχική ταχύτητα μόνο στον άξονα x' και ίση με $u_x = 4 \text{ m/s}$.

(α') Έστω A το σημείο εκκίνησης ($t = 0$) και B το σημείο όπου έχει μετατοπιστεί $\Delta x = 12 \text{ m}$ παράλληλα με τον άξονα $x'x$. Θα είναι

$$u_{B_x}^2 = u_{A_x}^2 + 2a_x\Delta x \iff u_{B_x}^2 = 16 + 2 \cdot 5 \cdot 12 = 136 \implies u_{B_x} = 11.662 \text{ m/s} \quad (2.576)$$

και

$$u_{B_x} = u_{A_x} + a_x t \implies t = \frac{u_{B_x} - u_{A_x}}{a_x} = 1.532 \text{ s} \quad (2.577)$$

Στον άξονα $y'y$ ισχύει

$$u_{B_y} = u_{A_y} + a_y t = 0 + 7 \cdot 1.532 = 10.727 \text{ m/s} \quad (2.578)$$

Οπότε

$$|\vec{u}_B| = \sqrt{u_{B_x}^2 + u_{B_y}^2} = 15.845 \text{ m/s} \quad (2.579)$$

(β') Θα είναι

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{u_{B_y}}{u_{B_x}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{10.727}{11.662}\right) = 42.609^\circ \quad (2.580)$$

Παράδειγμα 2.50:

Ένα αεροπλάνο προσγειώνεται με ταχύτητα 63 m/s, δηλ. ακουμπά το έδαφος με αυτήν την ταχύτητα.

(α') Ποιά είναι η επιτάχυνση του (υποθέστε ότι είναι σταθερή) αν ο πιλότος καταφέρνει να το ακινητοποιήσει σε χρόνο 2 s;

(β') Πόση απόσταση διένυσε το αεροπλάνο στον αεροδιάδρομο;

Λύση:

(α') Μελετάμε το φαινόμενο με το που το αεροπλάνο ακουμπά τον αεροδιάδρομο, δηλ. τότε ακριβώς θέτουμε $t = 0$ και $x = 0$. Εύκολα βρίσκουμε από το τυπολόγιο της επιταχυνόμενης κίνησης ότι στη διαδρομή από την προσγείωση του αεροπλάνου ως τη στιγμή της ακινητοποίησής του ισχύει

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t \quad (2.581)$$

οπότε

$$a_x = \frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{t} = \frac{0 - 63}{2} = -31.5 \text{ m/s}^2 \quad (2.582)$$

(β') Από το τυπολόγιό μας, στο διάστημα αυτό των δυο δευτερολέπτων μεταξύ της στιγμής που ακουμπά στο διάδρομο και της στιγμής που ακινητοποιείται θα έχουμε

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{xi} + u_{xf})t = 0 + 0.5 \cdot 63 \cdot 2 = 63 \text{ m} \quad (2.583)$$

Παράδειγμα 2.51:

Ένα αυτοκίνητο ταξιδεύει με ταχύτητα 45 m/s και κάποια στιγμή προσπερνά ένα κρυμμένο ακίνητο μοτοσυκλετιστή της τροχαίας. Ένα δευτερόλεπτο μετά την προσπέραση, ο μοτοσυκλετιστής ξεκινάει με σταθερή επιτάχυνση 3 m/s² την καταδίωξη. Σε πόσο χρόνο ο μοτοσυκλετιστής θα φτάσει το αυτοκίνητο;

Λύση:

Ορίζουμε ως χρονική στιγμή $t = 0$ τη στιγμή που ο αστυνομικός μοτοσυκλετιστής ξεκινά και ορίζουμε ως σημείο αναφοράς της θέσης $x = 0$ τη θέση του αστυνομικού πριν ξεκινήσει. Σε αυτή τη στιγμή ($t = 0, x = 0$), το αμάξι έχει προχωρήσει ήδη 45 μέτρα, αφού έχει περάσει ένα δευτερόλεπτο. Άρα, η αρχική θέση του αμαξίου είναι $x_{icar} = 45 \text{ m}$. Το όχημα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα, άρα η θέση του για κάθε χρονική στιγμή t θα δίνεται ως

$$x_{car} = x_{icar} + u_{xcar}t = 45 + u_{xcar}t \quad (2.584)$$

ενώ ο αστυνομικός εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, και η θέση του για κάθε χρονική στιγμή t θα δίνεται ως

$$x_{cop} = x_{icop} + u_{icop}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2.585)$$

αφού η αρχική θέση του θεωρείται μηδέν και η αρχική του ταχύτητα επίσης. Έτσι, για να βρούμε πότε οι θέσεις τους θα συμπίσουν (αυτό ζητάει το ερώτημα), θα είναι

$$x_{cop} = x_{car} \quad (2.586)$$

$$\frac{1}{2}a_x t^2 = 45 + u_{xcar}t \quad (2.587)$$

$$t = \frac{u_{xcar} \pm \sqrt{u_{xcar}^2 + 2 \cdot 45a_x}}{a_x} \quad (2.588)$$

και αντικαθιστώντας, έχουμε

$$t = 31 \text{ s} \quad (2.589)$$

Παράδειγμα 2.52:

Ένας λαγός και μια χελώνα τρέχουν σε αγώνα δρόμου μήκους 1 km. Η χελώνα τρέχει με ταχύτητα 0.2 m/s, ενώ ο λαγός 8 m/s. Και οι δύο ξεκινούν ταυτόχρονα από την εκκίνηση. Ο λαγός τρέχει προς το τέρμα, σταματάει όμως στα 0.8 km και παίρνει έναν ύπνο. Η χελώνα τρέχει προς το τέρμα χωρίς να σταματήσει. Και οι δύο, όταν κινούνται, έχουν σταθερή την ταχύτητά τους. Ο λαγός ξυπνάει τελευταία στιγμή, τρέχει και τελικά τερματίζει μαζί με τη χελώνα.

(α') Πόσο κοντά βρίσκεται η χελώνα στο τέρμα όταν ξυπνάει (ξεκινά και πάλι) ο λαγός;

(β') Πόση ώρα κοιμόταν (ήταν ακίνητος) ο λαγός;

Λύση:

- (α') Έστω ότι η χελώνα προχωρά απόσταση D πριν ο λαγός ξαναμπει στον αγώνα. Όταν γίνεται αυτό, ο λαγός πρέπει να τρέξει 200 m σε 8 m/s, ενώ η χελώνα προχωρά απόσταση $(1000 - D)$ με 0.2 m/s. Καθένας έχει τον ίδιο χρόνο για να τελειώσει τον αγώνα. Άρα

$$\Delta t = \frac{200}{8} = \frac{1000 - D}{0.2} \implies D = 995 \text{ m} \quad (2.590)$$

Έτσι η χελώνα βρίσκεται σε απόσταση $1000 - 995 = 5$ m από τη γραμμή τερματισμού όταν ο λαγός επανέρχεται στον αγώνα.

- (β') Και οι δυο ξεκινούν τον αγώνα την ίδια χρονική στιγμή $t = 0$. Ο λαγός φτάνει τη θέση των 800 μέτρων σε χρόνο $t = 800/8 = 100$ s. Η χελώνα φτάνει τα 995 μέτρα σε χρόνο $t = 995/0.2 = 4975$ s. Ο λαγός κοιμόταν για διάστημα

$$\Delta t = 4975 - 100 = 4875 \text{ s} \quad (2.591)$$

Παράδειγμα 2.53:

Ένας άνθρωπος ταξιδεύει με το αυτοκίνητό του, με σταθερή ταχύτητα 89.5 km/h, εκτός από μια στάση 22 λεπτών. Αν η μέση ταχύτητα του είναι 77.8 km/h:

- (α') Πόση ήταν η συνολική ώρα του ταξιδιού;
(β') Πόση απόσταση διένυσε συνολικά;

Λύση:

- (α') Έστω $t_0 = 0$ η στιγμή εκκίνησης του ταξιδιού και t_s ο χρόνος που διένυσε μέχρι τη στάση ταξιδεύοντας με σταθερή ταχύτητα $u = 89.5$ km/h, δηλ. με $u = 24.86$ m/s. Τα 22 λεπτά αντιστοιχούν σε 1320 δευτερόλεπτα, ενώ η μέση ταχύτητα των 77.8 χιλιομέτρων την ώρα αντιστοιχεί σε 21.61 m/s. Η μέση του ταχύτητα δίνεται από τη σχέση

$$u_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{t_s + 1320 - t_0} = \frac{\Delta x}{t_s + 1320} \quad (2.592)$$

Άρα η απόσταση που διένυσε είναι

$$\Delta x = u_{avg} \Delta t = u_{avg} (t_s + 1320) \quad (2.593)$$

Για όσο ταξίδευε με σταθερή ταχύτητα u , θα είναι

$$\Delta x = u(t_s - t_0) = ut_s \quad (2.594)$$

Προφανώς οι αποστάσεις Δx είναι ίδιες και στις δυο σχέσεις, άρα εξισώνοντας έχουμε

$$u_{avg}(t_s + 1320) = ut_s \iff 21.6 \cdot (t_s + 1320) = 24.86 \cdot t_s \iff t_s = \frac{28512}{3.26} = 8746 \text{ s} \quad (2.595)$$

που αντιστοιχεί σε $t_s = 2.44$ ώρες. Άρα ο συνολικός χρόνος ταξιδιού είναι $t_{total} \approx 2.44 + 0.37 = 2.81$ ώρες.

- (β') Η απόσταση που ταξίδεψε είναι

$$\Delta x = ut_s = 218370 \text{ m} \approx 218 \text{ km} \quad (2.596)$$

Παράδειγμα 2.54:

Η θέση ενός σώματος που κινείται πάνω σε έναν άξονα x' δίνεται από τη συνάρτηση

$$x(t) = 3t - 4t^2 + t^3 \quad (2.597)$$

με x να μετριέται σε μέτρα και t σε δευτερόλεπτα.

- (α') Βρείτε τη θέση του σώματος τις χρονικές στιγμές 1, 2, 3, και 4 s αντίστοιχα.
- (β') Βρείτε τη μετατόπιση του σώματος μεταξύ των χρονικών στιγμών $t = 0$ και $t = 4$ s.
- (γ') Ποιά είναι η μέση ταχύτητα του σώματος στο διάστημα από $t = 2$ ως $t = 4$ s;
- (δ') Σχεδιάστε ποιοτικά τη συνάρτηση $x(t)$ σε ένα γράφημα στο διάστημα $[2, 4]$, και εξηγήστε πως θα μπορούσατε να απαντήσετε στο προηγούμενο ερώτημα μέσω του γραφήματος.

Λύση:

Η θέση ενός σώματος που κινείται πάνω σε έναν άξονα x' δίνεται από τη συνάρτηση

$$x(t) = 3t - 4t^2 + t^3 \quad (2.598)$$

με x να μετριέται σε μέτρα και t σε δευτερόλεπτα.

(α') Είναι

- $t = 1$: $x(1) = 3 - 4 + 1 = 0$ m.
- $t = 2$: $x(2) = 6 - 16 + 8 = -2$ m.
- $t = 3$: $x(3) = 9 - 36 + 27 = 0$ m.
- $t = 4$: $x(4) = 12 - 64 + 64 = 12$ m.

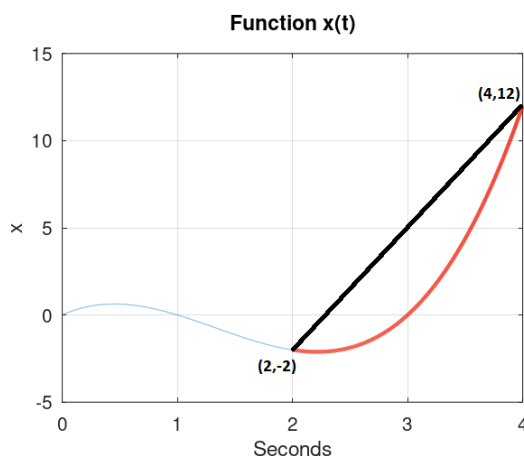
(β') Θα έχουμε

$$\Delta x = x(4) - x(0) = 12 - 0 = 12 \text{ m} \quad (2.599)$$

(γ') Θα είναι

$$u_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(4) - x(2)}{4 - 2} = 7 \text{ m/s} \quad (2.600)$$

(δ') Το γράφημα της $x(t)$ φαίνεται στο Σχήμα 2.85. Η μέση ταχύτητα δίνεται από την κλίση της ευθείας



Σχήμα 2.85: Σχήμα Άσκησης 2.54.

που ενώνει τα σημεία $(2, -2)$ και $(4, 12)$. Η κλίση αυτή είναι

$$\lambda = \frac{12 - (-2)}{4 - 2} = \frac{14}{2} = 7 \quad (2.601)$$

που ταυτίζεται με την απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα.

Παράδειγμα 2.55:

Ένα ηλεκτρόνιο επιταχύνει ομοιόμορφα από $2 \cdot 10^4$ σε $6 \cdot 10^6$ m/s σε απόσταση 1.5 cm.

(α') Σε πόσο χρονικό διάστημα διανύει αυτά τα 1.5 εκατοστά;

(β') Ποιά είναι η επιτάχυνσή του σε αυτό το διάστημα;

Λύση:

Έχουμε αρχικά ότι $u_i = 2 \cdot 10^4$ m/s και $u_f = 6 \cdot 10^6$ m/s, και ότι $x_f - x_i = 1.5 \cdot 10^{-2}$ m. Δε γνωρίζουμε την επιτάχυνση αρχικά (μας ζητείται στη συνέχεια), οπότε θα χρειαστούμε έναν τύπο με ταχύτητες και θέσεις μόνο.

(α') Από τις εξισώσεις της επιταχυνόμενης κίνησης επιλέγουμε

$$x_f = x_i + 0.5(u_f + u_i)t \quad (2.602)$$

$$t = \frac{2(x_f - x_i)}{u_f - u_i} \quad (2.603)$$

$$= 0.00498 \cdot 10^{-6} \approx 5 \cdot 10^{-9} \text{ s} \quad (2.604)$$

(β') Επιλέγουμε από το τυπολόγιό μας τη σχέση

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a_x(x_f - x_i) \quad (2.605)$$

αφού έχει το ζητούμενο άγνωστο (επιτάχυνση) και όλα τα άλλα στοιχεία είναι γνωστά.

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a_x(x_f - x_i) \quad (2.606)$$

$$a_x = \frac{u_f^2 - u_i^2}{2(x_f - x_i)} \approx 1.2 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2 \quad (2.607)$$

Εναλλακτικά,

$$x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2.608)$$

$$a_x = 2 \frac{x_f - x_i - u_{x_i}t}{t^2} \quad (2.609)$$

$$\approx 1.2 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2 \quad (2.610)$$

Παράδειγμα 2.56:

Οδηγείτε με το αμάξι σας στον ΒΟΑΚ (Βόρειος Οδικός Άξονας Κρήτης) κι ενώ το όριο είναι 90 km/h εσείς τρέχετε σταθερά με 137 km/h (πράγμα που δεν πρέπει να κάνετε ΠΟΤΕ!). Τα φρενά του αυτοκινήτου σας μπορούν να σας επιβραδύνουν με ρυθμό 5.2 m/s^2 .

(α') Αν ξαφνικά δείτε έναν τροχονόμο, ποιός είναι ο χρόνος που μπορείτε να θέσετε την ταχύτητα του αμαξιού σας στο όριο των 90 km/h; Η απάντηση θα σας αποκαλύψει τη ματαιότητα του φρεναρίσματος για να μη σας πιάσει το ραντάρ της τροχαίας, όταν βλέπετε τη σχετική σίμανση.

(β') Σχεδιάστε τα γραφήματα $x(t)$ ως προς t και $u(t)$ ως προς t για όσο διάστημα απαιτείται μέχρι να πιάσετε το όριο (υποθέστε ότι στο $t = 0$ έχετε ταχύτητα 137 km/h και ότι $x_{t=0} = 0$).

Λύση:

(α') Θεωρούμε $t_i = 0$ και $x_i = 0$ τη στιγμή που βλέπουμε τον τροχονόμο και μόλις ξεκινάμε να επιβραδύνουμε το αυτοκίνητο. Το όριο των 90 km/h αντιστοιχεί σε 25 m/s. Η κίνησή μας είναι ευθύγραμμη

επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση $a_x = -5.2 \text{ m/s}^2$. Θεωρούμε $u_i = 38.05 \text{ m/s}$ όταν $t_i = 0$ και $u_f = 25 \text{ m/s}$ μετά από χρόνο t . Θα είναι

$$u_f = u_i + a_x t \implies t = \frac{u_f - u_i}{a_x} = \frac{25 - 38.05}{-5.2} = 2.51 \text{ s} \quad (2.611)$$

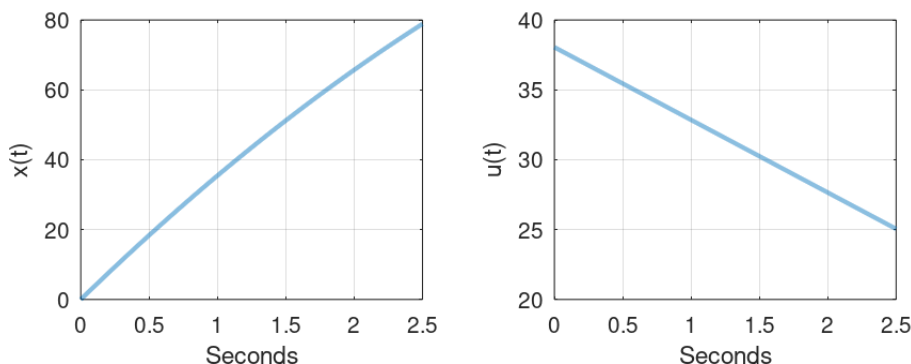
Άρα θα έχουν περάσει 2.51 δευτερόλεπτα μέχρι να κατέβετε στο όριο της ταχύτητας, διάστημα στο ποίο θα έχετε ήδη διατρέξει περίπου 80 μέτρα. Μάταιος κόπος, το ραντάρ θα σας έχει ήδη πιάσει.
(β') Η θέση $x(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = x_i + u_{x_i} t - \frac{1}{2} a_x t^2 = 0 + 38.05t - 2.6t^2 = -2.6t^2 + 38.05t \quad (2.612)$$

και η ταχύτητα ως

$$u(t) = \frac{d}{dt} x(t) = -5.2t + 38.05 \quad (2.613)$$

Τα γραφήματα φαίνονται στο Σχήμα 2.86.



Σχήμα 2.86: Σχήμα Άσκησης 2.56.

Παράδειγμα 2.57:

Ένα αυτοκίνητο που ταξιδεύει με ταχύτητα 30 m/s χρειάζεται το λιγότερο 60 m για να σταματήσει, συμπεριλαμβανομένης της απόστασης που διανύει μέχρι να αντιδράσει ο οδηγός (πατήσει φρένο). Ο οδηγός αντιδρά κατά μέσο όρο σε 0.5 s .

- (α') Ποιά είναι η ελάχιστη απόσταση που χρειάζεται το ίδιο αυτοκίνητο για να σταματήσει αν τρέχει με 40 m/s ;
(β') Σχεδιάστε ένα γράφημα θέσης - χρόνου για την κίνηση του αυτοκινήτου του παραπάνω ερωτήματος. Υποθέστε ότι το αυτοκίνητο βρίσκεται σε αρχική θέση $x_0 = 0 \text{ m}$ όταν ο οδηγός αντιλαμβάνεται ότι πρέπει να φρενάρει.

Λύση:

- (α') Το πρόβλημα είναι διττό: αρχικά, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την πληροφορία που δίνεται για να βρούμε την επιτάχυνση κατά το φρενάρισμα. Δεύτερον, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την επιτάχυνση για να βρούμε την απόσταση που απαιτείται για να σταματήσει, δεδομένης της διαφορετικής αρχικής ταχύτητας. Αρχικά, το αυτοκίνητο προχωρά με σταθερή ταχύτητα πριν φρενάρει:

$$x_f = x_i + u_i t = u_i t = 15 \text{ m} \quad (2.614)$$

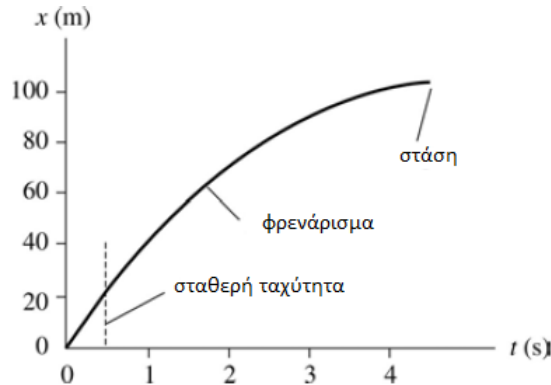
Τότε, το αυτοκίνητο φρενάρει. Επειδή δεν ξέρουμε το χρονικό διάστημα που απαιτείται, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a_x \Delta x \implies a_x = -\frac{u_i^2}{2\Delta x} = -10 \text{ m/s}^2 \quad (2.615)$$

Χρησιμοποιήσαμε $u_i = 30$ m/s. Προσέξτε το αρνητικό πρόσημο, επειδή το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει προς τα αριστερά. Επαναλαμβάνουμε τώρα με $u_i = 40$ m/s. Η απόσταση μέχρι το φρενάρισμα είναι

$$x_f = u_i t = 20 \text{ m} \quad (2.616)$$

Η θέση x_f μετά το φρενάρισμα είναι



Σχήμα 2.87: Διάγραμμα Άσκησης 2.57.

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a_x \Delta x \Rightarrow \Delta x = -\frac{40^2}{2(-10)} = 80 \text{ m} \quad (2.617)$$

Άρα

$$\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow x_2 = 80 + 20 = 100 \text{ m} \quad (2.618)$$

(β') Το αυτοκίνητο διανύει με σταθερή ταχύτητα τα πρώτα 0.5 s, ταξιδεύοντας για 20 m. Το διάγραμμα θα είναι μια ευθεία γραμμή με κλίση 40 m/s. Για $t \geq 0.5$, το διάγραμμα θα είναι μια παραβολή, μέχρι το σημείο που το αυτοκίνητο σταματά (χρονική στιγμή t_f). Μπορούμε να βρούμε αυτή τη στιγμή ως

$$u_f = u_i + a_x(t_f - t_i) \Rightarrow t_f = t_i = \frac{u_i}{a_x} = 4.5 \text{ s} \quad (2.619)$$

Η παραβολή θα έχει μηδενική κλίση $u = 0$ σε χρόνο $t = 4.5$ s. Το διάγραμμα φαίνεται στο Σχήμα 2.87.

Παράδειγμα 2.58:

Ένας φοιτητής Φυσικής πειραματίζεται σε ένα θάλαμο μειωμένης βαρύτητας. Ο φοιτητής πετά μια μπάλα η οποία ακολουθεί την παραβολική τροχιά του Σχήματος 2.88(α). Η θέση της μπάλας στο σχήμα φαίνεται ανά διαστήματα ενός δευτερολέπτου, από $t = 1$ ως $t = 3$ s. Τη χρονική στιγμή $t = 1$ s, η ταχύτητα της μπάλας δίνεται από τη σχέση

$$\vec{v} = (2.0 \text{ m/s})\vec{i} + (2.0 \text{ m/s})\vec{j} \quad (2.620)$$

(α') Υπολογίστε το διάνυσμα της ταχύτητας τις χρονικές στιγμές $t = 0$, $t = 2$ και $t = 3$ s.

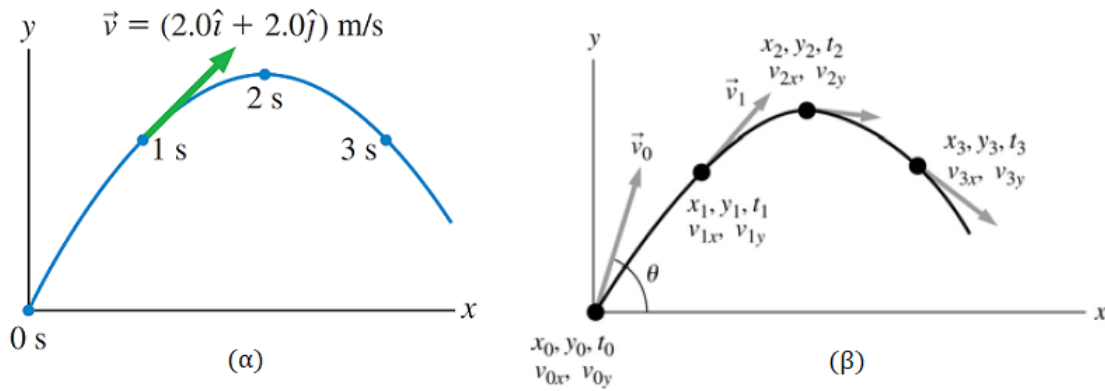
(β') Ποιά είναι η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας στο θάλαμο;

(γ') Ποιά ήταν η αρχική γωνία ρίψης της μπάλας;

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 2.88(β).

(α') Ξέρουμε το διάνυσμα ταχύτητας της μπάλας όταν $t = 1$ s. Η μπάλα στο ψηλότερό της σημείο βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = 2$ s. Εκεί λοιπόν πρέπει $u_y = 0$. Η οριζόντια ταχύτητα είναι σταθερή



Σχήμα 2.88: Σχήμα Άσκησης 2.58.

στη διάρκεια της κίνησης, έτσι $u_x = 2 \text{ m/s}$, για κάθε χρονική στιγμή. Άρα $\vec{u}_2 = (2 \text{ m/s})\vec{i}$, για $t = 2 \text{ s}$. Παρατηρούμε ότι η y -συνιστώσα της ταχύτητας άλλαξε κατά $\Delta u_y = -2 \text{ m/s}$ ανάμεσα στις χρονικές στιγμές $t = 1$ και $t = 2 \text{ s}$. Επειδή η επιτάχυνση στον y -άξονα είναι σταθερή - βαρυτική επιτάχυνση - η u_y αλλάζει κατά -2 m/s σε οποιοδήποτε διάστημα διάρκειας ενός δευτερολέπτου. Τη χρονική στιγμή $t = 3 \text{ s}$, η u_y είναι 2 m/s μικρότερη από τη (μηδενική) τιμή της τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$. Για $t = 0$, η u_y πρέπει να είναι 2 m/s μεγαλύτερη από την τιμή της τη χρονική στιγμή $t = 1 \text{ s}$. Κατά συνέπεια, έχουμε συνολικά:

$$t = 0 : \vec{u}_0 = (2 \text{ m/s})\vec{i} + (4 \text{ m/s})\vec{j} \quad (2.621)$$

$$t = 1 : \vec{u}_1 = (2 \text{ m/s})\vec{i} + (2 \text{ m/s})\vec{j} \quad (2.622)$$

$$t = 2 : \vec{u}_2 = (2 \text{ m/s})\vec{i} + (0 \text{ m/s})\vec{j} \quad (2.623)$$

$$t = 3 : \vec{u}_3 = (2 \text{ m/s})\vec{i} + (-2 \text{ m/s})\vec{j} \quad (2.624)$$

(β') Επειδή η u_y αλλάζει με ρυθμό -2 m/s ανά δευτερόλεπτο, η y -συνιστώσα της επιτάχυνσης πρέπει να είναι $a_y = -2 \text{ m/s}^2$. Όμως η a_y είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στο θάλαμο, άρα η βαρυτική επιτάχυνση του θαλάμου είναι $g = -2 \text{ m/s}^2$.

(γ') Από το πρώτο υποερώτημα, οι συνιστώσες τη χρονική στιγμή $t = 0$ μας δίνουν

$$\theta = \tan^{-1} \frac{u_{0y}}{u_{0x}} = \tan^{-1} 2 \approx 63^\circ \quad (2.625)$$

Παράδειγμα 2.59:

Στους πρόσφατους Ολυμπιακούς Αγώνες, μετρήθηκε η ταχύτητα των sprinters των 100 μέτρων. Ένα απλό μοντέλο ταχύτητας δηλώνει ότι ο sprinter επιταχύνει με 3.6 m/s^2 για $10/3 \text{ s}$, και μετά τρέχει με σταθερή ταχύτητα ως τη γραμμή του τεματισμού.

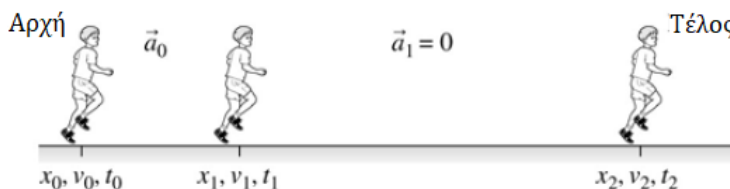
(α') Δείξτε ότι ο χρόνος ενός sprinter των 100 μέτρων που ακολουθεί το παραπάνω μοντέλο είναι 10 s .

(β') Ένας sprinter μπορεί να τρέξει τα 100 μέτρα πιο γρήγορα, αν επιταχύνει περισσότερο στην αρχή ώστε να φτάσει στη μέγιστη ταχύτητά του πιο σύντομα. Δείξτε ότι αν η μέγιστη ταχύτητα ενός sprinter είναι η ίδια που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, η επιτάχυνση που χρειάζεται για να τρέξει τα 100 μέτρα σε 9.9 δευτερόλεπτα ισούται με $a_0 = 3.8 \text{ m/s}^2$.

(γ') Δείξτε ότι το ποσοστό που πρέπει ο sprinter να αυξήσει την επιτάχυνσή του ώστε να μειώσει το χρόνο του κατά 1% είναι 5.6% .

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 2.89 και τις μεταβλητές του.



Σχήμα 2.89: Σχήμα Άσκησης 2.59.

(α') Από τη σχέση σταθερής ταχύτητας για την απόσταση $x_1 \rightarrow x_2$ έχουμε

$$x_2 = x_1 + u_1(t_2 - t_1) \Rightarrow t_2 = \frac{100 - x_1}{u_1} + \frac{10}{3} \quad (2.626)$$

Ας βρούμε τώρα τις ταχύτητες και θέσεις, ως εξής:

$$u_1 = u_0 + a_0(t_1 - t_0) = 0 + 3.6 \frac{10}{3} = 12 \text{ m/s} \quad (2.627)$$

και

$$x_1 = x_0 + u_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t_1 - t_0)^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}3.6 \left(\frac{10}{3}\right)^2 = 20 \text{ m} \quad (2.628)$$

Έτσι, έχουμε

$$t_2 = \frac{100 - 20}{12} + \frac{10}{3} = 10 \text{ s} \quad (2.629)$$

(β') Η μέγιστη ταχύτητα των 12 m/s σημαίνει $u_1 = 12 \text{ m/s}$. Για να βρούμε την επιτάχυνση, έχουμε

$$u_1 = u_0 + a_0(t_2 - t_1) \Rightarrow 12 = 0 + a_0 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{12}{a_0} \quad (2.630)$$

και

$$x_1 = x_0 + u_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t_1 - t_0)^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}a_0 t_1^2 = \frac{1}{2}a_0 t_1^2 \quad (2.631)$$

Αφού

$$x_2 = x_1 + u_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_1(t_2 - t_1)^2 \quad (2.632)$$

έχουμε

$$100 = \frac{1}{2}a_0 t_1^2 + 12(9.9 - t_1) \quad (2.633)$$

Άρα

$$100 = \frac{1}{2}a_0 \left(\frac{12}{a_0}\right)^2 + 12\left(9.9 - \frac{12}{a_0}\right) \Rightarrow a_0 = 3.8 \text{ m/s}^2 \quad (2.634)$$

(γ') Από τα παραπάνω ερωτήματα βλέπουμε ότι η επιτάχυνση πρέπει να αυξηθεί από 3.6 σε 3.8 m/s² ώστε ο χρόνος του αθλητή να μειωθεί από 10 σε 9.9 s. Αυτή η μείωση είναι της τάξης του 1%. Η μείωση του χρόνου κατά 1% αντιστοιχεί σε αύξηση της επιτάχυνσης κατά

$$\frac{3.8 - 3.6}{3.6} \times 100\% = 5.6\% \quad (2.635)$$

Παράδειγμα 2.60:

Ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο για την ταχύτητα του sprinter της προηγούμενης άσκησης δίνεται ως

$$u_x = a(1 - e^{-bt}) \quad (2.636)$$

με t σε δευτερόλεπτα, u_x σε m/s, και οι σταθερές a, b αποτελούν χαρακτηριστικά του κάθε sprinter. Ο γνωστός sprinter Carl Lewis που κέρδισε το Παγκόσμιο Πρωτάθλημα του 1987, μοντελοποιείται με τιμές $a = 11.81$ m/s και $b = 0.6887$ s⁻¹.

- (α') Δείξτε ότι η επιτάχυνση του Lewis τις χρονικές στιγμές $t = 0, t = 2$ και $t = 4$ s ήταν 8.134, 2.052, 0.5175 m/s².
- (β') Βρείτε μια έκφραση για τη θέση του sprinter συναρτήσει του χρόνου t , ολοκληρώνοντας ως προς t τη συνάρτηση ταχύτητας - χρόνου.
- (γ') Αν τα κάνατε όλα σωστά, η έκφραση που βρήκατε στο παραπάνω ερώτημα δεν μπορεί να λυθεί ως προς t . Όμως κάνοντας μερικές δοκιμές, μπορείτε να βρείτε το χρόνο που χρειάστηκε για να τρέξει τα 100 μέτρα. Βρείτε το χρόνο αυτό^α.

^α Ο επίσημος χρόνος ήταν 0.01 δευτερόλεπτα μεγαλύτερος απ' αυτόν που θα βρείτε, πράγμα που δείχνει ότι το μοντέλο είναι καλό αλλά όχι τέλειο.

Λύση:

- (α') Η επιτάχυνση είναι η χρονική παράγωγος της ταχύτητας, δηλ.

$$a_x = \frac{du_x}{dx} = \frac{d}{dx}(a(1 - e^{-bt})) = abe^{-bt} \quad (2.637)$$

Με τις δοθείσες τιμές, έχουμε $a_x = 8.314e^{-0.6887t}$ m/s². Τις χρονικές στιγμές $t = 0, 2, 4$ s, η τιμή της επιτάχυνσης είναι 8.134, 2.052, 0.5175 m/s².

- (β') Αφού $u_x = a - ae^{-bt}$, έχουμε

$$x(t) = \int_0^t (a - ae^{-bu}) du \quad (2.638)$$

$$= at + \frac{a}{b}e^{-bt} - \frac{a}{b} \quad (2.639)$$

$$= \frac{a}{b}(bt + e^{-bt} - 1) \quad (2.640)$$

$$= 17.15(0.6887t + e^{-0.6887t} - 1) \text{ m} \quad (2.641)$$

- (γ') Με δοκιμές, για $t = 9.92$ s, έχουμε $x = 100.0$ m.

Παράδειγμα 2.61:

Ένα πούμα μπορεί να πηδήξει σε ύψος 4 μέτρων όταν φεύγει απ' το έδαφος με γωνία 45 μοιρών. Με τι ταχύτητα φεύγει από το έδαφος, ώστε να κάνει αυτό το άλμα;

Λύση:

Έστω η διαδρομή από το έδαφος ως το μέγιστο ύψος, με $t = 0$ όταν το πούμα βρίσκεται στο έδαφος. Στο μέγιστο ύψος, έχουμε $u_y = 0$, και ο χρόνος για να φτάσει το πούμα αυτό το ύψος δίνεται από

$$u_{yf} = u_{yi} - gt \implies t = \frac{u_{yi}}{g} \quad (2.642)$$

Η κατακόρυφη μετατόπιση που έχει συμβεί σε αυτό το διάστημα είναι

$$\Delta y_{max} = u_{y,avg}t = \frac{u_{yi}^2}{2g} \quad (2.643)$$

Άρα αν $\Delta y_{max} = 4$ m, τότε

$$u_{yi} = \sqrt{2g\Delta y_{max}} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 4} = 8.85 \text{ m/s} \quad (2.644)$$

οπότε αν η γωνία είναι $\theta = 45^\circ$, η αρχική ταχύτητα είναι

$$u_i = \frac{u_{yi}}{\sin \theta} = 12.5 \text{ m/s} \quad (2.645)$$

Παράδειγμα 2.62:

Σε ένα μπαρ, ένας πελάτης γλιστράει το άδειο ποτήρι μπύρας του στον πάγκο, ο οποίος έχει ύψος h m. Πριν προλάβει να το πιάσει ο μπάρμαν, πέφτει και σκάει στο πάτωμα σε απόσταση d m από τον πάγκο.

(α') Με τι ταχύτητα φεύγει το ποτήρι από τον πάγκο;

(β') Ποιά είναι η κατεύθυνση της ταχύτητάς του όταν φτάνει στο έδαφος;

Λύση:

Αν θεωρήσουμε ως σημείο εκκίνησης μελέτης του προβλήματος ($t_i = 0$, $x_i = y_i = 0$) το σημείο όπου το ποτήρι “αφήνει” τον πάγκο, οι συντεταγμένες του ποτηριού για κάθε χρονική στιγμή t είναι

$$x_f = x_i + u_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow x_f = u_{xi}t \quad (2.646)$$

αφού $x_i = 0$ και $a_x = 0$, και

$$y_f = y_i + u_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow y_f = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (2.647)$$

αφού $y_i = 0$ και $u_{yi} = 0$.

(α') Όταν το ποτήρι φτάνει στο πάτωμα, $y_f = -h$ και $x_f = d$, έτσι

$$-h = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2.648)$$

είναι ο χρόνος της σύγκρουσης, ενώ

$$x_f = u_{xi}t \Rightarrow u_{xi} = \frac{d}{t} = d \sqrt{\frac{g}{2h}} \quad (2.649)$$

είναι η ταχύτητα που φεύγει το ποτήρι από τον πάγκο.

(β') Ακριβώς πριν τη σύγκρουση, η x -συνιστώσα της ταχύτητας είναι ίση με $u_{xf} = u_{xi}$ ενώ η y -συνιστώσα της είναι

$$u_{yf} = u_{yi} + at \Rightarrow u_{yf} = -\sqrt{2gh} \quad (2.650)$$

Έπειτα, η κατεύθυνση της κίνησης πριν ακριβώς τη σύγκρουση είναι υπό γωνία

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{u_{yf}}{u_{xf}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-\sqrt{2gh}}{d \sqrt{\frac{g}{2h}}} \right) \quad (2.651)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{-2h}{d} \right) \quad (2.652)$$

$$= -\tan^{-1} \left(\frac{2h}{d} \right) \quad (2.653)$$

κάτω από το οριζόντιο άξονα.

Παράδειγμα 2.63:

Γνωρίζετε ότι πολύ πολύ μικρά σωματίδια ή οργανισμοί, όπως οι ιοί, είναι αόρατοι στο ανθρώπινο μάτι, ακόμα και με τη χρήση ενός κοινού μικροσκοπίου. Το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο μπορεί να καταστήσει ορατούς τέτοιους οργανισμούς, χρησιμοποιώντας ακτίνες ηλεκτρονίων αντί για ακτίνες φωτός. Οι “φακοί” ενός ηλεκτρονικού μικροσκοπίου αποτελούνται από ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία που ελέγχουν την ακτίνα ηλεκτρονίων. Ως παράδειγμα μιας τέτοιας εφαρμογής, θεωρήστε ένα ηλεκτρόνιο που ταξιδεύει προς την αρχή ενός συστήματος αναφοράς και με κατεύθυνση επάνω στον x -άξονα (αλλά σκεφτείτε το ως κίνηση σε επίπεδο xy) με αρχική ταχύτητα

$$\vec{v}_i = u_i \vec{i} \quad (2.654)$$

Όταν περνάει από την περιοχή του x -άξονα που ξεκινάει από το $x = 0$ (οπότε και θεωρούμε ότι αρχίζουμε να μελετάμε το πρόβλημα) ως το $x = d$, το ηλεκτρόνιο υφίσταται επιτάχυνση

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \quad (2.655)$$

όπου a_x και a_y είναι σταθερές. Θεωρώντας

$$u_i = 1.8 \cdot 10^7 \text{ m/s} \quad (2.656)$$

$$a_x = 8 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2 \quad (2.657)$$

$$a_y = 1.6 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2 \quad (2.658)$$

για τη θέση $x = d = 0.01 \text{ m}$, βρείτε τα παρακάτω:

- (α') Την θέση στο xy επίπεδο του ηλεκτρονίου
- (β') Την ταχύτητα του ηλεκτρονίου σε μορφή διανύσματος
- (γ') Το μέτρο της ταχύτητας του ηλεκτρονίου
- (δ') Την κατεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας του ηλεκτρονίου (δηλ. τη γωνία που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα x).

Λύση:

(α') Για τη x -συνιστώσα της κίνησης, θα έχουμε

$$x_f = x_i + u_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2.659)$$

και αντικαθιστώντας, έχουμε

$$0.01 = 0 + 1.8 \cdot 10^7 t + \frac{1}{2} 8 \cdot 10^{14} t^2 \quad (2.660)$$

$$t = \frac{-1.8 \cdot 10^7 \pm 1.844 \cdot 10^7}{8 \cdot 10^{14}} \text{ s} \quad (2.661)$$

Επιλέγοντας το θετικό χρόνο, έχουμε

$$t = 5.5 \cdot 10^{-10} \text{ s} \quad (2.662)$$

Για την y -συνιστώσα της κίνησης, έχουμε

$$y_f = y_i + u_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (2.663)$$

και άρα

$$y_f = 0 + 0 + \frac{1}{2} 1.6 \cdot 10^{15} \cdot (5.5 \cdot 10^{-10})^2 \text{ m} \quad (2.664)$$

$$= 2.42 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (2.665)$$

Άρα τελικά η θέση του ηλεκτρονίου στο xy επίπεδο δίνεται από το διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}_f = (10 \text{ mm})\vec{i} + (0.242 \text{ mm})\vec{j} \quad (2.666)$$

(β') Θα είναι

$$\vec{u}_f = \vec{u}_i + \vec{a}t \quad (2.667)$$

$$= 1.8 \cdot 10^7 \vec{i} + (8 \cdot 10^{14} \vec{i} + 1.6 \cdot 10^{15} \vec{j})(5.5 \cdot 10^{-10}) \quad (2.668)$$

$$= 1.84 \cdot 10^7 \vec{i} + 8.8 \cdot 10^5 \vec{j} \quad (2.669)$$

(γ') θα είναι

$$|u_f| = \sqrt{(1.84 \cdot 10^7)^2 + (8.8 \cdot 10^5)^2} = 1.84 \cdot 10^7 \text{ m/s} \quad (2.670)$$

(δ') Θα είναι

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{u_y}{u_x} \right) = 2.73^\circ \quad (2.671)$$

Παράδειγμα 2.64:

Ένα σωματίδιο κινείται στον x -άξονα. Η θέση του δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = 5 + 3t - 6t^2 \quad (2.672)$$

όπου t είναι σε δευτερόλεπτα (s) και $x(t)$ σε μέτρα (m).

(α') Τι είδους κίνηση εκτελεί; Δικαιολογήστε. Αναγνωρίστε τις παραμέτρους της κίνησης.

(β') Βρείτε τη θέση του όταν αλλάζει κατεύθυνση.

(γ') Βρείτε την ταχύτητά του όταν επιστρέφει στη θέση που είχε όταν $t = 0$.

Λύση:

(α') Γνωρίζοντας τη σχέση

$$x_f = x_i + u_i t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (2.673)$$

και ότι αντιστοιχεί σε επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση, αναγνωρίζουμε ότι η κίνηση είναι επιταχυνόμενη στον άξονα x με σταθερή επιτάχυνση.

(β') Η εξίσωση της στιγμιαίας ταχύτητας είναι

$$u(t) = \frac{d}{dt} x(t) = 3 - 12t \quad (2.674)$$

Αλλαγή κατεύθυνσης συμβαίνει όταν $u(t) = 0$ για κάποιο t , η οποία συμβαίνει όταν $t = 1/4$ s. Άρα η θέση του τη δεδομένη χρονική στιγμή θα είναι

$$x(t) = 5 + 3t - 6t^2 \Big|_{t=1/4} = 5.375 \text{ m} \quad (2.675)$$

(γ') Από τη σχέση

$$x_f = x_i + u_i t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (2.676)$$

παρατηρούμε ότι όταν $x_f = x_i$, τότε $t = -\frac{2u_i}{a}$. Άρα, όταν επιστρέφει στην αρχική του θέση, ο χρόνος είναι

$$t = -\frac{2 \times 3}{-12} = \frac{1}{2} \text{ s} \quad (2.677)$$

και η ταχύτητά του τότε είναι

$$u = 3 - 12\frac{1}{2} = -3 \text{ m/s} \quad (2.678)$$

με το πρόσημο να δηλώνει φορά.

Παράδειγμα 2.65:

- (α') Με πόση ταχύτητα πρέπει να πετάξουμε μια μπάλα κατακόρυφα προς τα πάνω ώστε για φτάσει σε ένα μέγιστο ύψος 50 μέτρων από το έδαφος;
 (β') Πόσο χρόνο θα βρίσκεται στον αέρα μέχρι να επιστρέψει στο χέρι μας;
 (γ') Με πόση ταχύτητα πρέπει να πετάξουμε ένα ψυγείο (!) κατακόρυφα προς τα πάνω ώστε να φτάσει σε ένα μέγιστο ύψος 50 μέτρων από το έδαφος; Πόσο διαφέρει η απάντησή σας σε σχέση με το (α) ερώτημα;

Λύση:

- (α') Έχουμε κατακόρυφη κίνηση προς τα πάνω, με $u_f = 0$ στο μέγιστο ύψος των $y_f = 50$ μέτρων και $u_i, y_i = 0$ στη θέση εκτόξευσης. Θεωρούμε θετική φορά της κίνησης προς τα πάνω. Η κίνηση είναι επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση $a_y = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$. Οπότε στη διαδρομή από το έδαφος ως το μέγιστο ύψος θα έχουμε

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a_y\Delta y \iff u_i^2 = u_f^2 + 2g(y_f - y_i) = 0 + 50 \cdot 19.6 = 980 \implies u_i = \pm 31.305 \text{ m/s} \quad (2.679)$$

Επιλέγουμε το θετικό πρόσημο, καθώς η μπάλα κινείται προς τα πάνω (όμοια με τη θετική φορά της κίνησης).

- (β') Έστω αρχικό σημείο η θέση εκτόξευσης και τελικό σημείο ξανά το ίδιο, κατά την επιστροφή της μπάλας. Η ταχύτητα θα είναι ίδια κατά μέτρο στην αρχική και στην τελική θέση αλλά με αντίθετο πρόσημο (λόγω της φοράς του διανύσματος της ταχύτητας). Ο χρόνος δίνεται από τη σχέση

$$u_f = u_i - gt \iff -31.305 = 31.305 - 9.8t \implies t = 6.387 \text{ s} \quad (2.680)$$

- (γ') Η απάντηση είναι ίδια: $u_i = 31.305 \text{ m/s}$. Δεν έχει σημασία η μάζα του αντικειμένου.

Παράδειγμα 2.66:

Ένας ικανός μπασκετμπολίστας του NBA μπορεί να πηδήξει κατακόρυφα προς τα πάνω απόσταση 0.76 m καθώς αρπάζει την μπάλα μετά από ένα άστοχο σουτ. Πόσο *συνολικό* (στην άνοδο και κάθοδο του σώματος του) χρόνο περνά

(α') στα άνω 0.15 m του άλματός του

(β') στα κάτω 0.15 m του άλματός του

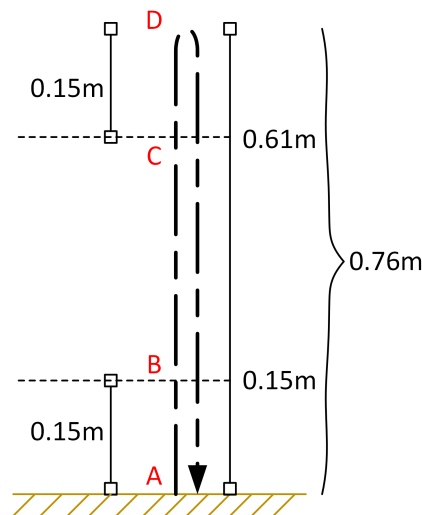
Οι απαντήσεις σας εξηγούν το λόγο που κάποιοι αθλητές φαίνεται να “στέκονται στον αέρα” όταν πηδούν; Ο Michael Jordan θρυλείται ότι είχε επιτόπιο άλμα 1.168 m. Βρείτε τους αντίστοιχους χρόνους του.

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 2.90. Θα μελετήσουμε την άνοδο του παίκτη μόνο, και θα διπλασιάσουμε απλά το χρόνο στο αποτέλεσμά μας, αφού η κίνηση της ανόδου και της καθόδου είναι χρονικά ίδιες. Επιλέγουμε θετική φορά της κίνησης προς τα πάνω. Η κίνηση είναι ευθύγραμμη επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση $a_y = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$.

- (α') Θεωρούμε τη διαδρομή από το σημείο C ($t_C = 0$) στο σημείο D της ανόδου του παίκτη. Θα είναι

$$u_D = u_C - gt \iff 0 = u_C - 9.8t \implies u_C = 9.8t \quad (2.681)$$



Σχήμα 2.90: Σχήμα Άσκησης 2.66.

και

$$y_D = y_C + u_C t - \frac{1}{2} g t^2 \iff 0.76 = 0.61 + 9.8 t^2 - 4.9 t^2 \iff 0.15 = 4.9 t^2 \implies t = 0.175 \text{ s} \quad (2.682)$$

Άρα ο χρόνος που περνά στα άνω 0.15 m του άλματος είναι $t = 2 \cdot 0.175 = 0.35 = 350 \text{ ms}$.

(β') Θεωρούμε τη διαδρομή από το σημείο B στο σημείο D. Θα είναι

$$u_D^2 = u_B^2 - 2g\Delta y \iff 0 = u_B^2 - 19.6 \cdot (0.76 - 0.15) \iff u_B^2 = 11.956 \implies u_B = 3.457 \text{ m/s} \quad (2.683)$$

επιλέγοντας το θετικό πρόσημο της λύσης γιατί το διάνυσμα της ταχύτητας έχει φορά προς τη θετική φορά της κίνησης (προς τα πάνω). Επίσης, στη διαδρομή από το σημείο A στο σημείο B, έχουμε

$$u_B^2 = u_A^2 - 2g\Delta y \iff 11.956 = u_A^2 - 19.6 \cdot 0.15 \iff u_A^2 = 14.896 \implies u_A = 3.859 \text{ m/s} \quad (2.684)$$

Οπότε, στην ίδια διαδρομή

$$u_B = u_A - g t \implies t = \frac{u_A - u_B}{g} = 0.041 = 41 \text{ ms} \quad (2.685)$$

και άρα ο χρόνος που περνά στα κάτω 0.15 m του άλματός του είναι $t = 2 \cdot 41 = 82 \text{ ms}$.

Οι απαντήσεις πράγματι εξηγούν τη “στάση” στον αέρα των αθλητών, αφού δείξαμε ότι στο άνω μέρος του άλματός τους περνούν περισσότερο χρόνο απ’ό,τι στο κάτω. Ο Michael Jordan έχει χρόνους $t_{up} = 350 \text{ ms}$ και $t_{down} = 64 \text{ ms}$, αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία για $y_D = 1.168 \text{ m}$.

Παράδειγμα 2.67:

Στη διάρκεια ενός σεργίς με άλμα, μια βολεμπολίστρια χτυπά την μπάλα πάνω από το φιλέ ώστε να φτάσει στο έδαφος της αντίπαλης ομάδας. Ο έλεγχος της γωνίας που η παίκτρια χτυπά την μπάλα είναι πολύ δύσκολος. Θεωρήστε ότι η παίκτρια χτυπά μια μπάλα από ύψος 2.3 m με αρχική ταχύτητα μέτρου 20 m/s και υπό γωνία -18° . Πόσο μακριά από την παίκτρια θα χτυπήσει η μπάλα στο έδαφος; Αν η γωνία χτυπήματος γίνει -8° , η μπάλα θα φτάσει μακρύτερα ή πιο κοντά σε σχέση με την προηγούμενη γωνία;

Λύση:

Θεωρούμε αρχή των αξόνων μας τη θέση όπου η μπάλα φεύγει από το χέρι της παίκτριας. Έστω O το σημείο αυτό, και A το σημείο που η μπάλα σκάει στο έδαφος μετά το κτύπημα. Γνωρίζουμε την πολική μορφή της αρχικής ταχύτητας $\vec{u}_O$, οπότε μπορούμε να βρούμε τις συνιστώσες της. Θα είναι

$$u_{O_x} = u_O \cos(-18^\circ) = 19.021 \text{ m/s} \quad (2.686)$$

και

$$u_{O_y} = u_O \sin(-18^\circ) = -6.180 \text{ m/s} \quad (2.687)$$

Η κίνηση της μπάλας είναι ευθύγραμμη με σταθερή ταχύτητα u_{O_x} στον άξονα $x'x$ και ευθύγραμμη με σταθερή επιτάχυνση $a_y = -g$ στον άξονα $y'y$. Οπότε στον άξονα $x'x$ θα έχουμε

$$x_A = x_O + u_{O_x}t \iff x_A = 0 + 19.021t = 19.021t \quad (2.688)$$

Πρέπει να βρούμε το χρόνο “πτήσης” της μπάλας. Στον άξονα $y'y$ θα έχουμε

$$y_A = y_O + u_{O_y}t - \frac{1}{2}gt^2 \iff -2.3 = 0 - 6.18t - 4.9t^2 \quad (2.689)$$

Λύνοντας, παίρνουμε $t = 0.30 \text{ s}$. Άρα

$$x_A = 19.021t \Big|_{t=0.3} = 5.715 \text{ m} \quad (2.690)$$

Για γωνία -8° , επαναλαμβάνοντας παίρνουμε

$$x_A = 19.805t, \quad t = 0.4576 \quad (2.691)$$

οπότε $x_A = 9.062 \text{ m}$. Η μπάλα θα φτάσει πιο μακριά, όπως επιβεβαιώνεται και από τη διαίσθησή μας.

Παράδειγμα 2.68:

Μια αρχιτέκτονας σχεδιάζει ένα τεχνητό καταρράκτη για ένα πάρκο της πόλης. Το νερό φεύγει με ταχύτητα $u_{x_i} = 1.7 \text{ m/s}$ από ένα οριζόντιο κανάλι στο τέλος ενός τοίχου με ύψος $h = 2.35 \text{ m}$ και πέφτει σε μια πισίνα.

- (α') Υπάρχει αρκετός χώρος για να φτιαχτεί πεζοδρόμιο πίσω από τον καταρράκτη μεταξύ τοίχου και πισίνας; Θεωρήστε ως μέσο πλάτος πεζοδρομίου τα 0.8 m .
- (β') Πριν την κατασκευή του έργου, η αρχιτέκτονας θέλει να φτιάξει ένα μοντέλο που έχει μέγεθος το $1/12$ του πραγματικού. Πόσο γρήγορα πρέπει να ρέει το νερό στο οριζόντιο κανάλι του μοντέλου;

Λύση:

- (α') Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων στην επιφάνεια του νερού της πισίνας. Η σταγόνα κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα. Όταν φτάνει στην έξοδο του καναλιού πέφτει με οριζόντια ταχύτητα ώπου φτάνει στην πισίνα. Η κίνηση μιας σταγόνας νερού μπορεί να αναλυθεί σε δυο άξονες. Στον άξονα $y'y$, ο “χρόνος πτήσης” μιας σταγόνας νερού του καταρράκτη από την έξοδο του καναλιού ως το σημείο που ακουμπά την πισίνα είναι

$$y_f = y_i + u_{y_i}t + \frac{1}{2}a_yt^2 \implies 0 = y_i - \frac{1}{2}gt^2 \implies t = \sqrt{\frac{2y_i}{g}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.693 \text{ s} \quad (2.692)$$

Στον άξονα $x'x$, η σταγόνα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα. Έτσι το οριζόντιο εύρος του καταρράκτη είναι

$$x_f = x_i + u_{x_i}t = 1.18 \text{ m} \quad (2.693)$$

Άρα υπάρχει χώρος για τους πεζούς.

(β') Όλες οι αποστάσεις είναι το $1/12$ των πραγματικών. Άρα τώρα για να βρούμε το χρόνο πτήσης, θα έχουμε ξανά τις ίδιες εξισώσεις. Οπότε

$$y_{f_{model}} = y_{i_{model}} + u_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow 0 = y_{i_{model}} - \frac{1}{2}g t_{model}^2 = \frac{y_i}{12} - \frac{1}{2}g t^2 \Rightarrow t_{model} = \sqrt{\frac{y_i}{6g}} \quad (2.694)$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$t_{model} = \sqrt{\frac{2y_i}{12g}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{2y_i}{g}} = \frac{t}{\sqrt{12}} \quad (2.695)$$

με t το χρόνο του πραγματικού καταρράκτη. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με πριν, έχουμε

$$u_{model} = \frac{x_{model}}{t_{model}} = \frac{\frac{x_i}{12}}{\frac{t}{\sqrt{12}}} = \frac{u_i}{\sqrt{12}} = 0.488 \text{ m/s} \quad (2.696)$$

Παράδειγμα 2.69:

Ένα αγόρι στέκεται στην εξέδρα της πισίνας και πετάει μια πέτρα, με ταχύτητα 4 m/s και γωνία 60° . Το ύψος της εξέδρας από την επιφάνεια του νερού είναι 2.5 m. Αμέσως αφού η πέτρα χτυπήσει την επιφάνεια του νερού, κόβει ταχύτητα στο μισό και συνεχίζει προς την ίδια κατεύθυνση μέσα στο νερό, διατηρώντας σταθερή αυτή την ταχύτητα. Αν το βάθος της πισίνας είναι 3 m, πόσο χρόνο έκανε η πέτρα να φτάσει στον πάτο της πισίνας, από τη στιγμή που ρίφθηκε;

Λύση:

Η κίνηση της πέτρας αναλύεται σε δυο άξονες, έναν οριζόντιο με σταθερή ταχύτητα και έναν κατακόρυφο με επιτάχυνση (της βαρύτητας). Η αρχική y -συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας είναι

$$u_{yi} = u_i \sin \theta = 3.46 \text{ m/s} \quad (2.697)$$

και η y -συνιστώσα της κατακόρυφης κίνησης της πέτρας από το σημείο ρίψης ως το σημείο που ακουμπά το νερό είναι

$$y_f = y_i + u_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = h + u_i \sin \theta t - \frac{1}{2}g t^2 \quad (2.698)$$

που μας δίνει

$$y_f = 2.5 + 3.46t - 4.9t^2 \quad (2.699)$$

Θεωρώντας ότι η επιφάνεια του νερού είναι στη θέση $y_f = 0$, τότε στο νερό

$$4.9t^2 - 3.46t - 2.5 = 0 \quad (2.700)$$

και κρατώντας τη θετική ρίζα, έχουμε $t = 1.15$ s. Η y -συνιστώσα της ταχύτητας της πέτρας όταν φτάνει στο νερό στον παραπάνω χρόνο t είναι

$$u_{yf} = u_{yi} + a_y t = 3.46 - 9.8 \cdot 1.15 = -7.81 \text{ m/s} \quad (2.701)$$

Όταν η πέτρα μπει στο νερό, η ταχύτητά της (και άρα οι συνιστώσες της) μειώνονται στο μισό. Άρα ακριβώς τη στιγμή της εισόδου στο νερό θα είναι

$$u_{yi} = -3.91 \text{ m/s} \quad (2.702)$$

Όσο η πέτρα κινείται στο νερό, η y -συνιστώσα της είναι αυτή της κίνησης υπό σταθερή ταχύτητα, δηλ.

$$y_f = y_i + u_{yi}t = 0 - 3.91t = -3.91t \quad (2.703)$$

Αφού ο πάτος της πισίνας είναι στα $y_f = -3$ m, έχουμε

$$y_f = -3.91t = -3 \Rightarrow t = 0.77 \text{ s} \quad (2.704)$$

Άρα τελικά ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται η πέτρα για να φτάσει στον πάτο είναι

$$t_{total} = 1.15 + 0.77 = 1.92 \text{ s} \quad (2.705)$$

Παράδειγμα 2.70:

Το παγκόσμιο ρεκόρ στη ρίψη ακοντίου είναι 98.48 m, από τον Τσέχο Jan Zelezny, και χρονολογείται από το 1996 (ο πάλαι ποτέ δικός μας πρωταθλητής, Κώστας Γκατσιούδης κατέχει την 6η θέση όλων των εποχών, με ρίψη στα 91.69 m). Θεωρώντας ότι η αρχική γωνία ρίψης είναι 45 μοίρες, και αγνοώντας την αντίσταση του αέρα, βρείτε

(α') την αρχική ταχύτητα του ακοντίου.

(β') το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το ακόντιο βρίσκεται στον αέρα.

Θα άλλαζαν οι παραπάνω απαντήσεις σας αν η αρχική γωνία ρίψης ήταν μεγαλύτερη από 45 μοίρες, αλλά το εύρος ρίψης παρέμενε στα 98.48 m; Εξηγήστε.

Λύση:

(α') Μπορούμε αμέσως να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση του εύρους βολής R και να λύσουμε ως προς u_i , δηλ.

$$u_i = \sqrt{\frac{Rg}{\sin(2\theta_i)}} \approx 31 \text{ m/s} \quad (2.706)$$

(β') Με $u_i = 31 \text{ m/s}$ και $\theta_i = 45^\circ$, ο συνολικός χρόνος πτήσης του ακοντίου είναι

$$y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2 \iff 0 = 0 + u_i \sin(\theta_i)t - \frac{1}{2}gt^2 \implies t = \frac{2u_i \sin(\theta_i)}{g} = 4.47 \text{ s} \quad (2.707)$$

Από τη σχέση $u_i = \sqrt{\frac{Rg}{\sin(2\theta_i)}}$ καταλαβαίνουμε ότι αν η γωνία ρίψης ήταν μεγαλύτερη από 45 μοίρες, η απαιτούμενη αρχική ταχύτητα θα αυξανόταν δεδομένου ότι το εύρος θα παρέμενε ίδιο. Επίσης, από τη σχέση

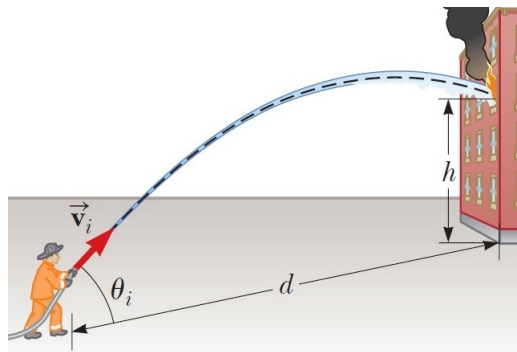
$$t = \frac{2u_i \sin(\theta_i)}{g} \quad (2.708)$$

ο ολικός χρόνος πτήσης του ακοντίου θα αυξανόταν επίσης.

Παράδειγμα 2.71:

Ένας πυροσβέστης βρίσκεται σε απόσταση d από ένα κτήριο που φλέγεται, όπως στο Σχήμα 2.91. Προσπαθεί να ρίξει νερό με τη μάνικα υπό γωνία θ_i με το οριζόντιο επίπεδο, ενώ το διάνυσμα της ταχύτητας του νερού όταν εκτοξεύεται από τη μάνικα είναι $\vec{u}_i$. Δείξτε ότι το ύψος h στο οποίο το νερό χτυπάει το κτήριο είναι

$$h = d \tan(\theta_i) - \frac{gd^2}{2u_i^2 \cos^2(\theta_i)} \quad (2.709)$$



Σχήμα 2.91: Πυρόσβεση.

Λύση:

Αναλύουμε την κίνηση του νερού σε συνιστώσες. Η οριζόντια συνιστώσα της θέσης στη διαδρομή από τη μάνικα ως το κτήριο είναι

$$x_f = u_{x_i} t = u_i \cos(\theta_i) t \quad (2.710)$$

Άρα, ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει το νερό στο κτήριο που απέχει οριζόντια απόσταση d , είναι

$$t = \frac{d}{u_i \cos(\theta_i)} \quad (2.711)$$

Σε αυτή τη χρονική στιγμή, το ύψος του νερού (που χτυπά το κτήριο) είναι

$$y_f = u_{y_i} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = u_i \sin(\theta_i) \left(\frac{d}{u_i \cos(\theta_i)} \right) - \frac{g}{2} \left(\frac{d}{u_i \cos(\theta_i)} \right)^2 \quad (2.712)$$

οπότε το ύψος h του κτηρίου δίνεται ως

$$h = y_f = d \tan(\theta_i) - \frac{gd^2}{2u_i^2 \cos^2(\theta_i)} \quad (2.713)$$

Παράδειγμα 2.72:

Όταν η NASA εκπαιδεύει τους αστροναύτες της και ελέγχει τον εξοπλισμό της σε συνθήκες μηδενικής βαρύτητας, τότε εκτελεί το παρακάτω πείραμα. Ένα αεροπλάνο KC135A πετά σε παραβολική τροχιά, όπως στο Σχήμα 2.92. Το αεροπλάνο ανεβαίνει από τα 7.3 km στα 9.4 km, εκτελώντας παραβολική τροχιά με ταχύτητα μέτρου 143 m/s στην άνοδο, και ταχύτητα ίδιου μέτρου στην κάθοδο. Όταν φτάνει στα 9.4 km, και κατά τη διάρκεια μιας μικρής πορείας, τα αντικείμενα εντός του σκάφους βρίσκονται σε συνθήκες μηδενικής βαρύτητας, και “επιπλέουν” ελεύθερα εντός του σκάφους. Βρείτε

(α') την ταχύτητα και το υψόμετρο του αεροσκάφους στην κορυφή της τροχιάς.

(β') πόσο χρονικό διάστημα βρίσκονται σε συνθήκες μηδενικής βαρύτητας. Θεωρήστε ότι το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό τις χρονικές στιγμές t_1, t_2 , και θεωρήστε ότι το αεροπλάνο εκτελεί βολή σε αυτό το διάστημα.

Για όσους ενδιαφέρονται, δείτε περισσότερα σχετικά στα

https://en.wikipedia.org/wiki/Reduced_gravity_aircraft και

<http://www.nasa.gov/vision/space/preparingtravel/kc135onfinal.html>.

Λύση:

(α') Το αεροσκάφος εκτελεί κίνηση στο xy επίπεδο, η οποία αναλύεται σε συνιστώσες: στην οριζόντια ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα, και στην κατακόρυφη ομαλή κίνηση με σταθερή επιτάχυνση. Η αρχική ταχύτητα αναλύεται σε δυο συνιστώσες:

$$u_{x_i} = u_i \cos(\theta_i) = 143 \cdot \cos(45^\circ) = 101.116 \text{ m/s} \quad (2.714)$$

$$u_{y_i} = u_i \sin(\theta_i) = 143 \cdot \sin(45^\circ) = 101.116 \text{ m/s} \quad (2.715)$$

Η x -συνιστώσα της ταχύτητας στην κορυφή της τροχιάς είναι

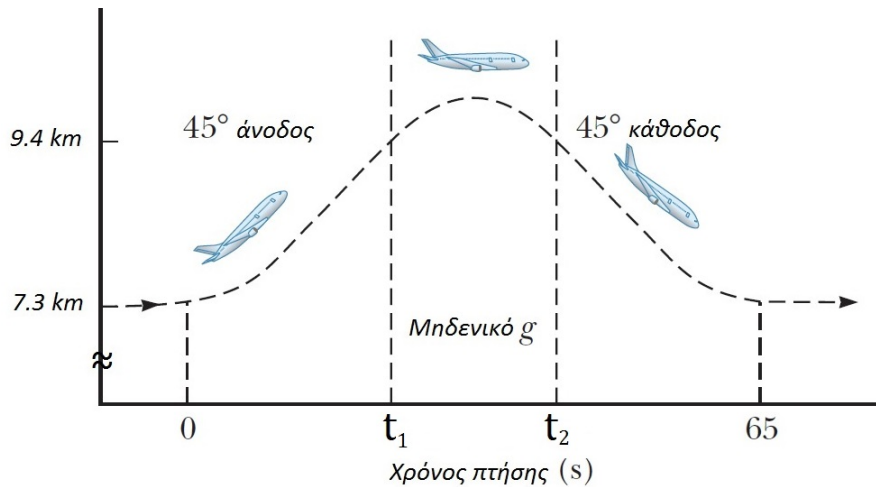
$$u_x = u_{x_i} = 101.116 \text{ m/s} \quad (2.716)$$

εφόσον η y -συνιστώσα της ταχύτητας είναι μηδενική εκεί. Αν δούμε την κίνηση από την έναρξη της ανόδου ως το μέγιστο ύψος, τότε το ύψος που φτάνει είναι

$$u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 + 2a_y(y_f - y_i) \quad (2.717)$$

$$0 = (101.116)^2 + 2(-9.8)(y_f - 9400) \quad (2.718)$$

$$y_f = 9921.65 \text{ m} \quad (2.719)$$



Σχήμα 2.92: Εκπαίδευση σε μηδενική βαρύτητα.

(β') Στο χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$ το αεροσκάφος εκτελεί βολή. Για όλη τη διάρκεια της, είναι

$$u_{yf} = u_{yi} + a_y t = u_{yi} - gt \quad (2.720)$$

και άρα

$$-101.116 = 101.116 - 9.8t \implies t = 20.635 \text{ s} \quad (2.721)$$

Παράδειγμα 2.73:

Ο Ethan Hunt^α οδηγεί το υπερσύγχρονο αυτοκίνητό του μετά από την κλοπή μιας πυρηνικής τεχνολογίας. Τρέχει με ταχύτητα 50 m/s όταν τα φώτα πορείας του αποκαλύπτουν μια λωρίδα με καρφιά που έχει στήσει η αστυνομία μπροστά του σε απόσταση 150 m. Αν ο Ethan καταφέρει και σταματήσει έγκαιρα, μπορεί να βάλει την όπισθεν και να ξεφύγει. Όμως αν περάσει τη λωρίδα καρφιών, τότε όλα του τα ελαστικά θα τρυπήσουν και θα πιαστεί αιχμάλωτος. Ο χρόνος αντίδρασης του Ethan είναι 0.6 s. Αυτό σημαίνει ότι από τη στιγμή που θα δει τη λωρίδα μέχρι να πατήσει τα φρένα του πρέπει να περάσουν 0.6 s. Η μέγιστη επιβράδυνση του αυτοκινήτου του είναι 10 m/s². Θα τον πιάσουν ή όχι;

^α https://en.wikipedia.org/wiki/Ethan_Hunt

Λύση:

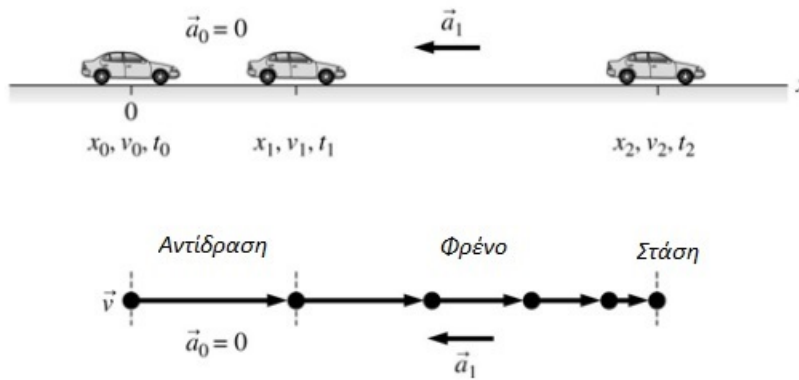
Δείτε το Σχήμα 2.93. Το όχημα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με αρνητική επιτάχυνση. Έστω ότι το σημείο αναφοράς μας βρίσκεται στη θέση που ο Ethan βλέπει τα καρφιά στο οδόστρωμα και έστω x_2 η θέση του αυτοκινήτου όταν έχει σταματήσει. Τέλος, ας θεωρήσουμε ως $\vec{a}_1$ την επιτάχυνσή του κατά το φρενάρισμα. Θα βρούμε το x_2 από την εξίσωση της κινηματικής στη διαδρομή από τη στιγμή που θα πατήσει τα φρένα μέχρι τη στιγμή που θα σταματήσει:

$$u_2^2 = u_1^2 + 2a_1(x_2 - x_1) \iff (0)^2 = (50)^2 + 2(-10)(x_2 - x_1) \iff x_2 = x_1 + 125 \text{ m} \quad (2.722)$$

Δεδομένου ότι το όχημα βρίσκεται 150 m απο την αρχή ($x_0 = 0$), χρειάζεται να καθορίσουμε τη θέση x_1 , όπου είναι η θέση που μόλις ξεκινά να επιβραδύνεται το όχημα. Άρα στη διαδρομή $x_0 \rightarrow x_1$ η κίνηση του οχήματος είναι ευθύγραμμη ομαλή με σταθερή ταχύτητα. Άρα

$$x_1 = x_0 + u_0(t_1 - t_0) = 0 + (50)(0.60 - 0.0) = 30 \text{ m} \quad (2.723)$$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε $x_2 = (30 + 125) = 155 \text{ m}$, πράγμα που σημαίνει ότι ο Ethan δε θα καταφέρει να σταματήσει σε απόσταση 150 m και τελικά θα καταλήξει στην φυλακή!



Σχήμα 2.93: Σχήμα Άσκησης 2.73.

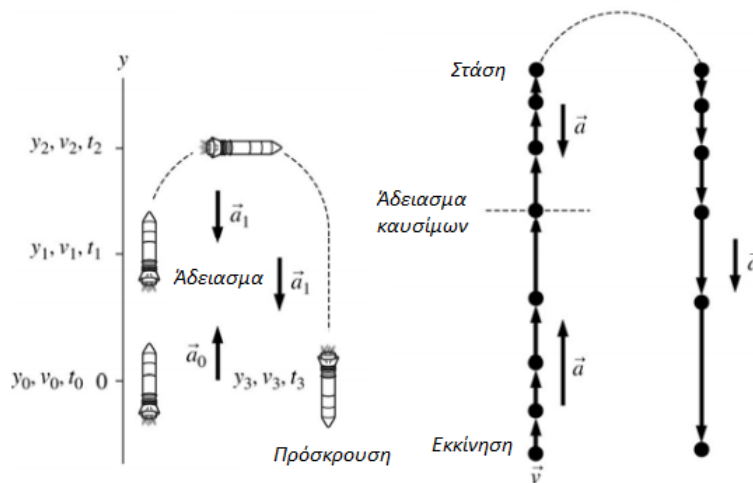
Παράδειγμα 2.74:

Ένας μετεωρολογικός πύραυλος μάζας 200 kg φέρει επιπλέον καύσιμα μάζας 100 kg. Κατά την εκτόξευσή του, επιταχύνει προς τα πάνω με επιτάχυνση 30 m/s^2 για διάστημα 30 δευτερολέπτων, και μετά ξεμένει από καύσιμα. Αγνοήστε τις επιδράσεις του αέρα.

- (α') Ποιό το μέγιστο ύψος που φτάνει ο πύραυλος;
- (β') Πόσο χρόνο μένει ο πύραυλος στον αέρα μέχρι να πέσει στο έδαφος;
- (γ') Κατασκευάστε ένα διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου για τον πύραυλο από την απογείωση ως την πρόσκρουση στο έδαφος.

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 2.94.



Σχήμα 2.94: Σχήμα Άσκησης 2.74.

- (α') Αναγνωρίζουμε 3 διαφορετικές φάσεις στην κίνηση. Η δεύτερη και η τρίτη είναι και οι δύο ελεύθερες πτώσεις, με $a_y = -g$ και μέγιστο ύψος εκτόξευσης y_2 . Στην επιταχυνόμενη κίνηση:

$$y_1 = y_0 + u_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}a(t_1 - t_0)^2 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}(30)(30) = 13.500\text{m} \quad (2.724)$$

$$u_1 = u_0 + a(t_1 - t_0) = at_1 = 30 \cdot 30 = 900 \text{ m/s} \quad (2.725)$$

Στη σταθερή φάση,

$$u_2^2 = 0 = u_1^2 - 2g(y_2 - y_1) \Rightarrow y_2 = y_1 + \frac{u_1^2}{2g} = 13500 + \frac{900^2}{2 \cdot 9.8} = 54800 \text{ m} = 54.8 \text{ km} \quad (2.726)$$

Άρα το μέγιστο υψόμετρο είναι 54.8 m.

(β') Ο πύραυλος είναι στον αέρα μέχρι την χρονική στιγμή t_3 . Γνωρίζουμε ήδη ότι $t_1 = 30$ s, και υπολογίζουμε την t_2 , ως εξής:

$$u_2 = 0 = u_1 - g(t_2 - t_1) \Rightarrow t_2 = t_1 + \frac{u_1}{g} = 122 \text{ s} \quad (2.727)$$

Συνεπώς η χρονική στιγμή t_3 υπολογίζεται ως ο χρόνος που χρειάζεται για να πέσει 54.8 km:



Σχήμα 2.95: Γραφική παράσταση ταχύτητας - χρόνου Άσκησης 2.74.

$$y_3 = 0 = y_2 + u_2(t_3 - t_2) - \frac{1}{2}g(t_3 - t_2)^2 = y_2 - \frac{1}{2}g(t_3 - t_2)^2 \Rightarrow t_3 = t_2 + \sqrt{\frac{2y_2}{g}} = 228 \text{ s} \quad (2.728)$$

(γ') Η ταχύτητα αυξάνεται γραμμικά, με σταθερή επιτάχυνση 30 m/s^2 για 30 s συνεπώς, η μέγιστη ταχύτητα θα είναι 900 m/s . Μετά ξεκινά να μειώνεται με σταθερή επιβράδυνση -9.8 m/s^2 . Η ταχύτητα γίνεται μηδέν όταν $t_2 = 122$ s. Τελικά, την χρονική στιγμή $t_3 = 228$ s η ταχύτητα υπολογίζεται να είναι: $u_3 = u_2 - g(t_3 - t_2) = -1040 \text{ m/s}$. Δείτε το Σχήμα 2.95.

Παράδειγμα 2.75:

Στην αποστολή του Apollo 14^α στο φεγγάρι, ο αστροναύτης Alan Shepart χτυπά μια μπάλα του γκολφ με ένα μπαστούνι. Η επιτάχυνση της ελεύθερης πτώσης στο φεγγάρι είναι το 1/6 της τιμής που έχει στη Γη (9.8 m/s^2). Θεωρήστε ότι χτύπησε την μπάλα με αρχική ταχύτητα 25 m/s και υπό γωνία 30° με το οριζόντιο επίπεδο.

(α') Πόσο μακρύτερα ταξίδεψε η μπάλα στο φεγγάρι απ' ό,τι θα ταξίδευε στη Γη;

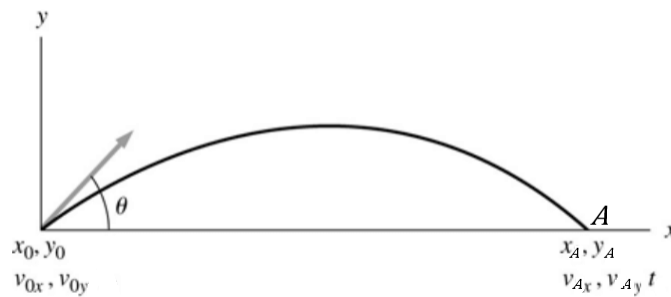
(β') Πόσο περισσότερο χρόνο βρισκόταν η μπάλα στον αέρα στο φεγγάρι απ' ό,τι θα ήταν στη Γη;

^αhttps://en.wikipedia.org/wiki/Apollo_14

Λύση: Δείτε το Σχήμα 2.96.

(α') Η απόσταση που ταξίδεψε είναι $x_A = u_{0x}t = u_0 \cos(\theta)t$. Ο χρόνος της πτήσης υπολογίζεται από την y -εξίσωση, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η μπάλα ξεκινά και τελειώνει την κίνησή της στο $y = 0$:

$$y_A - y_0 = 0 = u_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 = (u_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt)t \Rightarrow t = \frac{2u_0 \sin \theta}{g} \quad (2.729)$$



Σχήμα 2.96: Σχήμα Άσκησης 2.75.

Άρα η απόσταση που διένυσε είναι:

$$x_A = u_0 \cos(\theta) \frac{2u_0 \sin \theta}{g} = \frac{2u_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \quad (2.730)$$

Για $\theta = 30^\circ$, η απόσταση θα είναι:

$$(x_A)_{earth} = \frac{2u_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g_{earth}} = \frac{2 \cdot 25 \cdot \sin 30 \cdot \cos 30}{9.80} = 55.2 \text{ m} \quad (2.731)$$

και

$$(x_A)_{moon} = \frac{2u_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g_{moon}} = \frac{2u_0^2 \sin \theta \cos \theta}{\frac{1}{6}g_{earth}} = 6 \frac{2u_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g_{earth}} = 6(x_A)_{earth} = 331.2 \text{ m} \quad (2.732)$$

Η μπάλα του γκόλφ ταξίδεψε $331.2 - 55.2 = 276 \text{ m}$ μακρύτερα στο φεγγάρι απότι στη γη.

(β') Οι χρόνοι πτήσεις είναι:

$$t_{earth} = \frac{2u_0^2 \sin \theta}{g_{earth}} = \frac{2 \cdot 25 \cdot \sin 30}{9.80} = 2.55 \text{ s} \quad (2.733)$$

και

$$t_{moon} = \frac{2u_0^2 \sin \theta}{g_{moon}} = \frac{2u_0^2 \sin \theta}{\frac{1}{6}g_{earth}} = 6 \frac{2u_0^2 \sin \theta}{g_{earth}} = 6t_{earth} = 15.30 \text{ s} \quad (2.734)$$

Η μπάλα ταξίδεψε για $15.30 - 2.55 = 12.75 \text{ s}$ περισσότερο στο φεγγάρι.

Παράδειγμα 2.76:

Ένας ακοντιστής κρατά το κέντρο του ακοντίου του πίσω από το κεφάλι του, ακριβώς πριν ξεκινήσει τη ρίψη του. Υποθέστε ότι το επιταχύνει για απόσταση 70 cm , καθώς μεταφέρει το κέντρο του από πίσω από το κεφάλι του ως το σημείο που το αφήνει από το χέρι του. Υποθέστε επίσης ότι το ακόντιο εκτοξεύεται από απόσταση 2.0 m από το έδαφος και υπό γωνία 30 μοιρών^α. Έστω ότι το ακόντιο προσγειώνεται 62 m μακριά. Πόση ήταν η (θεωρήστε τη σταθερή) επιτάχυνση του ακοντίου καθ'όλη τη διάρκεια της ρίψης;

^αΟι υψηλού επιπέδου ακοντιστές προσπαθούν να ρίξουν το ακόντιο υπό αυτή τη γωνία και όχι υπό 45° όπως ίσως φαντάζεστε, καθώς η μηχανική του χεριού τους επιτρέπει να ρίξουν το ακόντιο πολύ πιο γρήγορα υπό γωνία 30° απ' όση θα μπορούσαν υπό γωνία 45° .

Λύση:

Η μετατόπιση είναι $\Delta x = 62 \text{ m}$. Η ρίψη του ακοντίου μπορεί να αναλυθεί σε δυο άξονες. Για τον άξονα $x'x$

$$\Delta x = u_{0x} \Delta t = u_0 \cos \theta \Delta t \implies \Delta t = \frac{\Delta x}{u_0 \cos \theta} \quad (2.735)$$

και για τον $y'y$

$$y_f = y_i + (u_0 \sin \theta) \Delta t + \frac{1}{2} a_y (\Delta t)^2 \quad (2.736)$$

και αντικαθιστώντας

$$\Delta y = (u_0 \sin \theta) \frac{\Delta x}{u_0 \cos \theta} + \frac{1}{2} (-g) \left(\frac{\Delta x}{u_0 \cos \theta} \right)^2 \quad (2.737)$$

Λύνοντας ως προς u_0 :

$$\Delta y = (\tan \theta) \Delta x + \frac{1}{2} (-g) \left(\frac{\Delta x}{u_0 \cos \theta} \right)^2 \quad (2.738)$$

$$\frac{1}{2} g \left(\frac{\Delta x}{u_0 \cos \theta} \right)^2 = (\tan \theta) \Delta x - \Delta y \quad (2.739)$$

$$u_0^2 = \frac{g}{2} \left(\frac{\Delta x}{\cos \theta} \right)^2 \left(\frac{1}{(\tan \theta) \Delta x - \Delta y} \right) \quad (2.740)$$

$$u_0 = \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{\Delta x}{\cos \theta} \right)^2 \left(\frac{1}{(\tan \theta) \Delta x - \Delta y} \right)} \quad (2.741)$$

$$= \sqrt{\frac{9.8}{2} \left(\frac{62}{\cos 30^\circ} \right)^2 \left(\frac{1}{(\tan 30^\circ) 62 - (-2)} \right)} \quad (2.742)$$

$$= 25.78 \text{ m/s} \quad (2.743)$$

Αυτή είναι η ταχύτητα όταν το ακόντιο φεύγει από το χέρι του ακοντιστή. Αυτή γίνεται u_f στην προσγείωση του ακοντίου, συνεπώς η σταθερή επιτάχυνση a θα είναι:

$$a = \frac{u_f^2 - u_i^2}{2 \Delta x} = \frac{25.78^2 - 0^2}{2 \cdot 0.70} = 474 \text{ m/s}^2 \quad (2.744)$$

Παράδειγμα 2.77:

Ένας κόκκος σκόνης επάνω στο αγαπημένο σας DVD περιστρέφεται με κεντρομόλο επιτάχυνση 20 m/s^2 .

- (α') Πόση είναι η επιτάχυνση ενός άλλου κόκκου σκόνης που βρίσκεται σε διπλάσια ακτίνα επάνω στο DVD από τον προηγούμενο;
- (β') Πόση θα ήταν η επιτάχυνση του πρώτου κόκκου σκόνης αν η ταχύτητα περιστροφής του δίσκου διπλασιαζόταν;

Λύση:

(α') Η γωνιακή ταχύτητα ω δεν αλλάζει σε αυτή τη κίνηση, άρα:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\omega^2 r_2}{\omega^2 r_1} = 2 \Rightarrow a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 20 = 40 \text{ m/s}^2 \quad (2.745)$$

(β') Έστω a_3 η επιτάχυνση του πρώτου κόκκου σκόνης αν το ω διπλασιαστεί ($\omega_3 = 2\omega_1$). Η απόσταση r από το κέντρο δε θα αλλάξει, άρα:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{\omega_3^2 r}{\omega_1^2 r} = \frac{2\omega_1^2 r}{\omega_1^2 r} = 2^2 = 4 \Rightarrow a_3 = 4a_1 = 4 \cdot 20 = 80 \text{ m/s}^2 \quad (2.746)$$

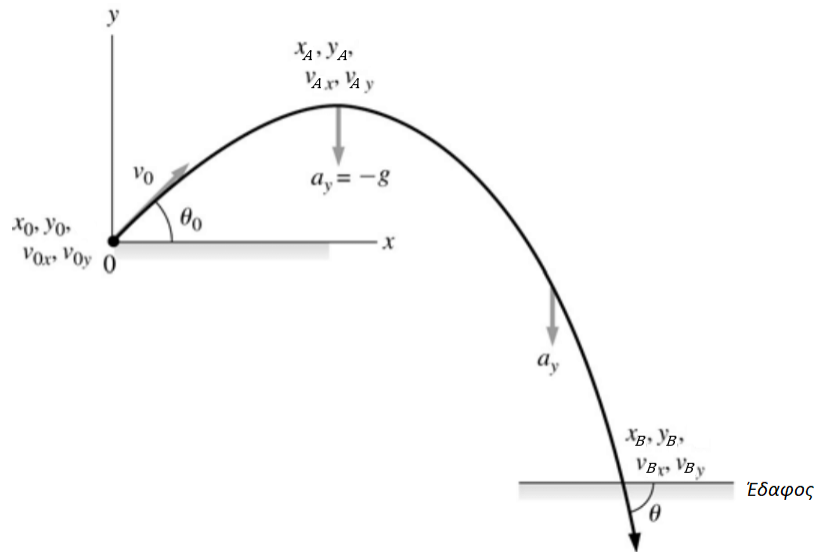
Παράδειγμα 2.78:

Ένα σωματίδιο ρίπεται με αρχική ταχύτητα 30 m/s υπό γωνία 60° με το οριζόντιο επίπεδο. Το σωματίδιο χτυπά στο έδαφος μετά από 7.5 s.

- (α') Πόσο πιο ψηλά ή πιο χαμηλά βρίσκεται το σημείο εκτόξευσης από το σημείο που το σωματίδιο χτύπησε στο έδαφος;
 (β') Ποιό είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει το σωματίδιο, σε σχέση με το σημείο εκτόξευσης;

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 2.97.



Σχήμα 2.97: Σωματίδιο και ρίψη.

- (α') Στη διαδρομή $O \rightarrow B$, το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στον άξονα $y'y$ και ευθύγραμμη ομαλή κίνηση στον άξονα $x'x$. Θέτουμε τη συμβολή των αξόνων στο σημείο ρίψης, με θετικές φορές τις συμβατικές. Άρα

$$y_B = y_0 + u_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.747)$$

$$= 0 + 30 \sin(60^\circ) \cdot 7.5 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot 7.5^2 \quad (2.748)$$

$$= -80.8 \text{ m} \quad (2.749)$$

Άρα το σημείο εκτόξευσης/ρίψης βρίσκεται περίπου 81 m ψηλότερα από το σημείο που το σωματίδιο χτύπησε στο έδαφος.

- (β') Στη διαδρομή $O \rightarrow A$ έχουμε ξανά την ίδια κίνηση, με τη διαφορά ότι $u_{yA} = 0$, οπότε στον άξονα $y'y$ θα ισχύει

$$u_{yA}^2 = u_{0y}^2 - 2g\Delta y \quad (2.750)$$

$$0 = u_{y0}^2 - 2g(y_A - 0) \quad (2.751)$$

$$0 = (30 \sin(60^\circ))^2 - 2(9.8)(y_A) \quad (2.752)$$

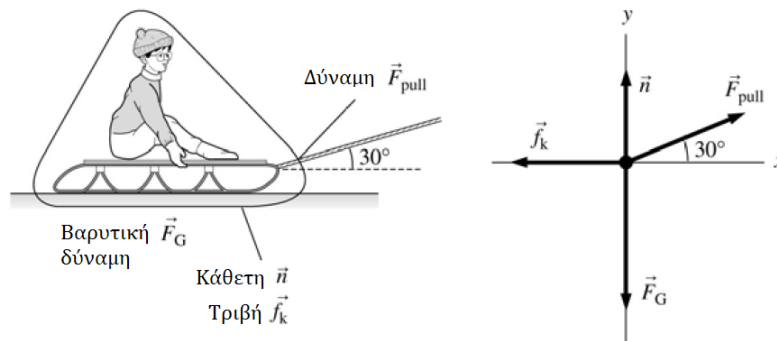
$$y_A = 34.4 \text{ m} \quad (2.753)$$

Παράδειγμα 2.79:

Κατά τη διάρκεια των διακοπών σας στις Άλπεις, ο φίλος σας σας ζητά να τον κάνετε βόλτα με το έλκηθρο σε ένα χιονισμένο, οριζόντιο δρόμο. Μια και οι δυο σας παίρνετε το μάθημα της Φυσικής, σας ρωτά ποιός πιστεύετε ότι είναι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του έλκηθρου και του χιονιού. Εσείς, γνωρίζοντας ότι περπατάτε με *σταθερή* ταχύτητα μέτρου 1.5 m/s, ότι τραβάτε το έλκηθρο υπό γωνία 30° , ότι η μάζα του έλκηθρου και του φίλου σας είναι αθροιστικά 90 kg, και ότι η δύναμη με την οποία τραβάτε το έλκηθρο είναι 75 N, ποιά είναι η απάντηση που πρέπει να του δώσετε;

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 2.98. Η συνολική δύναμη στο έλκηθρο είναι μηδέν, αφού η ταχύτητα είναι σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι η συνιστώσα της δύναμης που τραβά το έλκηθρο στο x -άξονα είναι ίση με το μέτρο της δύναμης τριβής ολίσθησης στον x -άξονα. Προσέξτε επίσης ότι $\sum \vec{F}_y = \vec{0}$, αφού δεν υπάρχει κίνηση στον άξονα y . Από το 1ο νόμο του Newton στους δυο άξονες, και θεωρώντας ως θετικές φορές κίνησης τις



Σχήμα 2.98: Έλκηθρο και δυνάμεις.

συμβατικές, έχουμε

$$\sum \vec{F}_x = \vec{f}_{k_x} + \vec{F}_{\text{pull}_x} = \vec{0} \implies 0 + 0 - f_k + F_{\text{pull}} \cos \theta = 0 \quad (2.754)$$

$$\sum \vec{F}_y = \vec{n} + \vec{F}_{G_y} + \vec{F}_{\text{pull}_y} = \vec{0} \implies n - mg + 0 + F_{\text{pull}} \sin \theta = 0 \quad (2.755)$$

Η πρώτη σχέση γράφεται ως

$$\mu_k n = F_{\text{pull}} \cos \theta \quad (2.756)$$

ενώ η δεύτερη ως

$$n = mg - F_{\text{pull}} \sin \theta \quad (2.757)$$

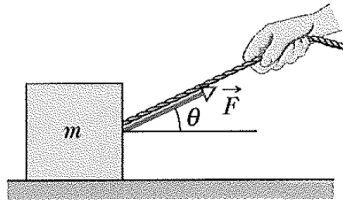
Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\mu_k = \frac{F_{\text{pull}} \cos \theta}{mg - F_{\text{pull}} \sin \theta} = 0.077 \quad (2.758)$$

Παράδειγμα 2.80:

Στο Σχήμα 2.99 τραβάτε ένα κουτί μάζας $m = 5.0$ kg σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές με μια δύναμη $F = 12.0$ N υπό γωνία $\theta = 25^\circ$.

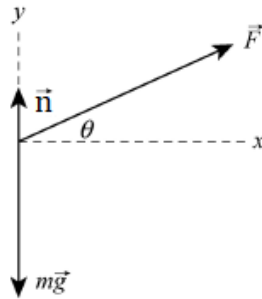
- (α') Ποιό είναι το μέτρο της επιτάχυνσης του κουτιού;
- (β') Η δύναμη F αργά-αργά μεγαλώνει. Ποιά τιμή θα έχει ακριβώς πριν το κουτί σηκωθεί εντελώς από την επιφάνεια;
- (γ') Ποιό είναι το μέτρο της επιτάχυνσης του κουτιού ακριβώς στο ερώτημα (β);



Σχήμα 2.99: Σχήμα Άσκησης 2.80.

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 2.100. Θεωρούμε θετικές φορές κίνησης τις συμβατικές (πάνω, δεξιά).



Σχήμα 2.100: Διάγραμμα δυνάμεων Άσκησης 2.80.

(α') Η x -συνιστώσα της δύναμης F δίνεται ως

$$F_x = F \cos(\theta) = 12 \cos(25^\circ) \quad (2.759)$$

ενώ η y -συνιστώσα της δύναμης F δίνεται ως

$$F_y = F \sin(\theta) = 12 \sin(25^\circ) \quad (2.760)$$

Το σώμα υπό επίδραση σταθερής δύναμης επιταχύνεται στον άξονα x' . Από το 2ο Νόμο του Newton έχουμε

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \iff \vec{F}_x = m\vec{a}_x \implies a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{12 \cos(25^\circ)}{5} = 2.175 \text{ m/s}^2 \quad (2.761)$$

(β') Έστω ότι F_m είναι η ελάχιστη δύναμη για την οποία το σώμα μόλις αφήνει την επιφάνεια. Αφού το σώμα αφήνει την επιφάνεια, η κάθετη δύναμη $\vec{n}$ από το έδαφος στο σώμα παύει να υπάρχει. Στον άξονα $y'y$ έχουμε ισορροπία του σώματος, άρα

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{F}_{m_y} + m\vec{g} = \vec{0} \quad (2.762)$$

$$F_m \sin(\theta) - mg = 0 \quad (2.763)$$

$$F_m = \frac{mg}{\sin(\theta)} = 115.9 \text{ N} \quad (2.764)$$

(γ') Η επιτάχυνση υπάρχει ακόμα στην κατεύθυνση του άξονα x' και δίνεται ξανά από την παραπάνω σχέση

$$a = \frac{F_m \cos(25^\circ)}{m} = 21.02 \text{ m/s}^2 \quad (2.765)$$

Παράδειγμα 2.81:

Ένα αυτοκίνητο μάζας 1500 kg ταξιδεύει με ταχύτητα 30 m/s όταν ξαφνικά ο οδηγός πατάει τα φρένα του απότομα και το αυτοκίνητο ολισθαίνει στο δρόμο για λίγο διάστημα ως ότου σταματήσει. Υπολογίστε την απόσταση που ολισθαίνει αν η κλίση του οδοστρώματος είναι 10° σε (α) ανηφόρα, (β) κατηφόρα, και (γ) σε οριζόντιο οδόστρωμα. Θεωρήστε ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ελαστικού σε τσιμέντο είναι $\mu_k = 0.8$.

Λύση:

Θα κρατήσουμε τη γωνία ως μεταβλητή για να μη λύσουμε τρεις φορές το ίδιο πρόβλημα. Το αυτοκίνητο κινείται σε κεκλιμένο γωνίας θ και έστω ότι κινείται προς τα δεξιά (πάνω) στο κεκλιμένο. Έστω ότι ο άξονας x είναι παράλληλος του κεκλιμένου. Λόγω επιταχυνόμενης κίνησης, από το 2ο νόμο του Newton στον άξονα x' έχουμε

$$\sum \vec{F}_x = \vec{F}_{g_x} + \vec{f}_k = m\vec{a}_x \quad (2.766)$$

$$-mg \sin(\theta) - f_k = ma_x \quad (2.767)$$

$$-mg \sin(\theta) - \mu_k n = ma_x \quad (2.768)$$

ενώ λόγω ισορροπίας στον άξονα $y'y$, έχουμε

$$\sum \vec{F}_y = \vec{F}_{g_y} + \vec{n} = \vec{0} \quad (2.769)$$

$$-mg \cos(\theta) + n = 0 \quad (2.770)$$

$$n = mg \cos(\theta) \quad (2.771)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του x -άξονα

$$-mg \sin(\theta) - \mu_k mg \cos(\theta) = ma_x \quad (2.772)$$

$$mg(\sin(\theta) + \mu_k \cos(\theta)) = ma_x \quad (2.773)$$

$$a_x = -g(\sin(\theta) + \mu_k \cos(\theta)) \quad (2.774)$$

Το αυτοκίνητο κινείται ομαλά επιταχυνόμενα, οπότε από τις εξισώσεις της κίνησης έχουμε

$$u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \iff 0 = u_{x_i}^2 + 2a_x x_f \implies x_f = -\frac{u_{x_i}^2}{2a_x} = \frac{u_{x_i}^2}{2g(\sin(\theta) + \mu_k \cos(\theta))} \quad (2.775)$$

Για γωνίες $\theta = 10^\circ, 0, -10^\circ$, οι οποίες αντιστοιχούν σε ανηφόρα, οριζόντιο οδόστρωμα, και κατηφόρα, λαμβάνουμε

$$x_f = \begin{cases} 48 \text{ m}, & \theta = 10^\circ \\ 57 \text{ m}, & \theta = 0 \\ 75 \text{ m}, & \theta = -10^\circ \end{cases} \quad (2.776)$$

Παράδειγμα 2.82:

Ένα βιβλίο τοποθετείται ακίνητο σε επικλινή επιφάνεια που σχηματίζει γωνία 60° με το οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησής ανάμεσα στο βιβλίο και την επιφάνεια είναι 0.3. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το βιβλίο αφήνεται να ολισθήσει. Το βιβλίο ολισθαίνει απόσταση 1.00 m κατά μήκος της επιφάνειας σε χρόνο $t = 0.483$ s. Δείξτε ότι η περιγραφή της κίνησης του βιβλίου είναι ανακριβής, υπολογίζοντας την επιτάχυνση που υπόκειται το βιβλίο από τις εξισώσεις της κινητικής που γνωρίζετε, και την ίδια επιτάχυνση χρησιμοποιώντας τους νόμους του Newton.

Λύση:

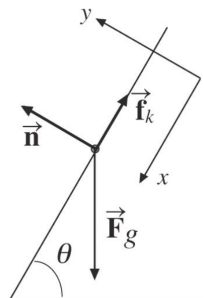
Το βιβλίο ταξιδεύει απόσταση 1.00 m σε διάστημα 0.483 s, οπότε από την εξίσωση κίνησης

$$x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2.777)$$

με $x_i = 0$, $x_f = 1.00$, $u_{x_i} = 0$, και $t = 0.483$ s, έχουμε

$$a = \frac{2x_f}{t^2} = 8.57 \text{ m/s}^2 \quad (2.778)$$

Σχεδιάζοντας τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα όπως στο Σχήμα 2.101 και ορίζοντας τον άξονα x'



Σχήμα 2.101: Βιβλίο που ολισθαίνει.

παράλληλο με το επικλινές και τον άξονα $y'y$ κάθετο σε αυτό, έχουμε

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \quad (2.779)$$

$$\vec{n} + \vec{F}_{gy} = \vec{0} \quad (2.780)$$

$$n - mg \cos(\theta) = 0 \quad (2.781)$$

$$n = mg \cos(\theta) \quad (2.782)$$

και

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \quad (2.783)$$

$$\vec{F}_{gx} + \vec{f}_k = m\vec{a}_x \quad (2.784)$$

$$mg \sin(\theta) - f_k = ma_x \quad (2.785)$$

$$mg \sin(\theta) - \mu_k n = ma_x \quad (2.786)$$

$$mg \sin(\theta) - \mu_k mg \cos(\theta) = ma_x \quad (2.787)$$

$$a_x = g(\sin(\theta) - \mu_k \cos(\theta)) \quad (2.788)$$

$$= 7.02 \text{ m/s}^2 \quad (2.789)$$

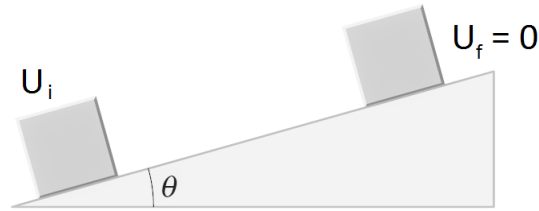
Άρα πράγματι η περιγραφή δεν είναι ακριβής.

Παράδειγμα 2.83:

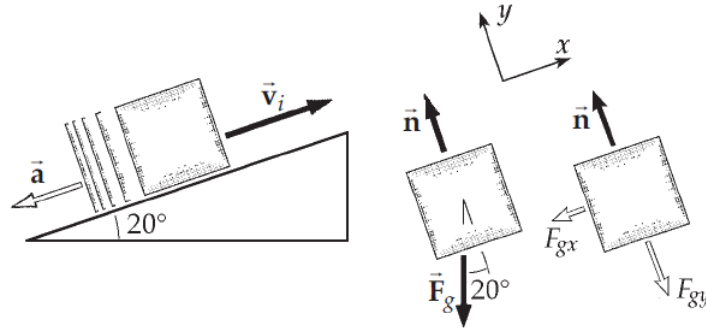
Ένα σώμα λαμβάνει αρχική ταχύτητα $u_i = 5 \text{ m/s}$ με διεύθυνση προς την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου γωνίας $\theta = 20^\circ$, απουσία τριβών, όπως στο Σχήμα 2.102. Δείξτε ότι το σώμα θα προχωρήσει απόσταση $\Delta x = 3.73 \text{ m}$ επάνω στο κεκλιμένο προτού έρθει σε ακινησία.

Λύση:

Μόλις το σώμα φεύγει από το χέρι μας, η ταχύτητά του αλλάζει μόνο εξαιτίας της συνιστώσας του βάρους



Σχήμα 2.102: Σχήμα Άσκησης 2.83.



Σχήμα 2.103: Διάγραμμα Άσκησης 2.83.

του - συγκεκριμένα της x -συνιστώσας. Δείτε το Σχήμα 2.103. Θεωρούμε το σύστημα αξόνων μας επάνω στο κεκλιμένο, με τον άξονα x' παράλληλα σε αυτό. Στον x -άξονα, το σώμα επιταχύνεται άρα ισχύει ο 2ος νόμος του Newton, και θα είναι

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \implies -F_{gx} = ma_x \implies -mg \sin(20^\circ) = ma_x \implies a_x = -g \sin(20^\circ) \quad (2.790)$$

Επίσης, από τις εξισώσεις της κίνησης από το σημείο αφετηρίας μέχρι το σημείο ακινητοποίησης, είναι

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a(x_f - x_i) \iff 0 = 25 - 2(9.8) \sin(20^\circ)(x_f - 0) \implies x_f = 3.73\text{m} \quad (2.791)$$

Παράδειγμα 2.84:

Ένα σώμα βάρους $\vec{F}_g$ ωθείται από μια δύναμη $\vec{P}$ σε οριζόντια επιφάνεια με τριβές, όπως στο Σχήμα 2.104(α). Ο συντελεστής στατικής τριβής είναι μ_s , και η δύναμη $\vec{P}$ ασκείται υπό γωνία θ , όπως στο σχήμα. Δείξτε ότι η ελάχιστη τιμή της P που απαιτείται για να κινηθεί το σώμα δίνεται ως

$$P_{min} = \frac{\mu_s F_g \sec(\theta)}{1 - \mu_s \tan(\theta)} \quad (2.792)$$

με $\sec(\theta) = 1/\cos(\theta)$.

Λύση:

Το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία, πριν ακριβώς αρχίσει να κινείται. Θεωρούμε θετικές φορές τις συμβατικές. Με εφαρμογή του 1ου νόμου του Newton στον άξονα y , έχουμε

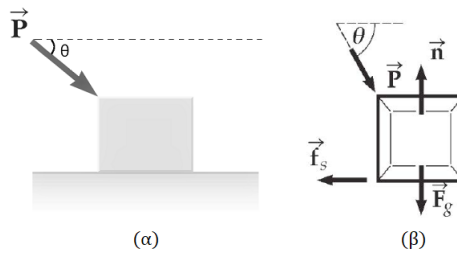
$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{n} + \vec{F}_g + \vec{P}_y = \vec{0} \implies n = F_g + P \sin \theta \quad (2.793)$$

Στον οριζόντιο άξονα,

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \iff \vec{P}_x + \vec{f}_s = \vec{0} \implies P \cos \theta = f_s \quad (2.794)$$

Όμως ξέρουμε ότι $f_s \leq \mu_s n$, δηλ.

$$P \cos \theta \leq \mu_s (F_g + P \sin \theta) \quad (2.795)$$



Σχήμα 2.104: Σχήματα Άσκησης 2.84.

$$P(\cos \theta - \mu_s \sin \theta) \leq \mu_s F_g \quad (2.796)$$

$$P(1 - \mu_s \tan \theta) \leq \mu_s F_g \sec \theta \quad (2.797)$$

Άρα

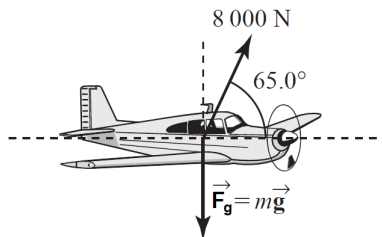
$$P_{\min} = \frac{\mu_s F_g \sec \theta}{1 - \mu_s \tan \theta} \quad (2.798)$$

Παράδειγμα 2.85:

Κατά την απογείωση ενός αεροσκάφους, η συνδυασμένη δράση του αέρα γύρω από τις μηχανές και τα φτερά εγείρει δύναμη $F = 8000 \text{ N}$ στο αεροπλάνο, με φορά προς τα πάνω, υπό γωνία 65° με το οριζόντιο επίπεδο, όπως στο Σχήμα 2.105. Το αεροσκάφος “σηκώνεται” με σταθερή ταχύτητα στην κατακόρυφη διεύθυνσή του ενώ συνεχίζει να επιταχύνει στην οριζόντια διεύθυνση.

(α') Ποιό είναι το βάρος του αεροπλάνου;

(β') Πόση είναι η οριζόντια επιτάχυνση;



Σχήμα 2.105: Αεροπλάνο κατά την απογείωση.

Λύση:

(α') Θεωρούμε ως θετικές φορές κίνησης τις συμβατικές. Το αεροσκάφος επιταχύνεται στον x -άξονα και ισορροπεί στον y -άξονα, οπότε στον άξονα $y'y$ ισχύει

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{F}_y + m\vec{g} = \vec{0} \quad (2.799)$$

$$F \sin(\theta) - mg = 0 \quad (2.800)$$

$$mg = F \sin(\theta) \quad (2.801)$$

$$mg = 8000 \sin(65^\circ) = 7.25 \times 10^3 \text{ N} \quad (2.802)$$

(β') Στον οριζόντιο άξονα

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \implies F_x = ma_x \quad (2.803)$$

$$F \cos(\theta) = ma_x \quad (2.804)$$

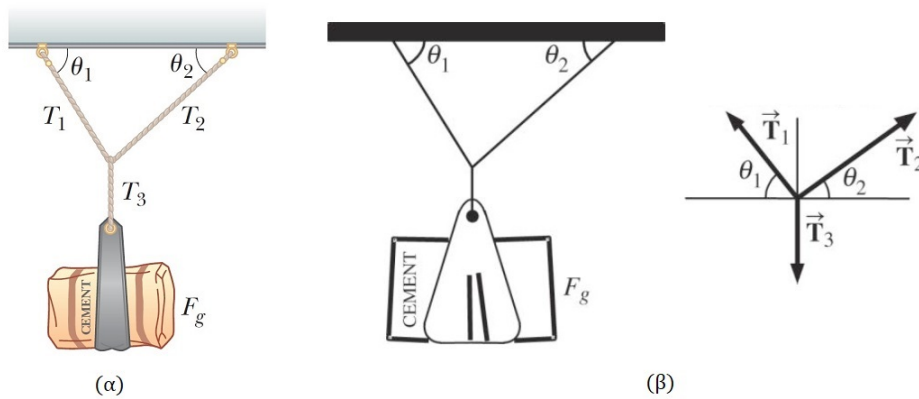
$$a_x = \frac{F \cos(\theta)}{m} = \frac{F \cos(\theta)}{\frac{F \sin(\theta)}{g}} \quad (\text{από προηγ. ερώτημα}) \quad (2.805)$$

$$= \frac{8000 \cos(65^\circ)}{\frac{7.25 \times 10^3}{9.8}} = 4.57 \text{ m/s}^2 \quad (2.806)$$

Παράδειγμα 2.86:

Ένα σακί τσιμέντο που ζυγίζει 325 N κρέμεται σε ισορροπία από τρία αβαρή, μη ελαστικά σχοινιά, όπως στο Σχήμα 2.106(α). Δυο από τα καλώδια σχηματίζουν γωνίες $\theta_1 = 60^\circ$ και $\theta_2 = 40^\circ$ με τον οριζόντιο άξονα. Υποθέτοντας ότι το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία, βρείτε

- (α') την τάση στο αριστερό σχοινί
(β') τις τάσεις T_1, T_2, T_3 , αριθμητικά.



Σχήμα 2.106: Σάκος με τσιμέντο Άσκησης 2.86.

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 2.106(β). Θεωρούμε ως θετικές φορές των αξόνων τις συμβατικές.

(α') Ο σάκος ισορροπεί, άρα σε αυτόν ισχύει ο 1ος νόμος του Newton:

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{T}_3 + \vec{F}_g = \vec{0} \iff T_3 = F_g = 325 \text{ N} \quad (2.807)$$

Στη ζεύξη των σχοινιών, λόγω ισορροπίας σε κάθε άξονα, από τον 1ο νόμο του Newton θα έχουμε

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{T}_{1y} + \vec{T}_{2y} + \vec{F}_g = \vec{0} \implies T_1 \sin(\theta_1) + T_2 \sin(\theta_2) = F_g = T_3 \quad (2.808)$$

Όμοια, στον x' χ,

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \iff \vec{T}_{1x} + \vec{T}_{2x} = \vec{0} \implies T_1 \cos(\theta_1) = T_2 \cos(\theta_2) \quad (2.809)$$

Άρα

$$T_1 = \frac{F_g \cos(\theta_2)}{(\sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_2))} = \frac{F_g \cos(\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad (2.810)$$

(β') Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$T_3 = F_g = 325 \text{ N} \quad (2.811)$$

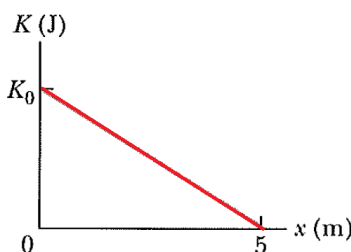
$$T_1 = 253 \text{ N} \quad (2.812)$$

$$T_2 = 165 \text{ N} \quad (2.813)$$

Παράδειγμα 2.87:

Ένα σώμα μάζας 8.0 kg κινείται στη θετική κατεύθυνση ενός οριζοντιώδους άξονα $x'x$. Όταν περνά από το σημείο $x = 0$, μια σταθερή δύναμη, κατά μήκος του $x'x$ κι αυτή (αλλά όχι απαραίτητα με την ίδια φορά με την κίνηση), ξεκινά να δρα πάνω του. Στο Σχήμα 2.107 βλέπετε την κινητική ενέργεια του σώματος συναρτήσει της θέσης x όσο το σώμα κινείται από $x = 0$ ως $x = 5.0$ m. Αν $K_0 = 30$ J

- (α') Πόση είναι η ταχύτητά του όταν $x = 0$ m;
 (β') Πόση είναι η επιτάχυνσή του σε όλη τη διάρκεια της κίνησης;
 (γ') Αν η δύναμη συνεχίσει να δρα πάνω του, μπορείτε να προβλέψετε την ταχύτητά του όταν $x = -3$ m;



Σχήμα 2.107: Σχήμα Άσκησης 2.87.

Λύση:

(α') Αφού $K_0 = 30$ J έχουμε

$$K_0 = \frac{1}{2}mu_0^2 = 30 \iff u_0^2 = \frac{60}{8} = 7.5 \implies u_0 = 2.73 \text{ m/s} \quad (2.814)$$

(β') Αφού η αρχική ταχύτητα είναι 2.73 m/s και η τελική ταχύτητα για $x = 5$, δηλ. για μετατόπιση $\Delta x = 5$ m, είναι 0, από τις εξισώσεις της κινηματικής έχουμε

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta x \iff a = \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} = -0.75 \text{ m/s}^2 \quad (2.815)$$

(γ') Ξανά από την εξίσωση της κινηματικής μεταξύ των θέσεων $x = 0$ και $x = -3$ m, έχουμε

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta x \iff u_f = -\sqrt{7.5 + 2(-0.75)(-3)} = -\sqrt{12} \text{ m/s} \quad (2.816)$$

με το πρόσημο να δηλώνει τη φορά του διανύσματος.

Παράδειγμα 2.88:

Οι άνθρωποι τένοντες μπορούν να μοντελοποιηθούν ως ελατήρια. Η ελαστική δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται στους τένοντες συνεισφέρει έως και 35% της ενεργειακής ανάγκης σας κατά το τρέξιμο. Οι επιστήμονες αθλητισμού έχουν βρει ότι, κατά μέσο όρο, οι τένοντες των αθλητών εκτείνονται κατά 41 χιλιοστά, ενώ αυτοί των μη-αθλητών εκτείνονται μόνο 33 χιλιοστά. Η “σταθερά ελατηρίου” του τένοντα είναι ίδια και για τους αθλητές και για τους μη-αθλητές, και ίση με 33 N/mm. Ποιά είναι η διαφορά μεταξύ της μέγιστης ελαστικής δυναμικής ενέργειας που αποθηκεύεται στους αθλητές και στους μη-αθλητές;

Λύση:

Θεωρούμε ως σύστημα τους τένοντες. Για τους αθλητές, ισχύει

$$U_s^{\text{αθλητές}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}33000 \cdot 0.041^2 = 27.7 \text{ J} \quad (2.817)$$

ενώ για τους μη αθλητές,

$$U_s^{\text{μη-αθλητές}} = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} 33000 \cdot 0.033^2 = 18.0 \text{ J} \quad (2.818)$$

Η διαφορά ελαστικής δυναμικής ενέργειας είναι 9.7 J, υπέρ των αθλητών. Παρατηρήστε πως οι αθλητές αποθηκεύουν πάνω από μιάμιση φορά περισσότερη ενέργεια από τους μη-αθλητές.

Παράδειγμα 2.89:

Όταν ένα σώμα μετατοπίζεται κατά x από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας του, ασκείται επάνω του μια δύναμη επαναφοράς που τείνει να το επαναφέρει στη θέση ισορροπίας του. Το μέτρο της δύναμης μεταφοράς μπορεί να δίνεται από μια περίπλοκη συνάρτηση του x . Για παράδειγμα, ο νόμος του Hooke που είδαμε στο μάθημα ορίζεται ως

$$F = -kx \quad (2.819)$$

αλλά ισχύει για μικρές μετατοπίσεις. Γενικότερα, η δύναμη επαναφοράς δίνεται από τη σχέση

$$F(x) = - \sum_{m=1}^{+\infty} k_m x^m = -(k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \dots) \quad (2.820)$$

Ο πρώτος όρος της παραπάνω σχέσης είναι ο νόμος του Hooke. Για μικρές αποστάσεις από τη θέση ισορροπίας, αγνοούμε τους όρους υψηλότερης τάξης, αλλά σε μερικές περιπτώσεις ίσως χρειαστεί να κρατήσουμε και τον δεύτερο όρο ($k_2 x^2$). Αν μοντελοποιήσουμε τη δύναμη επαναφοράς ως

$$F(x) = -k_1 x - k_2 x^2 \quad (2.821)$$

τότε πόσο έργο παράγει μια ασκούμενη δύναμη $F_{out} = -F$ στο σώμα κατά τη μετατόπισή του από τη θέση $x = 0$ στη θέση $x = x_{max}$;

Λύση:

Το έργο που παράγεται από τη μεταβαλλόμενου μέτρου δύναμη ισούται με

$$W = \int_a^b F_{out} dx = \int_0^{x_{max}} -[-(k_1 x + k_2 x^2)] dx \quad (2.822)$$

$$= \int_0^{x_{max}} k_1 x dx + \int_0^{x_{max}} k_2 x^2 dx \quad (2.823)$$

$$= k_1 \frac{x_{max}^2}{2} + k_2 \frac{x_{max}^3}{3} \quad (2.824)$$

Παράδειγμα 2.90:

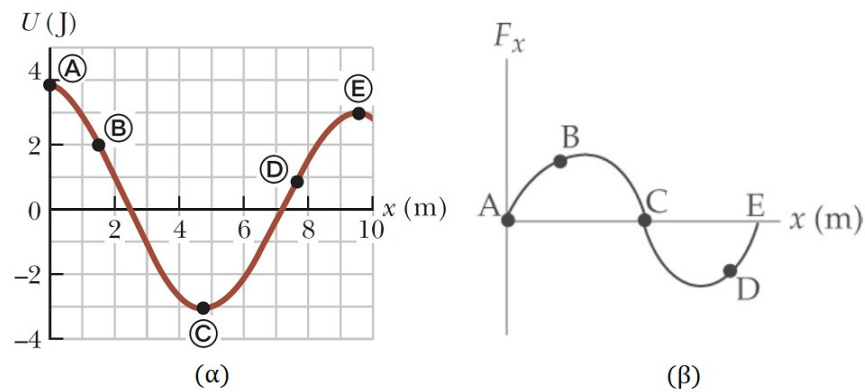
Για την καμπύλη δυναμικής ενέργειας που φαίνεται στο Σχήμα 2.108(α).

- (α') Βρείτε αν η δύναμη F_x είναι θετική, αρνητική, ή μηδενική στα πέντε σημεία που υποδεικνύονται.
- (β') Υποδείξτε σημεία ευσταθούς, ασταθούς, ή ουδέτερης ισορροπίας.
- (γ') Σχεδιάστε την καμπύλη F_x ως προς x από το σημείο $x = 0$ ως το σημείο $x = 9.5 \text{ m}$.

Λύση:

(α') Η F_x είναι μηδενική στα σημεία A, C, E, γιατί από τη σχέση

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = 0 \quad (2.825)$$



Σχήμα 2.108: Καμπύλη συνάρτησης δυναμικής ενέργειας και δύναμης - μετατόπισης.

καταλαβαίνουμε πως η δύναμη μηδενίζεται εκεί που η παράγωγος της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας είναι μηδέν, ή με άλλα λόγια, εκεί που η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας παρουσιάζει ακρότατα (μέγιστα ή ελάχιστα). Επίσης, στο σημείο B είναι θετική γιατί από τη σχέση

$$F_x = -\frac{dU}{dx} > 0 \iff \frac{dU}{dx} < 0 \quad (2.826)$$

καταλαβαίνουμε ότι η δύναμη είναι θετική σε σημεία που η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας φθίνει. Αντίστοιχο σκεπτικό και στο σημείο D , όπου η δύναμη είναι αρνητική.

(β') Τα σημεία A, E είναι σημεία ασταθούς ισορροπίας, ενώ το σημείο C είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας.

(γ') Δείτε το Σχήμα 2.108(β).

Παράδειγμα 2.91:

Ένα παιδί βάρους 400 N κρέμεται σε μια κούνια η οποία είναι δεμένη με δυο σχοινιά μήκους 2 m . Βρείτε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος παιδιού-Γης ως προς αυτή που έχει το παιδί όταν βρίσκεται στη χαμηλότερη θέση όταν

(α') τα σχοινιά είναι οριζόντια

(β') τα σχοινιά σχηματίζουν γωνία 30° με την κατακόρυφο

(γ') τα σχοινιά βρίσκονται στο χαμηλότερο σημείο του κυκλικού τόξου.

Σχεδιάστε το σύστημα για να βοηθηθείτε στη λύση.

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 2.109.

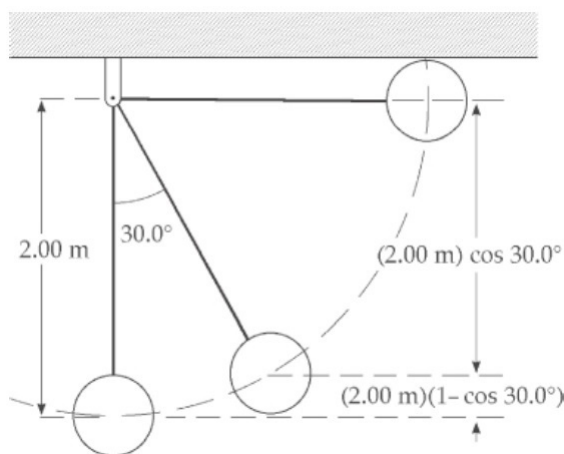
(α') Θεωρούμε ως διάταξη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος τη διάταξη με το παιδί να βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο του τόξου. Όταν η κούνια βρίσκεται αρχικά σε οριζόντια θέση, η θέση της είναι $y = 2 \text{ m}$ προς τα επάνω από τη διάταξη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας. Άρα

$$U_g = mgy = 800 \text{ J} \quad (2.827)$$

(β') Από το σχήμα, φαίνεται ότι το παιδί βρίσκεται σε ύψος $y = 2(1 - \cos(30^\circ))$ προς τα επάνω από τη διάταξη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας. Άρα

$$U_g = mgy = 107 \text{ J} \quad (2.828)$$

(γ') Προφανώς, εκεί $U_g = 0$ αφού εκεί ορίσαμε το επίπεδο διάταξης μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.



Σχήμα 2.109: Παιδί σε κούνια.

Παράδειγμα 2.92:

Ένα δοχείο που περιέχει ένα μετεωρολογικό μπαλόνι μάζας 4 kg εκτοξεύεται κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα 400 m/s. Απουσία αντίστασης του αέρα, υπολογίστε

- (α') Την αρχική κινητική του ενέργεια.
- (β') Την ταχύτητά του σε ύψος ενός χιλιομέτρου.
- (γ') Το μέγιστο ύψος που θα φτάσει.

Λύση:

(α') Η αρχική κινητική του ενέργεια είναι

$$K = \frac{1}{2}mu^2 = 320 \text{ kJ} \quad (2.829)$$

(β') Θεωρούμε ως σύστημα το {Γη, δοχείο με μπαλόνι}. Σε ύψος ενός χιλιομέτρου, η δυναμική του ενέργεια είναι

$$U_g = mgh = 39.24 \text{ kJ} \quad (2.830)$$

Η μόνη δύναμη που ασκείται στο μπαλόνι είναι αυτή του βάρους, που είναι συντηρητική. Από την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας στη διαδρομή του ενός χιλιομέτρου από την επιφάνεια της Γης ως αυτό το ύψος, ισχύει

$$\Delta E_{\text{mech}} = 0 \quad (2.831)$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f \quad (2.832)$$

$$320000 + 0 = \frac{1}{2}mu_f^2 + 39240 \quad (2.833)$$

$$u = \sqrt{\frac{2 \cdot 280760}{4}} \quad (2.834)$$

$$u = 374.7 \text{ m/s} \quad (2.835)$$

(γ') Στο μέγιστο ύψος, η ταχύτητα του δοχείου είναι μηδέν, και όλη η κινητική του ενέργεια έχει μετατραπεί σε δυναμική. Άρα μεταξύ εδάφους και μέγιστου ύψους

$$K_i = U_f \quad (2.836)$$

$$320000 = mgh_{\text{max}} \quad (2.837)$$

$$h_{\text{max}} = 8163 \text{ m} \quad (2.838)$$

Παράδειγμα 2.93:

Ένα φορτίο μάζας 30 kg σπρώχνεται επάνω σε μια επικλινή ράμπα μήκους 15 m και ύψους 2 m με σταθερή δύναμη 100 N. Το φορτίο ξεκινά από ακινησία και έχει ταχύτητα μέτρου 2 m/s όταν φτάνει στην κορυφή της ράμπας. Ποιά είναι η δύναμη τριβής μεταξύ της ράμπας και του φορτίου;

Λύση:

Θεωρούμε ως σύστημα το {φορτίο, Γη}, που είναι μη απομονωμένο (η ράμπα ασκεί δυνάμεις επάνω στο σύστημα). Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας,

$$\Delta E_{sys} = \sum W_{ext} \iff \Delta K + \Delta U_g = W_F + W_{f_k} \quad (2.839)$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ θα είναι

$$W_F = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x} = F \Delta x = 100 \cdot 15 = 1500 \text{ J} \quad (2.840)$$

Οι μεταβολές στην κινητική και δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} m u_f^2 - 0 = 60 \text{ J} \quad (2.841)$$

$$\Delta U = U_f - U_i = mgh - 0 = 588 \text{ J} \quad (2.842)$$

Άρα το έργο της δύναμης τριβής f_k είναι

$$W_{f_k} = W_F - \Delta K - \Delta U = 852 \text{ J} \quad (2.843)$$

Όμως ξέρουμε ότι το έργο της δύναμης τριβής δίνεται και ως

$$W_{f_k} = f_k \Delta x \cos(180^\circ) \implies f_k = \frac{W_{f_k}}{-\Delta x} = -56.8 \text{ N} \quad (2.844)$$

που σημαίνει ότι το μέτρο της είναι 56.8 N και η φορά της αντίθετη στη μετατόπιση του φορτίου.

Παράδειγμα 2.94:

Ένας τολμηρός bungee-jumper βρίσκεται μια γέφυρα ύψους $L_{max} = 75 \text{ m}$ επάνω από ένα ποτάμι, όπως στο Σχήμα 2.110(α). Ο bungee-jumper έχει μάζα $m = 80 \text{ kg}$, και ύψος $L_{jumper} = 1.85 \text{ m}$. Μπορούμε να θεωρήσουμε το σχοινί που χρησιμοποιεί για το άλμα στο κενό ως ελατήριο. Η σταθερά του σχοινιού είναι $k = 50 \text{ N/m}$. Θεωρήστε ότι η μάζα του σχοινιού είναι αμελητέα. Ο bungee-jumper θέλει να ξέρει το μήκος του σχοινιού L_0 που χρειάζεται για να εκτελέσει με ασφάλεια το άλμα του. Βοηθήστε τον.

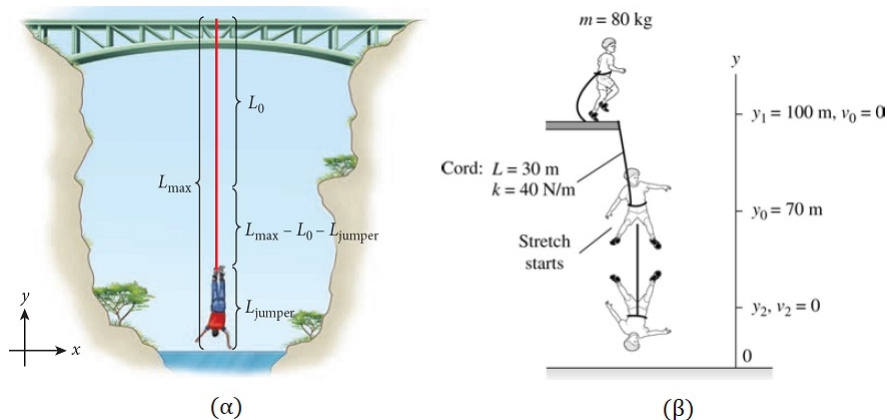
Λύση:

Θεωρούμε ως σύστημα το {bungee-jumper, σχοινί, Γη}, πολυμελές κι απομονωμένο. Η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος όταν ο bungee-jumper βρίσκεται επάνω στη γέφυρα είναι

$$U_{gi} = mgy = mgL_{max} \quad (2.845)$$

υποθέτοντας ότι η βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι μηδέν στο επίπεδο της επιφάνειας του νερού. Στο σύστημα παράγουν έργο μόνο συντηρητικές δυνάμεις: αυτή του ελατηρίου και αυτή του βάρους. Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ του σημείου επάνω στη γέφυρα και του σημείου όταν ο bungee-jumper έχει εκτελέσει το άλμα και βρίσκεται με το κεφάλι αριβώς επάνω από το νερό (έχοντας στιγμιαία μηδενική ταχύτητα), έχουμε

$$\Delta E_{mech} = 0 \iff E_f^{mech} = E_i^{mech} \iff K_f + U_{gf} + U_{sf} = K_i + U_{gi} + U_{si} \quad (2.846)$$



Σχήμα 2.110: Σχήματα Άσκησης 2.94.

με U_s την ελαστική δυναμική ενέργεια του σχοινιού. Άρα

$$0 + 0 + \frac{1}{2}k(L_{\max} - L_{\text{jumper}} - L_0)^2 = 0 + mgL_{\max} + 0 \quad (2.847)$$

οπότε

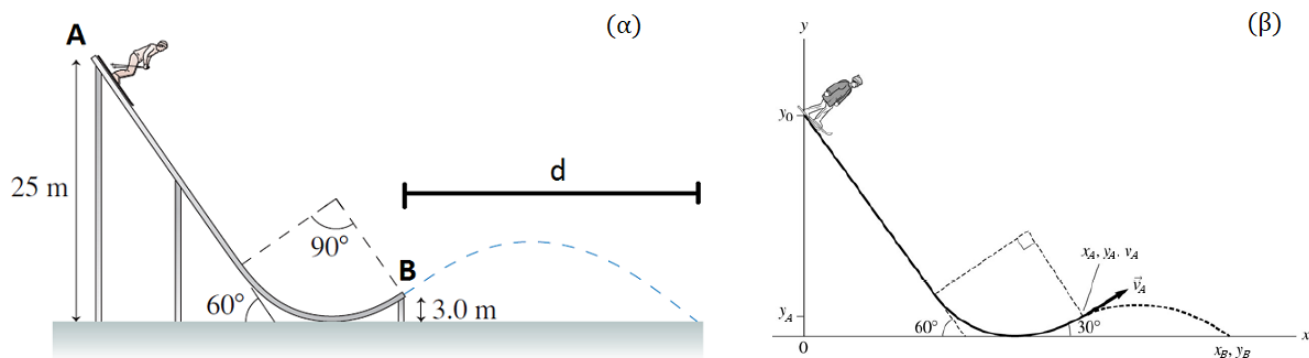
$$\frac{1}{2}k(L_{\max} - L_{\text{jumper}} - L_0)^2 = mgL_{\max} \quad (2.848)$$

$$L_0 = L_{\max} - L_{\text{jumper}} - \sqrt{\frac{2mgL_{\max}}{k}} \quad (2.849)$$

$$= 24.6\text{m} \quad (2.850)$$

Παράδειγμα 2.95:

Η Ιουλία βρίσκεται σε ύψος 25 μέτρων, επάνω σε μια τσουλήθρα χωρίς τριβές (Σχήμα 2.111)(α). Η αρχική κλίση της τσουλήθρας είναι 60° . Στη βάση της τσουλήθρας, ένα κυκλικό τόξο την εκτοξεύει από ύψος 3 μέτρων. Δείξτε ότι η απόσταση που θα διανύσει η Ιουλία κατά το άλμα της, με αναφορά το σημείο εκτόξευσης B είναι $d = 42.6\text{ m}$.



Σχήμα 2.111: Σχήμα Άσκησης 2.95.

Λύση:

Θεωρούμε ως σύστημα την Ιουλία και τη Γη. Τοποθετούμε το σύστημα συντεταγμένων στο κάτω μέρος της ράμπας, κάτω από τη θέση εκκίνησης της Ιουλίας. Από τη γεωμετρία του σχήματος 2.111(β), έχουμε

ότι η Ιουλία εκτοξεύεται από τη ράμπα υπό γωνία 30° . Η μόνη δύναμη που παράγει έργο στο σύστημα είναι η δύναμη του βάρους, που είναι συντηρητική. Από την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ των θέσεων στην κορυφή της τσουλήθρας και στο σημείο εκτόξευσης A, έχουμε

$$K_0 + U_{g_0} = K_A + U_{g_A} \iff mgy_0 = \frac{1}{2}mu_A^2 + mgy_A \Rightarrow u_A = \sqrt{2g(y_0 - y_A)} = 20.77 \text{ m/s} \quad (2.851)$$

Ας βρούμε τώρα το σημείο άφιξης της Ιουλίας μετά την εκτόξευσή της. Από τις εξισώσεις της κινητικής στον άξονα y, όπου η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη, θα έχουμε

$$y_B = y_A + u_{yA}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (2.852)$$

$$0 = 3 + u_A \sin 30^\circ t - \frac{1}{2}9.8t^2 \quad (2.853)$$

$$t = 2.377 \text{ s} \quad (2.854)$$

Από τις εξισώσεις της κινητικής στον άξονα x, όπου η κίνηση είναι ευθύγραμμη με σταθερή ταχύτητα, έχουμε

$$x_B = x_A + u_{xA}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2.855)$$

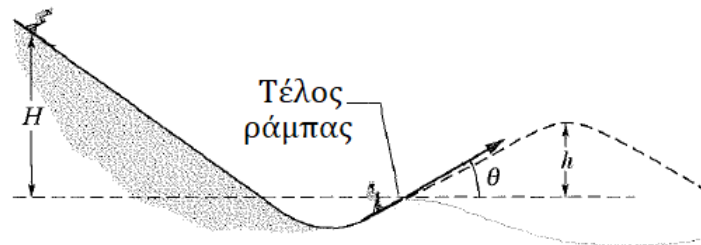
$$x_B - x_A = u_A \cos 30^\circ t + 0 \quad (2.856)$$

$$x_B - x_A = 42.6 \text{ m} \quad (2.857)$$

Παράδειγμα 2.96:

Η επιδημία του κορονοϊού τελείωσε πριν 5 χρόνια και για να γιορτάσετε πήγατε για σκι στις Άλπεις. Βρίσκεστε στην πλαγιά ενός λόφου όπως στο Σχήμα 2.112, σε ύψος $H = 20$ μέτρα από το τέarma της ράμπας. Εκτελώντας το άλμα σας υπό γωνία $\theta = 28^\circ$, αγνοώντας τις αντιστάσεις του αέρα, και υποθέτοντας ότι η ράμπα είναι λεία

- (α') ποιο είναι το μέγιστο ύψος h του άλματός σας αφού αποδεσμευτείτε από τη ράμπα;
- (β') αν επαναλάβετε το άλμα - γιατί σας άρεσε - αλλά αφού πρώτα δέσετε στην πλάτη σας το βιβλίο της Φυσικής σας (αυξάνοντας το βάρος σας), θα φτάσετε σε μεγαλύτερο, μικρότερο, ή ίδιο μέγιστο ύψος h ;



Σχήμα 2.112: Σχήμα Ασκήσης 2.96.

Λύση:

- (α') Κατά το άλμα σας, εκτελείτε βολή, οπότε το ζητούμενο ύψος είναι το μέγιστο ύψος βολής, όμως δε γνωρίζουμε το μέτρο της ταχύτητας εκτόξευσης από τη ράμπα. Θεωρώντας ως απομονωμένο σύστημα το {άλτης, Γη}, η μόνη δύναμη που παράγει έργο στον άλτη είναι η δύναμη του βάρους, η οποία είναι συντηρητική. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΜΕ από τη θέση ύψους H ως τη θέση

εκτόξευσης από τη ράμπα, θεωρώντας διάταξη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας τη διάταξη εκτόξευσης από τη ράμπα.

$$\Delta E_{\text{mech}} = 0 \quad (2.858)$$

$$K_i + U_{gi} = K_f + U_{gf} \quad (2.859)$$

$$0 + mgH = \frac{1}{2}mu_f^2 + 0 \quad (2.860)$$

$$u_f = \sqrt{2gH} = 19.79 \text{ m/s} \quad (2.861)$$

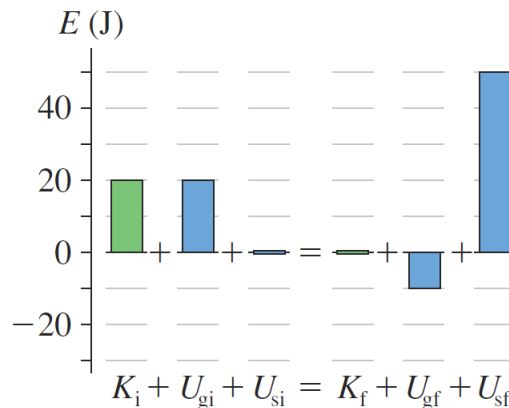
Από τον τύπο του μέγιστου ύψους h για την κίνηση της βολής έχουμε

$$h = \frac{u_f^2 \sin^2(28^\circ)}{2g} = 4.408 \text{ m} \quad (2.862)$$

(β') Η μάζα m δεν παίζει ρόλο στο αποτέλεσμα καθώς απαλείφεται στις σχέσεις της ΑΔΜΕ. Άρα το μέγιστο ύψος θα είναι το ίδιο.

Παράδειγμα 2.97:

Σας δίνεται το διάγραμμα ενέργειας του Σχήματος 2.113, το οποίο περιγράφει την αρχική και τελική ενεργειακή κατάσταση ενός προβλήματος. Γράψτε μια εκφώνηση για το πρόβλημα το οποίο περιγράφεται από το διάγραμμα αυτό. Οι ενέργειες U_g , U_s αποτελούν βαρυτικές και ελαστικές δυναμικές ενέργειες αντίστοιχα, ενώ οι δείκτες i και f συμβολίζουν την αρχική και τελική κατάσταση του συστήματος.



Σχήμα 2.113: Σχήμα Παραδείγματος 2.97.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι έχουμε κινητική και δυο δυναμικές ενέργειες, ελαστική και βαρυτική. Στην αρχική κατάσταση, έχουμε 40 J συνολικής ενέργειας κατανομημένη εξ ημισείας σε κινητική και βαρυτική δυναμική, 20 J σε καθεμιά. Η ελαστική δυναμική ενέργεια είναι μηδέν, άρα έχουμε κάπου ένα ασυμπέσσο ελατήριο. Άρα αρχικά έχουμε ένα σώμα σε κίνηση το οποίο βρίσκεται σε κάποιο ύψος από την επιφάνεια της Γης, όπως μια μπάλα που πέφτει ή ανεβαίνει. Παρατηρώντας την τελική κατάσταση, βλέπουμε ότι η κινητική ενέργεια είναι πλέον μηδέν, άρα το σώμα βρίσκεται σε ακινησία, ενώ η ελαστική δυναμική ισούται με 50 J και η βαρυτική δυναμική ισούται με -10 J. Το άθροισμα των δυο ισούται με 40 J, που σημαίνει ότι ισχύει η Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας. Επίσης όμως βλέπουμε ότι η τελική βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι αρνητική, άρα το σώμα βρίσκεται κάτω από το επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας. Αυτό μπορεί να μοντελοποιηθεί αν ορίσουμε το επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας στη

θέση που το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, έτσι ώστε όταν συμπιεστεί να αυξηθεί η ελαστική δυναμική και να υπάρχει αρνητική βαρυτική δυναμική ενέργεια.

$$K_i = \frac{1}{2}mu_i^2 = 20 \iff mu_i^2 = 40 \quad (2.863)$$

και

$$U_{gi} = mgh_i = 9.8mh_i = 20 \iff mh_i = \frac{20}{9.8} \quad (2.864)$$

Διαιρώντας κατά μέλη

$$\frac{mu_i^2}{mh_i} = \frac{40}{\frac{20}{9.8}} = \frac{392}{20} = 19.6 \iff \frac{u_i^2}{h_i} = 19.6 \iff u_i^2 = 19.6h \quad (2.865)$$

Έστω $h_i = 10$ m, τότε $u_i^2 = 196 \implies u_i = 14$ m/s. Άρα, $m = 0.204$ kg. Οι παραπάνω ποσότητες ικανοποιούν την αρχική κατάσταση του προβλήματος.

Στην τελική κατάστασή του, η μπάλα βρίσκεται σε ακινησία επάνω σε συμπιεσμένο ελατήριο. Θα έχουμε

$$U_{gf} = mgh_f = -10 \iff h_f = \frac{-10}{9.8 \cdot 0.204} = -5 \text{ m} \quad (2.866)$$

Άρα η μπάλα προχωρά $h_f = 5$ m κάτω από το επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, οπότε το ελατήριο συμπιέζεται κατά 5 (!) μέτρα. Η ελαστική δυναμική ενέργεια θα είναι

$$U_{sf} = \frac{1}{2}kh_f^2 = 50 \iff 25k = 100 \iff k = 4 \text{ N/m} \quad (2.867)$$

Άρα η σταθερά του ελατηρίου θα είναι $k = 4$ N/m. Βλέπεται ότι οι αριθμοί είναι μεν σωστοί αλλά όχι τόσο ρεαλιστικοί.

Δυο εκφωνήσεις – μια που προκύπτει από τα παραπάνω, και άλλη μια, πιο ρεαλιστική, που μπορείτε εσείς να επιβεβαιώσετε την ορθότητά της – που ικανοποιούν το διάγραμμα του Σχήματος 2.113 είναι οι ακόλουθες:

- Μια μπάλα μάζας 0.204 kg πέφτει από ύψος 10 m, με ταχύτητα 14.0 m/s, επάνω από ένα κατακόρυφο ελατήριο. Όταν η μπάλα προσγειώνεται, συμπιέζει το ελατήριο. Εάν το ελατήριο έχει σταθερά 4 N/m, πόσο θα συμπιεστεί από το βάρος της μπάλας;
- Μια μπάλα μάζας 2.5 kg ρίχνεται προς τα πάνω με ταχύτητα 4.0 m/s από ύψος 0.82 m πάνω από ένα κατακόρυφο ελατήριο. Όταν η μπάλα επιστρέφει προς τα κάτω προσγειώνεται και συμπιέζει το ελατήριο. Εάν το ελατήριο έχει σταθερά 600 N/m, πόσο θα συμπιεστεί από το βάρος της μπάλας;

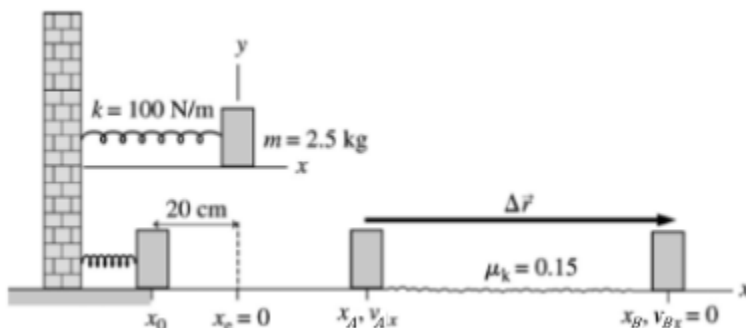
Παράδειγμα 2.98:

Ένα οριζόντιο ελατήριο με σταθερά 100 N/m συμπιέζεται κατά 20 cm ώστε να εκτοξεύσει ένα κουτί βάρους 2.5 kg κατά μήκος λείας επιφάνειας. Αφού το κουτί διανύσει κάποια απόσταση, η επιφάνεια γίνεται τραχιά. Ο συντελεστής τριβής είναι 0.15. Χρησιμοποιήστε την ενέργεια για να βρείτε πόση απόσταση θα διανύσει το κουτί κατά μήκος της τραχιάς επιφάνειας έως ότου σταματήσει.

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 2.114. Θεωρούμε ως σύστημα το {ελατήριο, σώμα, επιφάνεια}, το οποίο είναι απομονωμένο. Όταν η επιφάνεια είναι λεία, η Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας από το σημείο συμπίεσης μέχρι το σημείο που το σώμα αφήνει το ελατήριο (θέση ισορροπίας) μας δίνει

$$\Delta E_{\text{system}} = 0 \quad (2.868)$$



Σχήμα 2.114: Κουτί σε λεία και τραχιά επιφάνεια.

$$\Delta U + \Delta K = 0 \quad (2.869)$$

$$\frac{1}{2}k(x_0 - x_e)^2 = \frac{1}{2}mv_{x_A}^2 = K_A \quad (2.870)$$

$$K_A = \frac{1}{2}(100)(0.20 - 0)^2 = 2.0 \text{ J} \quad (2.871)$$

Επομένως το κουτί εκτοξεύεται οριζόντια, με κινητική ενέργεια ίση με 2 J. Εφόσον σε κάποια χρονική στιγμή θα σταματήσει, αυτό συνεπάγεται ότι στην διάρκεια της κίνησης του το κουτί θα χάσει 2 J κινητικής ενέργειας. Η συνισταμένη των δυνάμεων στο κουτί είναι

$$\sum \vec{F} = \vec{f}_k \Rightarrow F = -f_k = -\mu_k mg \quad (2.872)$$

Για το σύστημα {σώμα}, από το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας - Έργου μεταξύ της θέσης ισορροπίας και της θέσης που το σώμα σταματά να κινείται, και θεωρώντας $t = 0, x_A = 0$, έχουμε

$$\Delta K = 0 - 2.0 = \sum W_{ext} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} \quad (2.873)$$

$$-2.0 = -f_k \Delta x \quad (2.874)$$

$$-2.0 = (-\mu_k mg)x_B \quad (2.875)$$

$$x_B = \frac{2.0}{\mu_k mg} \quad (2.876)$$

$$= \frac{2.0}{(0.15)(2.5)(9.8)} = 0.544 \text{ m} \quad (2.877)$$

Παράδειγμα 2.99:

Ένας μηχανικός σχεδιάζει ένα περίεργο ελατήριο που ικανοποιεί τον τύπο $F_x = -q(x - x_e)^3$, όπου x_e είναι η θέση ισορροπίας στο τέλος του ελατηρίου και q είναι η σταθερά του. Για απλότητα θεωρούμε ότι $x_e = 0$ m. Συνεπώς $F_x = -qx^3$.

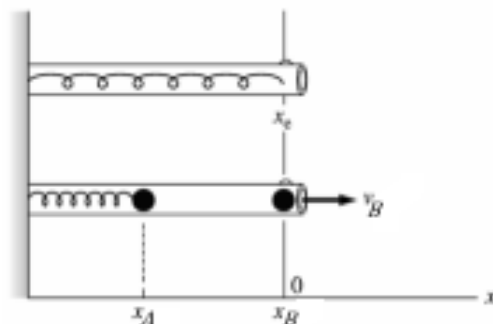
(α') Ποιες είναι οι μονάδες του q ;

(β') Βρείτε τον τύπο της δυναμικής ενέργειας ενός τεντωμένου ή συμπιεσμένου ελατηρίου.

(γ') Ένα παιχνίδι με ένα τέτοιο ελατήριο εκτοξεύει μια πλαστική μπάλα 20 g. Ποια είναι η ταχύτητα εκτόξευσης αν η σταθερά του ελατηρίου είναι 40000, με μονάδες αυτές που βρίκατε στο ερώτημα (α), και το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά 10 cm; Υποθέστε ότι η κάννη είναι λεία επιφάνεια.

Λύση:

Θεωρούμε το σύστημα {μπάλα, ελατήριο}. Δείτε το Σχήμα 2.115.



Σχήμα 2.115: Περίεργο ελατήριο.

(α') Οι μονάδες του q είναι N/m^3 , έτσι ώστε το γινόμενο με m^3 να μας δίνει N .

(β') Εφόσον $F_x = -dU/dx$, έχουμε

$$U(x) = - \int F_x dx = - \int_0^x (-qx^3) dx = q \frac{x^4}{4} \quad (2.878)$$

(γ') Στο σύστημα {μπάλα, ελατήριο} παράγει έργο μόνο η δύναμη του ελατηρίου, που είναι συντηρητική. Εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για το σύστημα {μπάλα, ελατήριο} από τη θέση συμπίεσης ως τη θέση εκτόξευσης της μπάλας, παίρνουμε

$$\Delta E_{\text{mech}} = 0 \quad (2.879)$$

$$K_f + U_f = K_i + U_i \quad (2.880)$$

$$\frac{1}{2} m u_f^2 + 0 = 0 + \frac{1}{4} q x_i^4 \quad (2.881)$$

$$u_f = \sqrt{\frac{q x_i^4}{2m}} = \sqrt{\frac{(40000)(-0.10)^4}{2(0.02)}} = 10 \text{ m/s} \quad (2.882)$$

Παράδειγμα 2.100:

Ένα κουτί μάζας $m = 5 \text{ kg}$ ξεκινάει από τη βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας $\theta = 30^\circ$ με αρχική ταχύτητα $u_i = 8 \text{ m/s}$, και σταματά αφού διανύσει απόσταση $d = 3 \text{ m}$, όπως στο Σχήμα 2.116. Υπολογίστε:

(α') τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του κουτιού.

(β') τη μεταβολή στη δυναμική ενέργεια του συστήματος {Γης, κουτιού}.

(γ') το μέτρο και την κατεύθυνση της δύναμης τριβής που ασκείται στο κουτί (με την υπόθεση ότι είναι σταθερή).

(δ') το συντελεστή τριβής ολισθήσεως μ_k κουτιού - κεκλιμένου επιπέδου.

Λύση:

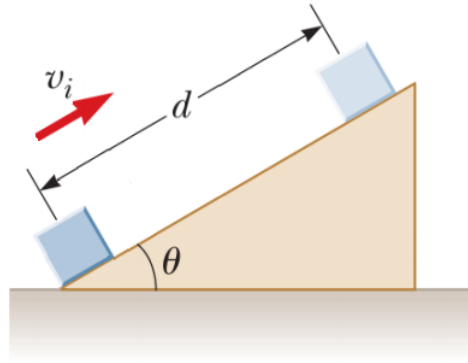
(α') Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια δίνεται ως

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2} 5 \cdot 8^2 = -160 \text{ J} \quad (2.883)$$

(β') Θεωρώντας το σύστημα {Γη, κουτί}, η μεταβολή στη βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι

$$\Delta U = U_f - U_i = mgh - 0 = mgd \sin(\theta) = 5 \cdot 9.8 \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ = 73.5 \text{ J} \quad (2.884)$$

όπου h είναι το ύψος του κουτιού από την επιφάνεια της Γης στην τελική του θέση.



Σχήμα 2.116: Σώμα σε κεκλιμένο Άσκησης 2.100.

(γ') Το μη απομονωμένο σύστημα {Γης, κουτιού} θα περιγράφεται ενεργειακά από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας από τη βάση ως τη θέση ακινητοποίησης ως εξής:

$$\Delta E_{sys} = \sum W_{ext} \quad (2.885)$$

$$\Delta K + \Delta U = \sum W_{ext} \quad (2.886)$$

$$\Delta K + \Delta U = W_{f_k} \quad (2.887)$$

$$\Delta K + \Delta U = -f_k d \quad (2.888)$$

Δεν υπάρχουν άλλες δυνάμεις πλην της τριβής που να παράγουν έργο στο κουτί, οπότε η δύναμη τριβής είναι η μόνη άγνωστη, και βρίσκουμε το μέτρο της ως

$$f_k = -\frac{\Delta K + \Delta U}{d} = 28.8 \text{ N} \quad (2.889)$$

ενώ η διεύθυνση της είναι παράλληλη του κεκλιμένου και η φορά της αντίθετα της κίνησης του κουτιού.

(δ') Οι δυνάμεις που ασκούνται στο κουτί και είναι κάθετες στο επικλινές πρέπει να αθροίζουν στο μηδέν λόγω ισορροπίας του κουτιού στον άξονα $y'y$. Θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω, έχουμε

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \implies n - F_{gy} = 0 \implies n - mg \cos(30^\circ) = 0 \iff n = mg \cos(30^\circ) = 42.4 \text{ N} \quad (2.890)$$

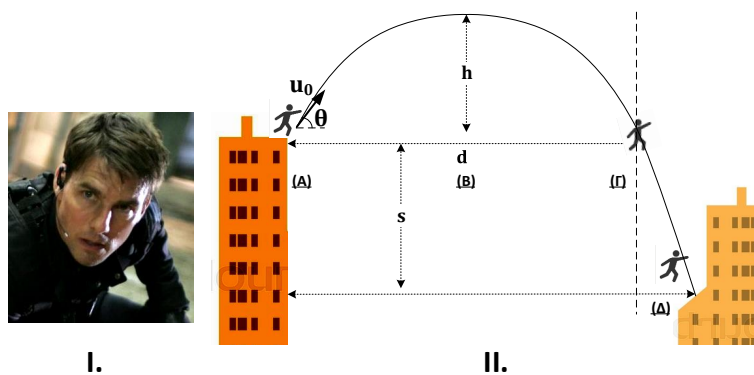
κι έτσι θα είναι

$$f_k = \mu_k n \implies \mu_k = 0.68 \quad (2.891)$$

Παράδειγμα 2.101:

Ο πράκτορας Ethan Hunt (Σχήμα 2.117.Ι) χρειάζεται να εκτελέσει ένα επικίνδυνο άλμα για να φέρει σε πέρας μια από τις αποστολές του. Ο Ethan βρίσκεται στην οροφή ενός κτηρίου, όπου και εκτελεί άλμα με αρχική ταχύτητα μέτρου u_0 υπό γωνία θ , όπως στο Σχήμα 2.117.ΙΙ. Θεωρήστε ότι η στολή του Ethan μηδενίζει τις αντιστάσεις του αέρα.

- (α') Αν το μέτρο της αρχικής ταχύτητας u_0 είναι $u_0 = 10 \text{ m/s}$ και η γωνία άλματος είναι $\theta = 45^\circ$, ποιο το μέγιστο ύψος h που θα φτάσει ο Ethan;
- (β') Πόσο χρόνο t χρειάζεται για να φτάσει στο ίδιο επίπεδο με το επίπεδο άλματός του;
- (γ') Πόση οριζόντια απόσταση d θα έχει διανύσει όταν φτάσει στο παραπάνω ύψος;
- (δ') Ποιο θα είναι το μέτρο της ταχύτητας πρόσκρουσης του στην πλάγια επιφάνεια του δεύτερου κτηρίου, αν η απόσταση s - όπως φαίνεται στο Σχήμα - είναι $s = 15 \text{ m}$;



Σχήμα 2.117: Επικίνδυνες Αποστολές.

Λύση:

- (α') Ο Ethan ουσιαστικά εκτελεί βολή. Θεωρώντας την αναφορά του συστήματος αξόνων στη θέση άλματος, και με θετικές φορές τις συμβατικές, από γνωστούς τύπους της βολής έχουμε

$$h_{max} = \frac{u_i^2 \sin^2(\theta_i)}{2g} \approx 2.55\text{m} \quad (2.892)$$

- (β') Η κίνηση στον κατακόρυφο άξονα είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, οπότε από το σημείο Α ως το σημείο Γ έχουμε

$$y_\Gamma = y_A + u_{yA}t - \frac{1}{2}gt_\Gamma^2 \quad (2.893)$$

$$0 = 0 + u_0 \sin(45^\circ)t - 4.9t^2 \quad (2.894)$$

$$10\frac{\sqrt{2}}{2}t - 4.9t^2 = 0 \quad (2.895)$$

$$t = 0 \text{ ή } t \approx 1.44 \text{ s} \quad (2.896)$$

και προφανώς επιλέγουμε τη λύση $t = 1.44 \text{ s}$.

- (γ') Η απόσταση d αποτελεί το εύρος της βολής. Από γνωστό τυπολόγιο, έχουμε

$$R = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g} = \frac{10^2 \sin(90^\circ)}{9.8} \approx 10.2 \text{ m} \quad (2.897)$$

- (δ') Θεωρούμε το σύστημα {Ethan, Γη}. Η μόνη δύναμη που ασκείται στον Ethan είναι αυτή του βάρους, η οποία είναι συντηρητική. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο που ορίζεται από το σημείο (Δ). Εφαρμόζοντας Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ των θέσεων (Α) και (Δ), θα έχουμε

$$\Delta E_{mech} = 0 \quad (2.898)$$

$$E_{mech}^A = E_{mech}^\Delta \quad (2.899)$$

$$K_A + U_A = K_\Delta + U_\Delta \quad (2.900)$$

$$\frac{1}{2}mu_A^2 + mgs = \frac{1}{2}mu_\Delta^2 + 0 \quad (2.901)$$

$$\frac{1}{2}u_A^2 + gs = \frac{1}{2}u_\Delta^2 \quad (2.902)$$

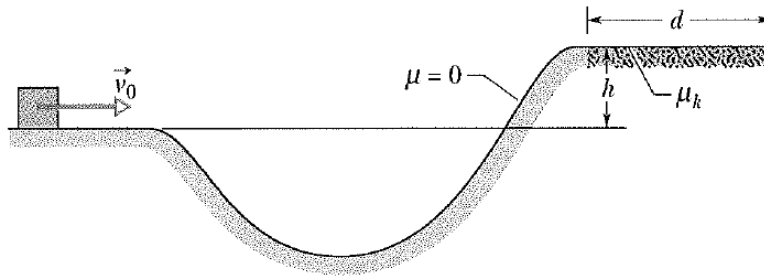
$$u_\Delta = \sqrt{u_A^2 + 2gs} \quad (2.903)$$

$$= \sqrt{100 + 30 \cdot 9.8} \quad (2.904)$$

$$\approx 19.85 \text{ m/s} \quad (2.905)$$

Παράδειγμα 2.102:

Στο Allou Fun Park, υπάρχει ένα μονοθέσιο τρενάκι που σας εκτοξεύει από ένα επίπεδο σε ένα υψηλότερο αφού πρώτα σας περάσει από μια διαδρομή τύπου “μπώλ”. Θεωρήστε ότι όλη η κίνηση μέχρι να φτάσετε στο ψηλότερο επίπεδο γίνεται χωρίς αντιστάσεις ή τριβές. Όμως υπάρχουν τριβές στο υψηλότερο επίπεδο που αναγκάζουν το τρενάκι να σταματήσει μετά από απόσταση d από την είσοδό του στο επίπεδο. Η αρχική ταχύτητα του τρένου είναι $u_0 = 6.0 \text{ m/s}$, με οριζόντια κατεύθυνση, όπως στο Σχήμα 2.118. Η υπομετρική διαφορά των δυο επιπέδων, h , είναι 1.1 m ενώ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης στο υψηλότερο επίπεδο είναι $\mu_k = 0.60$. Βρείτε την απόσταση d .



Σχήμα 2.118: Σχήμα Άσκησης 2.102.

Λύση:

Θεωρούμε ως σύστημα το {Γη, τρενάκι, επιφάνεια με τριβές}. Το σύστημα είναι απομονωμένο με δράση μη-συντηρητικής δύναμης (τριβή ολίσθησης). Θεωρούμε ότι η διάταξη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας είναι όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση εκκίνησης. Από την ΑΔΕ μεταξύ της αρχικής θέσης εκκίνησης και της τελικής θέσης στάσης, έχουμε

$$\Delta E_{sys} = 0 \quad (2.906)$$

$$\Delta K + \Delta U_g + \Delta E_{th} = 0 \quad (2.907)$$

$$K_f - K_i + U_{gf} - U_{gi} + \Delta E_{th} = 0 \quad (2.908)$$

$$0 - \frac{1}{2}mu_i^2 + mgh - 0 + f_k d = 0 \quad (2.909)$$

$$d = \frac{\frac{1}{2}mu_i^2 - mgh}{f_k} \quad (2.910)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}mu_i^2 - mgh}{\mu_k n} \quad (2.911)$$

Το σώμα ισορροπεί στον άξονα $y'y$ όσο βρίσκεται στο επίπεδο με τριβές, οπότε

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{F}_g + \vec{n} = \vec{0} \quad (2.912)$$

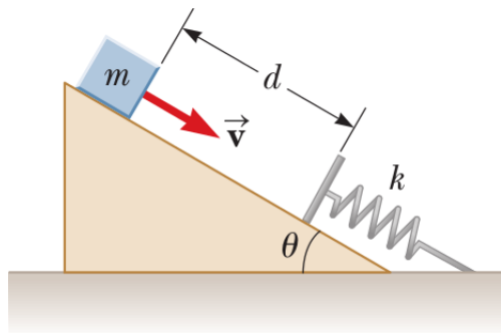
$$n - mg = 0 \iff n = mg \quad (2.913)$$

οπότε

$$d = \frac{\frac{1}{2}mu_i^2 - mgh}{\mu_k mg} = \frac{u_i^2 - 2gh}{2\mu_k g} = 1.227 \text{ m} \quad (2.914)$$

Παράδειγμα 2.103:

Ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\theta = 20^\circ$ έχει ένα ελατήριο σταθεράς $k = 500 \text{ N/m}$ στερεωμένο στο κάτω μέρος του. Ένα κουτί μάζας $m = 2.5 \text{ kg}$ τοποθετείται πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο σε απόσταση $d = 0.3 \text{ m}$ από το ελατήριο. Από αυτή τη θέση, το κουτί βάλλεται προς το ελατήριο με ταχύτητα $u_0 = 0.75 \text{ m/s}$. Πόσο έχει μετακινηθεί το ελατήριο όταν το κουτί φτάνει στιγμιαία σε ηρεμία;



Σχήμα 2.119: Σχήμα Άσκησης 2.103.

Λύση:

Θεωρούμε ως σύστημα το κουτί. Η συνιστώσα της δύναμης του βάρους που είναι παράλληλη στο επικλινές είναι $mg \sin \theta$, και επιταχύνει το σώμα προς τα κάτω, σε απόσταση d μέχρι να συναντήσει το ελατήριο, όπου και η δύναμη του ελατηρίου αντιτίθεται στη βαρυτική δύναμη και επιβραδύνει το σώμα σε απόσταση x μέχρι το σώμα να έρθει σε στιγμιαία ακινησία. Η δύναμη του βάρους παράγει θετικό έργο στο σώμα όσο αυτό ολισθαίνει προς τα κάτω σε συνολική απόσταση $d + x$, και η δύναμη του ελατηρίου παράγει αρνητικό έργο στο σώμα όσο ολισθαίνει σε απόσταση x . Υπόλοιπες δυνάμεις δεν παράγουν έργο. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας - Έργου από τη θέση που το κουτί βάλλεται ως τη θέση μέγιστης συμπίεσης του ελατηρίου, έχουμε

$$\Delta K_{i \rightarrow f} = \sum W_{ext} \quad (2.915)$$

$$K_f - K_i = W_g + W_s \quad (2.916)$$

$$\frac{1}{2} m u_f^2 - \frac{1}{2} m u_i^2 = mg(d + x) \sin \theta + \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2 \quad (2.917)$$

$$0 - \frac{1}{2} m u_i^2 = mg(d + x) \sin \theta + 0 - \frac{1}{2} k x^2 \quad (2.918)$$

$$\frac{1}{2} u_i^2 + g(d + x) \sin \theta - \frac{k}{2m} x^2 = 0 \quad (2.919)$$

$$\frac{k}{2m} x^2 - (g \sin \theta) x - \frac{u_i^2}{2} - (g \sin \theta) d = 0 \quad (2.920)$$

$$x = \frac{g \sin \theta \pm \sqrt{(g \sin \theta)^2 - 4 \frac{k}{2m} \left(-\frac{u_i^2}{2} - (g \sin \theta) d \right)}}{2 \frac{k}{2m}} \quad (2.921)$$

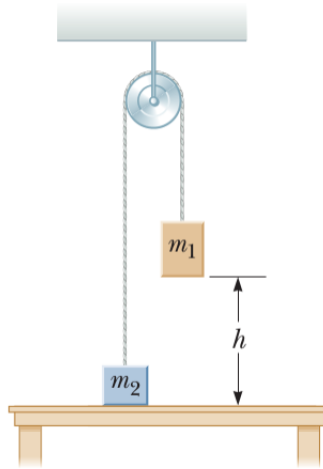
Αντικαθιστώντας και κρατώντας τη θετική λύση, έχουμε

$$x = 0.131 \text{ m} \quad (2.922)$$

Παράδειγμα 2.104:

Δυο αντικείμενα συνδέονται με σχοινί που περνά γύρω από μια τροχαλία. Το βάρος της τροχαλίας και του σχοινιού είναι αμελητέα. Το αντικείμενο μάζας $m_1 = 5 \text{ kg}$, αρχικά ακίνητο, αφήνεται να πέσει από ύψος $h = 4 \text{ m}$ πάνω από το τραπέζι. Βρείτε

- (α') την ταχύτητα του σώματος μάζας $m_2 = 3 \text{ kg}$ τη στιγμή που το σώμα μάζας m_1 χτυπά στο τραπέζι.
 (β') το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα μάζας m_2 .



Σχήμα 2.120: Σχήμα Άσκησης 2.104.

Λύση:

- (α') Θετούμε $y = 0$ στην επιφάνεια του τραπεζιού. Η μόνη δύναμη που ασκείται στα σώματα είναι αυτή του βάρους, που είναι συντηρητική. Το σύστημα {σώματα, σχοινί, τροχαλία, Γη} είναι απομονωμένο. Με χρήση της Αρχής Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας στο σύστημα έχουμε

$$\Delta E_{mech}^{A \rightarrow B} = 0 \quad (2.923)$$

$$(K_1 + K_2 + U_g)_A = (K_1 + K_2 + U_g)_B \quad (2.924)$$

με το δείκτη $_B$ να δηλώνει τη στιγμή ακριβώς πριν το μεγάλο σώμα χτυπήσει στην επιφάνεια. Αν θεωρήσουμε ως διάταξη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας την αρχική διάταξη, τότε

$$0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u_B^2 + m_2gh + m_1g(-h) \quad (2.925)$$

και λύνοντας ως προς u_B έχουμε

$$u_f = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2)gh}{m_1 + m_2}} = 4.43 \text{ m/s} \quad (2.926)$$

- (β') Τώρα εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για το σύστημα του σώματος μάζας 3 kg και της Γης (σύστημα {σώμα, Γη}) κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος ανάμεσα στη στιγμή που το σχοινί αρχίζει να κινείται στην τροχαλία και τη στιγμή που το σώμα μάζας 3 kg φτάνει το μέγιστο ύψος του. Το σύστημα είναι απομονωμένο και η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι αυτή του βάρους. Άρα θα είναι

$$\Delta E_{mech} = 0 \quad (2.927)$$

$$\Delta K + \Delta U = 0 \quad (2.928)$$

$$K_f - K_i + U_{gf} - U_{gi} = 0 \quad (2.929)$$

$$0 - \frac{1}{2}m_2u^2 + m_2g\Delta y = 0 \quad (2.930)$$

$$\Delta y = \frac{u^2}{2g} \quad (2.931)$$

$$y_{max} = 4 + \Delta y = 5 \text{ m} \quad (2.932)$$

Παράδειγμα 2.105:

Σε μια βιοψία μια βελόνα μάζας $m = 5.6 \text{ g}$ εισάγεται στον ιστό του ασθενή με ελατήριο σταθεράς $k = 375 \text{ N/m}$. Το ελατήριο είναι αρχικά συμπιεσμένο κατά $x = 8.1 \text{ cm}$ και εκτοξεύει την βελόνα στην οριζόντια κατεύθυνση. Η βελόνα φεύγει από το ελατήριο και μόλις το ελατήριο φτάνει στο φυσικό του μήκος, διεισδύει $d_1 = 2.4 \text{ cm}$ μέσα στον ιστό, ο οποίος ασκεί σε αυτήν δύναμη αντίστασης 7.6 N . Στη συνέχεια η βελόνα εισχωρεί $d_2 = 3.5 \text{ cm}$ σε ένα όργανο, το οποίο της ασκεί δύναμη αντίστασης 9.2 N . Να βρείτε:

(α') τη μέγιστη ταχύτητα της βελόνας.

(β') την τελική της ταχύτητα, προτού σταματήσει απότομα (λόγω ενός κολάρου που είναι προσαρμοσμένο πάνω της) μετά από 5.9 cm συνολικής διείσδυσης.

Λύση:

(α') Θεωρούμε ως σύστημα το {βελόνα, ελατήριο}. Η μέγιστη ταχύτητα συμβαίνει ακριβώς πριν η βελόνα εισέλθει στο σώμα. Υποθέτουμε ότι η βελόνα εισέρχεται σε οριζόντια διεύθυνση. Τότε από την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ της θέσης συμπίεσης του ελατηρίου και της θέσης που η βελόνα μόλις αποχωρίζεται το ελατήριο (οπότε και το σύστημα είναι απομονωμένο με μόνη συντηρητική δύναμη αυτή του ελατηρίου), έχουμε

$$\Delta E_{mech} = 0 \quad (2.933)$$

$$\Delta K + \Delta U = 0 \quad (2.934)$$

$$K_f - K_i + U_f - U_i = 0 \quad (2.935)$$

$$K_f = K_i - U_f + U_i \quad (2.936)$$

$$\frac{1}{2}mu_{max}^2 = 0 - 0 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.937)$$

$$u_{max} = 6.62 \text{ m/s} \quad (2.938)$$

(β') Μπορούμε να θεωρήσουμε τις δυνάμεις αντίστασης ως “τριβές”. Η ενέργεια του πρώτου ερωτήματος μετατρέπεται εν μέρει σε θερμική ενέργεια στο μαλακό ιστό, εν μέρει σε θερμική ενέργεια στα όργανα, και εν μέρει σε κινητική ενέργεια της βελόνας ακριβώς πριν σταματήσει. Θεωρούμε ως σύστημα τη {βελόνα, ελατήριο}, και αυτό είναι ένα μη απομονωμένο σύστημα. Ας γράψουμε την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας για αυτό το πρόβλημα, από την αρχική θέση συμπίεσης του ελατηρίου ως την τελική θέση της βελόνας, ακριβώς πριν σταματήσει μετά τη διείσδυση στους ιστούς:

$$\Delta E_{sys} = \sum W_{ext} \quad (2.939)$$

$$\Delta K + \Delta U_s = W_{fk1} + W_{fk2} \quad (2.940)$$

$$K_f - K_i + U_{sf} - U_{si} = -f_{k1}d_1 - f_{k2}d_2 \quad (2.941)$$

$$\frac{1}{2}mu_f^2 - 0 + 0 - \frac{1}{2}kx^2 = -f_{k1}d_1 - f_{k2}d_2 \quad (2.942)$$

$$u_f = \frac{-f_{k1}d_1 - f_{k2}d_2 + \frac{1}{2}kx^2}{\frac{1}{2}m} = 5.1 \text{ m/s} \quad (2.943)$$

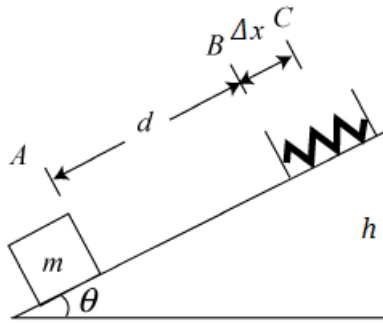
Παράδειγμα 2.106:

Ένα ελατήριο με σταθερά $k = 200 \text{ N/m}$ είναι σταθεροποιημένο στην κορυφή λείου κεκλιμένου υπό γωνία $\theta = 40$ μοιρών. Ένα σώμα μάζας 1.0 kg εκτοξεύεται προς τα πάνω στο κεκλιμένο, από αρχική θέση που απέχει $d = 0.6 \text{ m}$ από τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου, και που έχει κινητική ενέργεια $K_i = 16.0 \text{ J}$.

- (α') Ποιά είναι η κινητική ενέργεια του σώματος τη στιγμή που το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά 0.20 m ;
 (β') Με πόση κινητική ενέργεια πρέπει να εκτοξευθεί το σώμα προς τα πάνω στο κεκλιμένο αν θέλουμε να σταματήσει στιγμιαία όταν έχει συμπιέσει το ελατήριο κατά 0.4 m ;

Λύση:

Θεωρούμε ως σύστημα το {σώμα, Γη, ελατήριο}, το οποίο είναι απομονωμένο, και σε αυτό παράγουν έργο μόνο συντηρητικές δυνάμεις (δύναμη ελατηρίου και δύναμη βάρους). Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας την αρχική θέση της διάταξης. Δείτε το Σχήμα 2.121.



Σχήμα 2.121: Λύση Άσκησης 2.106.

- (α') Από την ΑΔΜΕ μεταξύ της αρχικής θέσης Α και τελικής θέσης (συμπίεση ελατηρίου κατά 0.2) C, έχουμε

$$\Delta E_{mech}^{A \rightarrow C} = 0 \quad (2.944)$$

$$K_A + U_{gA} + U_{sA} = K_C + U_{gC} + U_{sC} \quad (2.945)$$

$$16 + 0 + 0 = K_f + mgh + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \quad (2.946)$$

$$K_f = 16 - mgh - \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \quad (2.947)$$

$$= 16 - mg((d + \Delta x) \sin(\theta)) - \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \quad (2.948)$$

$$= 16 - 1 \cdot 9.8 \cdot 0.514 \cdot \sin(40^\circ) - \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot (0.2)^2 \quad (2.949)$$

$$= 6.96 \text{ J} \quad (2.950)$$

- (β') Από την ΑΔΜΕ μεταξύ της αρχικής θέσης (Α) και της θέσης συμπίεσης κατά 0.4 (C), έχουμε

$$\Delta E_{mech}^{A \rightarrow C} = 0 \quad (2.951)$$

$$K_A + U_{gA} + U_{sA} = K_C + U_{gC} + U_{sC} \quad (2.952)$$

$$K_i + 0 + 0 = 0 + mg((d + \Delta x) \sin(\theta)) + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \quad (2.953)$$

$$K_i = mg((d + \Delta x) \sin(\theta)) + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \quad (2.954)$$

$$= 1 \cdot 9.8 \cdot 0.64279 + \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot (0.4)^2 \quad (2.955)$$

$$= 22.2 \text{ J} \quad (2.956)$$

Παράδειγμα 2.107:

Ψάχνοντας το οικογενειακό σας αρχείο, βρίσκετε ένα βίντεο που δείχνει τον εαυτό σας σε μικρή ηλικία να κάνει τσουλήθρα στο πάρκο. Αν τότε είχατε βάρος 267 N και η τσουλήθρα είχε μήκος 6.1 m, σχηματίζοντας γωνία 20° με το οριζόντιο επίπεδο

(α') πόση ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια κατά την ολίσθησή σας από την κορυφή ως τη βάση, αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ εσάς και της τσουλήθρας είναι 0.10;

(β') αν ξεκινάτε από την κορυφή της τσουλήθρας με αρχική ταχύτητα 0.457 m/s, ποιά η ταχύτητά σας στο τέarma της τσουλήθρας;

Βοήθεια: Για το (β) ερώτημα, θεωρήστε ως σύστημα εσάς, την τσουλήθρα, και τη Γη. Θεωρήστε κατάλληλη διάταξη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.

Λύση:

Θεωρούμε ως σύστημα {εσάς, τσουλήθρα}, και έναν άξονα $x'x$ παράλληλα με το κεκλιμένο της τσουλήθρας. Έστω h το ύψος της τσουλήθρας και $d = 6.1$ το μήκος της. Θεωρούμε θετικές φορές τις συμβατικές.

(α') Ισορροπούμε στον άξονα $y'y$ κατά την κατάβαση, οπότε

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{n} + m\vec{g} \cos(\theta) = \vec{0} \implies n = mg \cos(\theta) \quad (2.957)$$

Η μεταβολή στη θερμική ενέργεια είναι

$$\Delta E_{th} = f_k d = \mu_k n d = \mu_k mg \cos(\theta) d = 153.04 \text{ J} \quad (2.958)$$

(β') Θεωρούμε ως σύστημα {εσάς, την τσουλήθρα, και τη Γη}. Το σύστημα είναι απομονωμένο με εσωτερικές συντηρητικές και μη-συντηρητικές δυνάμεις να παράγουν έργο εντός του. Θεωρούμε διάταξη μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας όταν φτάνετε στη βάση της τσουλήθρας. Από την ΑΔΕ μεταξύ της διάταξης στην κορυφή της τσουλήθρας και στη βάση της τσουλήθρας, έχουμε

$$\Delta E_{sys} = 0 \quad (2.959)$$

$$\Delta K + \Delta U_g + \Delta E_{th} = 0 \quad (2.960)$$

$$K_f - K_i + U_{gf} - U_{gi} + \Delta E_{th} = 0 \quad (2.961)$$

$$K_f = \frac{1}{2} m u_i^2 + mgh - 0 - 153.04 \quad (2.962)$$

$$= \frac{1}{2} m u_i^2 + mgd \sin(\theta) - 153.04 \quad (2.963)$$

$$u_f = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} m u_i^2 + mgd \sin(\theta) - 153.04}{\frac{1}{2} m}} \quad (2.964)$$

$$= 5.4876 \text{ m/s} \quad (2.965)$$

3. Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

3.1 Εισαγωγή

Πολλά φυσικά φαινόμενα γίνονται κατανοητά μέσα από της έννοιες των ταλαντώσεων και των κυμάτων. Για παράδειγμα:

- Οι ουρανοξύστες και οι γέφυρες σχεδιάζονται έτσι ώστε να ταλαντώνονται
- Η ραδιοφωνία και η τηλεόραση βασίζουν τη λειτουργία τους σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα και στον τρόπο διάδοσης τους
- Η ίδια η Φυσική στο ατομικό της επίπεδο περιέχει πληροφορία που φέρεται από κύματα
- Ο ήχος και η φωνή παράγονται από κάποιου είδους ταλαντώσεις

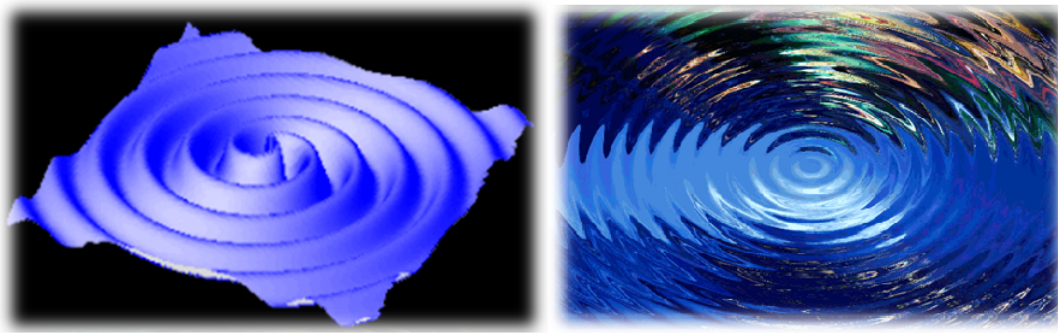
3.2 Περιοδική Κίνηση

Ονομάζουμε **περιοδική κίνηση** την κίνηση ενός σώματος όταν επιστρέφει στην αρχική του θέση ανά τακτά **σταθερά χρονικά διαστήματα**. Μπορείτε να σκεφτείτε πολλές περιοδικές κινήσεις από την καθημερινότητά σας: οι δείκτες του ρολογιού εκτελούν περιοδική κίνηση, η Γη που κινείται γύρω από τον Ήλιο, οι διαλέξεις ενός μαθήματος, ο χτύπος της καρδιάς, και τόσα άλλα – που φυσικά δεν είναι ακριβώς περιοδικές κινήσεις αλλά σχεδόν περιοδικές. Μαθηματικά, ως περιοδική ορίζεται μια συνάρτηση $f(t)$ όταν ικανοποιεί τη σχέση

$$f(t) = f(t + T), \quad \text{για } T > 0, \quad \forall t > 0 \quad (3.1)$$

με T να αποτελεί το μικρότερο χρονικό διάστημα που το σώμα επαναλαμβάνει την κίνηση του και ονομάζεται **περίοδος** της κίνησης.

Το δεύτερο όμως αντικείμενο της μελέτης μας είναι το **κύμα**. Τι είναι ένα κύμα; **Κύμα** ονομάζεται μια διαταραχή που μεταδίδεται στο χώρο και στο χρόνο. Η διαταραχή αυτή είναι, πολλές φορές, περιοδική κι έτσι και τα κύματα μπορούν να θεωρηθούν και ως περιοδικά φαινόμενα: αυτό που επαναλαμβάνεται είναι η ίδια η διαταραχή. Ο όρος “μηχανικό κύμα” χαρακτηρίζει τη μεταφορά της διαταραχής αυτής διαμέσω ενός μέσου (νερού, αέρα, νήματος, κλπ), σε αντίθεση με τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που δεν απαιτούν μέσο διάδοσης. Ένα συνθετικό και ένα πραγματικό κύμα βλέπετε στο Σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1: Κύματα.

Γιατί όμως πρέπει να μελετήσουμε πρώτα τις ταλαντώσεις αντί να πάμε κατ' ευθείαν στα – πιο ενδιαφέροντα – κύματα; Γιατί όλες (σχεδόν) οι περιοδικές κινήσεις, συμπεριλαμβανομένων και πολύ σύνθετων κυμάτων, μπορούν να μοντελοποιηθούν ως άθροισμα **απλών αρμονικών κινήσεων**, δηλ. ταλαντώσεων! Ας κάνουμε λοιπόν πρώτα μια περιήγηση στο αντικείμενο των απλών αρμονικών ταλαντώσεων, οι γνώσεις που θα πάρουμε θα είναι πολύ χρήσιμες για να κατανοήσουμε τα κύματα.

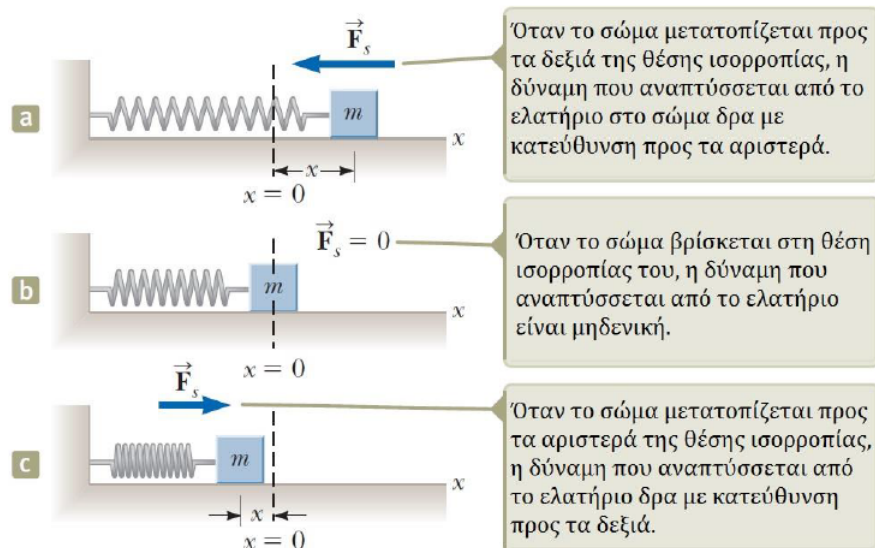
3.3 Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Ως Απλή Αρμονική Ταλάντωση (ΑΑΤ) ονομάζεται η περιοδική κίνηση στην οποία η δύναμη που ασκείται σε ένα σύστημα είναι ανάλογη της θέσης ενός σώματος του συστήματος, σε σχέση με μια θέση ισορροπίας του συστήματος, και έχει πάντα κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας του συστήματος. Όλες οι περιοδικές κινήσεις που συμβαίνουν στη φύση μπορούν να μοντελοποιηθούν ως άθροισμα απλών αρμονικών κινήσεων.

Αν δίνουμε έναν πιο ακριβή ορισμό, θα λέγαμε ότι όταν η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα έχει πάντα κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας του σώματος, η κίνηση που πραγματοποιεί το σώμα λέγεται Απλή Αρμονική Κίνηση ή Απλή Αρμονική Ταλάντωση. Γνωρίζετε ήδη μια τέτοια κίνηση! Ποιά είναι αυτή;

3.3.1 Η κίνηση του σώματος - ελατηρίου ως ΑΑΤ

Μα φυσική η κίνηση του συστήματος {σώμα, ελατήριο}. Ας τη μελετήσουμε. Δείτε το Σχήμα 3.2 και διαβάστε προσεκτικά την περιγραφή κάθε στιγμιότυπου. Μπορούμε να περιγράψουμε μαθηματικά την



Σχήμα 3.2: ΑΑΤ σώματος + ελατηρίου.

κίνηση του σώματος που είναι δεμένο στο ελατήριο; Εφόσον είναι ένα σώμα σε κίνηση υπό επίδραση δύναμης, θα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση, κι έτσι

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \iff \vec{F}_s = m\vec{a}_x \implies F_s = -kx = ma_x \implies a_x = -\frac{k}{m}x \quad (3.2)$$

Βλέπετε ότι η επιτάχυνση είναι ανάλογη της μετατόπισης από μια θέση ισορροπίας και η κατεύθυνση της είναι αντίθετη της μετατόπισης από αυτή τη θέση. Τα παραπάνω αποτελούν έναν ακόμα ορισμό της Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης.

3.3.2 Θέση AAT

Ξέρουμε από την Κινητική ότι η επιτάχυνση αποτελεί τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης θέσης ως προς το χρόνο, δηλ.

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\frac{k}{m}x(t) \quad (3.3)$$

Θέτοντας ως $\omega^2 = k/m$, καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t) \quad (3.4)$$

Τέτοιες εξισώσεις που εμπλέκουν παραγώγους μιας συνάρτησης ονομάζονται **διαφορικές εξισώσεις**. Η λύση τέτοιων εξισώσεων είναι δε θα μας απασχολήσει. Μπορούμε όμως να σκεφτούμε διαισθητικά ότι η εξίσωση (3.4) ικανοποιείται από μια συνάρτηση $x(t)$ της οποίας η δεύτερη παράγωγος ως προς το χρόνο είναι η ίδια συνάρτηση επί ένα συντελεστή $-\omega^2$. Αν σκεφτούμε λίγο, μπορούμε να βρούμε μια τέτοια συνάρτηση:

$$x(t) = \cos(\lambda t) \implies \frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\lambda^2 \cos(\lambda t) = -\lambda^2 x(t) \quad (3.5)$$

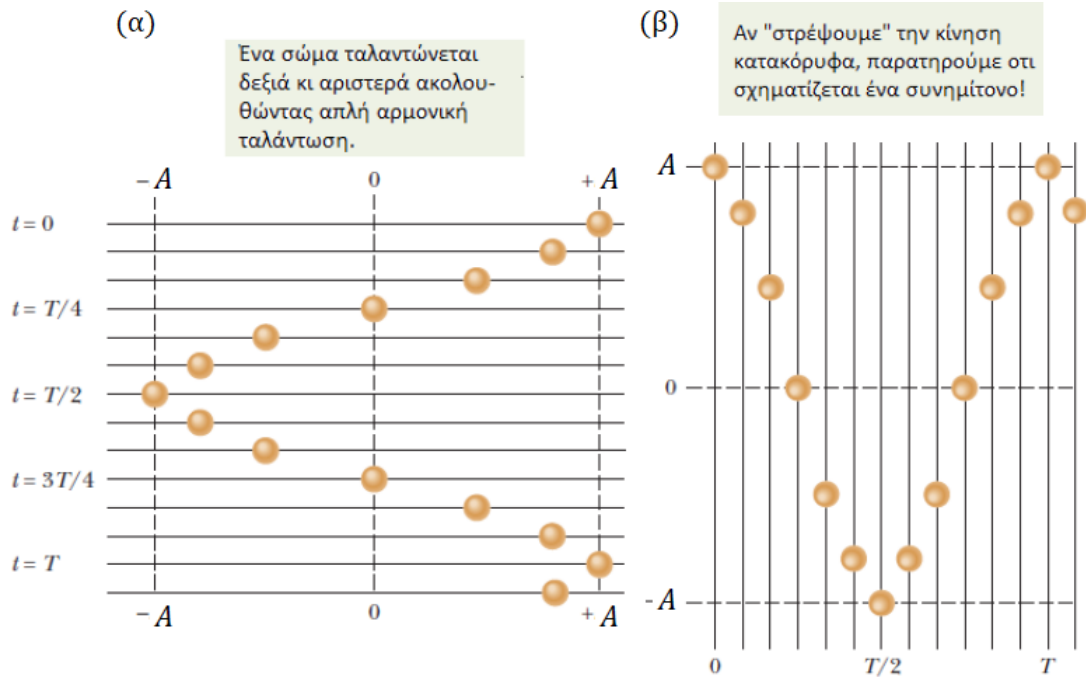
Άρα η ημιτονοειδής συνάρτηση είναι μια λύση της εξίσωσης αυτής. Στη γενικότερη μορφή της, η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.6)$$

με

- A το **πλάτος** της ταλάντωσης
- ω τη **συχνότητα** της ταλάντωσης
- ϕ την **αρχική φάση** ή τη φάση μετατόπισης της ταλάντωσης
- $\omega t + \phi$ τη συνολική **φάση** (ή απλά, τη φάση) της ταλάντωσης

Καταλαβαίνετε λοιπόν ότι η θέση του σώματος όσο αυτό ταλαντώνεται γύρω από μια θέση ισορροπίας μεταβάλλεται ημιτονοειδώς ως προς το χρόνο! Αν φωτογραφίσουμε το ταλαντούμενο σώμα με την πάροδο του χρόνου, θα δούμε μια εικόνα όπως στο Σχήμα 3.3(α), στην οποία η αρχική θέση του σώματος ήταν σε μια θέση $x(0) = A$. Η εικόνα δείχνει τη θέση του σώματος όταν εκτελεί μια πλήρη ταλάντωση, δηλ. όταν επιστρέφει μια φορά στην αρχική του θέση. Η εικόνα στο Σχήμα 3.3(α) είναι μια συνάρτηση χρόνου-πλάτους. Θα προτιμούσαμε το χρόνο στον οριζόντιο άξονα, οπότε αν στρέψουμε την εικόνα όπως στο Σχήμα 3.3(β), θα παρατηρήσουμε ακριβώς μια ημιτονοειδή συνάρτηση του χρόνου! Τι σημαίνουν όμως οι σταθερές που εμφανίζονται στη συνάρτηση θέσης $x(t)$;



Σχήμα 3.3: Στιγμιότυπα απλής αρμονικής ταλάντωσης.

- Η συχνότητα ταλάντωσης ή **γωνιακή συχνότητα**

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.7)$$

ορίζει πόσο γρήγορα ταλαντώνεται το σώμα και μετριέται σε rad/s. Θα δούμε ξανά τη σχέση αυτή σε σχέση με την κυκλική κίνηση λίγο αργότερα. Προσέξτε ότι η εξίσωση περιλαμβάνει τις ποσότητες k , m , οπότε αφορά μόνο ταλαντώσεις που μπορούν να μοντελοποιηθούν ως σύστημα ελατηρίου-σώματος.

- Η **περίοδος** T ορίζεται ως ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη ταλάντωση και ισούται με

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3.8)$$

με την τελευταία σχέση να αφορά ξανά συστήματα που μοντελοποιούνται ως ελατήριο και σώμα.

- Η **συχνότητα** f ορίζεται ως

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.9)$$

και ορίζει το πλήθος των ταλαντώσεων που εκτελούνται στη μονάδα του χρόνου – ξανά η τελευταία εξίσωση είναι ειδική περίπτωση για το σύστημα ελατήριο-σώμα. Η συχνότητα αυτή μετριέται σε Herz - Hz. Η σχέση γωνιακής συχνότητας και γραμμικής συχνότητας είναι απλή: $\omega = 2\pi f$.

Μια μικρή προσοχή χρειάζεται η ποσότητα της αρχικής φάσης ϕ . Θέτοντας $t = 0$ παίρνουμε

$$x(0) = A \cos(\phi) \quad (3.10)$$

οπότε ουσιαστική η αρχική φάση ϕ καθορίζει ποιά είναι η τιμή της συνάρτησης θέσης του σώματος όταν πατάμε το χρονόμετρο και ξεκινάμε να μελετάμε το φαινόμενο της ταλάντωσης. Με άλλα λόγια, μας λέει σε ποιά θέση βρίσκεται το ταλαντούμενο σώμα όταν ξεκινάμε ($t = 0$) να μελετάμε την ταλάντωση: η θέση του μπορεί να είναι δεξιά του σημείου ισορροπίας ($\cos(\phi) > 0$) ή και αριστερά του σημείου ισορροπίας

$(\cos(\phi) < 0)$ – φυσικά μπορεί να είναι και ακριβώς στο σημείο ισορροπίας ($\cos(\phi) = 0$).

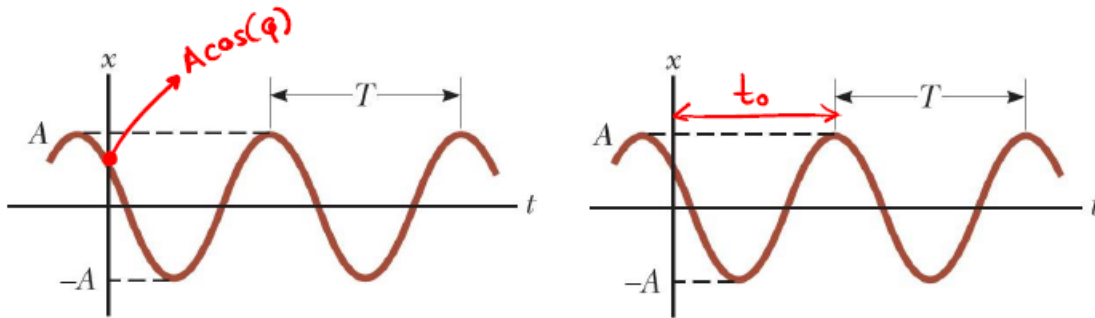
Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε τη γενική σχέση της θέσης $x(t)$ ως

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.11)$$

$$= A \cos(\omega(t + \phi/\omega)) \quad (3.12)$$

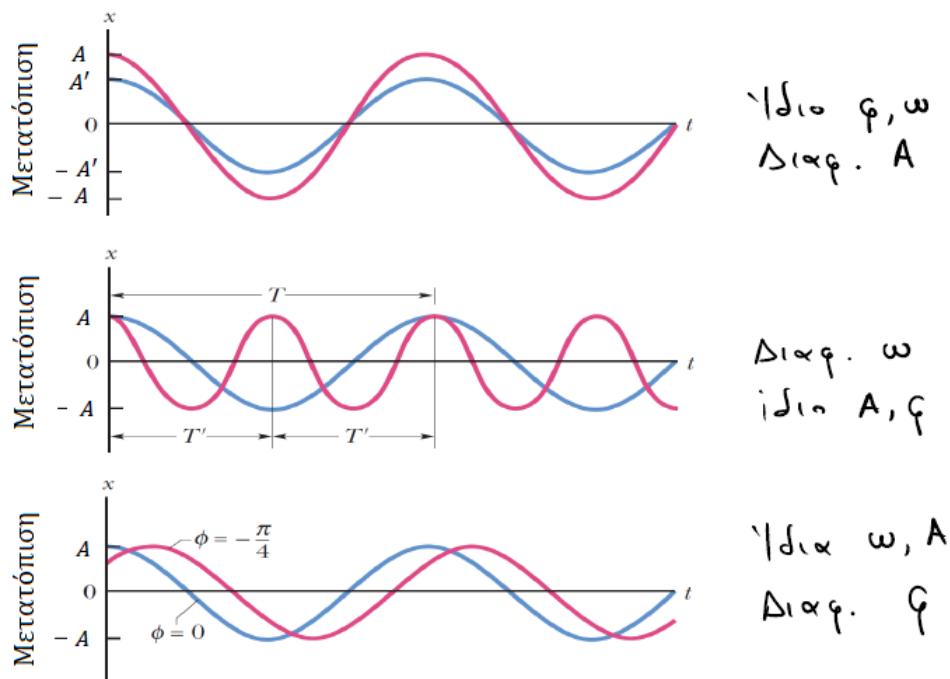
$$= A \cos(\omega(t - t_0)) \quad (3.13)$$

με $t_0 = -\frac{\phi}{\omega}$. Βλέπετε ότι η χρονική στιγμή t_0 μας δείχνει τη χρονική μετατόπιση σε δευτερόλεπτα της συνάρτησης $A \cos(\omega t)$ από τη θέση όπου $t = 0$. Αυτή η χρονική στιγμή περιέχει την αρχική φάση ϕ , γι' αυτό και πολλές φορές η αρχική φάση ονομάζεται και φάση μετατόπισης. Αυτές οι δυο ερμηνείες της αρχικής φάσης ϕ φαίνονται στο Σχήμα 3.4. Παρ' όλου που οι υπόλοιπες σταθερές είναι σχετικά



Σχήμα 3.4: Αρχική φάση ταλάντωσης.

κατανοητές από τους ορισμούς τους, ας δούμε ένα σχήμα και για αυτές. Δείτε το Σχήμα 3.5 και προσέξτε πως οι μεταβολές στις σταθερές αυτές αντικατοπτρίζονται στο γράφημα της συνάρτησης θέσης $x(t)$.



Σχήμα 3.5: Μεταβολές στις σταθερές της συνάρτησης θέσης.

3.3.3 Ταχύτητα και Επιτάχυνση ΑΑΤ

Ξανά η Κινητική έρχεται προς βοήθειά μας αν θέλουμε να βρούμε πόσο γρήγορα κινείται ένα σώμα που εκτελεί ΑΑΤ. Από τις σχέσεις

$$u(t) = \frac{d}{dt}x(t) \quad (3.14)$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) \quad (3.15)$$

μπορούμε εύκολα να βρούμε ότι

$$u(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (3.16)$$

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.17)$$

Παρατηρήστε ότι η επιτάχυνση δεν είναι σταθερή. Οι μέγιστες τιμές που μπορούν να πάρουν οι παραπάνω συναρτήσεις είναι

$$u_{max} = \omega A = A \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.18)$$

$$a_{max} = \omega^2 A = A \frac{k}{m} \quad (3.19)$$

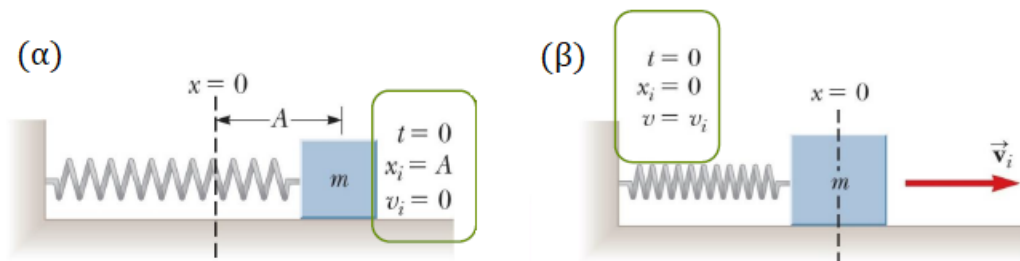
με τις τελευταίες σχέσεις στην ισότητα να αφορούν σύστημα ελατήριο-σώμα.

3.3.4 Λύση ΑΑΤ

Θα παρατηρήσατε ότι όλη η συζήτηση ως τώρα είχε ως βάση τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει την ΑΑΤ. Σε ένα δεδομένο πρόβλημα όμως, θέλουμε να βρούμε ακριβώς τη σχέση που περιγράφει τη θέση, την ταχύτητα, και την επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί ΑΑΤ. Πώς θα το κάνουμε αυτό;

Ας ξεκινήσουμε από τα εύκολα: οι ποσότητες k, m καθορίζουν τη γωνιακή συχνότητα ω , κι αυτές είναι σταθερές σε κάθε περίπτωση. Αντίθετα, το πλάτος A και η αρχική φάση ϕ καθορίζονται από τη στιγμή που πατάμε το χρονόμετρο και παρακολουθούμε την ταλάντωση ή, με άλλα λόγια, τι συμβαίνει στην ταλάντωση για $t = 0$. Το τελευταίο μοντελοποιείται στην ΑΑΤ με τις περίφημες **αρχικές συνθήκες**, που δεν είναι τίποτε άλλο από ένα σύνολο εξισώσεων που μας περιγράφει την κατάσταση της ΑΑΤ για $t = 0$. Ας δούμε δυο παραδείγματα για να γίνει κατανοητό αυτό.

Δείτε το Σχήμα 3.6(α). Για $t = 0$, το σώμα βρίσκεται στη θέση $x(0) = A$ και η ταχύτητά του είναι



Σχήμα 3.6: Παραδείγματα εύρεσης της εξίσωσης της ΑΑΤ.

μηδενική, $u(0) = 0$. Άρα καταλαβαίνουμε ότι το ελατήριο βρίσκεται σε πλήρη έκταση και στιγμιαία

το σώμα έχει ακινητοποιηθεί πριν αρχίσει την επιστροφή του προς τη θέση ισορροπίας. Οι δυο αυτές εξισώσεις αποτελούν τις αρχικές συνθήκες της ΑΑΤ:

$$x(0) = A \quad (3.20)$$

$$u(0) = 0 \quad (3.21)$$

Παρατηρήστε ότι οι αρχικές συνθήκες της διαφορικής εξίσωσης αποτελούνται από μια τιμή της $x(t)$ και μια τιμή της $\frac{d}{dt}x(t) = u(t)$: και οι δυο για $t = 0$. Ας τις αξιοποιήσουμε.

$$x(0) = A \cos(\phi) = A \quad (3.22)$$

$$u(0) = -\omega A \sin(\phi) = 0 \quad (3.23)$$

Από τις δυο αυτές σχέσεις (εδώ τυγχάνει να αρκεί και η πρώτη σχέση μόνο) συμπεραίνουμε ότι $\phi = 0$. Έτσι η ΑΑΤ περιγράφεται από τη σχέση

$$x(t) = A \cos(\omega t) \quad (3.24)$$

Δείτε τώρα το Σχήμα 3.6(β). Σε αυτήν την περίπτωση, πατήσαμε το χρονόμετρο μας όταν το σώμα περνά από το σημείο ισορροπίας και κατευθύνεται προς τα δεξιά. Οι αρχικές μας συνθήκες τώρα είναι οι

$$x(0) = A \cos(\phi) = 0 \quad (3.25)$$

$$u(0) = -\omega A \sin(\phi) = u_i \quad (3.26)$$

Η λύση της πρώτης εξίσωσης δίνει δυο τιμές, $\pi/2$ και $-\pi/2$. Η δεύτερη εξίσωση έρχεται να μας κάνει τη λύση μοναδική, αφού η ταχύτητα είναι θετική (το διάνυσμα κατευθύνεται προς τα δεξιά), οι ποσότητες ω , A είναι θετικές, άρα πρέπει το $\sin(\phi)$ να είναι αρνητικό, που ισχύει για $\phi = -\pi/2$. Έτσι η σχέση που περιγράφει την ταλάντωση είναι η

$$x(t) = \frac{u_i}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{u_i}{\omega} \sin(\omega t) \quad (3.27)$$

Βλέπετε λοιπόν πως οι αρχικές συνθήκες μας δίνουν μοναδική λύση στη διαφορική εξίσωση που περιγράφει γενικά την ΑΑΤ, και η μοναδική λύση αυτή εξαρτάται από τη στιγμή που ξεκινάμε να παρατηρούμε τον ταλαντωτή.

Βήματα Επίλυσης Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή

- Σημειώστε ή βρείτε από το πρόβλημα και την εκφώνηση τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Πότε πατήσατε το χρονόμετρό σας ($t = 0$); Τι συνέβη όσον αφορά τη θέση, x_i , και την ταχύτητα, u_i , του ταλαντωτή εκείνη τη χρονική στιγμή; Αυτές είναι οι αρχικές σας συνθήκες!
- Εφαρμόστε τις αρχικές συνθήκες στις γενικές λύσεις

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.28)$$

$$u(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (3.29)$$

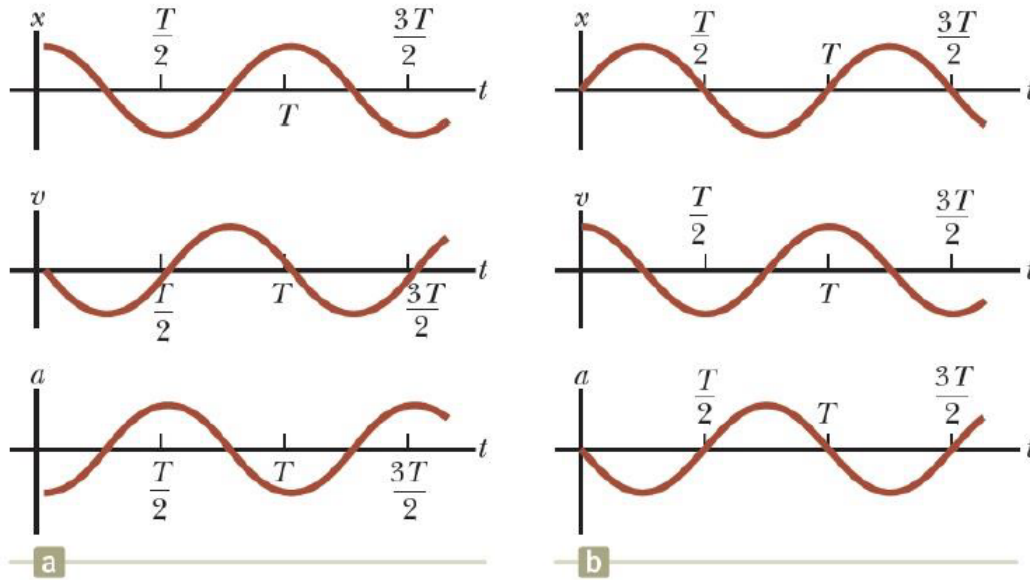
δηλ.

$$x(0) = A \cos(\phi) = x_i \quad (3.30)$$

$$u(0) = -\omega A \sin(\phi) = u_i \quad (3.31)$$

- Βρείτε την αρχική φάση ϕ και στη συνέχεια το πλάτος A .
- Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης του ταλαντωτή.

Τα γραφήματα θέσης, ταχύτητας, και επιτάχυνσης που παράγονται στις δυο αυτές περιπτώσεις δίνονται στο Σχήμα 3.7. Μπορείτε να παρατηρήσετε ότι



Σχήμα 3.7: Γραφήματα θέσης, ταχύτητας, επιτάχυνσης για τις δυο περιπτώσεις του κειμένου.

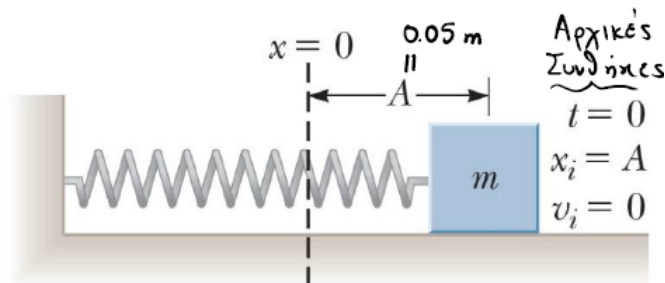
- η μέγιστη, κατ' απόλυτη τιμή, ταχύτητα συμβαίνει όταν $x(t) = 0$ κι όταν $a(t) = 0$, δηλ. όταν το ελατήριο βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, όπου και η επιτάχυνσή του είναι στιγμαία μηδενική (αφού η δύναμη του ελατηρίου παύει να ασκείται – 1ος νόμος του Newton).
- η μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή επιτάχυνση συμβαίνει όταν $x(t) = \pm A$ κι όταν $v(t) = 0$, δηλ. όταν το ελατήριο βρίσκεται στη μέγιστη έκτασή του όπου στιγμαία ακινητοποιείται.

Ας δούμε ένα απλό αλλά πλήρες παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.1:

Ένα σώμα μάζας $m = 0.2 \text{ kg}$ είναι συνδεδεμένο με αβαρές ελατήριο για το οποίο η σταθερά του είναι $k = 5 \text{ N/m}$. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το σώμα μετατοπίζεται κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο, όπως στο Σχήμα 3.8.

- Βρείτε την περίοδο της κίνησης.
- Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.
- Βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση του σώματος.
- Γράψτε όλες τις εξισώσεις κίνησης.



Σχήμα 3.8: Παράδειγμα ταλάντωσης με σώμα σε ελατήριο.

Λύση:

Καταλαβαίνουμε ότι αφού η ταχύτητα για $t = 0$ είναι ίση με μηδέν (δείτε τις αρχικές συνθήκες), τότε το ελατήριο έχει φτάσει στη μέγιστη έκτασή του, και άρα η μετατόπιση $x_i = 0.05$ θα αποτελεί και το πλάτος της ταλάντωσης $A = 0.05$ m.

(α') Η περίοδος είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{5} \text{ s} \quad (3.32)$$

(β') Η μέγιστη ταχύτητα δίνεται από τη σχέση

$$u_{\max} = \omega A = 5A = 5 \cdot 0.05 = 0.25 \text{ m/s} \quad (3.33)$$

(γ') Η μέγιστη επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση

$$a_{\max} = \omega^2 A = 25A = 25 \cdot 0.05 = 1.25 \text{ m/s}^2 \quad (3.34)$$

(δ') Ξέρουμε ότι $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$. Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$x(0) = A \cos(\phi) = 0.05 \quad (3.35)$$

$$u(0) = -\omega A \sin(\phi) = 0 \quad (3.36)$$

Η δεύτερη σχέση μας δίνει δυο τιμές για την αρχική φάση, $\phi = 0$ και $\phi = \pi$. Όμως για $\phi = \pi$, $x(0) = A \cos(\pi) = 0.05 \implies A = -0.05$, όμως το πλάτος A της ταλάντωσης πρέπει να είναι πάντα θετικός αριθμός. Άρα υποχρεωτικά, $\phi = 0$, οπότε $A = 0.05$. Έτσι, συνολικά θα έχουμε

$$x(t) = 0.05 \cos(5t) \quad (3.37)$$

$$u(t) = -0.25 \sin(5t) \quad (3.38)$$

$$a(t) = -1.25 \cos(5t) \quad (3.39)$$

Παράδειγμα 3.2:

Τι αλλάζει στα ερωτήματα του προηγούμενου παραδείγματος αν $u_i = -0.1$ m/s; Με άλλα λόγια, αν το σώμα μετατοπιστεί κατά 5 cm από τη θέση ισορροπίας αλλά του δίνεται μια αρχική ταχύτητα $u_i = -0.1$ m/s, αντί να αφεθεί.

Λύση:

Οποσδήποτε δεν αλλάζει η περίοδος και η συχνότητα καθώς αυτές δεν εξαρτώνται από το πλάτος και την αρχική φάση του ταλαντωτή. Αφού δίνεται αρχική ταχύτητα στο σώμα, περιμένουμε το πλάτος της ταλάντωσης να είναι μεγαλύτερο από 0.05 m που ήταν πριν (σκεφτείτε ότι τώρα δεν αφήνετε το σώμα από μετατόπιση 0.05 m από θέση ισορροπίας του αλλά “του δίνετε και μια” ώστε να αποκτήσει αρχική ταχύτητα). Τώρα οι αρχικές συνθήκες είναι

$$x(0) = A \cos(\phi) = 0.05 \quad (3.40)$$

$$u(0) = -\omega A \sin(\phi) = -0.1 \quad (3.41)$$

Διαιρώντας κατά μέλη

$$-\omega \tan(\phi) = -2 \iff \tan(\phi) = \frac{2}{5} \implies \phi \approx 0.12\pi \quad (3.42)$$

Οπότε

$$A \cos(0.12\pi) = 0.05 \implies A = \frac{0.05}{\cos(0.12\pi)} \approx 0.054 \text{ m} \quad (3.43)$$

Τέλος

$$u_{\max} = \omega A = 0.27 \text{ m/s} \quad (3.44)$$

$$a_{\max} = \omega^2 A = 1.35 \text{ m/s}^2 \quad (3.45)$$

και

$$x(t) = 0.054 \cos(5t + 0.12\pi) \quad (3.46)$$

$$u(t) = -0.27 \sin(5t + 0.12\pi) \quad (3.47)$$

$$a(t) = -1.35 \cos(5t + 0.12\pi) \quad (3.48)$$

Παράδειγμα 3.3:

Η ανθρώπινη όραση θολώνει αν το κεφάλι σας δονείται με συχνότητα 29 Hz, γιατί οι δονήσεις προκαλούν συντονισμό στο σύστημα “μάτι-μυς που το συγκρατεί στη θέση του”. Αν η μάζα του ματιού σας είναι 7.5 gr, και ο μυς που το συγκρατεί μοντελοποιηθεί ως ελατήριο, δείξτε ότι η σταθερά του ελατηρίου είναι $k \approx 250 \text{ N/m}$.

Λύση:

Δεδομένης της μάζας και της συχνότητας συντονισμού, μπορούμε να βρούμε τη σταθερά ελατηρίου από τη σχέση

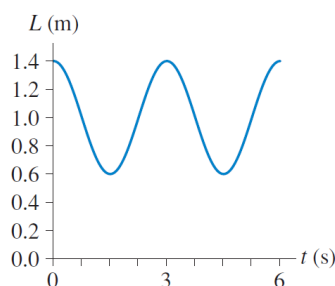
$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.49)$$

Άρα

$$k = (2\pi f)^2 m = (2\pi 29)^2 \cdot 7.5 \cdot 10^{-3} = 249 \text{ N/m} \quad (3.50)$$

Παράδειγμα 3.4:

Οι αστροναύτες στο διάστημα δεν μπορούν να ζυγιστούν χρησιμοποιώντας κοινές ζυγαριές που έχουμε στα σπίτια μας.



Σχήμα 3.9: Μήκος ελατηρίου σε ζύγισμα αστροναύτη.

Αντίθετα, μετρούν τη μάζα τους ταλαντούμενοι σε ένα μεγάλο ελατήριο. Υποθέστε ότι ένας αστροναύτης δένει στη ζώνη του ένα μεγάλο ελατήριο, και την άλλη του άκρη του σε ένα γάντζο στον τοίχο του διαστημικού σταθμού. Ένας συνάδελφος αστροναύτης τον τραβάει μακριά από τον τοίχο, και τον αφήνει ελεύθερο. Το μήκος του ελατηρίου συναρτήσει του χρόνου δίνεται στο Σχήμα 3.9.

(α') Ποιά είναι η μάζα του αστροναύτη αν η σταθερά του ελατηρίου είναι 240 N/m;

(β') Ποιά είναι η ταχύτητα του αστροναύτη καθώς αυτός ταλαντώνεται, όταν το μήκος του ελατηρίου είναι για πρώτη φορά 1.2 m;

Λύση:

Ο αστροναύτης εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

(α') Από το σχήμα, έχουμε ότι η περίοδος είναι $T = 3$ s. Άρα

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow m = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 k = 55 \text{ kg} \quad (3.51)$$

(β') Παρατηρούμε ότι οι ταλαντώσεις συμβαίνουν γύρω από ένα σημείο ισορροπίας πλάτους 1.0 m. Από το γράφημα, $A = \frac{1}{2}0.8 = 0.4$ m, $\phi = 0$, και $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2.1$ rad/s. Η εξίσωση για τη θέση του αστροναύτη είναι

$$x(t) = 1 + A \cos(\omega t + 0) \quad (3.52)$$

$$= 1 + 0.4 \cos(2.1t) \quad (3.53)$$

$$1.2 = 1 + 0.4 \cos(2.1t) \quad (3.54)$$

$$\cos(2.1t) = 0.5 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad (3.55)$$

$$2.1t = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.56)$$

Για $k = 0$

$$2.1t = \pm\pi/3 \iff t = \pm\frac{\pi}{6.3} = \pm 0.498 \quad (3.57)$$

και κρατάμε τη θετική χρονική στιγμή. Η εξίσωση της ταχύτητας του αστροναύτη είναι

$$u(t) = -A\omega \sin(\omega t) \implies u(0.5) = -0.4 \cdot 2.1 \cdot \sin(2.1 \cdot 0.5) = -0.73 \text{ m/s} \quad (3.58)$$

Παράδειγμα 3.5:

Ένας μετατροπέας υπερήχων, από αυτούς που χρησιμοποιούνται στην ιατρική απεικόνιση (Σχήμα 3.10), ουσιαστικά δεν είναι τίποτα άλλο από έναν πολύ λεπτό δίσκο μάζας $m = 0.0001$ kg ο οποίος κινείται μπρος - πίσω βρισκόμενος σε απλή αρμονική κίνηση με συχνότητα 1.0 MHz οδηγούμενος από ένα ηλεκτρομαγνητικό πηνίο.



Σχήμα 3.10: Μετατροπέας Υπερήχων.

- (α') Η μέγιστη δύναμη επαναφοράς που μπορεί να εφαρμοστεί στο δίσκο χωρίς να τον καταστρέψει είναι 40000 N. Ποιά είναι το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης σε αυτήν την περίπτωση;
 (β') Ποιά είναι η μέγιστη ταχύτητα του δίσκου υπό αυτό το πλάτος ταλάντωσης;

Λύση:

(α') Ο δίσκος υπόκειται σε απλή αρμονική κίνηση. Από το 2ο νόμο του Newton έχουμε

$$F_s = ma_{max} \iff 4000 = 0.1 \cdot 10^{-3} a_{max} \iff a_{max} = 4 \cdot 10^8 \text{ m/s}^2 \quad (3.59)$$

Όμως ξέρουμε ότι

$$a_{max} = \omega^2 A \iff A = \frac{a_{max}}{\omega^2} = 1.01 \cdot 10^{-5} \text{ m} \quad (3.60)$$

(β') Η μέγιστη ταχύτητα δύνανται ως

$$u_{max} = \omega A = 2\pi f A = 2\pi(1 \cdot 10^6)(1.01 \cdot 10^{-5}) = 63.4 \text{ m/s} \quad (3.61)$$

Παράδειγμα 3.6:

Ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής αποτελείται από ένα σώμα μάζας 2.0 κιλών συνδεδεμένο σε ελατήριο σταθεράς 100 N/m. Όταν $t = 1.0$ s, η θέση και η ταχύτητα του σώματος είναι $x = 0.129$ m και $u = 3.415$ m/s.

- (α') Ποιό είναι το πλάτος της ταλάντωσης;
 (β') Ποιά είναι η θέση του σώματος όταν $t = 0$;
 (γ') Ποιά είναι η ταχύτητα του σώματος όταν $t = 0$;

Λύση:

(α') Η θέση και η ταχύτητα του ταλαντωτή δίνεται από τις σχέσεις

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.62)$$

$$u(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (3.63)$$

Διαιρώντας κατά μέλη

$$\frac{u(t)}{x(t)} = -\omega \tan(\omega t + \phi) \quad (3.64)$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε τη συνολική φάση $\omega t + \phi$, ως

$$\omega t + \phi = \tan^{-1} \left(\frac{-u(t)}{\omega x(t)} \right) \quad (3.65)$$

και για $t = 1.0$ s

$$\omega \cdot 1.0 + \phi = \tan^{-1} \left(\frac{-3.415}{7.07 \cdot 0.129} \right) = -1.31 \text{ rad} \quad (3.66)$$

αφού $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 7.07$ rad/s. Άρα

$$x(1.0) = A \cos(-1.31) \iff 0.129 = A \cos(-1.31) \implies A = 0.5 \text{ m} \quad (3.67)$$

(β') Αφού βρήκαμε ότι

$$\omega t + \phi \Big|_{t=1.0} = -1.31 \quad (3.68)$$

μπορούμε να λύσουμε ως προς ϕ . Οπότε

$$\phi = -8.38 \text{ rad} \quad (3.69)$$

Άρα

$$x(0) = 0.5 \cos(\omega \cdot 0 - 8.38) = 0.5 \cos(-8.38) = -0.251 \text{ m} \quad (3.70)$$

(γ') Αντίστοιχα,

$$u(0) = -\omega A \sin(\omega \cdot 0 - 8.38) = -(7.07 \cdot 0.5) \sin(-8.38) = 3.06 \text{ m/s} \quad (3.71)$$

3.3.5 Ενέργεια ΑΑΤ

Θα ήταν πολύ ενδιαφέρον να εξετάσουμε ενεργειακά τον Απλό Αρμονικό Ταλαντωτή. Γνωρίζουμε ήδη τα είδη ενέργειας και τις σχέσεις που τα εκφράζουν. Ας τις δούμε. Η κινητική ενέργεια του ταλαντωτή θα είναι

$$K = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \quad (3.72)$$

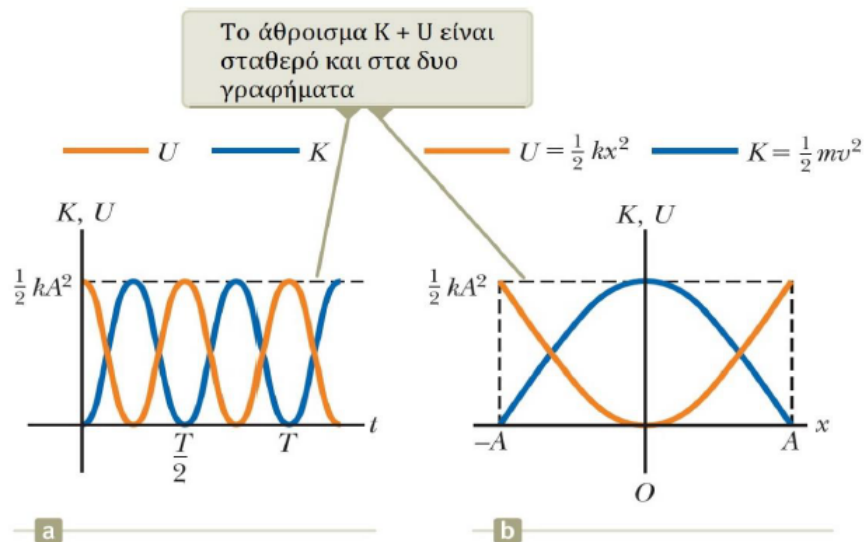
ενώ η ελαστική δυναμική του ενέργεια θα είναι

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad (3.73)$$

Δεδομένου ότι εξετάζουμε την ΑΑΤ απουσία τριβών και ότι γνωρίζουμε ότι η δύναμη του ελατηρίου είναι συντηρητική, μπορούμε να καταλάβουμε ότι η μηχανική ενέργεια του συστήματος ελατήριο+σώμα διατηρείται. Είναι

$$E_{\text{mech}} = K + U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kA^2 \quad (3.74)$$

αφού $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

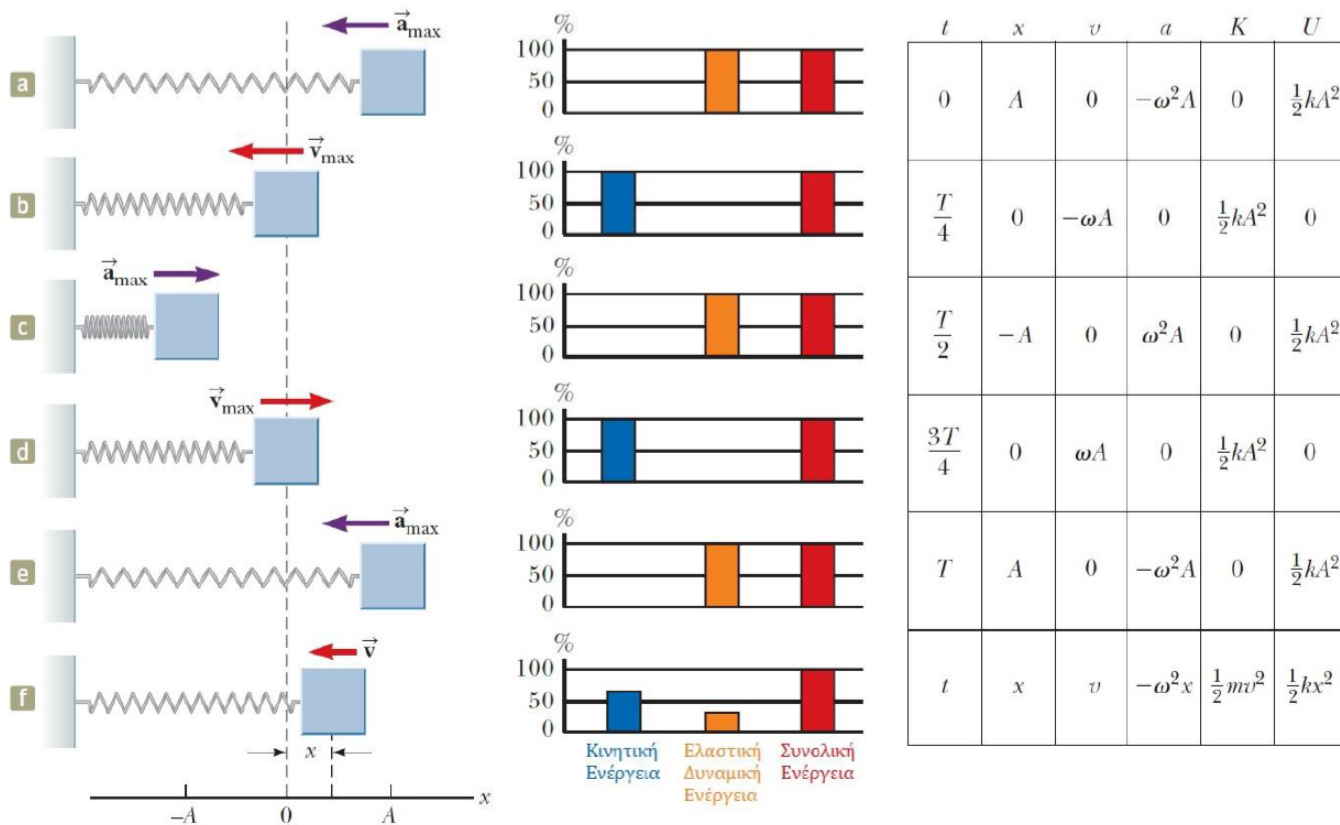


Σχήμα 3.11: Κινητική και Ελαστική Δυναμική Ενέργεια ΑΑΤ.

Παρατηρήστε πως μεταβάλλονται οι επιμέρους ενέργειες συναρτήσει του χρόνου έτσι ώστε το άθροισμά τους να είναι πάντα σταθερό, τόσο στο Σχήμα 3.11(α), που απεικονίζονται οι συναρτήσεις $K(t)$, $U(t)$, όσο και στο Σχήμα 3.11(β), που απεικονίζονται οι συναρτήσεις $K(x)$, $U(x)$.

Ας θυμηθούμε και τα περίφημα διαγράμματα ενέργειας που δείχνουν πως μεταβάλλεται η ενέργεια ενός συστήματος. Δείτε το Σχήμα 3.12. Αξίζει να εξηγήσουμε τα στιγμιότυπα συνοπτικά. Στο στιγμιότυπο (α), όπου και ξεκινάμε να μελετάμε το φαινόμενο ($t = 0$), το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = A$, που είναι και το πλάτος της ταλάντωσης. Το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο και έχει - όπως αναμενόταν - τη μέγιστη επιτάχυνση με φορά προς τη θέση ισορροπίας. Όλη η ενέργεια του συστήματος είναι ελαστική δυναμική. Στο στιγμιότυπο (β), το σώμα έχει κινηθεί και βρίσκεται στη θέση ισορροπίας όπου το ελατήριο είναι στο φυσικό του μήκος. Η ταχύτητα εκεί είναι η μέγιστη δυνατή, και εμφανίζεται για $t = T/4$. Πλέον όλη η ενέργεια του συστήματος έχει γίνει κινητική. Στο στιγμιότυπο (γ), το σώμα έχει συμπιέσει το ελατήριο κατά $x = -A$, οπότε ξανά η ταχύτητα του σώματος είναι στιγμιαία μηδενική και η επιτάχυνση μέγιστη, με φορά προς τη θέση ισορροπίας, με όλη την ενέργεια να είναι ξανά ελαστική δυναμική. Η χρονική στιγμή εμφάνισης αυτής της κατάστασης είναι $t = T/2$. Στο στιγμιότυπο (δ) αρχίζουμε την αντίστροφη πορεία: το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας όταν $t = 3T/4$, με μέγιστη ταχύτητα και μηδενική επιτάχυνση. Ξανά, όλη η ενέργεια του συστήματος είναι κινητική, ενώ στο στιγμιότυπο (ε), έχουμε ξανά την κατάσταση του στιγμιότυπου (α), για $t = T$ αυτή τη φορά. Παρατηρήσαμε μια πλήρη ταλάντωση, οπότε το φαινόμενο συνεχίζεται επ' άπειρον, επαναλαμβάνοντας την ενεργειακή κατανομή και κατάσταση που περιγράφηκε στη μια παραπάνω περίοδο του. Τέλος, το στιγμιότυπο (φ) δείχνει μια τυχαία θέση του σώματος, $x > 0$ και $x \neq A$, σε μια τυχαία χρονική στιγμή t.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα για να καταλάβουμε καλύτερα τη θεωρία.



Σχήμα 3.12: Διάγραμμα Ενέργειας Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή.

Παράδειγμα 3.7:

Πολλά ψηλά κτήρια έχουν αποσβεστήρες μάζας, όπως στο Σχήμα 3.13, οι οποίοι είναι κατασκευές που εμποδίζουν το κτήριο να ταλαντωθεί από τη δύναμη του ανέμου. Έστω ότι η κατασκευή έχει μάζα $m = 2.72 \cdot 10^5 \text{ kg}$ και έχει σχεδιαστεί να ταλαντώνεται με συχνότητα $f = 10.0 \text{ Hz}$, με πλάτος $A = 0.2 \text{ m}$.

(α') Βρείτε την ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος.

(β') Ποιά είναι η ταχύτητα του σώματος όταν περνά από το σημείο ισορροπίας;



Σχήμα 3.13: Αποσβεστήρας μάζας.

Λύση:

(α') Η συνολική μηχανική ενέργεια του συστήματος του αποσβεστήρα είναι σταθερή και ίση με $\frac{1}{2}kA^2$. Δε

γνωρίζουμε τη σταθερά του “ελατηρίου” του αποσβεστήρα. Όμως

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 10 \text{ rad/s} \quad (3.75)$$

και $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = \omega^2 m$, οπότε

$$k = \omega^2 m = (2\pi 10)^2 \cdot 2.72 \cdot 10^5 = 10738 \cdot 10^5 = 1.0738 \cdot 10^9 \text{ N/m} \quad (3.76)$$

Αρα

$$E_{\text{mech}} = \frac{1}{2} k A^2 = 2.147 \cdot 10^7 \text{ J} \quad (3.77)$$

(β') Όταν το σώμα περνά από το σημείο ισορροπίας, όλη η μηχανική ενέργεια εκφράζεται ως κινητική: η ελαστική δυναμική ενέργεια είναι μηδενική. Έτσι

$$E_{\text{mech}} = K = \frac{1}{2} m u^2 \Rightarrow u = \sqrt{\frac{2E_{\text{mech}}}{m}} \approx 12.6 \text{ m/s} \quad (3.78)$$

Παράδειγμα 3.8:

Αν η φάση μετατόπισης για ένα σύστημα ελατηρίου-σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είναι $\phi = \pi/6 \text{ rad}$ και η θέση του σώματος δίνεται ως

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.79)$$

όπως γνωρίζετε, τότε ποιός είναι ο λόγος της κινητικής προς την ελαστική δυναμική ενέργεια του συστήματος όταν $t = 0$;

Λύση:

Εχουμε ότι

$$K = \frac{1}{2} m u(t)^2 \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\pi/6) \quad (3.80)$$

και

$$U = \frac{1}{2} k x(t)^2 \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi) \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\pi/6) \quad (3.81)$$

Οπότε

$$\frac{K}{U} = \frac{m \omega^2 \sin^2(\pi/6)}{k \cos^2(\pi/6)} = \frac{m}{k} \omega^2 \tan^2(\pi/6) \quad (3.82)$$

κι επειδή

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (3.83)$$

είναι

$$\frac{K}{U} = \tan^2(\pi/6) = \frac{1}{3} \quad (3.84)$$

Παράδειγμα 3.9:

Η θέση ενός σωματιδίου δεμένου σε ένα ελατήριο δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = 0.25 \cos(10t) \quad (3.85)$$

με το πλάτος A να μετρείται σε m, τη γωνιακή συχνότητα ω σε rad/s, και το χρόνο t σε s. Σε ποιά χρονική στιγμή η κινητική του ενέργεια είναι διπλάσια της ελαστικής δυναμικής του ενέργειας;

Λύση:

Η εξίσωση ταχύτητας του σωματιδίου είναι

$$u(t) = -2.5 \sin(10t) \quad (3.86)$$

Θέτοντας $K = 2U$ έχουμε

$$\frac{1}{2}mu^2(t) = 2\left(\frac{1}{2}kx^2(t)\right) \quad (3.87)$$

$$\frac{1}{2}m(-2.5)^2 \sin^2(10t) = k((0.25)^2 \cos^2(10t)) \quad (3.88)$$

$$\tan^2(10t) = 2 \quad (3.89)$$

$$\tan(10t) = \pm \sqrt{2} \quad (3.90)$$

$$10t = \tan^{-1}(\pm \sqrt{2}) \quad (3.91)$$

$$t = \pm \frac{1}{10} \tan^{-1}(\sqrt{2}) \quad (3.92)$$

$$= \pm 0.0955 \text{ s} \quad (3.93)$$

όπου και κρατάμε προφανώς το θετικό χρόνο, $t = 0.0955 \text{ s}$.

Παράδειγμα 3.10:

Ένας ταλαντωτής μάζας 0.3 kg έχει ταχύτητα 0.954 m/s όταν η μετατόπισή του από τη θέση ισορροπίας του είναι 0.03 m και ταχύτητα 0.714 m/s όταν μετατοπίζεται κατά 0.06 m από τη θέση ισορροπίας του. Ποιά είναι η μέγιστη ταχύτητα του ταλαντωτή;

Λύση:

Η συνολική ενέργεια του συστήματος του ταλαντωτή διατηρείται, οπότε για τις δυο καταστάσεις που περιγράφονται στο πρόβλημα, έστω (A) και (B), θα έχουμε

$$\Delta E_{mech}^{A \rightarrow B} = 0 \quad (3.94)$$

$$K_A + U_A = K_B + U_B \quad (3.95)$$

$$\frac{1}{2}mu_A^2 + \frac{1}{2}kx_A^2 = \frac{1}{2}mu_B^2 + \frac{1}{2}kx_B^2 \quad (3.96)$$

$$\frac{1}{2}m(u_A^2 - u_B^2) = \frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2) \quad (3.97)$$

$$k = \frac{m(u_A^2 - u_B^2)}{x_B^2 - x_A^2} \quad (3.98)$$

$$= 44.48 \text{ N/m} \quad (3.99)$$

Η συνολική ενέργεια του ταλαντωτή είναι

$$E_{tot} = E_{mech} = K + U = \frac{1}{2}mu_A^2 + \frac{1}{2}kx_A^2 = 0.1565 \text{ J} \quad (3.100)$$

Όμως επειδή

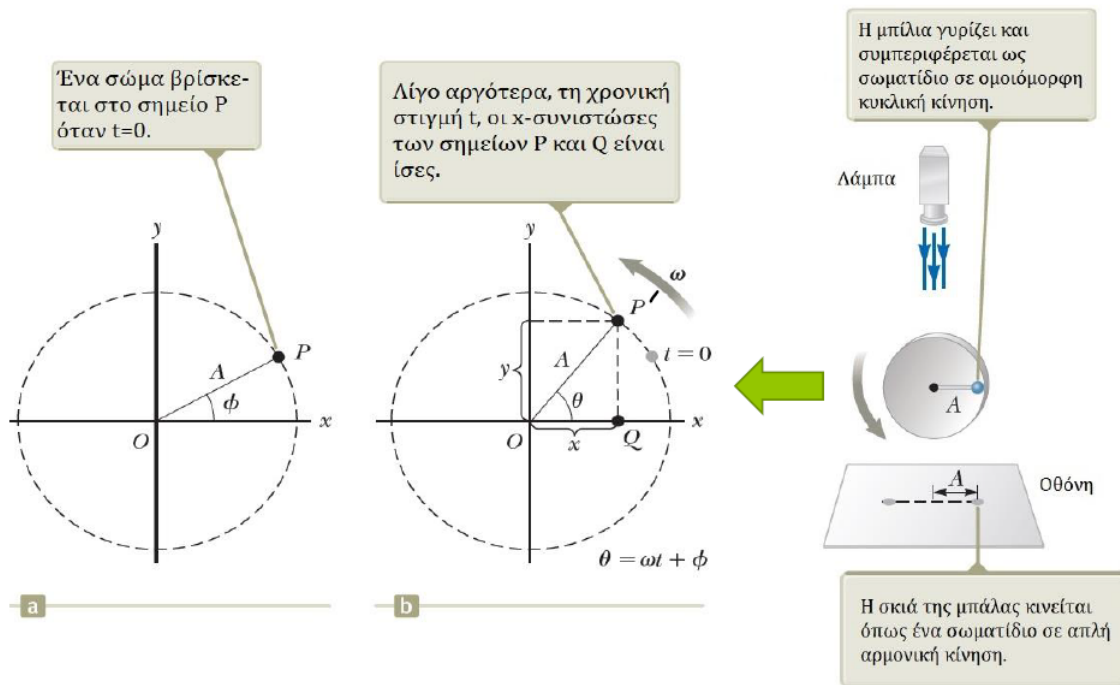
$$E_{tot} = \frac{1}{2}mu_{max}^2 \quad (3.101)$$

όταν ο ταλαντωτής περνά από τη θέση ισορροπίας του, έχουμε

$$u_{max} = 1.021 \text{ m/s} \quad (3.102)$$

3.3.6 Σχέση ΑΑΤ και Ομαλής Κυκλικής Κίνησης

Η ΑΑΤ έχει στενή σχέση με την ομαλή κυκλική κίνηση που έχουμε ήδη συναντήσει στην Κινητική. Δείτε το Σχήμα 3.14. Έστω ένα επίπεδο xy πάνω στο οποίο ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με κέντρο



Σχήμα 3.14: Σχέση ΑΑΤ και Ομαλής Κυκλικής Κίνησης.

το $O (0,0)$ και ακτίνα A . Έστω ότι πατάμε το χρονόμετρό μας στο στιγμιότυπο (a) του Σχήματος 3.14. Το σώμα βρίσκεται υπό γωνία ϕ με τον οριζόντιο άξονα όταν $t = 0$. Η προβολή του σώματος που βρίσκεται στο σημείο P επάνω στον άξονα $x'x$ μπορεί να γραφεί ως

$$P_x = A \cos(\phi) \quad (3.103)$$

που πρέπει να σας θυμίζει τη συνάρτηση $x(t)$ της ΑΑΤ για $t = 0$. Στο στιγμιότυπο (b) βλέπουμε το σώμα αυτό σε μια μεταγενέστερη χρονική στιγμή t . Το σώμα έχει προχωρήσει επάνω στον κύκλο κατά ωt , λόγω ομαλής κυκλικής κίνησης. Ξανά, η προβολή του σημείου P' στον οριζόντιο άξονα μπορεί να γραφεί ως

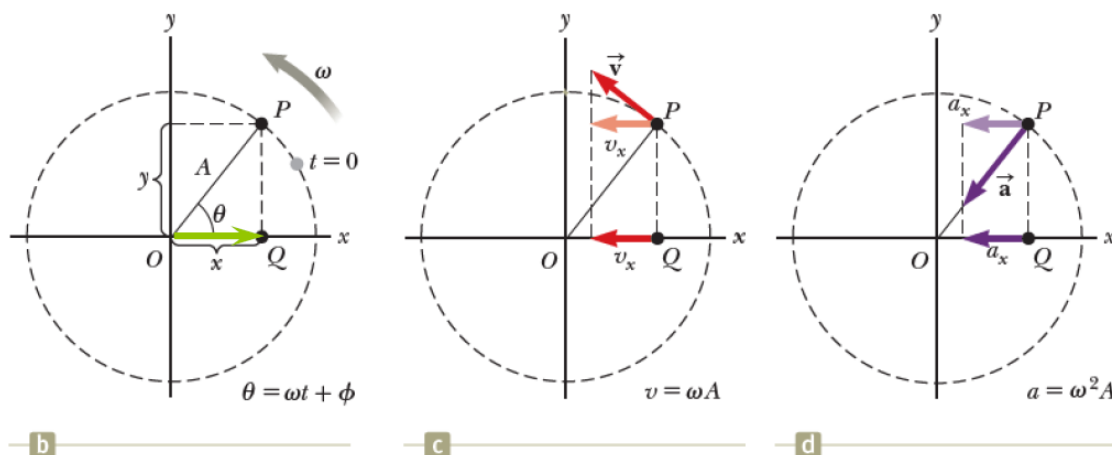
$$P'_x = A \cos(\theta) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.104)$$

καθώς $\theta = \phi + \omega t$, ξανά λόγω ομαλής κυκλικής κίνησης. Η σχέση λοιπόν που καταλήγουμε για την κίνηση της προβολής στον άξονα $x'x$ ενός σώματος που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, αποτελεί ακριβώς τη συνάρτηση θέσης $x(t)$ της ΑΑΤ! Μπορούμε λοιπόν εύκολα να καταλάβουμε ότι η προβολή της κυκλικής κίνησης επάνω σε έναν οριζόντιο άξονα ενός συστήματος συντεταγμένων μπορεί να περιγραφεί από τις εξισώσεις της ΑΑΤ! Παρατηρήστε το Σχήμα 3.15, όπου φαίνονται και οι δυο άλλες ποσότητες, ταχύτητα και επιτάχυνση, της κυκλικής κίνησης. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να εξαγάγουμε τις εξισώσεις

$$u(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (3.105)$$

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.106)$$

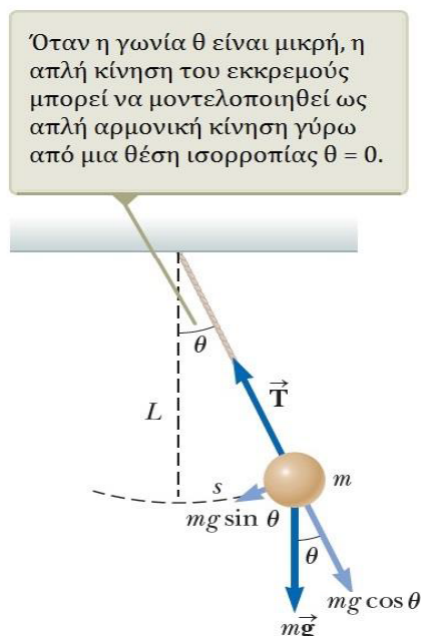
Ο/η αναγνώστης/τρια μπορεί να δοκιμάσει!



Σχήμα 3.15: Θέση, ταχύτητα, και επιτάχυνση ομαλής κυκλικής κίνησης και η σχέση της με την απλή αρμονική ταλάντωση.

3.3.7 Το εκκρεμές

Ως ΑΑΤ μπορούν να μοντελοποιηθούν και άλλου είδους κινήσεις, υπό συγκεκριμένους περιορισμούς. Θεωρήστε το εκκρεμές του Σχήματος 3.16.



Σχήμα 3.16: Εκκρεμές.

Έχουμε μετατοπίσει το εκκρεμές προς τα δεξιά, έχοντας σχηματίσει γωνία θ με την κατακόρυφο. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι η τάση του νήματος $\vec{T}$ και η δύναμη του βάρους $\vec{F}_g$, την οποία μπορούμε να αναλύσουμε σε άξονες. Αν θεωρήσουμε ότι η γωνία θ είναι μικρότερη των περίπου 10 μοιρών, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το εκκρεμές εκτελεί ΑΑΤ. Παρατηρήστε ότι το ρόλο της δύναμης του ελατηρίου τον παίζει η x -συνιστώσα του βάρους, καθώς αυτή είναι υπεύθυνη για την επιστροφή του εκκρεμούς στη θέση ισορροπίας του. Δεδομένου ότι το σώμα τελεί υπό επίδραση δυνάμεων, έχουμε από το 2ο νόμο του Newton κατά την κίνηση του εκκρεμούς στο τόξο s :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \iff \vec{F}_{\text{επιαναφ.}} = m\vec{a} \implies -F_{g_x} = -mg \sin(\theta) = ma \iff -mg \sin(\theta) = m \frac{d^2}{dt^2} s(t) \quad (3.107)$$

με s ένα τμήμα του κυκλικού τόξου. Επειδή $s = L\theta$, έχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) = -\frac{g}{L}\sin(\theta) \quad (3.108)$$

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση

$$\sin(\theta) \approx \theta, \quad \text{για } \theta \ll 1, \theta \text{ σε ακτίνια} \quad (3.109)$$

μπορούμε να γράψουμε τη διαφορική εξίσωση ως

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) \approx -\frac{g}{L}\theta(t) \quad (3.110)$$

Η σχέση αυτή περιγράφει προσεγγιστικά μια ΑΑΤ, καθώς είναι μια διαφορική εξίσωση ακριβώς ίδιας μορφής με την εξίσωση (3.4). Το τελευταίο ισχύει αποκλειστικά για μικρές τιμές του θ .

Βάσει των παραπάνω, η γωνιακή συχνότητα του εκκρεμούς δίνεται ως

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (3.111)$$

και η περίοδος του ως

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (3.112)$$

ενώ η εξίσωση κίνησης του εκκρεμούς είναι

$$\theta(t) = \theta_{\max} \cos(\omega t + \phi) \quad (3.113)$$

με την αρχική φάση ϕ να παίζει ακριβώς τον ίδιο ρόλο με την περίπτωση του συστήματος {ελατήριο, σώμα}.

3.4 Φθίνουσες Ταλαντώσεις

Στην ΑΑΤ, η κατάσταση ήταν αρκετά ιδανική: υπήρξε απουσία αντιστάσεων κάθε είδους, και αυτό είχε ως αποτέλεσμα η μηχανική ενέργεια των συστημάτων να είναι σταθερή. Στην πράξη κάτι τέτοιο φυσικά δεν ισχύει: η μηχανική ενέργεια συστημάτων ταλάντωσης φθίνει με το χρόνο. Σε μια τέτοια περίπτωση η κίνηση ονομάζεται **φθίνουσα ταλάντωση**.

Στις φθίνουσες ταλαντώσεις, μοντελοποιούμε τις αντιστάσεις που συντελούν στην απώλεια μηχανικής ενέργειας με μια λεγόμενη **δύναμη επιβράδυνσης** $\vec{R}$, η οποία ορίζεται ως

$$\vec{R} = -b\vec{v} = -b\frac{d}{dt}\vec{x}(t) \quad (3.114)$$

Η σταθερά b ονομάζεται **συντελεστής απόσβεσης**. Η δύναμη $\vec{R}$ δρα πάντα αντίθετα στην ταχύτητα του σώματος. Φυσικά δεν παύει να υπάρχει η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου της γνωστής μας μορφής $\vec{F}_s = -k\vec{x}$. Ας προσπαθήσουμε να εξάγουμε τη διαφορική εξίσωση της φθίνουσας ταλάντωσης. Αν εφαρμόσουμε το 2ο νόμο του Newton στο ταλαντούμενο σώμα που κινείται στον άξονα $x'x$, έχουμε

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \iff \vec{R} + \vec{F}_s = m\vec{a}_x \quad (3.115)$$

η οποία γίνεται

$$-bu - kx = ma_x \iff -kx(t) - b\frac{d}{dt}x(t) = m\frac{d^2}{dt^2}x(t) \quad (3.116)$$

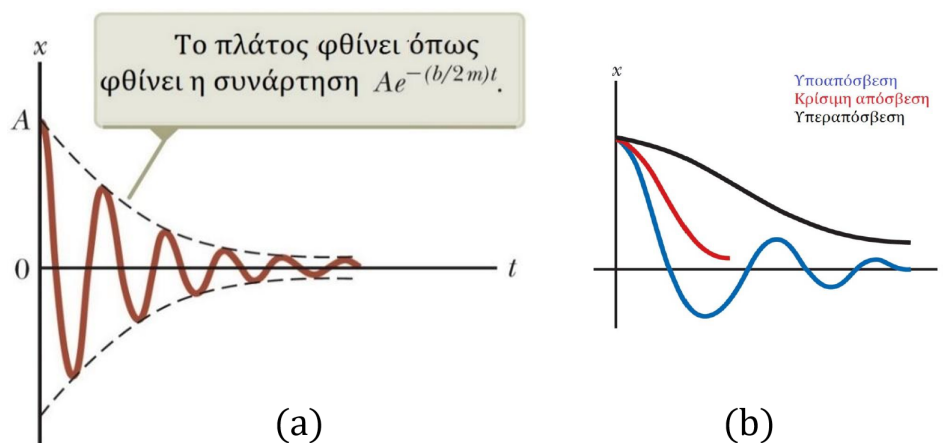
Αν θεωρήσουμε ότι ο συντελεστής απόσβεσης b είναι “μικρός” αριθμός, τότε η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) \quad (3.117)$$

ή αλλιώς

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \phi) \quad (3.118)$$

με $A(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}$ να είναι το χρονικά μεταβαλλόμενο (φθίνον) πλάτος της ταλάντωσης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.17(a).



Σχήμα 3.17: (a) Φθίνουσα ταλάντωση με μικρό b , (b) είδη φθίνουσας ταλάντωσης.

Οι γνωστές ποσότητες της ΑΑΤ αλλάζουν όταν συζητάμε για φθίνουσες ταλαντώσεις. Για παράδειγμα, η γωνιακή συχνότητα ορίζεται ως

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (3.119)$$

και αν θέσουμε $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ τη γνωστή μας γωνιακή συχνότητα απουσία απόσβεσης, τότε

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (3.120)$$

Η παραπάνω γωνιακή συχνότητα ονομάζεται **φυσική συχνότητα** ή **ιδιοσυχνότητα** του συστήματος. Τα παραπάνω ισχύουν βέβαια υπό μια συγκεκριμένη προϋπόθεση:

$$\omega_0 > \frac{b}{2m} \quad (3.121)$$

ή με άλλα λόγια, η ποσότητα στο υπόρριζο να είναι θετική. Η περίπτωση αυτή ονομάζεται **υποαπόσβεση**. Αν όμως $\omega_0 = \frac{b}{2m}$, τότε η περίπτωση ονομάζεται **κρίσιμη απόσβεση**, ενώ αν $\omega_0 < \frac{b}{2m}$ η περίπτωση ονομάζεται **υπεραπόσβεση**. Τα τρία αυτά είδη φθίνουσας ταλάντωσης φαίνονται στο Σχήμα 3.17(b) όσον αφορά τη συνάρτηση θέσης τους, $x(t)$.

Όσον αφορά την ενέργεια του φθίνοντα ταλαντωτή, αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$E_{mech} = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2e^{-\frac{b}{m}t} \left[1 + \frac{b}{2m\omega_0} \cos\left(2\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{2m\omega}{b}\right)\right) \right] \quad (3.122)$$

με

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (3.123)$$

Αν όμως το πλάτος του ημιτονοειδούς όρου, $b/2m\omega_0$ είναι πολύ μικρότερο της μονάδας, τότε μπορούμε να τον αγνοήσουμε. Με αυτόν τον τρόπο υπολογίσουμε την **περιβάλλουσα** της συνάρτησης

$$E_{mech} \approx \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 e^{-\frac{b}{m}t} \quad (3.124)$$

που μας δείχνει ότι πράγματι η μηχανική ενέργεια φθίνει με εκθετικό τρόπο.

Παράδειγμα 3.11:

Ένα εκκρεμές μήκους 1.0 m αφήνεται ελεύθερο από αρχική γωνία $\theta_i = 15$ μοιρών. Μετά από 1000 s, το πλάτος ταλάντωσης του έχει μειωθεί σε $\theta(1000) = 5.5$ μοίρες. Ποιά είναι η τιμή της σταθεράς $b/2m$;

Λύση:

Υποθέτουμε ότι το εκκρεμές εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση. Είδαμε μόλις πριν ότι

$$A(t) = Ae^{-b/(2m)t} \quad (3.125)$$

Όμως η εκφώνηση μας δίνει την πληροφορία πλάτους σε μοίρες, οπότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση

$$\theta(t) = \Theta(t) \cos(\omega t + \phi) \quad (3.126)$$

με

$$\Theta(t) = \theta_{max} e^{-\frac{b}{2m}t} \quad (3.127)$$

Από εκφώνηση έχουμε ότι

$$\Theta(0) = \theta_{max} e^0 = \theta_{max} = 15^\circ \quad (3.128)$$

$$\Theta(1000) = \theta_{max} e^{-\frac{1000b}{2m}} = 5.5^\circ \quad (3.129)$$

Οπότε

$$\theta(t) = \theta_{max} e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) = 15^\circ e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) \quad (3.130)$$

Από τις δυο σχέσεις του πλάτους $\Theta(t)$, διαιρώντας κατά μέλη, έχουμε

$$\frac{\Theta(0)}{\Theta(1000)} = \frac{15}{5.5} = e^{\frac{1000b}{2m}} \quad (3.131)$$

Οπότε

$$15e^{-\frac{1000b}{2m}} = 5.5 \iff \log e^{-\frac{1000b}{2m}} = \log \frac{5.5}{15} \approx -1 \implies -\frac{1000b}{2m} \approx -1 \implies \frac{b}{2m} \approx 10^{-3} \quad (3.132)$$

3.5 Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

Γνωρίσαμε νωρίτερα την ιδανική ΑΑΤ, και μόλις τώρα μια πιο ρεαλιστική “έκδοση” της, τη φθίνουσα ταλάντωση, στην οποία υπάρχει απώλεια μηχανικής ενέργειας με την πάροδο του χρόνου. Θα μπορούσε κανείς να σκεφτεί ότι θα ήταν δυνατό να “αναπληρώνουμε” τη χαμένη ενέργεια εισάγοντας στον ταλαντωτή ενέργεια μέσω π.χ. μιας εξωτερικής δύναμης. Σκεφτείτε ένα παιδί που κάνει κούνια και ο πατέρας του το σπρώχνει περιοδικά για να διατηρήσει το πλάτος της ταλάντωσης. Σε πιο εξειδικευμένα παραδείγματα, κατά την παραγωγή στάσιμου λόγου (όπως όταν λέμε ένα /ααα/ στο γιατρό για να εξετάσει το λαϊμό μας),

μια ποσότητα ενέργειας από τους πνεύμονες μας εισάγεται στη φωνητική μας οδό (στόμα, φάρυγγα, ρινική κοιλότητα) και μας επιτρέπει να κρατάμε σταθερό το φώνημα μας – μέχρι να εξαντλήσουμε τον αέρα στα πνευμόνια μας. Επίσης, στα ηλεκτρικά κυκλώματα εναλλασόμενου ρεύματος, το κύκλωμα εκτελεί ταλάντωση με συχνότητα f_S , που είναι η συχνότητα της πηγής. Έτσι, η ένταση του ρεύματος αποτελείται από μια ημιτονοειδή ταλάντωση με πλάτος $I(f_S, V)$, δηλ. είναι μια ταλάντωση που εξαρτά το πλάτος της από τη συχνότητα και το πλάτος τάσης της πηγής.

Σε αυτό το είδος ταλάντωσης, η εξωτερική δύναμη διέγερσης μπορεί να μοντελοποιηθεί ως

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t) \quad (3.133)$$

Από το 2ο νόμο του Newton θα έχουμε

$$\sum F_x = ma_x \iff F_0 \sin(\omega t) - b \frac{d}{dt}x(t) - kx(t) = m \frac{d^2}{dt^2}x(t) \quad (3.134)$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης¹ δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \phi) \quad (3.135)$$

με

$$A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \quad (3.136)$$

Παρατηρήστε ότι το πλάτος της ταλάντωσης εξαρτάται από τη γωνιακή συχνότητα ω ! Εύκολα μπορείτε να καταλάβετε ότι όταν $\omega \approx \omega_0$, το κλάσμα του πλάτους ταλάντωσης παίρνει τη μέγιστη τιμή του. Η συχνότητα ω_0 ονομάζεται **συχνότητα συντονισμού**. Κατά το συντονισμό το σύστημα έχει το μέγιστο δυνατό πλάτος και τη μέγιστη δυνατή ενέργεια. Αν δεν υπάρχουν αποσβεστικές δυνάμεις, τότε το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται θεωρητικά άπειρο. Έτσι, η ταλάντωση μπορεί να γίνει τόσο έντονη, ώστε να καταστραφεί ο ταλαντωτής. Επίσης, αν η προσφορά ενέργειας είναι μεγαλύτερη, τότε υπάρχει κίνδυνος καταστροφής του ταλαντωτή. Για παράδειγμα, τα ποτήρια έχουν μία συγκεκριμένη ιδιοσυχνότητα, η οποία μπορεί να ακουστεί αν τα χτυπήσουμε απλά μία φορά. Αν εκπέμπουμε ήχο σε αυτή τη συχνότητα, τότε το ποτήρι θα ταλαντώνεται με μεγάλο πλάτος, μέχρι που αυτό θα γίνει πολύ μεγάλο για τις αντοχές του γυαλιού και το ποτήρι θα σπάσει. Το ίδιο ισχύει γενικότερα για οποιαδήποτε κατασκευή.

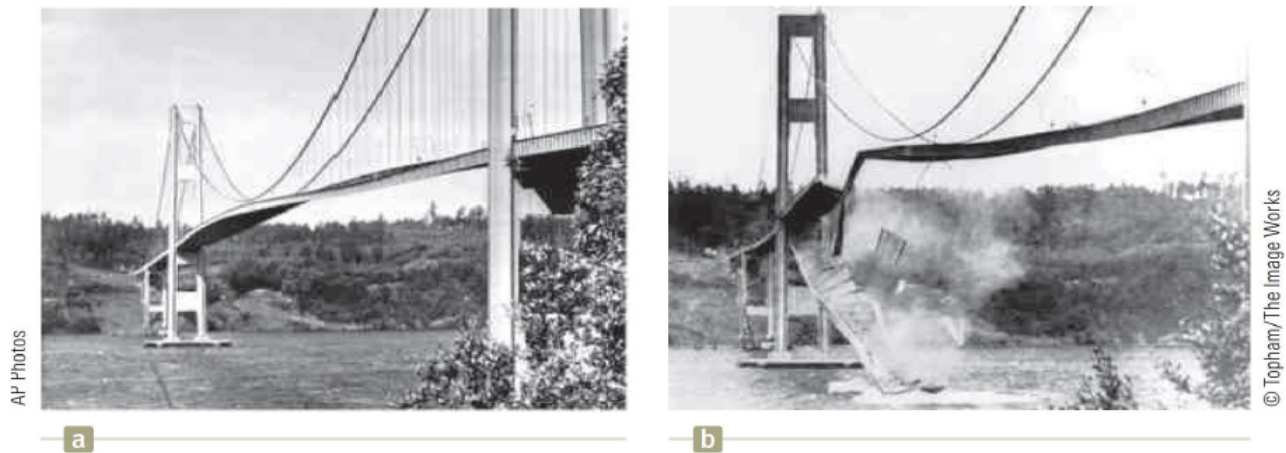
Σύμφωνα με το φαινόμενο του συντονισμού, δημιουργείται ένα μη αμελητέο πλάτος από σχετικά μικρή, αλλά διαρκή προσφορά ενέργειας. Αυτή η ιδιότητα χρησιμοποιείται στο συντονισμό μιας ηλεκτρονικής συσκευής σε συγκεκριμένη συχνότητα ραδιοκυμάτων. Τα κυκλώματα που εκπέμπουν και λαμβάνουν ηλεκτρομαγνητικά σήματα είναι ηλεκτρονικοί ταλαντωτές με δυνατότητα μεταβολής της ιδιοσυχνότητά τους. Το σήμα που λαμβάνεται πιο ισχυρά, άρα και αυτό που τελικά λαμβάνεται, είναι αυτό που εκπέμπεται στην ιδιοσυχνότητα του δέκτη. Έτσι, μπορούμε, μεταβάλλοντας την ιδιοσυχνότητα του δέκτη, να επιλέξουμε την επιθυμητή ιδιοσυχνότητα.

Αντίθετα, όταν ένας μηχανικός χτίζει μια κρεμαστή γέφυρα πρέπει να σιγουρευτεί ότι η ένταση του αέρα που φυσάει σε μια γέφυρα δε θα ισούται ποτέ με την ιδιοσυχνότητα της γέφυρας, γιατί τότε αυτή θα ταλαντώνεται με το μέγιστο πλάτος και υπάρχει σοβαρή πιθανότητα να καταρρεύσει, αν το φαινόμενο είναι διαρκές. Δείτε το εκπληκτικό βίντεο² από τη γέφυρα Tacoma Narrows που κατέρρευσε εξ' αιτίας φαινομένων συντονισμού (όχι ακριβώς αυτών που συζητάμε αλλά σχετικών)!

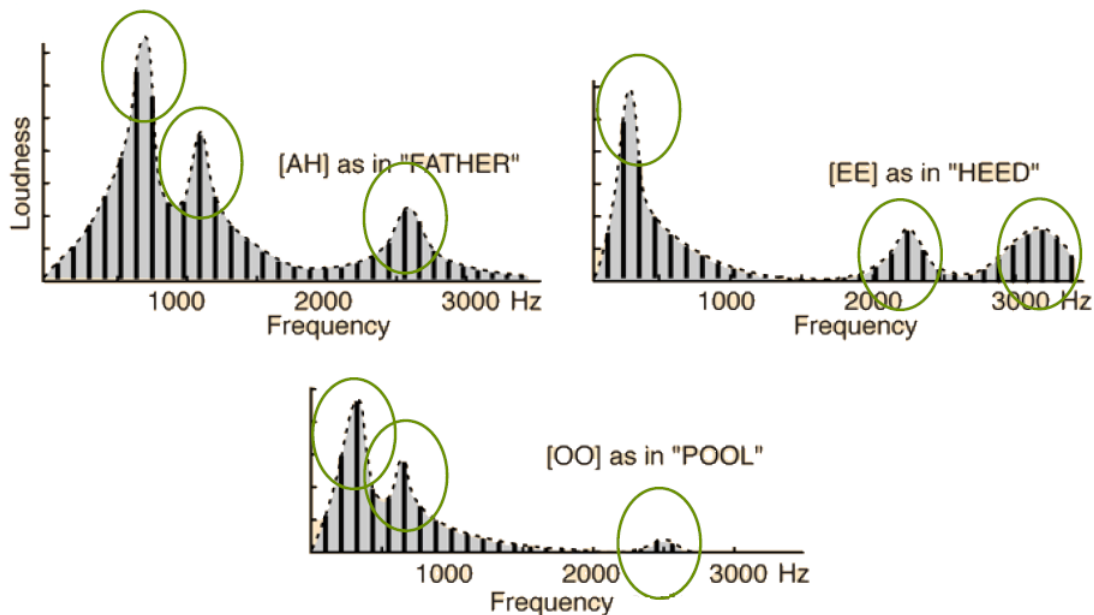
Σε άλλες εφαρμογές όπως η ανάλυση ομιλίας, μπορούμε να παρατηρήσουμε φαινόμενα συντονισμού. Αν αναλύσουμε ένα τμήμα έμφωνου λόγου, μπορούμε να κατασκευάσουμε γραφήματα πλάτους - συχνότητας, όπως αυτά του Σχήματος 3.19, τα οποία ονομάζονται *φάσματα πλάτους*. Μπορείτε να παρατηρήσετε

¹Βλέπετε ότι όλο και δυσκολεύουν οι διαφορικές εξισώσεις! ©

²https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File%3ATacoma_Narrows_Bridge_destruction.oggv



Σχήμα 3.18: Tacoma Narrows γέφυρα.



Σχήμα 3.19: Φάσματα πλάτους έμφωνου λόγου.

– σημειωμένες με ελλείψεις – περιοχές συχνοτήτων που το πλάτος που τους αντιστοιχεί είναι ιδιαίτερα υψηλό, σε σχέση με τις υπόλοιπες περιοχές. Επίσης, βλέπετε ότι για διαφορετικά φωνήματα, οι περιοχές που παρουσιάζουν συντονισμό είναι διαφορετικές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τοποθετούμε διαφορετικά τους αρθρωτές μας για να εκφέρουμε τα διαφορετικά φωνήματα. Η διαφορετική τοποθέτηση των αρθρωτών του στόματος μας ενισχύει τα πλάτη διαφορετικών περιοχών συχνοτήτων της ομιλίας μας, δημιουργώντας φάσματα όπως στο Σχήμα 3.19. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **φωνοσυντονισμός - formant**.

3.6 Κυματική

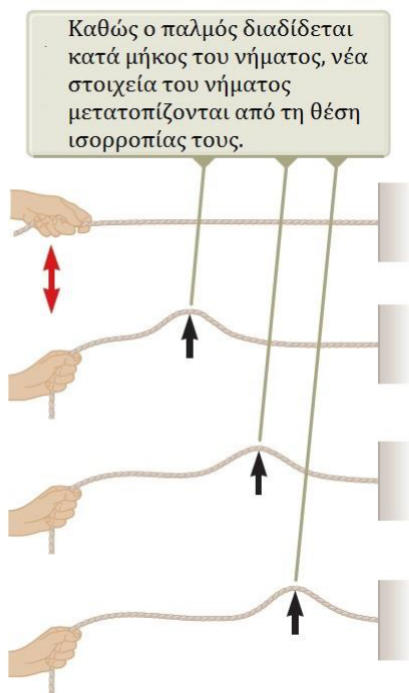
Αν έχετε φτάσει ως εδώ, έχετε λάβει μια καλή επισκόπηση των ταλαντώσεων και των εξισώσεων που την περιγράφουν. Μπορούμε τώρα να επεκταθούμε στη μελέτη των **κυμάτων**. Ο κόσμος μας είναι γεμάτος από κύματα, τόσο μηχανικά όσο και ηλεκτρομαγνητικά! Μόλις τώρα κάναμε και τον πρώτο διαχωρισμό: μηχανικά ονομάζονται τα κύματα που απαιτούν ένα μέσο διάδοσης, ενώ τα ηλεκτρομαγνητικά δεν έχουν

αυτήν την απαίτηση. Ένα πολύ χαρακτηριστικό γνώρισμα των μηχανικών κυμάτων είναι ότι **μεταφέρουν ενέργεια αλλά όχι ύλη!** Σκεφτείτε μια σημαδούρα που επιπλέει σε μια ήρεμη λίμνη. Αν ρίξετε κοντά της μια πέτρα, η σημαδούρα θα μετακινηθεί πάνω-κάτω και δεξιά-αριστερά αλλά δε θα μετακινηθεί σε σχέση με το σημείο πτώσης της πέτρας.

Όλα τα μηχανικά κύματα προϋποθέτουν τρία πράγματα:

- Κάποια πηγή διαταραχής
- Ένα μέσο με στοιχεία που μπορούν να διαταραχθούν
- Κάποιο μηχανισμό με τον οποίο τα στοιχεία του μέσου αλληλεπιδρούν μεταξύ τους

Φανταστείτε ότι κρατάτε ένα νήμα δεμένο σε ένα τοίχο, όπως στο Σχήμα 3.20. Ανεβοκατεβάζετε μια φορά



Σχήμα 3.20: Εγκάρσιο κύμα σε νήμα.

το χέρι σας και δημιουργείτε στο νήμα ένα παλμό, ο οποίος διαδίδεται κατά μήκος του νήματος. Κατά τη διάδοση, νέα στοιχεία του νήματος μετατοπίζονται κατακόρυφα από τη θέση ισορροπίας τους. Η κατακόρυφη μετατόπιση καθορίζει το ύψος του παλμού. Ιδανικά, ο παλμός θα διαδοθεί απαραράλλαχτος μέχρι το πέρας του σχοινιού.

Αν σκεφτείτε λίγο τον τρόπο κίνησης των στοιχείων του νήματος, θα διαπιστώσετε ότι αυτός είναι κατακόρυφος, ή αλλιώς, κάθετος προς τη διεύθυνση διάδοσης. Τέτοια κύματα ονομάζονται **εγκάρσια κύματα**, ενώ κύματα των οποίων τα στοιχεία κινούνται παράλληλα με τη διεύθυνση διάδοσης του παλμού ονομάζονται **διαμήκη κύματα**. Ένα τέτοιο διαμήκες κύμα φαίνεται στο Σχήμα 3.21. Ένα σύνολο από εγκάρσια και διαμήκη κύματα είναι τα σεισμικά κύματα. Τα περίφημα κύματα *P* είναι διαμήκη κύματα, ενώ τα αντίστοιχα *S* κύματα είναι εγκάρσια.

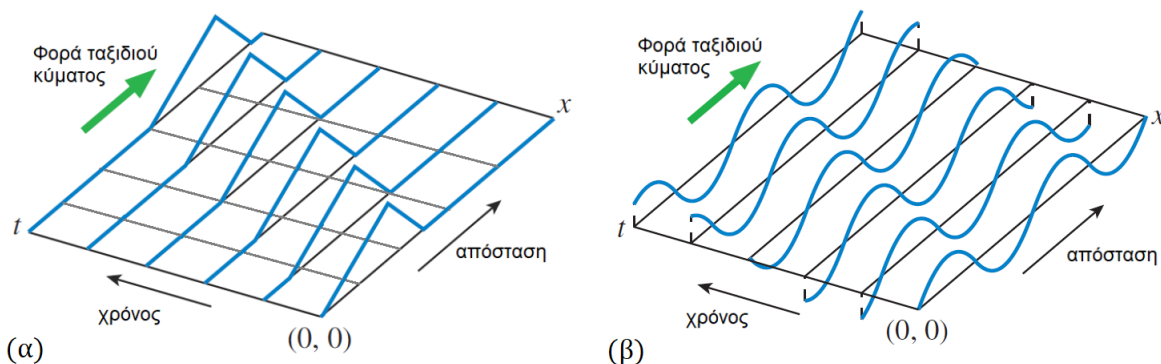


Σχήμα 3.21: Διάμηνες κύμα σε ελατήριο.

3.6.1 Κυματοσυνάρτηση

Σίγουρα θα ήταν τρομερά ενδιαφέρον και χρήσιμο να μπορούσαμε να περιγράψουμε μαθηματικά τη συμπεριφορά των κυμάτων. Ένα κύμα είναι συνάρτηση δυο μεταβλητών, του χώρου και του χρόνου. Αν περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας σε κύματα που κινούνται σε ευθεία γραμμή, θα μπορούσαμε να πούμε ότι μπορούμε να περιγράψουμε τη συμπεριφορά τους ως μια συνάρτηση $y(x, t)$ η οποία απεικονίζει το ύψος του κύματος y συναρτήσει του στοιχείου του νήματος που βρίσκεται στη θέση x τη χρονική στιγμή t . Παρατηρήστε ότι η **κυματοσυνάρτηση** $y(x, t)$ είναι μια συνάρτηση δυο μεταβλητών, δηλ. το γράφημά της είναι τριδιάστατο. Η σχεδίαση ενός τέτοιου γραφήματος είναι δύσκολη υπόθεση, οπότε προτιμούμε να κατανοούμε τι συμβαίνει με βάση δυο συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Αν στην κυματοσυνάρτηση κρατήσουμε το t σταθερό, δηλ αν $t = t_0$, τότε είναι σαν να παίρνουμε μια φωτογραφία του νήματος και του κύματος που διαδίδεται πάνω του τη χρονική στιγμή αυτή. Αντίθετα, αν θέσουμε $x = x_0$, δηλ. κρατήσουμε το x σταθερό και αφήσουμε τον χρόνο να κυλάει, αυτό που θα πάρουμε είναι η κίνηση του στοιχείου x_0 του νήματος συναρτήσει του χρόνου: βλέπουμε δηλαδή πως ένα μικρό κομμάτι νήματος κινείται όσο περνάει ο χρόνος!

Ας αναπαραστήσουμε για μια και μόνη φορά την τριδιάστατη απεικόνιση ενός κύματος που περιγράφεται από μια κυματοσυνάρτηση $y(x, t)$. Δείτε το Σχήμα 3.22(α). Βλέπετε έναν τριγωνοειδή παλμό ο



Σχήμα 3.22: Κίνηση (α) τυχαίου κύματος και (β) ημιτονοειδούς κύματος στο χώρο και στο χρόνο.

οποίος διαδίδεται σε ένα μέσο. Αν κοιτάζετε τις “φέτες” του χρόνου, βλέπετε πως διαδίδεται ο παλμός σε νέα στοιχεία κάθε φορά του νήματος. Αν κοιτάζετε τις γκριζες “φέτες” της απόστασης τότε βλέπετε τα αντίστοιχα στοιχεία του νήματος που βρίσκονται στις θέσεις αυτές και πως αυτά κινούνται με την πάροδο του χρόνου.

Είναι επίσης ενδιαφέρον να προσέξουμε το εξής: αν ένας παλμός διαδίδεται σε ένα νήμα με ταχύτητα u προς τα δεξιά, τότε η κυματοσυνάρτηση θα είναι της μορφής

$$y(x, t) = f(x - ut, t) \quad (3.137)$$

Εύκολα μπορείτε να το καταλάβετε αν σκεφτείτε ότι ένα στοιχείο του νήματος x θα έχει ύψος $y(x, 0)$, για $t = 0$. Μετά από t δευτερόλεπτα, το κύμα θα έχει προχωρήσει απόσταση ut επάνω στο νήμα, οπότε το ίδιο ύψος θα έχει μετατοπιστεί προς τα δεξιά. Άρα τη χρονική στιγμή t το ύψος $y(x, t)$ θα είναι το ίδιο με το ύψος $y(x - ut, 0)$ του στοιχείου $x - ut$ για $t = 0$ νωρίτερα. Αντίστοιχα, αν η κυματοσυνάρτηση γράφεται ως

$$y(x, t) = f(x + ut, t) \quad (3.138)$$

ο παλμός κινείται προς τα αριστερά. Για παράδειγμα, ένας παλμός που κινείται προς τα δεξιά κατά μήκος του άξονα x περιγράφεται ως

$$y(x, t) = \frac{2}{(x - 3t)^2 + 1} \quad (3.139)$$

και έχει ταχύτητα $u = 3$ m/s. Πολλές φορές αυτά τα κύματα ονομάζονται **οδεύοντα** κύματα.

Παράδειγμα 3.12:

Η κυματοσυνάρτηση ενός οδεύοντος κύματος δίνεται ως

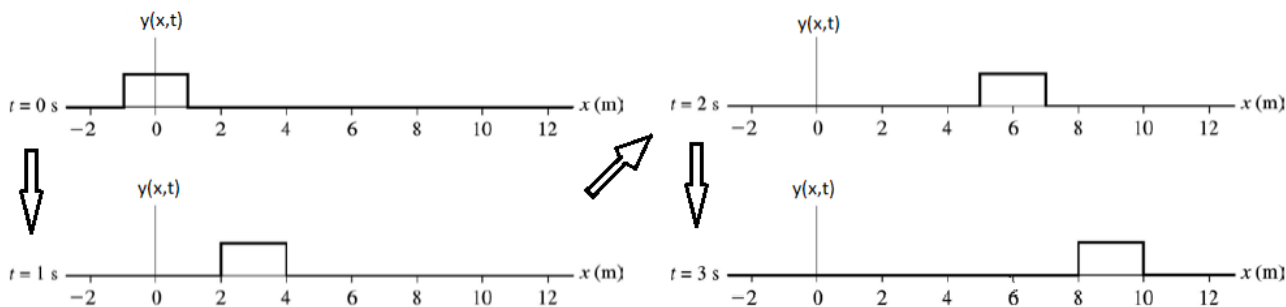
$$y(x, t) = \begin{cases} 0.1, & |x - 3t| \leq 1 \\ 0, & |x - 3t| > 1 \end{cases} \quad (3.140)$$

με τη θέση x και τη μετατόπιση y να μετρώνται σε μέτρα και το χρόνο t σε δευτερόλεπτα.

- (α') Σχεδιάστε διαγράμματα κυματοσυνάρτησης $y(x, t)$ - θέσης x από $x = -2$ m ως $x = 12$ m ανά διαστήματα ενός δευτερολέπτου από $t = 0$ ως $t = 3$ s.
- (β') Βρείτε την ταχύτητα του κύματος από το γράφημα που σχεδιάσατε. Εξηγήστε.
- (γ') Βρείτε την ταχύτητα του κύματος από την κυματοσυνάρτηση. Συμφωνεί η απάντησή σας με την απάντηση που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα;

Λύση:

(α') Δείτε το Σχήμα 3.23.



Σχήμα 3.23: Οδεύον κύμα.

- (β') Η προπορευόμενη ακμή του κύματος κινείται προς τα δεξιά 3 μέτρα κάθε δευτερόλεπτο. Άρα η ταχύτητα του κύματος είναι 3 m/s.
- (γ') Η ποσότητα $|x - 3t|$ είναι της μορφής $x - ut$, άρα ο παλμός κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα $\vec{u} = 3\vec{i}$ m/s.

3.6.2 Ημιτονοειδή Κύματα

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον από όλες τις κατηγορίες μηχανικών κυμάτων έχουν τα περίφημα ημιτονοειδή κύματα. Δεν είναι δύσκολο να φανταστείτε πως μοιάζουν αυτά τα κύματα, αλλά μπορείτε να δείτε το Σχήμα 3.24

για να βεβαιωθείτε για το πως μπορούν να παραχθούν και το Σχήμα 3.22(β) για το πως μοιάζουν όταν ταξιδεύουν. Ένα ημιτονοειδές κύμα περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

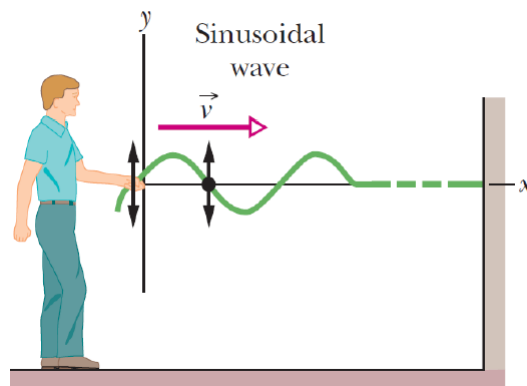
$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm ut) + \phi\right) = A \sin(\Phi(x, t)) \quad (3.141)$$

με $\Phi(x, t)$ τη (συνολική) *φάση* του κύματος. Βλέπετε ότι έχει πολλές παραμέτρους, ας τις ξεχωρίσουμε για να καταλάβουμε τι σημαίνουν αλλά και για να γράψουμε την παραπάνω κυματοσυνάρτηση σε μια πιο συμπαγή μορφή.

- **Μήκος κύματος λ :** το μήκος κύματος λ ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ διαδοχικών κορυφών ή κοιλάδων σε μια αναπαράσταση $y(x, t)$ ως προς x . Με άλλα λόγια, για μια “φωτογραφία” του ημιτονοειδούς κύματος, η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κορυφών ή κοιλάδων αποτελεί ένα μήκος κύματος.
- **Περίοδος T :** η περίοδος T είναι το χρονικό διάστημα που χρειάζεται ένα στοιχείο του μέσου διάδοσης για να εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση ή το κύμα για να διατρέξει ένα μήκος κύματος. Μπορείτε να δείτε το Σχήμα 3.25 για τις ποσότητες αυτές.
- **Συχνότητα f :** η συχνότητα f αποτελεί τον αριθμό κορυφών ανά μονάδα χρόνου, δηλ. το πόσο συχνά εμφανίζεται η βασική περίοδος του ημιτονοειδούς κύματος στη μονάδα του χρόνου, και ισούται με το αντίστροφο της περιόδου: $f = 1/T$.
- **Ταχύτητα διάδοσης u :** η ταχύτητα διάδοσης u ισούται με την απόσταση που διατρέχει το κύμα στη μονάδα του χρόνου:

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad (3.142)$$

και η οποία είναι **σταθερή**.



Σχήμα 3.24: Παραγωγή ημιτονοειδών κυμάτων.

- **Κυκλική συχνότητα ω :** η κυκλική συχνότητα ορίζεται ως

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (3.143)$$

και μας πληροφορεί για το πόσα ακτίνια φάσης “τρέχει” το κύμα στη μονάδα του χρόνου (ανά δευτερόλεπτο). Πιο γενικά, η κυκλική συχνότητα αποτελεί το ρυθμό μεταβολής της φάσης $\Phi(x, t)$ στο χρόνο, δηλ.

$$\omega = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(x, t) \quad (3.144)$$

οπότε μας πληροφορεί για το πόσο αλλάζει η φάση (σε ακτίνια) ανά δευτερόλεπτο.

- **Κυματαριθμός k :** ο κυματαριθμός k ορίζεται ως ο λόγος

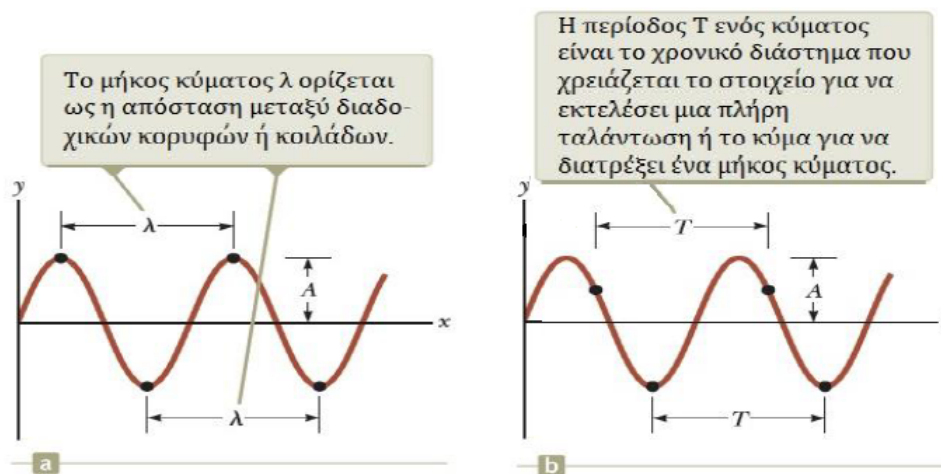
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.145)$$

και αποτελεί κατά κάποιο τρόπο ένα μέτρο της “χωρικής συχνότητας”, δηλ. μας λέει πόσα ακτίνια “τρέχει” το κύμα στη μονάδα του χώρου (ανά μέτρο). Όμοια με τη γωνιακή συχνότητα, ο κυματαριθμός αποτελεί το ρυθμό μεταβολής της φάσης $\Phi(x, t)$ στο χώρο, δηλ.

$$k = \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, t) \quad (3.146)$$

οπότε μας πληροφορεί για το πόσο αλλάζει η φάση (σε ακτίνια) ανά μέτρο.

Σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, η παραγωγή μπορεί να είναι σε οποιαδήποτε από αυτές τις πολλές μεταβλητές – για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε ένα λίγο διαφορετικό συμβολισμό αντί του d/dt ή του d/dx : ο συμβολισμός είναι $\partial/\partial x$ ή $\partial/\partial t$ που είδατε παραπάνω.



Σχήμα 3.25: (a) Μήκος κύματος και (b) περίοδος ημιτονοειδούς κύματος.

Με όλους τους παραπάνω ορισμούς μπορούμε τελικά να γράψουμε την κυματοσυνάρτηση ενός ημιτονοειδούς κύματος ως

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm ut) + \phi\right) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi) \quad (3.147)$$

Παράδειγμα 3.13:

Ημιτονοειδές κύμα που διαδίδεται στην θετική κατεύθυνση του άξονα x έχει πλάτος 0.15 m, μήκος κύματος 0.4 m, και συχνότητα 8 Hz. Μια φωτογραφία του κύματος τη χρονική στιγμή $t = 0$ φαίνεται στο Σχήμα 3.26.

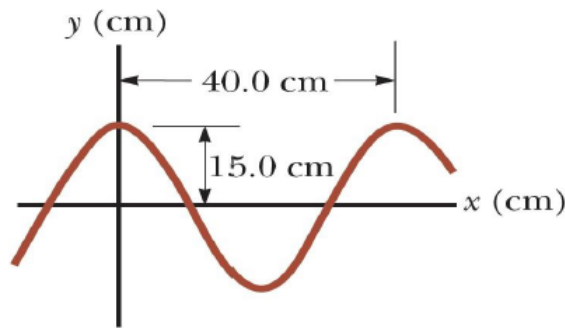
(α') Βρείτε τις ποσότητες k, T, ω, u .

(β') Βρείτε τη σταθερά φάσης ϕ και γράψτε την κυματοσυνάρτηση $y(x, t)$.

Λύση:

(α') Εφαρμόζοντας τους ορισμούς έχουμε

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 5\pi \text{ rad/m}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = \frac{1}{8} \text{ s} \quad (3.148)$$



Σχήμα 3.26: Παράδειγμα ημιτονοειδούς κύματος.

$$\omega = 2\pi f = 16\pi \text{ rad/s} , \quad u = \lambda f = 3.2 \text{ m/s} \quad (3.149)$$

(β') Η γενική σχέση της κυματοσυνάρτησης είναι

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (3.150)$$

με το πρόσημο – να υπάρχει λόγω της κίνησης προς τα δεξιά. Στο Σχήμα 3.26 βλέπουμε το ημιτονοειδές κύμα για $t = 0$, οπότε η εξίσωση που το περιγράφει είναι

$$y(x, 0) = A \sin(kx + \phi) \quad (3.151)$$

Επιλέγουμε το σημείο $x = 0$ που αντιστοιχεί στο πλάτος του κύματος, 0.15 m, και έχουμε

$$y(0, 0) = 0.15 \sin(\phi) = 0.15 \implies \sin(\phi) = 1 \quad (3.152)$$

Λύνοντας την τριγωνομετρική εξίσωση

$$\sin(\phi) = \sin(\pi/2) \implies \phi = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{2}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (3.153)$$

που απλοποιείται σε

$$\phi = 2\pi k + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.154)$$

Επιλέγοντας $k = 0$, η κυματοσυνάρτηση είναι

$$y(x, t) = 0.15 \sin\left(5\pi x - 16\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.155)$$

Παράδειγμα 3.14:

Ένα κύμα που διαδίδεται σε ένα νήμα περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$y(x, t) = 0.35 \sin(1.25x + 99.6t) \quad (3.156)$$

όπου x, y σε μέτρα και t σε δευτερόλεπτα. Θεωρήστε το στοιχειώδες (απειροστά μικρό) τμήμα του σχοινιού που βρίσκεται στη θέση $x = 0$.

(α') Βρείτε το χρονικό διάστημα μεταξύ των δυο πρώτων στιγμών όπου το στοιχειώδες τμήμα έχει $y = 0.175$.

(β') Ποιά είναι η απόσταση που διανύει το κύμα κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος που βρήκατε στο πρώτο ερώτημα;

Λύση:

(α') Η κυματοσυνάρτηση γράφεται ως

$$0.175 = 0.35 \sin(99.6t) \quad (3.157)$$

$$\sin(99.6t) = 0.5 = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad (3.158)$$

Λύνοντας την τριγωνομετρική εξίσωση, παίρνουμε

$$99.6t = \begin{cases} 2\pi k & +\frac{\pi}{6} \\ 2\pi k & +\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.159)$$

Για $k = 0$ παίρνουμε τις γωνίες $\pi/6$ και $5\pi/6$ rad, οι οποίες ισούνται με 0.523 και 2.618 rad. Άρα

$$99.6t_1 = 0.523 \implies t_1 = 5.26 \text{ ms} \quad (3.160)$$

$$99.6t_2 = 2.618 \implies t_2 = 26.3 \text{ ms} \quad (3.161)$$

Άρα

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 21 \text{ ms} \quad (3.162)$$

(β') Η απόσταση που διανύει το κύμα είναι

$$\Delta x = d = u\Delta t = (\lambda f)\Delta t = \left(\frac{\omega}{k}\right)\Delta t = \frac{99.6 \cdot 21 \cdot 10^{-3}}{1.25} \text{ s} = 1.673 \text{ m} \quad (3.163)$$

3.6.3 Εγκάρσια Ταχύτητα και Επιτάχυνση

Αναφέρθηκε νωρίτερα ότι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι σταθερή και ίση με $u = \lambda f$. Η ταχύτητα αυτή περιγράφει την ταχύτητα του κύματος όπως αυτό διαδίδεται μέσα στο μέσο (π.χ. νήμα), και όχι την ταχύτητα των στοιχείων που αποτελούν το μέσο. Τα στοιχεία του μέσου (π.χ. πολύ μικρά τμήματα νήματος) ταλαντώνονται γύρω από μια θέση ισορροπίας όσο το κύμα διαδίδεται στο μέσο. Στην περίπτωση των εγκάρσιων κυμάτων, τα στοιχεία του μέσου ταλαντώνονται “πάνω-κάτω” στον y άξονα, κάθετα στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος. Η ταχύτητα της κίνησης τους αυτής δεν είναι σταθερή, οπότε τα στοιχεία αυτά επιταχύνονται!

Αν λοιπόν έχουμε την κυματοσυνάρτηση $y(x, t)$ μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση των στοιχείων του μέσου παίρνοντας την πρώτη και δεύτερη, αντίστοιχα, παράγωγο της κυματοσυνάρτησης ως προς το χρόνο t . Ξανά, χρησιμοποιούμε ένα λίγο διαφορετικό συμβολισμό αντί του d/dt λόγω συνάρτησης πολλών μεταβλητών: ο συμβολισμός είναι $\partial/\partial t$. Οπότε

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (3.164)$$

και

$$u_y(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} y(x, t) = -A\omega \cos(kx - \omega t + \phi) \quad (3.165)$$

Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας των στοιχείων του μέσου είναι $|u_{y_{\max}}| = A\omega$. Αντίστοιχα για την επιτάχυνση

$$a_y(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} u_y(x, t) = -A\omega^2 \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (3.166)$$

Το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης των στοιχείων του μέσου είναι $|a_{y_{\max}}| = A\omega^2$.

3.6.4 Ενέργεια Κύματος σε Τεντωμένο Νήμα

Η ταχύτητα ενός κύματος είδαμε ότι συνδέεται με τη συχνότητά του και με το μήκος κυματός του: $u = \lambda f$. Αυτή η ταχύτητα όμως καθορίζεται από τις ιδιότητες του μέσου μετάδοσης. Αν ένα κύμα διαδίδεται σε ένα νήμα, στο νερό, στον αέρα, ή αλλού, πρέπει καθώς διαπερνά το μέσο να αναγκάζει τα στοιχεία του μέσου να ταλαντωθούν. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν το μέσο διαθέτει μάζα (ώστε να υπάρξει κινητική ενέργεια) και ελαστικότητα (ώστε να υπάρξει ελαστική δυναμική ενέργεια). Έτσι, η μάζα και η ελαστικότητα του μέσου καθορίζουν πόσο γρήγορα μπορεί ένα κύμα να διαδοθεί στο μέσο αυτό – με άλλα λόγια, θα πρέπει να μπορούμε να εξάγουμε την ταχύτητα του κύματος μόνο από τις ιδιότητες του μέσου αυτού!

Μπορεί κανείς να δείξει – με χρήση κάμποσου Απειροστικού Λογισμού, Γεωμετρίας, και 2ου νόμου του Newton – ότι η ταχύτητα διάδοσης u ενός κύματος σε τεντωμένο νήμα ισούται με

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (3.167)$$

με T την τάση του νήματος και μ τη μάζα ανά μονάδα μήκους του νήματος. Η μάζα ανά μονάδα μήκους ορίζεται ως

$$\mu = \frac{m}{l} \quad (3.168)$$

με l το μήκος του νήματος. Πολλές φορές ονομάζεται και γραμμική πυκνότητα μάζας.

Παράδειγμα 3.15:

Ένα κύμα που διαδίδεται σε νήμα περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$y(x, t) = 0.02 \sin(kx - \omega t) \quad (3.169)$$

με $k = 12.57 \text{ rad/m}$, $\omega = 638 \text{ rad/s}$, ενώ η θέση x μετρείται σε m και ο χρόνος t σε s. Η γραμμική πυκνότητα μάζας του νήματος είναι $\mu = 0.005 \text{ kg/m}$. Βρείτε

- (α') την τάση του νήματος T
- (β') τη μέγιστη μετατόπιση ενός στοιχείου του νήματος $y_{\max}(x, t)$
- (γ') τη μέγιστη ταχύτητα ενός στοιχείου του νήματος $u_{y_{\max}}$

Λύση:

(α') Από την εξίσωση διάδοσης κύματος σε νήμα έχουμε

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = \mu u^2 = \mu \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 = 12.88 \text{ N} \quad (3.170)$$

(β') Η μέγιστη μετατόπιση του κύματος είναι $y_{\max}(x, t) = 0.02 \text{ m}$.

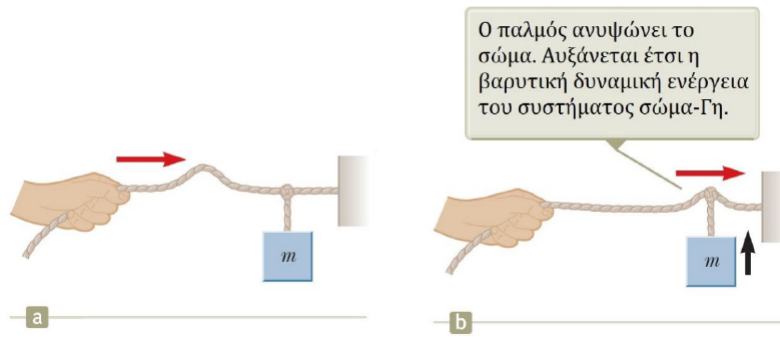
(γ') Ισχύει ότι

$$u_{y_{\max}} = \omega A = 12.76 \text{ m/s} \quad (3.171)$$

3.6.5 Ενέργεια και Ισχύς Κύματος

Όλα τα κύματα μεταφέρουν ενέργεια – και είναι κάτι που μπορείτε πολλές φορές να παρατηρήσετε άμεσα: τα σεισμικά κύματα μπορούν να κατεδαφίσουν ολόκληρες πόλεις, οι δυνατοί ήχοι μπορούν να καταστρέψουν την ακοή σας μόνιμα, οι ακτίνες λέιζερ μπορούν να αφαιρέσουν μια κακοήθεια στο δέρμα σας, και τα υδάτινα κύματα μπορούν να “καταπιούν” ολόκληρες παραλίες.

Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα. Έστω το σύστημα {σώμα, Γη} που “φαίνεται” στο Σχήμα 3.27. Το σύστημα είναι μη απομονωμένο, καθώς του ασκείται εξωτερική δύναμη από το χέρι μας. Το έργο που



Σχήμα 3.27: Σύστημα {σώμα, Γη} στη μεταφορά ενέργειας μέσω κύματος.

παράγει η δύναμη του χεριού μας μεταφέρεται ως ενέργεια στο σύστημα. Η ενέργεια αυτή διαδίδεται με τη μορφή κύματος κατά μήκος του νήματος. Παρατηρούμε μετά από λίγο ότι το σώμα που είναι δεμένο στο νήμα ανυψώνεται: υπήρξε μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος {σώμα, Γη}. Εύκολα καταλαβαίνετε ότι αν δημιουργήσετε κύμα με υψηλότερο πλάτος, η μεταβολή της ενέργειας του συστήματος θα είναι μεγαλύτερη.

Ας θεωρήσουμε ένα απειροστά μικρό στοιχειώδες τμήμα ενός νήματος. Όπως έχουμε ήδη δει, το στοιχείο αυτό εκτελεί ΑΑΤ στον κατακόρυφο άξονα, οπότε έχει κινητική και δυναμική ενέργεια που μεταβάλλονται κατά την κίνησή του (το άθροισμα τους όμως είναι σταθερό). Έστω ότι το στοιχειώδες τμήμα αυτό έχει μήκος dx και μάζα dm . Η κινητική του ενέργεια ισούται με

$$dK = \frac{1}{2} dm u_y^2(x, t) = \frac{1}{2} (\mu dx) u_y^2(x, t) = \frac{1}{2} \mu dx (-A\omega \cos(kx - \omega t + \phi))^2 \quad (3.172)$$

Έστω ότι φωτογραφίζουμε το κύμα για $t = 0$. Τότε

$$dK = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \cos^2(kx) dx \quad (3.173)$$

Το κύμα μπορεί να συνίσταται από πολλά μήκη κύματος (να είναι δηλ. πολύ μακρύ). Για να μπορούμε να συγκρίνουμε ενέργειες διαφορετικών κυμάτων, θα υπολογίσουμε την ενέργεια ενός μήκους κύματος. Αυτό θα το κάνουμε αθροίζοντας την κινητική ενέργεια καθενός από τα στοιχειώδη τμήματα νήματος που συνιστούν ένα μήκος κύματος. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι θα ολοκληρώσουμε ως προς x την παραπάνω έκφραση dK . Είναι

$$K_\lambda = \int dK = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \int_0^\lambda \cos^2(kx) dx = \frac{1}{4} \mu \omega^2 A^2 \lambda \quad (3.174)$$

Ακριβώς με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε – κάντε το! – ότι η δυναμική ενέργεια ενός μήκους κύματος ισούται με

$$U_\lambda = \frac{1}{4} \mu A^2 \omega^2 \lambda \quad (3.175)$$

Η συνολική ενέργεια που σχετίζεται με ένα μήκος κύματος είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας που υπολογίσαμε. Οπότε

$$E_\lambda = U_\lambda + K_\lambda = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 \lambda \quad (3.176)$$

Ο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας, δηλ. η ισχύς P του κύματος, ισούται με το λόγο της συνολικής ενέργειας προς το χρόνο που απαιτείται για τη μεταφορά της. Αν η ταχύτητα του ημιτονοειδούς κύματος είναι σταθερή, ο χρόνος που χρειάζεται ένα μήκος κύματος να περάσει από ένα συγκεκριμένο σημείο είναι ίσος με την περίοδο του κύματος, που επίσης είναι σταθερή. Οπότε

$$P_{avg} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 u \quad (3.177)$$

με u την ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Βλέπουμε λοιπόν ότι ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια στο νήμα εξαρτάται από τη γραμμική πυκνότητα μάζας του, το πλάτος του κύματος, τη συχνότητά του, και την ταχύτητα διάδοσής του.

Παράδειγμα 3.16:

Η κυματοσυνάρτηση ενός κύματος που διατρέχει ένα νήμα δίνεται ως

$$y(x, t) = 0.35 \sin\left(10\pi t - 3\pi x + \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.178)$$

με τα x, y να μετριοούνται σε μέτρα, και το t σε δευτερόλεπτα. Αν η γραμμική πυκνότητα μάζας του νήματος είναι 75 gr/m, τότε δείξτε

(α') ότι ο μέσος ρυθμός μεταφοράς ενέργειας στο νήμα είναι 15.1 W.

(β') ότι η ενέργεια που περιέχεται σε κάθε κύκλο του κύματος είναι 3.02 J.

Λύση:

(α') Έχουμε ότι

$$y(x, t) = 0.35 \sin\left(10\pi t - 3\pi x + \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.179)$$

η οποία γράφεται ως

$$y(x, t) = 0.35 \sin\left(3\pi x - 10\pi t + \frac{3\pi}{4}\right) \quad (3.180)$$

οπότε και αναγνωρίζουμε ότι

$$k = 3\pi \text{ rad/m} \quad (3.181)$$

$$\omega = 10\pi \text{ rad/s} \quad (3.182)$$

$$A = 0.35 \text{ m} \quad (3.183)$$

Άρα

$$u = \lambda f = \frac{\omega}{k} = 3.33 \text{ m/s} \quad (3.184)$$

Άρα ο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας (μέση ισχύς) είναι

$$P = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 u = 15.1 \text{ W} \quad (3.185)$$

(β') Η ενέργεια ανά κύκλο κύματος θα είναι

$$E_\lambda = PT = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \lambda = 3.02 \text{ J} \quad (3.186)$$

αφού $uT = \frac{u}{f} = \lambda$.

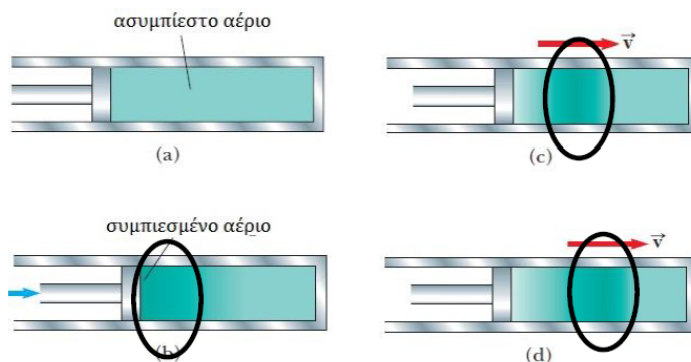
3.7 Ηχητικά Κύματα

Σίγουρα τα πιο οικεία κύματα στην καθημερινότητά μας είναι τα ηχητικά κύματα: δεν τα βλέπουμε αλλά τα ακούμε και τα καταλαβαίνουμε. Τα ηχητικά κύματα χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

- **Ακουστικά κύματα:** κύματα που μπορεί να αντιληφθεί το ανθρώπινο αυτί. Η μουσική και η φωνητική επικοινωνία των περισσότερων θηλαστικών εμπίπτουν σε αυτήν την κατηγορία.

- **Κύματα υποήχων:** κύματα που χρησιμοποιούνται από μερικά ζώα για την επικοινωνία τους, όπως οι ελέφαντες και οι φάλαινες. Επίσης, πολλά έντονα καιρικά φαινόμενα παράγουν υποήχους, όπως οι καταιγίδες, οι κατολισθήσεις, οι σεισμοί, κλπ.
- **Κύματα υπερήχων:** κύματα που χρησιμοποιούν ξανά κάποια ζώα όπως οι νυχτερίδες και κύματα ιδιαίτερα δημοφιλή στις ιατρικές απεικονίσεις.

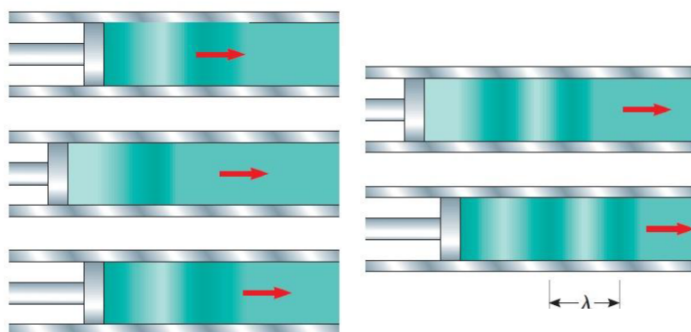
Η κατανόηση των ηχητικών κυμάτων περνά μέσα από την προσομοίωσή τους με έμβολα και αέρια σε δοχεία. Αν γεμίσουμε ένα δοχείο, κλειστό από τη μια άκρη, με ένα ασυμπίεστο αέριο, και στην άλλη άκρη τοποθετήσουμε ένα έμβολο μπορούμε να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά του αερίου στις αλλαγές της πίεσης και πυκνότητας του εξ αιτίας της κίνησης του εμβόλου. Αρχικά, το αέριο βρίσκεται σε ομοιόμορφη κατανομή μέσα στο δοχείο και το έμβολο είναι ακίνητο, όπως στο Σχήμα 3.28(a). Στη συνέχεια, κινούμε



Σχήμα 3.28: Έμβολο σε κίνηση σε δοχείο με αέριο.

το έμβολο προς τα δεξιά, συμπιέζοντας την περιοχή του αερίου ακριβώς μπροστά από την επιφάνεια του εμβόλου. Η πίεση και η πυκνότητα του αερίου σε εκείνο το χώρο είναι μεγαλύτερη απ' ό,τι στο υπόλοιπο μέρος του. Η κατάσταση αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.28(b). Το έμβολο παραμένει ακίνητο στη νέα του θέση, όπως στο Σχήμα 3.28(c) ενώ παρατηρούμε ένα διάμηκες κύμα να διαδίδεται στο δοχείο με ταχύτητα u προς τα δεξιά. Προσέξτε ότι δε διαδίδεται ύλη! Τα μόρια του αερίου που βρίσκονται μπροστά από το έμβολο δεν ταξιδεύουν προς τα δεξιά! Μετά την κίνηση του εμβόλου προς τα δεξιά, τα μόρια του αερίου συμπιέζονται και μετά από λίγο αποσυμπιέζονται, συμπιέζοντας τα διπλανά τους μόρια, που με τη σειρά τους κατά την αποσυμπίεση συμπιέζουν τα γειτονικά τους κ.ο.κ. Αυτή η διάδοση συνεχίζεται, όπως στο Σχήμα 3.28(d).

Τι θα συμβεί αν το έμβολο αρχίσει να κινείται μπρος - πίσω, εκτελώντας ΑΑΤ; Δείτε το Σχήμα 3.29. Η κίνηση του εμβόλου προς τα εμπρός δημιουργεί περιοχές συμπίεσης του αερίου, που ονομάζονται **πυ-**



Σχήμα 3.29: Έμβολο σε ΑΑΤ σε δοχείο με αέριο.

κνώματα. Η κίνηση του εμβόλου προς τα πίσω δημιουργεί περιοχές αραιώσης των μορίων του αερίου, που ονομάζονται **αραιώματα**³. Η διαδικασία είναι ακριβώς όμοια με αυτή που περιγράφηκε νωρίτερα. Κάθε πύκνωμα και αραιώμα διαδίδεται στο μέσο με την ταχύτητα του ήχου στο μέσο αυτό. Η απόσταση μεταξύ διαδοχικών πυκνωμάτων ή αραιωμάτων δεν είναι άλλη από το μήκος κύματος λ .

Κάθε μικρός όγκος αερίου εκτελεί ΑΑΤ παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Η κίνηση του αυτή περιγράφεται από τη σχέση

$$s(x, t) = s_{\max} \cos(kx - \omega t) \quad (3.187)$$

με $s_{\max}$ να είναι το πλάτος μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας και δηλώνει τη μέγιστη μετατόπιση ενός στοιχείου από αυτή. Όμοια με τη θέση κάθε στοιχείου του αερίου, μπορεί κανείς να υπολογίσει πόσο μεταβάλλεται η πίεση ενός μικρού όγκου αερίου εξ' αιτίας του εμβόλου. Η μεταβολή της πίεσης ΔP δίνεται από τη σχέση

$$\Delta P(x, t) = \Delta P_{\max} \sin(kx - \omega t) \quad (3.188)$$

όπου $\Delta P_{\max}$ το πλάτος πίεσης, δηλ. η μέγιστη μεταβολή της πίεσης γύρω από μια τιμή ισορροπίας. Η σχέση μετατόπισης και μεταβολής πίεσης δεν είναι τυχαία: η μεταβολή της πίεσης σχετίζεται με την (αρνητική) παράγωγο της μετατόπισης ως προς τη θέση x . Ως εκ τούτου δεν είναι περίεργο που αν η μια συνάρτηση είναι συνημιτονοειδής, η άλλη είναι ημιτονοειδής. Παρατηρήστε ότι η μεταβολή πίεσης είναι μέγιστη όταν η μετατόπιση των στοιχείων είναι μηδενική, ενώ η μετατόπιση των στοιχείων είναι μέγιστη όταν η μεταβολή της πίεσης είναι μηδενική. Αυτό συμβαίνει γιατί η μεταβολή της πίεσης εξαρτάται από το πόσο τα γειτονικά στοιχεία του μέσου διάδοσης πλησιάζουν ή απομακρύνονται μεταξύ τους, και όχι από το πόσο μακριά από τη θέση ισορροπίας τους μετατοπίζονται όλα μαζί – ως ομάδα. Όπως έχετε καταλάβει, για ένα ημιτονοειδές ηχητικό κύμα, η πίεση ταλαντώνεται γύρω από την ατμοσφαιρική πίεση με ημιτονοειδή τρόπο που έχει την ίδια συχνότητα με τις κινήσεις των σωματιδίων του μέσου διάδοσης (αέρα). Το ανθρώπινο αυτί λειτουργεί ως αισθητήρας τέτοιων μεταβολών της πίεσης, όταν ένα ηχητικό κύμα εισέρχεται στον ακουστικό πόρο. Εκεί, ασκείται μεταβαλλόμενη πίεση στο τύμπανο, στην άλλη πλευρά του οποίου η πίεση είναι η ίση με την ατμοσφαιρική πίεση. Αυτή η διαφορά πίεσης ασκεί μεταβαλλόμενη δύναμη στο τύμπανο το οποίο εξαναγκάζεται σε ταλάντωση.

Τέλος, μπορεί κανείς να αποδείξει ότι το μέγιστο πλάτος πίεσης και η μέγιστη μετατόπιση, $\Delta P_{\max}$ και $s_{\max}$ αντίστοιχα, σχετίζονται ως

$$\Delta P_{\max} = (\rho \omega) s_{\max} \quad (3.189)$$

με ρ την ταχύτητα διάδοσης του κύματος και την πυκνότητα του μέσου διάδοσης αντίστοιχα, και φυσικά ω τη συχνότητα του κύματος.

3.7.1 Ταχύτητα Διάδοσης Ήχου

Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου σε ένα μέσο εξαρτάται από το μέτρο ελαστικότητας όγκου B και την πυκνότητα ρ του μέσου. Στην περίπτωση της διάδοσης στον αέρα, η ταχύτητα του ήχου δίνεται από τη σχέση

$$u = 331 \sqrt{1 + \frac{T_c}{273}} \quad (3.190)$$

με T_c τη θερμοκρασία του αέρα σε βαθμούς Κελσίου.

Παράδειγμα 3.17:

Βλέπετε μια αστραπή στον ορίζοντα, και μετά από 6 δευτερόλεπτα ακούγεται η βροντή. Αν η θερμοκρασία του αέρα είναι 5°C , πόσο μακριά από σας έπεσε η αστραπή;

³Όχι ιδιαίτερες εμπνεύσεις στις ονομασίες ☺

Λύση:

Σύμφωνα με τη σχέση (3.190), η ταχύτητα του ήχου θα είναι

$$u = 331 \sqrt{1 + \frac{5}{273}} = 334 \text{ m/s} \quad (3.191)$$

Αν θεωρήσουμε $x = 0$ τη θέση όπου συνέβη η αστραπή, από τη σχέση

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow x_f = x_i + ut = 0 + 334 \cdot 6 = 2004 \text{ m} \quad (3.192)$$

δηλ. η αστραπή συνέβη περίπου δυο χιλιόμετρα μακριά από μας.

3.7.2 Ένταση Ηχητικών Κυμάτων

Πλέον θα αντιμετωπίζουμε τα ηχητικά κύματα ως **σφαιρικά** κύματα, δηλ. κύματα που διαδίδονται σε όλες τις κατευθύνσεις. Ένα σφαιρικό κύμα μπορεί να παρασταθεί ως ένα σύνολο από ομόκεντρα κυκλικά τόξα, με το **μέτωπο κύματος** να ονομάζεται η επιφάνεια όπου η ποσότητα $kx - \omega t + \phi$ έχει την ίδια τιμή. Διαδοχικά κυματικά μέτωπα απέχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με το μήκος κύματος λ . Οι **ακτίνες** του σφαιρικού κύματος είναι νοητές ευθείες που ξεκινούν από την πηγή και δείχνουν την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος. Επίσης, θα υποθέτουμε ότι η διάδοση του κύματος είναι ιστροπική, δηλ. με την ίδια ταχύτητα προς όλες τις κατευθύνσεις.

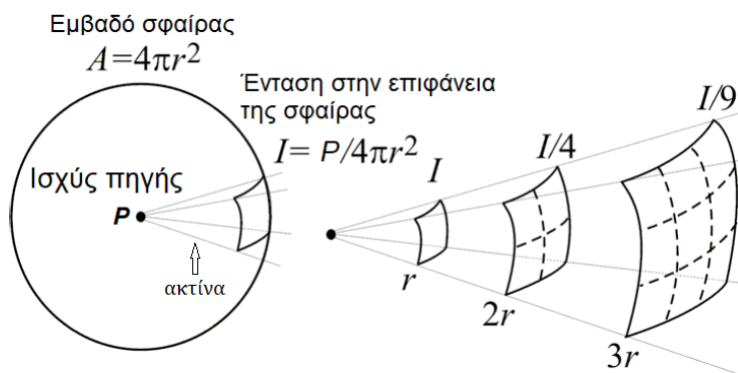
Μπορεί κανείς να δείξει ότι η ένταση I ενός ηχητικού κύματος δίνεται από τη σχέση

$$I = \frac{P_{avg}}{A} \quad (3.193)$$

με A το εμβαδό της επιφάνειας κάθετης στη διεύθυνση διάδοσης και P_{avg} τη μέση ισχύ της πηγής. Με βάση τον ορισμό της έντασης που δώσαμε μόλις, για ένα σφαιρικό ηχητικό κύμα θα έχουμε

$$I = \frac{P_{avg}}{A} = \frac{P}{4\pi r^2} \quad (3.194)$$

με r την ακτίνα του κυματικού μετώπου. Παρατηρήστε ότι η ένταση μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης από την πηγή. Δείτε το Σχήμα 3.30.



Σχήμα 3.30: Ένταση κύματος σε συνάρτηση με την απόσταση από την πηγή.

Παράδειγμα 3.18:

Ένα ηχητικό κύμα έντασης $2 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2$ θεωρείται ως μετρίως δυνατό στα αυτιά μας. Το τύμπανο στο εσωτερικό των αυτιών μας έχει διάμετρο 6 χιλιοστά. Δείξτε ότι η ενέργεια που μεταφέρεται στο τύμπανο των αυτιών μας αν ακούσουμε το παραπάνω ηχητικό κύμα για 60 δευτερόλεπτα είναι $E = 3.4 \cdot 10^{-6} \text{ J}$. Θεωρήστε το τύμπανο ως μια στρογγυλή επιφάνεια.

Λύση:

Η ενέργεια που παραδίδεται στο αυτί μας σε χρόνο t ισούται με $E = Pt$, με P την ισχύ του κύματος. Η ένταση του κύματος είναι $I = P/A$ με A το εμβαδόν της επιφάνειας του τυμπάνου. Συνολικά,

$$E = Pt = IAt = I\pi r^2 t = 3.4 \cdot 10^{-6} \text{ J} \quad (3.195)$$

3.7.3 Ηχοστάθμη

Είναι ενδιαφέρον να εμβαθύνουμε περισσότερο στα ηχητικά κύματα και στον τρόπο που τα αντιλαμβανόμαστε. Οι ασθενέστεροι ήχοι που μπορεί να αντιληφθεί το ανθρώπινο αυτί στη συχνότητα των 1000 Hz έχουν ένταση περίπου 10^{-12} W/m^2 . Αυτό είναι το λεγόμενο **κατώφλι ακοής** στα 1000 Hz, που συχνά χρησιμοποιείται ως συχνότητα αναφοράς, αν και θα δούμε ότι το κατώφλι μεταβάλλεται συναρτήσει της συχνότητας. Από την άλλη, οι δυνατότεροι ήχοι που μπορούμε να ακούσουμε (χωρίς πόνο) είναι της τάξης έντασης του 1 W/m^2 . Βλέπετε ότι το εύρος των εντάσεων είναι ιδιαίτερα μεγάλο. Η γραμμική κλίμακα της έντασης δε μας βοηθά να τη χειριστούμε. Θα θέλαμε μια άλλη κλίμακα, περισσότερο βολική, και μια τέτοια είναι η λογαριθμική κλίμακα. Ονομάζουμε **ηχοστάθμη** την ποσότητα

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad (3.196)$$

με I_0 την ένταση αναφοράς (κατώφλι ακοής) σε κάποια συχνότητα. Η ηχοστάθμη μετατρέπει τη γραμμική ένταση εύρους από 10^{-12} ως 1 W/m^2 σε λογαριθμική εύρους 0 ως 120 dB, με τη μονάδα μέτρησης αυτή να ονομάζεται deciBel – ντεσιμπέλ – προς τιμήν του Α. G. Bell. Σε αυτήν την κλίμακα, το κατώφλι ακοής βρίσκεται στα $\beta = 0$, μια τυπική συζήτηση δυο ατόμων βρίσκεται στα $\beta = 60 \text{ dB}$, ο θόρυβος της κίνησης στο δρόμο στα $\beta = 80 \text{ dB}$, ενώ το όριο του πόνου στα $\beta = 120 - 130 \text{ dB}$.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.19:

Δυο ίδιες μηχανές βρίσκονται στην ίδια απόσταση από έναν εργάτη. Η ένταση του ήχου κατά τη λειτουργία κάθε μηχανής είναι ίση με $2 \cdot 10^{-7} \text{ W/m}^2$.

(α') Βρείτε την ηχοστάθμη που ακούει ο εργάτης όταν λειτουργεί η μια μηχανή.

(β') Βρείτε την ηχοστάθμη που ακούει ο εργάτης όταν λειτουργούν και οι δυο μηχανές.

Λύση:

(α') Για τη μια μηχανή, είναι

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} = 10 \log_{10} \frac{2 \cdot 10^{-7}}{1 \cdot 10^{-12}} \quad (3.197)$$

$$= 10 \log_{10}(2 \cdot 10^5) = 10 \log_{10} 2 + 10 \log_{10} 10^5 \quad (3.198)$$

$$= 10 \log_{10} 2 + 50 \approx 3 + 50 = 53 \text{ dB} \quad (3.199)$$

(β') Για τις δυο μηχανές, είναι

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I'}{I_0} = 10 \log_{10} \frac{4 \cdot 10^{-7}}{1 \cdot 10^{-12}} \quad (3.200)$$

$$= 10 \log_{10}(4 \cdot 10^5) = 10 \log_{10} 4 + 10 \log_{10} 10^5 \quad (3.201)$$

$$= 10 \log_{10} 4 + 50 \approx 6 + 50 = 56 \text{ dB} \quad (3.202)$$

Παρατηρήστε ότι ο διπλασιασμός της έντασης αυξάνει την ηχοστάθμη κατά 3 μόλις dB!

Παράδειγμα 3.20:

Τα αυτιά μας είναι ευαίσθητα στην αντίληψη διαφορετικών συχνοτήτων αλλά όχι τόσο στην αντίληψη διαφορετικών εντάσεων. Δεν είμαστε ικανοί/ες, π.χ. να καταλάβουμε τη διαφορά στην αύξηση της έντασης I ενός ήχου, όταν η διαφορά των ηχοστάθμεων $\Delta\beta$ είναι λιγότερη από 1 dB. Δείξτε ότι

$$\frac{I_2}{I_1} = 1.3 \quad (3.203)$$

αν η ηχοστάθμη ανεβαίνει από τα $\beta_1 = 60 \text{ dB}$ στα $\beta_2 = 61 \text{ dB}$.

Λύση:

Λύνοντας την εξίσωση της ηχοστάθμης ως προς I , έχουμε

$$I = I_0 \cdot 10^{\beta/10} \quad (3.204)$$

Για $\beta = 60 \text{ dB}$, έχουμε $I = 10^{-6} \text{ W/m}^2$ και για $\beta = 61 \text{ dB}$, έχουμε $I = 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$. Ο λόγος των δυο είναι 1.3.

Παράδειγμα 3.21:

Δυο ηχεία σε υπερυψωμένες πλατφόρμες βρίσκονται στις απέναντι θέσεις σε απόσταση d μεταξύ τους. Καθένα εκπέμπει με την ίδια ισχύ και τα ηχητικά κύματα διαδίδονται σε όλες τις κατευθύνσεις ως κυματικά μέτωπα. Η ηχοστάθμη σε ένα σημείο στη μέση της μεταξύ τους απόστασης είναι 75 dB. Ποιά είναι η ηχοστάθμη στο σημείο του ενός τετάρτου της μεταξύ τους απόστασης, αν υποθέσουμε ότι μετράμε τις ηχοστάθμες σε μια νοτιή ευθεία γραμμή που ενώνει τα ηχεία μεταξύ τους;

Λύση:

Έστω d η απόσταση των ηχείων. Έστω ότι η ένταση στη μέση της απόστασης ($d/2$) είναι I_1 και η ηχοστάθμη εκεί είναι $\beta_1 = 75 \text{ dB}$. Έστω I_2 και β_2 τα αντίστοιχα μεγέθη σε απόσταση ενός τετάρτου της συνολικής απόστασης d από το ένα ηχείο και τρία τέταρτα της d από το άλλο ηχείο, στη νοτιή ευθεία που τα συνδέει. Ξέρουμε ότι

$$I = \frac{P_{avg}}{A} = \frac{P_{avg}}{4\pi r^2} \quad (3.205)$$

Οπότε

$$I_1 = \frac{P_{avg}}{4\pi(d/2)^2} + \frac{P_{avg}}{4\pi(d/2)^2} = \frac{2P_{avg}}{\pi d^2} \quad (3.206)$$

$$I_2 = \frac{P_{avg}}{4\pi(d/4)^2} + \frac{P_{avg}}{4\pi(3d/4)^2} = \frac{40P_{avg}}{9\pi d^2} = \frac{20}{9} I_1 \quad (3.207)$$

Επίσης

$$\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1 = 10 \log_{10} \frac{I_2}{I_1} = 3.48 \text{ dB} \quad (3.208)$$

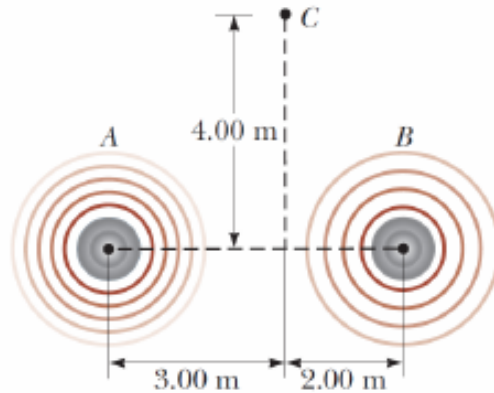
Οπότε

$$\beta_2 = \beta_1 + \Delta\beta = 75 + 3.48 = 78.48 \text{ dB} \quad (3.209)$$

Παράδειγμα 3.22:

Δύο μικρά ηχεία εκπέμπουν ηχητικά κύματα διαφορετικών συχνοτήτων, κατά τον ίδιο τρόπο προς κάθε κατεύθυνση, όπως στο Σχήμα 3.31. Το ηχείο *A* έχει εξαγώμενη ισχύ 1.00 mW και το ηχείο *B* έχει εξαγώμενη ισχύ 1.50 mW . Υπολογίστε την ηχοστάθμη στο σημείο *C*, σε dB, υποθέτοντας ότι

- (α') μόνο ο *A* εκπέμπει ήχο
- (β') μόνο ο *B* εκπέμπει ήχο
- (γ') και οι δύο εκπέμπουν ήχο



Σχήμα 3.31: Μικρά ηχεία σε εκπομπή.

Λύση:

Καθώς τα ηχεία μεταδίδουν τον ήχο ομοίως προς κάθε κατεύθυνση η ένταση του ήχου είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης από την πηγή του ήχου.

(α') Είναι $r_{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m}$. Άρα

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{4\pi(5)^2} = 3.18 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2. \quad (3.210)$$

Οπότε

$$\beta = 10 \log \left(\frac{3.18 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} \right) = 10 \cdot 6.5 = 65 \text{ dB}. \quad (3.211)$$

(β') Είναι $r_{BC} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4.47 \text{ m}$. Άρα

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1.5 \cdot 10^{-3}}{4\pi(4.47)^2} = 5.97 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2 \quad (3.212)$$

Οπότε

$$\beta = 10 \log \left(\frac{5.97 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} \right) = 67.8 \text{ dB} \quad (3.213)$$

(γ') Είναι $I = 3.18 \mu\text{W/m}^2 + 5.97 \mu\text{W/m}^2$. Άρα

$$\beta = 10 \log \left(\frac{9.15 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} \right) = 69.6 \text{ dB} \quad (3.214)$$

3.7.4 Ψυχοακουστική

Παρουσιάσαμε νωρίτερα την ηχοστάθμη των 1000 Hz ως ηχοστάθμη αναφοράς για διάφορα προβλήματα και είδαμε ότι το κατώφλι της έντασης είναι $I = 10^{-12} \text{ W/m}^2$, δηλ. η ηχοστάθμη είναι $\beta = 0 \text{ dB}$. Όμως στα

χαμηλόσυχνους ήχους και λιγότερη για υψίσυχνους ήχους. Τέλος, ο παράγοντας III αφορά δυο κοντινές συχνότητες που εμφανίζονται ταυτόχρονα, και στην ικανότητα ενός δυνατότερου ήχου να επικαλύψει τον ασθενέστερο γειτονικό του. Το φαινόμενο ονομάζεται frequency masking, αλλά υπάρχει παρόμοιο φαινόμενο και στο πεδίο του χρόνου (temporal masking): αν ακούσουμε ένα δυνατό ήχο, όταν αυτός σταματήσει θα μας πάρει λίγη ώρα να αντιληφθούμε έναν ακολουθούμενο τόνο. Και στις δυο περιπτώσεις, μπορούμε να εξοικονομήσουμε bits με το να μην αποθηκεύσουμε τους ήχους που δεν αντιλαμβανόμαστε. Περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να βρείτε εδώ: <https://en.wikipedia.org/wiki/MP3>, ενώ ένα αρκετά πιο τεχνικό paper μπορείτε να βρείτε εδώ: <https://www.csd.uoc.gr/~hy438/lectures/PerceptualCodingAudio.pdf>.

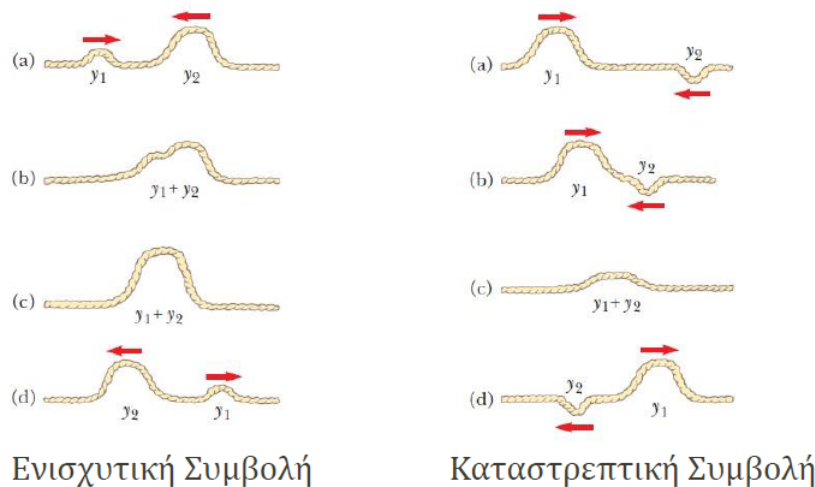
3.8 Υπέρθηση Κυμάτων

Στη μελέτη της κυματικής που έχουμε κάνει ως τώρα, δεν έχουμε τονίσει ένα σημαντικό γεγονός: μια θεμελιώδης διαφορά μεταξύ των κυμάτων και των σωμάτων είναι ότι αν αθροίσουμε δυο σωματίδια, το αποτέλεσμα μπορεί επίσης να είναι ένα (μεγαλύτερο) σωματίδιο, αλλά για να συμβεί αυτό πρέπει τα σωματίδια να βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία του χώρου - με άλλα λόγια, δε γίνεται δυο σωματίδια να καταλαμβάνουν τον ίδιο χώρο (το μεγαλύτερο σωματίδιο θα πιάνει περισσότερο χώρο απ' ό,τι καθένα μόνο του). Στην κυματική, το άθροισμα δυο κυμάτων είναι επίσης κύμα αλλά για να συμβεί αυτό πρέπει τα κύματα να βρίσκονται στο ίδιο σημείο του χώρου! Αυτή είναι μια πολύ σημαντική παρατήρηση: τα κύματα μπορούν να συνδυαστούν, να συνυπάρξουν, να συμβάλλουν στην ίδια θέση του χώρου! Τέτοιες συμπεριφορές μπορούν να αναλυθούν με βάση την **αρχή της υπέρθεσης**:

Αρχή της Υπέρθησης

Αν σε κάποιο μέσο διαδίδονται δυο ή περισσότερα κύματα, η συνισταμένη τιμή της κυματοσυνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο είναι το αλγεβρικό άθροισμα των τιμών των κυματοσυναρτήσεων των επιμέρους κυμάτων.

Κύματα που ικανοποιούν την παραπάνω αρχή ονομάζονται γραμμικά. Ο συνδυασμός γραμμικών κυμάτων στην ίδια περιοχή του χώρου ονομάζεται **συμβολή**. Υπάρχουν τρία είδη συμβολής: η ενισχυτική συμβολή, όπου τα δυο κύματα συμβάλλουν σχηματίζοντας ένα μεγαλύτερου πλάτους κύμα, η καταστρεπτική συμβολή, όπου τα δυο κύματα συμβάλλουν σχηματίζοντας ένα μηδενικού πλάτους κύμα, και η ενδιάμεση συμβολή που είναι ουσιαστικά μια κατάσταση ανάμεσα στις δυο προηγούμενες. Δείτε το Σχήμα 3.33.



Σχήμα 3.33: Ενισχυτική και Καταστρεπτική Συμβολή.

3.8.1 Υπέρθεση Ημιτονοειδών Κυμάτων

Ας επικεντρωθούμε ξανά στα ημιτονοειδή κύματα. Έστω δυο ημιτονοειδή κύματα που διαδίδονται προς τα δεξιά, έχοντας την ίδια συχνότητα ω , μήκος κύματος λ , και πλάτος A , αλλά διαφορετική αρχική φάση ϕ . Ας πούμε ότι το ένα εξ αυτών έχει αρχική φάση ϕ και το άλλο έχει μηδενική φάση. Αυτά τα κύματα περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (3.215)$$

$$y_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (3.216)$$

Το άθροισμα τους θα είναι

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad (3.217)$$

$$= A [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \phi)] \quad (3.218)$$

$$= 2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right) \quad (3.219)$$

με χρήση της ταυτότητας

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad (3.220)$$

Παρατηρήστε ότι εξακολουθούμε να έχουμε ένα οδεύουν ημιτονοειδές κύμα, καθώς έχουμε ακόμα μια συνάρτηση της μορφής $f(kx \pm \omega t)$. Όμως μπορούμε να διαχωρίσουμε μερικές περιπτώσεις για να κατανοήσουμε πως συμβάλλουν τα δυο κύματα. Η μόνη διαφορά τους είναι στην αρχική φάση ϕ . Μπορούμε να γράψουμε την κυματοσυνάρτηση ως

$$y(x, t) = A(\phi) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right) \quad (3.221)$$

και τότε – δείτε σε συνδυασμό το Σχήμα 3.34 – έχουμε:

(α') $\phi = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$: στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$A(\phi) = 2A \cos(m\pi) = \pm 2A \quad (3.222)$$

δηλ. το πλάτος του κύματος είναι $2A$, το μέγιστο δυνατό. Τότε λέμε ότι τα κύματα βρίσκονται σε **φάση** και ονομάζουμε τη συμβολή **ενισχυτική**.

(β') $\phi = (2m+1)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$: στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$A(\phi) = 2A \cos(m\pi + \pi/2) = 0 \quad (3.223)$$

δηλ. το πλάτος του κύματος είναι 0, το ελάχιστο δυνατό. Τότε λέμε ότι τα κύματα βρίσκονται **εκτός φάσης** και ονομάζουμε τη συμβολή **καταστρεπτική**.

(γ') Σε οποιαδήποτε άλλη τιμή της φάσης $0 < \phi < 2\pi$, $\phi \neq \pi$, το πλάτος παίρνει μια ενδιάμεση τιμή $-2A < A(\phi) < 2A$, και η συμβολή ονομάζεται **ενδιάμεση**.

Όμως εν γένει τα κύματα μπορεί να έχουν και τα δυο μη μηδενική φάση. Τότε

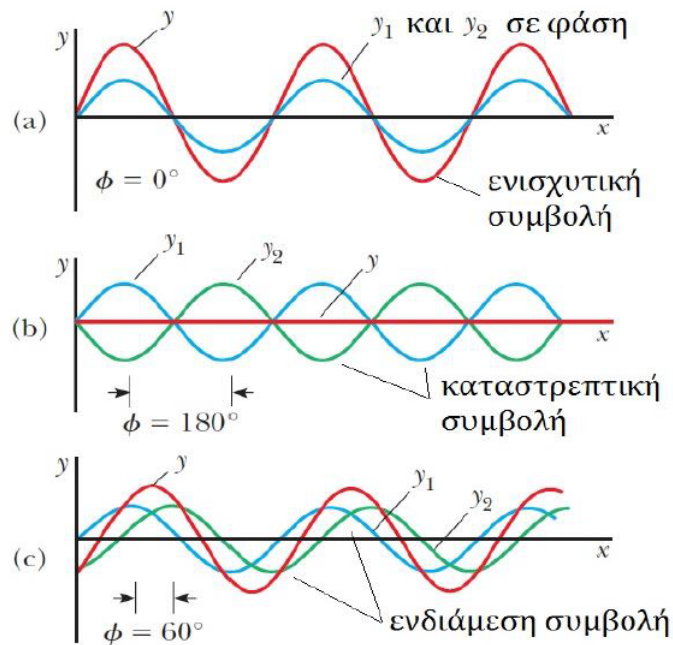
$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi_1) \quad (3.224)$$

$$y_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi_2) \quad (3.225)$$

Το άθροισμα τους θα είναι

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad (3.226)$$

$$= A [\sin(kx - \omega t + \phi_1) + \sin(kx - \omega t + \phi_2)] \quad (3.227)$$



Σχήμα 3.34: Ενισχυτική, Καταστρεπτική, και Ενδιάμεση Συμβολή.

$$= 2A \cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \quad (3.228)$$

με χρήση ξανά της ταυτότητας

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad (3.229)$$

Μπορούμε και πάλι να γράψουμε την κυματοσυνάρτηση ως

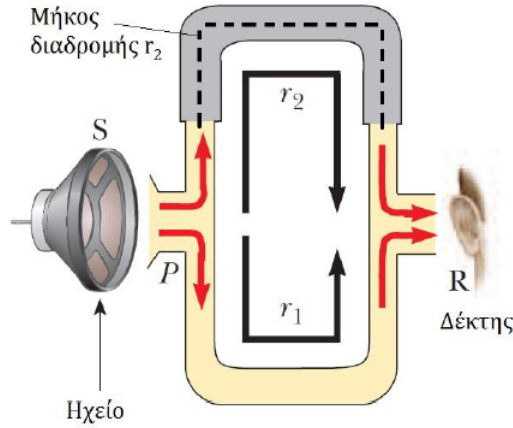
$$y(x, t) = A(\Delta\phi) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \quad (3.230)$$

και τότε έχουμε:

- (α') $\Delta\phi = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$: όμοια με πριν, λέμε ότι τα κύματα βρίσκονται σε φάση και ονομάζουμε τη συμβολή **ενισχυτική**.
- (β') $\Delta\phi = (2m + 1)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$: οπότε και λέμε ότι τα κύματα βρίσκονται εκτός φάσης και ονομάζουμε τη συμβολή **καταστρεπτική**.
- (γ') Σε οποιαδήποτε άλλη τιμή της διαφοράς αρχικής φάσης $0 < \Delta\phi < 2\pi$, $\Delta\phi \neq m\pi$, η συμβολή ονομάζεται **ενδιάμεση**.

3.8.2 Υπέρθεση και Διαφορά Διαδρομής

Άρα τα κύματα έχουν εν γένει το καθένα τη δική του αρχική φάση, και μόλις είδαμε πως μπορούμε να κατανοήσουμε τον τρόπο συμβολής τους. Όμως κατά τη διάδοση τους μπορεί να ακολουθούν **διαφορετικές διαδρομές**. Έστω ένα ηχείο όπως στο Σχήμα 3.35. Το ηχείο βρίσκεται στο άκρο μιας κατασκευής στην οποία το πάνω μέρος λειτουργεί ως “μοχλός” επέκτασης ή συρρίκνωσης της διαδρομής r_2 . Τα κύματα που ταξιδεύουν μέσα στην κατασκευή αυτή ακολουθούν διαφορετικές διαδρομές μέχρι το αυτί του δέκτη.



Σχήμα 3.35: Διάδοση ηχητικού κύματος σε διαφορετικές διαδρομές.

Ας υποθέσουμε ότι έχουν ίδιο πλάτος και συχνότητα. Η απόσταση του ηχείου από το δέκτη ονομάζεται **μήκος διαδρομής**. Ως **διαφορά διαδρομής** ονομάζεται η ποσότητα

$$\Delta r = |r_2 - r_1| \quad (3.231)$$

Η συνολική φάση καθενός κύματος είναι

$$\Phi_i = kr_i - \omega t + \phi_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.232)$$

Τότε η συμβολή των κυμάτων περιγράφεται ως

$$y(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right) = A(\Phi_1, \Phi_2) \sin\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right) \quad (3.233)$$

Τώρα πρέπει να μελετήσουμε το πλάτος $A(\Phi_1, \Phi_2)$. Έστω $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$, δηλ. το πλάτος μπορεί να γραφεί ως

$$A(\Delta\Phi) = 2A \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \quad (3.234)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α') Αν $\Delta\Phi = 2m\pi$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, τότε έχουμε **ενισχυτική συμβολή**, αφού

$$2A \cos(\Delta\Phi/2) = 2A \cos(m\pi) = \pm 2A \quad (3.235)$$

(β') Αν $\Delta\Phi = (2m + 1)\pi$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, τότε τα κύματα **συμβάλλουν καταστρεπτικά**, αφού

$$2A \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) = 2A \cos\left(\frac{(2m + 1)\pi}{2}\right) = 2A \cos(m\pi + \pi/2) = 0 \quad (3.236)$$

Όμως πως μπορούμε να σχετίσουμε τη διαφορά διαδρομής στην όλη υπόθεση της συμβολής; Υπάρχει κάποια σχέση διαφοράς διαδρομής και συμβολής; Ας το δούμε.

Αφού

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi = k(r_2 - r_1) + \Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} + \Delta\phi \quad (3.237)$$

κι αν θεωρήσουμε ότι η αρχική φάση είναι ίδια (π.χ. όταν πρόκειται για κοινή πηγή ήχου), δηλ. $\Delta\phi = 0$, τότε

(α') έχουμε **ενισχυτική συμβολή** αν

$$2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} = 2m\pi \iff \Delta r = m\lambda, \quad m \in \mathbb{Z}_+ \quad (3.238)$$

(β') έχουμε **καταστρεπτική συμβολή** αν

$$2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} = (2m+1)\pi \iff \Delta r = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}_+ \quad (3.239)$$

Από όσα έχουμε συζητήσει, καταλαβαίνουμε ότι η καταστρεπτική συμβολή μπορεί να συμβεί

- λόγω διαφοράς αρχικής φάσης $\Delta\phi$
- λόγω διαφορετικής θέσης της πηγής (διαφορά διαδρομής)
- λόγω και των δυο παραπάνω περιπτώσεων

Εύρεση Συμβολής Ηχητικών Κυμάτων στο Χώρο

Αν σε κάποια περιοχή του χώρου συμβάλλουν δυο όμοια ηχητικά κύματα, τότε η συμβολή τους ορίζεται από την τιμή της παράστασης

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r + \Delta\phi \quad (3.240)$$

Οπότε

- αυτά συμβάλλουν **ενισχυτικά** αν η διαφορά συνολικής τους φάσης $\Delta\Phi$ είναι άρτιο πολλαπλάσιο του π .
- αυτά συμβάλλουν **καταστρεπτικά** αν η διαφορά συνολικής τους φάσης $\Delta\Phi$ είναι περιττό πολλαπλάσιο του π .

Αν τα ηχητικά κύματα βρίσκονται *σε φάση*, τότε $\Delta\phi = 0$, και άρα

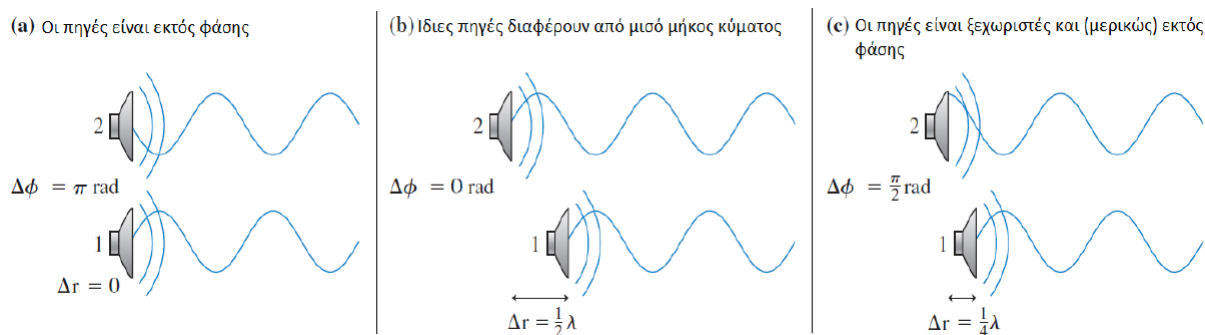
$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r \quad (3.241)$$

οπότε

- αυτά συμβάλλουν **ενισχυτικά** αν η διαφορά διαδρομής τους Δr είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος λ .
- αυτά συμβάλλουν **καταστρεπτικά** αν η διαφορά διαδρομής τους Δr είναι περιττό πολλαπλάσιο πολλαπλάσιο του $\lambda/2$.

Δείτε το Σχήμα 3.36. Και στις τρεις αυτές περιπτώσεις, η συμβολή των δυο κυμάτων είναι καταστρεπτική. Στην περίπτωση (α), τα δυο κύματα δεν έχουν διαφορά διαδρομής αλλά έχουν διαφορετική αρχική φάση, τέτοια ώστε $\Delta\phi = \pi$. Στην περίπτωση (β), τα δυο κύματα έχουν διαφορά διαδρομής $\Delta r = \frac{\lambda}{2}$, με ίδια αρχική φάση ($\Delta\phi = 0$). Στην περίπτωση (γ), τα δυο κύματα έχουν και διαφορά διαδρομής $\Delta r = \frac{\lambda}{4}$ αλλά και διαφορετική αρχική φάση, τέτοια ώστε $\Delta\phi = \pi/2$, που μαζί δίνουν μια σχέση πλάτους με αποτέλεσμα μηδέν.

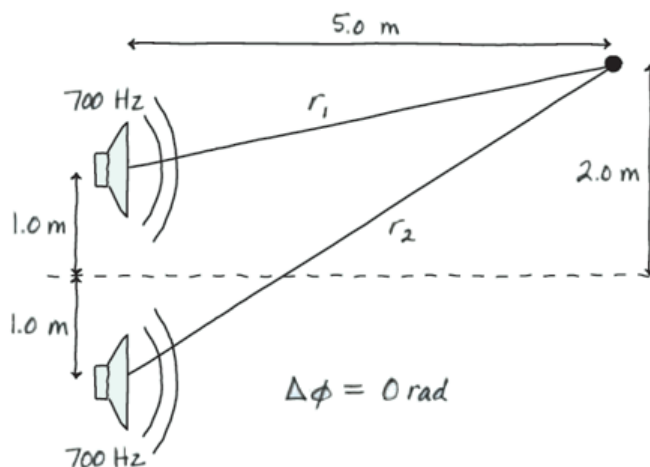
Ας δούμε μερικά παραδείγματα.



Σχήμα 3.36: Καταστρεπτική συμβολή: περιπτώσεις.

Παράδειγμα 3.23:

Δυο ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 2.0 μέτρων και σε φάση. Εκπέμπουν συχνότητα 700 Hz σε ένα δωμάτιο που ο ήχος διαδίδεται με ταχύτητα 341 m/s. Ένας ακροατής στέκεται στο σημείο του σχήματος. Τι είδους συμβολή υπάρχει στο σημείο; Πώς αλλάζει η απάντησή σας αν τα ηχεία βρίσκονται εκτός φάσης;



Σχήμα 3.37: Σχήμα Άσκησης 3.23.

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 3.37. Ας διαχωρίσουμε τις περιπτώσεις αρχικής φάσης.

- Αν $\Delta\phi = 0$, τότε τα ηχεία βρίσκονται σε φάση. Η μεταβολή της φάσης του συνολικού κύματος στη θέση του σχήματος θα είναι

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r \quad (3.242)$$

Ας βρούμε τις διαδρομές:

$$r_1 = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26} \approx 5.099 \text{ m} \quad (3.243)$$

$$r_2 = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \approx 5.830 \text{ m} \quad (3.244)$$

Οπότε η διαφορά διαδρομής θα είναι

$$\Delta r = r_2 - r_1 = 0.731 \text{ m} \quad (3.245)$$

Επίσης, το μήκος κύματος θα ισούται με

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{341}{700} = 0.487 \text{ m} \quad (3.246)$$

Έτσι

$$\frac{\Delta r}{\lambda} = \frac{0.731}{0.487} = 1.501 \approx 1.5 = \frac{3}{2} \implies \Delta r \approx \frac{3}{2}\lambda = 3\left(\frac{\lambda}{2}\right) \quad (3.247)$$

δηλ. πολύ κοντά σε περιττό πολλαπλάσιο του $\lambda/2$, οπότε έχουμε καταστρεπτική συμβολή (πολύ κοντά σε καταστρεπτική συμβολή, για την ακρίβεια).

- Αν $\Delta\phi = \pi$, τότε τα ηχεία βρίσκονται εκτός φάσης. Η μεταβολή της φάσης του συνολικού κύματος θα είναι

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r + \pi \quad (3.248)$$

Όμοια με πριν

$$\Delta r = \frac{3}{2}\lambda \quad (3.249)$$

κι άρα

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{3}{2}\lambda + \pi = 3\pi + \pi = 4\pi \quad (3.250)$$

δηλ. άρτιο πολλαπλάσιο του π . Αυτό σημαίνει ότι στο σημείο του σχήματος θα έχουμε ενισχυτική συμβολή!

Παράδειγμα 3.24:

Μια κατασκευαστική εταιρία ανέθεσε στην εταιρία σας, την *Ελληνική Ακουστική Α.Ε.*, την επίλυση του εξής προβλήματος. Οι εργαζόμενοί της παραπονούνται για έναν ενοχλητικό θόρυβο στο χώρο εργασίας τους. Μετά από έρευνα, διαπιστώνετε ότι ένα μηχάνημα παράγει έναν μάλλον ισχυρό ήχο συχνότητας 1200 Hz. Μετά από νέα έρευνα, διαπιστώνετε ότι δεν μπορείτε να λύσετε εξ' ολοκλήρου το πρόβλημα, αλλά ενημερώνετε τον διευθυντή της εταιρίας ότι μπορείτε να το λύσετε μερικώς, εξαλείφοντας τις ανακλάσεις του ήχου από τους τοίχους. Προτείνετε να τοποθετηθούν επιφάνειες πλέγματος στους τοίχους, ώστε μέρος του ήχου να ανακλάται από το πλέγμα, και μέρος του να διαπερνά το πλέγμα και να ανακλάται από τους τοίχους. Η ανάκλαση του ήχου αυτή θα πρέπει να δρα καταστρεπτικά στη συμβολή της με το αρχικό ηχητικό κύμα. Ποιά θα πρέπει να είναι η απόσταση ανάμεσα στο πλέγμα και στον τοίχο ώστε να δουλέψει το σχέδιό σας; Δίδεται ότι $T_c = 20^\circ\text{C}$.

Λύση:

Η ταχύτητα του ήχου στο κτήριο είναι

$$u = 331 \sqrt{1 + \frac{T_c}{273}} = 343 \text{ m/s} \quad (3.251)$$

Το μήκος κύματος της πηγής ήχου είναι

$$u = \lambda f \implies \lambda = \frac{u}{f} = \frac{343}{1200} = 0.285 \text{ m/s} \quad (3.252)$$

Θέλουμε να έχουμε καταστρεπτική συμβολή του ανακλώμενου κύματος από τον τοίχο με το κύμα στο πλέγμα. Οπότε το κύμα θα διανύει διαδρομή $2\Delta r$, καθώς περνά το πλέγμα, κτυπά στον τοίχο, κι επιστρέφει για να συμβάλλει με τον εαυτό του. Άρα πρέπει να ισχύει

$$2\Delta r = (2n + 1)\frac{\lambda}{2} \iff \Delta r = (2n + 1)\frac{\lambda}{4} = (2n + 1) \cdot 0.071 \quad (3.253)$$

όπου $2\Delta r$ γιατί – όπως είπαμε – το κύμα που περνά το πλέγμα ταξιδεύει δυο φορές την απόσταση ανάμεσα στο πλέγμα και στον τοίχο, μέχρι να συμβάλει ξανά πίσω καταστρεπτικά. Άρα η ελάχιστη απόσταση ανάμεσά τους δίνεται για $n = 0$, δηλ. $\Delta r = 0.071$ m.

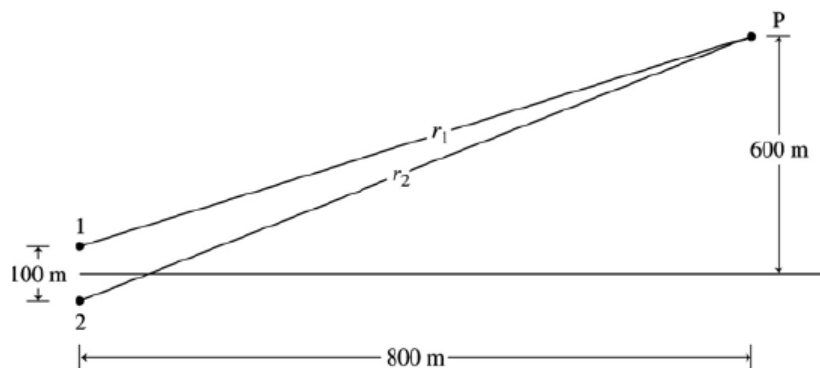
Παράδειγμα 3.25:

Δυο ραδιοκεραίες βρίσκονται σε απόσταση 100 m σε ευθεία γραμμή σε έναν άξονα βορρά-νότου. Μεταδίδουν και οι δυο ραδιοκύματα σε συχνότητα 3.0 MHz. Η δουλειά σας είναι να μετρήσετε την ισχύ του κύματος με μια φορητή συσκευή. Για να το κάνετε, περπατάτε 800 μέτρα ανατολικά από το μέσο της απόστασης των δυο κεραιών, και μετά 600 μέτρα βόρεια.

- (α') Δείξτε ότι η διαφορά φάσης μεταξύ των δυο ραδιοκυμάτων στο σημείο που βρίσκεστε είναι 1.2π rad.
- (β') Η συμβολή των δυο κυμάτων σε αυτό το σημείο είναι καταστρεπτική, ενισχυτική, ή ενδιάμεση; Εξηγήστε.
- (γ') Αν τώρα ξεκινήσετε να περπατάτε ακόμα περισσότερο προς το βορρά, περπατάτε προς ενισχυτική ή προς καταστρεπτική συμβολή; Εξηγήστε. Βρείτε τι συμβαίνει π.χ. αν περπατήσετε 10 μέτρα προς βορρά από το σημείο που ήσασταν.

Λύση:

Εδώ δεν έχουμε ηχητικά κύματα αλλά ηλεκτρομαγνητικά. Όμως η φιλοσοφία είναι η ίδια. Οι δυο κεραίες αποτελούν συμφασικές πηγές κυμάτων (δηλ. βρίσκονται σε φάση). Η επικάλυψη των κυμάτων προκαλεί συμβολή. Δείτε το Σχήμα 3.38.



Σχήμα 3.38: Ραδιοκεραίες σε απόσταση.

- (α') Η διαφορά φάσης των δυο κυμάτων στο σημείο P είναι

$$\Delta\Phi = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda} \quad (3.254)$$

με

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \sqrt{800^2 - 650^2} - \sqrt{800^2 - 550^2} = 59.96 \text{ m} \quad (3.255)$$

Αν θεωρήσουμε ότι η ταχύτητα του ραδιοκύματος ισούται με $3 \cdot 10^8$ m/s, το μήκος κύματος του ραδιοκύματος είναι

$$\lambda = \frac{c}{f} = 100 \text{ m} \quad (3.256)$$

Η διαφορά φάσης στο σημείο P είναι τελικά

$$\Delta\Phi = 2\pi \frac{59.96}{100} = 1.2\pi \text{ rad} \quad (3.257)$$

(β') Αφού $\Delta\Phi = 2\pi \cdot 0.6$, το οποίο δεν είναι ούτε άρτιο πολλαπλάσιο του π , ούτε περιττό πολλαπλάσιο του π , η συμβολή στο σημείο P δεν είναι ενισχυτική ούτε καταστρεπτική (είναι κάτι ανάμεσα – ενδιάμεση συμβολή).

(γ') Σε ένα σημείο 10 m πιο βόρεια, έχουμε

$$\Delta r = \sqrt{800^2 + 660^2} - \sqrt{800^2 - 560^2} = 60.58 \text{ m} \quad (3.258)$$

και

$$\Delta\Phi = 2\pi \frac{60.58}{100} = 1.21\pi \text{ rad} \quad (3.259)$$

Αφού η διαφορά φάσης αυξάνεται όσο προχωρούμε βόρεια, μετακινούμαστε από καταστρεπτική συμβολή σε ενισχυτική συμβολή.

3.8.3 Ένταση και Ισχύς

Μπορεί κανείς να δείξει ότι η ένταση I ενός ηχητικού κύματος είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του συνολικού κύματος, $A(\Delta\Phi)^2$, δηλ.

$$I = c (A(\Delta\Phi))^2 = c \left(2A \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \right)^2 \quad (3.260)$$

Το πως προκύπτει η παραπάνω σχέση είναι κάπως εκτός σκοπού της συζήτησης αλλά μπορείτε να θυμηθείτε ότι όταν συζητούσαμε τη διάδοση ενός ημιτονοειδούς κύματος σε ένα τεντωμένο νήμα, είχαμε δει ότι η ενέργεια του κύματος σε ένα μήκος κύματος ισούνταν με

$$E_\lambda = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \lambda \quad (3.261)$$

με μ τη γραμμική πυκνότητα μάζας του νήματος και A το πλάτος του κύματος. Αν μεταφέρουμε την ίδια ιδέα σε έναν όγκο αερίου (αντί ενός νήματος), τότε η ενέργεια αυτή γράφεται ως

$$E_\lambda = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \lambda \quad (3.262)$$

με ρ την πυκνότητα του αερίου και A το πλάτος του κύματος. Στη συνέχεια είχαμε δείξει ότι η μέση ισχύς του κύματος αυτού επάνω στο νήμα ισούται με

$$P_{avg} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 u \quad (3.263)$$

και ανάλογα μπορεί κανείς να δείξει ότι για ένα ηχητικό κύμα σε αέριο δίνεται ως

$$P_{avg} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 u \quad (3.264)$$

Επίσης, νωρίτερα είδαμε ότι η ένταση ενός ηχητικού κύματος σχετίζεται με την ισχύ της πηγής του,

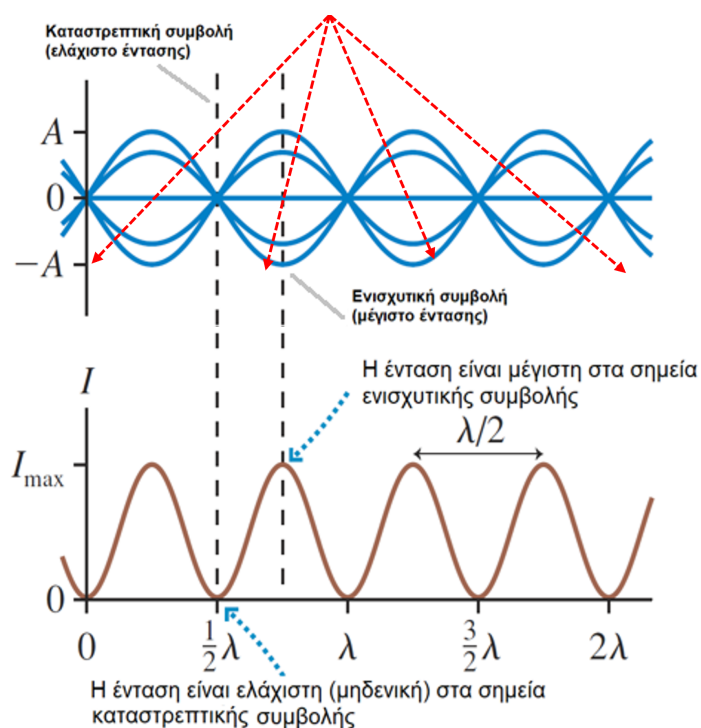
$$I = \frac{P_{avg}}{Area} \quad (3.265)$$

όπου εδώ χρησιμοποιούμε τη μεταβλητή $Area$ για το εμβαδό της επιφάνειας κάθετη στην κυματική διάδοση για να την ξεχωρίσουμε από το πλάτος του κύματος, A . Με βάση τα παραπάνω, μπορεί κανείς να δείξει τελικά ότι

$$I \propto A(\Delta\Phi)^2 \quad (3.266)$$

Όταν λοιπόν προσθέτουμε δυο ημιτονοειδή ηχητικά κύματα, τα πλάτη τους προστίθενται αλγεβρικά, κι έτσι η ένταση σε ένα συγκεκριμένο σημείο θα είναι ανάλογη του συνολικού πλάτους στο τετράγωνο. Σημειώστε ότι το παραπάνω δεν αποτελεί αυστηρή απόδειξη.

Επίσης, η ένταση του ήχου είναι **μέγιστη στα σημεία ενισχυτικής συμβολής** και **μηδενική (ελάχιστη) στα σημεία καταστρεπτικής συμβολής**. Δείτε το Σχήμα 3.39. Δεδομένου ότι η ισχύς είναι συνάρτηση της έντασης, τα ίδια ισχύουν και για αυτήν.



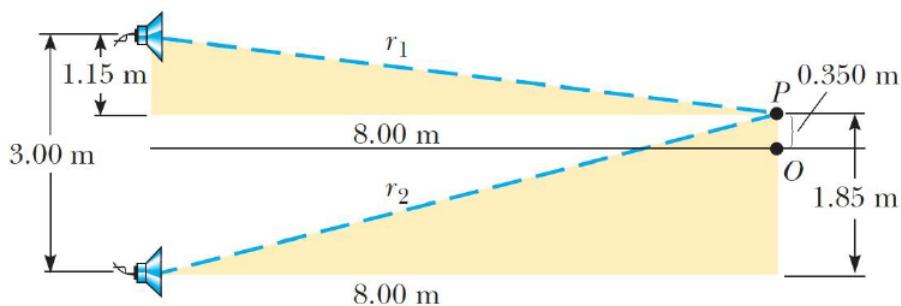
Σχήμα 3.39: Συμβολή και Ένταση.

Παράδειγμα 3.26:

Δυο ηχεία απέχουν 3 m μεταξύ τους είναι συνδεδεμένα με το ίδιο στερεοφωνικό. Ένας ακροατής βρίσκεται αρχικά στο σημείο O, που απέχει 8 m από το μέσον της ευθείας που ενώνει τα δυο ηχεία. Στη συνέχεια μετακινείται στο σημείο Π, το οποίο έχει κάθετη απόσταση 0.35 m από το O και ακούει το πρώτο ελάχιστο της έντασης του ήχου. Ποια είναι η συχνότητα του ήχου;

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 3.40. Ας βρούμε τις διαδρομές r_1 , r_2 . Από το άνω τρίγωνο, έχουμε



Σχήμα 3.40: Ηχεία και ελάχιστα έντασης ήχου.

$$r_1^2 = (1.15)^2 + 8^2 \Rightarrow r_1 \approx 8.08 \text{ m} \quad (3.267)$$

και από το κάτω,

$$r_2^2 = (1.85)^2 + 8^2 \Rightarrow r_2 \approx 8.21 \text{ m} \quad (3.268)$$

Ξέρουμε ότι η διαφορά διαδρομής ισούται με

$$\Delta r = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.269)$$

για καταστρεπτική συμβολή. Άρα για $m = 0$ (πρώτο ελάχιστο)

$$(2m + 1)\frac{\lambda}{2} = 0.13 \implies 0.26 = \lambda \implies 0.26 = \frac{u}{f} \implies f = 1.3 \text{ kHz} \quad (3.270)$$

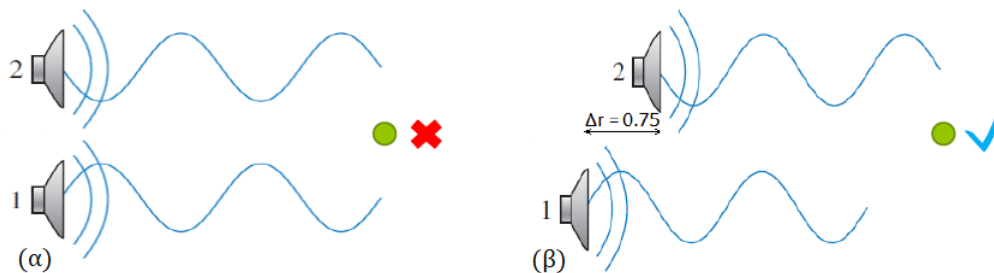
αφού $u = 343 \text{ m/s}$.

Παράδειγμα 3.27:

Δυο ηχεία στέκονται μπροστά σας, δίπλα-δίπλα, και παίζουν την ίδια συχνότητα. Αρχικά δεν ακούτε κάποιον ήχο. Τότε ένα από τα ηχεία αρχίζει σιγά σιγά να κινείται μακριά από σας. Η ένταση του ήχου αυξάνεται όσο η απόσταση μεταξύ των ηχείων αυξάνεται, φτάνοντας ένα πρώτο μέγιστο όταν τα ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 0.75 m μεταξύ τους. Τότε, όσο το ηχείο συνεχίζει να κινείται, η ένταση αρχίζει να μειώνεται. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των ηχείων όταν η ένταση του ήχου γίνει ξανά ελάχιστη;

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 3.41. Στην αρχική θέση (α) - που δεν ακούμε κάποιον ήχο αλλά τα ηχεία είναι δίπλα-δίπλα



Σχήμα 3.41: Ηχεία και σχετική τους κίνηση.

- έχουμε ελάχιστο της έντασης του συμβαλλόμενου κύματος και $\Delta r = 0$. Άρα η σχέση

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r + \Delta\phi \quad (3.271)$$

για $\Delta r = 0$, δίνει

$$\Delta\Phi = 0 + \Delta\phi \iff \Delta\Phi = \Delta\phi \quad (3.272)$$

Έχουμε καταστροφική συμβολή στη θέση αυτή, οπότε

$$\Delta\Phi = (2m + 1)\pi = \Delta\phi, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.273)$$

και για $m = 0$ έχουμε

$$\Delta\phi = \pi \quad (3.274)$$

δηλ. τα δυο ηχεία βρίσκονται εκτός φάσης. Στη θέση (β) έχουμε το πρώτο μέγιστο της έντασης του ήχου. Άρα

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r + \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r + \pi = 2m\pi, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.275)$$

και εφ' όσον $\Delta r = 0.75 \text{ m}$ και για $m = 1$, έχουμε

$$\frac{2\pi}{\lambda}0.75 + \pi = 2\pi \implies \lambda = \frac{3}{2} \text{ m} \quad (3.276)$$

Σε μια θέση (y) όπου η ένταση του ήχου γίνεται ξανά ελάχιστη, θα είναι

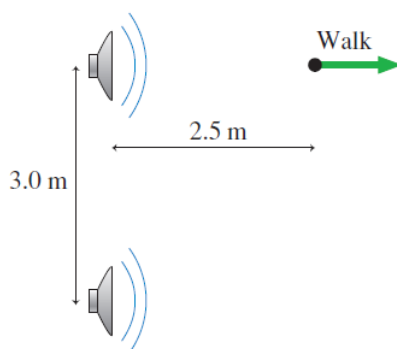
$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r' + \Delta\phi = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}}\Delta r' + \pi = (2m+1)\pi, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.277)$$

για $m = 1$ θα έχουμε

$$\Delta r' = \frac{3}{2} = \lambda \quad (3.278)$$

Παράδειγμα 3.28:

Καθόμαστε 2.5 m μπροστά από ένα ηχείο (όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.42) ενός ζεύγους ηχείων. Τα ηχεία μεταξύ τους έχουν απόσταση 3 m και εκπέμπουν ήχο με συχνότητα 686 Hz στην ίδια φάση. Καθώς απομακρυνόμαστε από τα ηχεία σε ποια απόσταση θα ακούμε την ήχο με την ελάχιστη ένταση;



Σχήμα 3.42: Περπάτημα μπροστά από ηχεία.

Λύση:

Η αλλαγή στην ένταση του ήχου οφείλεται στη συμβολή των δύο αλληλοεπικαλυπτόμενων ηχητικών κυμάτων. Η ελάχιστη ένταση υπονοεί καταστρεπτική συμβολή, η οποία συμβαίνει όταν η διαφορά του μήκους του μονοπατιού των δύο κυμάτων είναι $\Delta r = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$. Υποθέτουμε ότι $\Delta\phi_0 = 0$ rad για τα ηχεία που εκπέμπουν ακριβώς τον ίδιο τόνο. Το μήκος κύματος του ήχου είναι $\lambda = u_{\text{sound}}/f = 340/680 = 0.5$ m. Θεωρούμε ένα σημείο που έχει απόσταση x από το ένα ηχείο, όπως φαίνεται στο σχήμα, και θέτουμε r_1 την απόσταση αυτού του σημείου από το ένα ηχείο και r_2 από το άλλο. Άρα

$$r_1 = x \quad r_2 = \sqrt{x^2 + 3^2} \quad (3.279)$$

Η καταστρεπτική συμβολή συμβαίνει σε απόσταση x τέτοια ώστε

$$\Delta r = \sqrt{x^2 + 9} - x = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (3.280)$$

Λύνουμε ως προς x :

$$x^2 + 9 = \left[x + \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda\right]^2 = x^2 + 2\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda x + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \lambda^2 \Rightarrow x = \frac{9 - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \lambda^2}{2\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda} \quad (3.281)$$

Υπολογίζουμε το x για διαφορετικές τιμές του m

m	$x(m)$
0	17.88
1	5.62
2	2.98
3	1.79

Καθώς η αρχική μας θέση είναι στα $x = 2.5 \text{ m}$ και απομακρυνόμαστε από τα ηχεία, θα ακούσουμε τα ελάχιστα για τιμές $x > 2.5 \text{ m}$. Επομένως η ελάχιστη ένταση του ήχου εμφανίζεται στα σημεία 2.98 m , 5.62 m και 17.88 m .

Παράδειγμα 3.29:

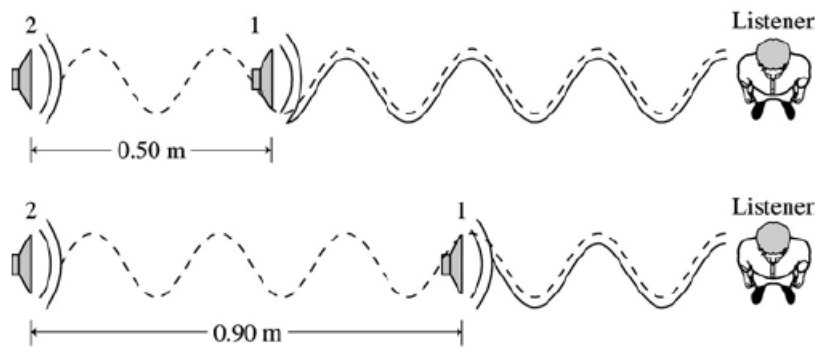
Δύο ηχεία εκπέμπουν ηχητικά κύματα κατά μήκος του άξονα $x'x$. Δείτε το Σχήμα 3.43. Ένας ακροατής, που κάθεται μπροστά από τα δύο ηχεία, ακούει την μέγιστη ένταση όταν το ηχείο 2 βρίσκεται στο σημείο $x = 0 \text{ m}$ και το ηχείο ένα $x = 0.5 \text{ m}$. Όταν το ηχείο 1 μετακινείται αργά προς τα δεξιά, η ένταση του ήχου αρχικά μειώνεται και ύστερα αυξάνεται, φτάνοντας ένα άλλο μέγιστο όταν το ηχείο 1 βρίσκεται στην θέση $x = 0.9 \text{ m}$.

(α') Ποια είναι η συχνότητα του ήχου; Υποθέτουμε ότι $u_{\text{sound}} = 340 \text{ m/s}$.

(β') Ποια είναι η διαφορά φάσης ανάμεσα στα δύο ηχεία;

Λύση:

Η ανάμειξη συμβαίνει κατά την διαφορά ανάμεσα στις φάσεις των δυο κυμάτων.



Σχήμα 3.43: Παρατηρητής ηχείων.

(α') Η διαφορά φάσης ανάμεσα στα ηχητικά κύματα των δυο ηχείων είναι

$$\Delta\Phi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} + \Delta\phi_0 \quad (3.282)$$

Έχουμε την μέγιστη συχνότητα όταν $\Delta x = 0.5 \text{ m}$ και $\Delta x = 0.9 \text{ m}$. Επομένως

$$\Delta\Phi = 2\pi \left(\frac{0.5}{\lambda} \right) + \Delta\phi = 2m\pi, \quad \Delta\Phi = 2\pi \left(\frac{0.9}{\lambda} \right) + \Delta\phi = 2(m+1)\pi \text{ rad} \quad (3.283)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις παίρνουμε

$$2\pi \left(\frac{0.4}{\lambda} \right) = 2\pi \Rightarrow \lambda = 0.4 \Rightarrow f = \frac{u_{\text{sound}}}{\lambda} = \frac{340}{0.4} = 850 \text{ Hz} \quad (3.284)$$

(β') Από τις εξισώσεις 3.283 βρίσκουμε

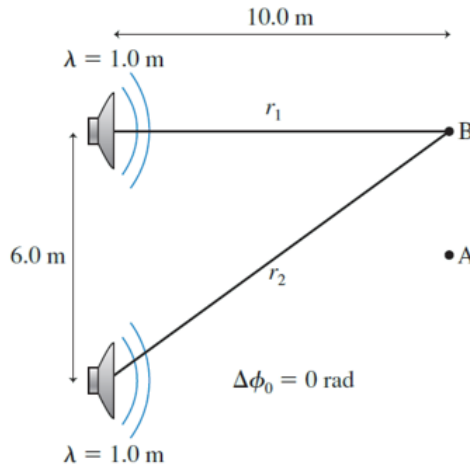
$$2\pi \left(\frac{0.5}{0.4} \right) + \Delta\phi = 2m\pi \Big|_{m=1} \text{ rad} \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi - \frac{10\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad (3.285)$$

Στην τελευταία εξίσωση βάλαμε $m = 1$ καθώς συχνά υπολογίζουμε την φάση στο εύρος από $-\pi$ έως π (ή από 0 έως 2π).⁴

⁴Θα μπορούσαμε αντί για $m = 1$ να βάλαμε $m = 2$ το οποίο θα έδινε το ισοδύναμο αποτέλεσμα: $\frac{3}{2}\pi \text{ rad}$.

Παράδειγμα 3.30:

Δυο ηχεία βρίσκονται σε απόσταση 6 μέτρων και σε φάση. Εκπέμπουν ηχητικά κύματα με μήκος κύματος ίσο με 1.0 μέτρο. Κάθε ηχείο δημιουργεί ηχητικό κύμα με ένταση I_0 . Ένας ακροατής στέκεται στο σημείο A του Σχήματος 3.44 (στη μεσοκάθετο της απόστασης των ηχείων). Ένας δεύτερος ακροατής στέκεται στο σημείο B. Ποιές είναι οι εντάσεις που λαμβάνουν σε όρους I_0 ;



Σχήμα 3.44: Σχήμα Άσκησης 3.30.

Λύση:

Υπενθυμίζουμε ότι ο όρος “σε φάση” σημαίνει ότι η διαφορά αρχικής φάσης των δυο ηχείων ισούται με μηδέν:

$$\Delta\phi = 0 \quad (3.286)$$

Κάθε ηχείο προσφέρει ένταση $I_0 = cA^2$, αλλά η αντιληπτή ένταση θα είναι διαφορετική σε κάθε ένα σημείο A, B. Τα κύματα από τα δυο ηχεία συμβάλλουν τόσο στο σημείο A όσο και στο B. Λόγω της συμβολής, το πλάτος του συνολικού κύματος θα είναι

$$A_j = \left| 2A \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \right| \quad (3.287)$$

με $j = A, B$, τα δυο σημεία που μας ενδιαφέρουν.

- Για το σημείο A, έχουμε διαφορά διαδρομής ίση με το μηδέν, αφού οι αποστάσεις είναι ίδιες. Άρα στο σημείο A θα έχουμε ενισχυτική συμβολή με πλάτος $2A$ και ένταση

$$I_A = c(2A)^2 = 4cA^2 = 4I_0 \quad (3.288)$$

- Για το σημείο B, η διαφορά διαδρομής δεν είναι μηδενική.

$$\Delta r = |r_2 - r_1| = |\sqrt{6^2 + 10^2} - 10| = |\sqrt{136} - 10| = 1.662 \text{ m} \quad (3.289)$$

Επειδή $\lambda = 1 \text{ m}$, ο λόγος

$$\frac{\Delta r}{\lambda} = 1.662 \quad (3.290)$$

που δεν είναι ούτε ακέραιο πολλαπλάσιο του λ , ούτε περιττό πολλαπλάσιο του $\lambda/2$. Άρα θα έχουμε εκεί ένα είδος ενδιάμεσης συμβολής. Θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r = 2\pi(1.662) \approx 10.44 \text{ rad} \quad (3.291)$$

Άρα στο σημείο B το πλάτος του συνολικού κύματος θα είναι

$$A_B = \left| 2A \cos \left(\frac{10.44}{2} \right) \right| \approx 0.972A \quad (3.292)$$

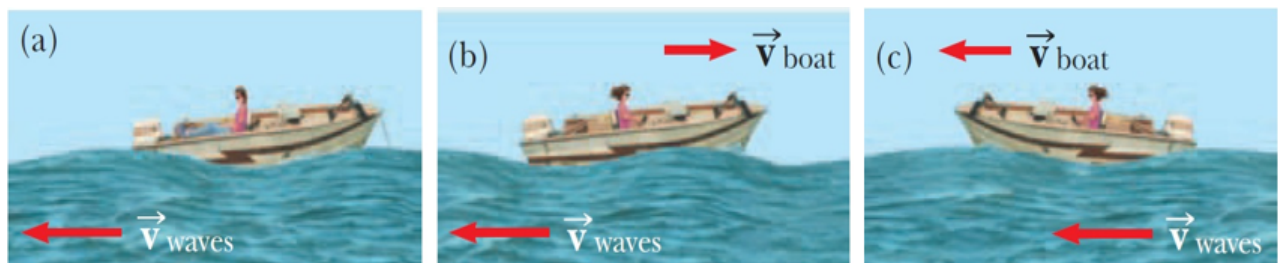
και άρα η ένταση του ήχου στο σημείο B θα είναι

$$I_B = cA_B^2 \approx 0.95I_0 \quad (3.293)$$

3.8.4 Το Φαινόμενο Doppler

Έχετε ποτέ παρατηρήσει τι συμβαίνει όταν κάθεστε στο μπαλκόνι του σπιτιού σας και ακούτε ένα πυροσβεστικό όχημα να τρέχει γρήγορα στο δρόμο από μια κατεύθυνση προς την άλλη; Αν ναι, τότε έχετε βιώσει το φαινόμενο Doppler! ☺ Ίσως έχετε παρατηρήσει ότι η σειρήνα του οχήματος έχει υψηλότερη συχνότητα όσο πλησιάζει προς εσάς και χαμηλότερη συχνότητα καθώς απομακρύνεται. Πώς εξηγείται κάτι τέτοιο;

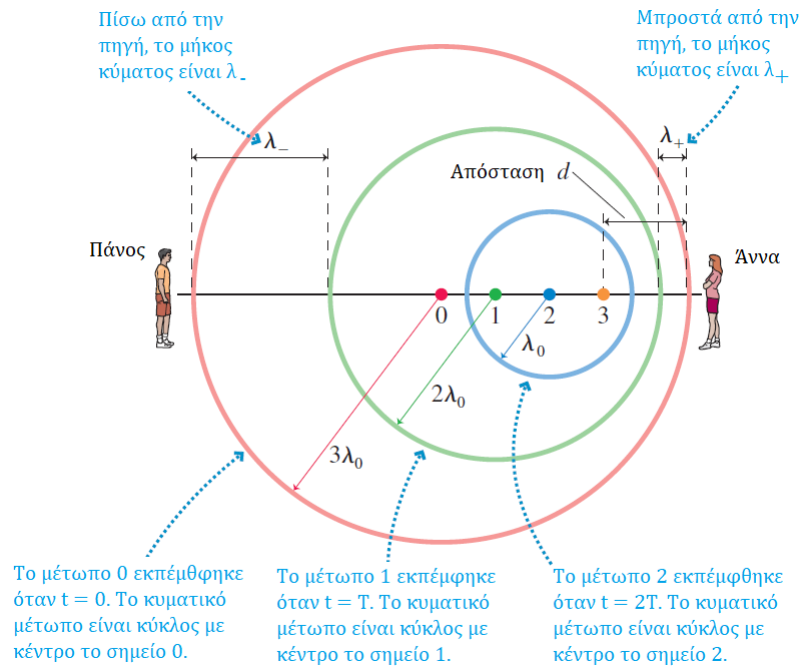
Ας χρησιμοποιήσουμε μια αναλογία περισσότερο “οπτική” για να κατανοήσουμε τι συμβαίνει. Δείτε το Σχήμα 3.45. Έστω ότι βρίσκεστε σε μια βάρκα στη θάλασσα. Αν είστε ακίνητος/η, τα κύματα της θάλασσας θα χτυπούν τη βάρκα με περίοδο T : θα βλέπετε ένα κυματάκι να σκάει στην πλώρη της βάρκας κάθε T δευτερόλεπτα. Αρχίζετε να κάνετε κουπί (ή εκκινείτε τη μηχανή της βάρκας) προς τη θεωρητική πηγή των κυμάτων, δηλ. προς το μέρος από το οποίο προέρχονται τα κύματα. Αν παρατηρήσετε την πλώρη της βάρκας, κάθε κυματισμός θα σκάει πιο συχνά τώρα, αφού τόσο εσείς όσο και τα κύματα κινείστε ο ένας προς τον άλλο. Η περίοδος των κυμάτων που μετράτε τώρα είναι $T' < T$, αφού τα κύματα φτάνουν πιο συχνά: η συχνότητα εμφάνισης είναι μεγαλύτερη, $f' = 1/T' > f = 1/T$ απ' ό,τι πριν. Σκεφτείτε τώρα ότι κινείστε αντίθετα. Αν μετρήσετε τον αριθμό των κυμάτων που σκάνε στην πλώρη της βάρκας, θα τα βρείτε λιγότερα στην ίδια μονάδα του χρόνου. Γιατί; Γιατί εσείς και τα κύματα απομακρύνεστε μεταξύ σας! Η περίοδος που θα μετράτε τώρα θα είναι $T' > T$, αφού $f' = 1/T' < f = 1/T$. Ακριβώς τα ίδια ισχύουν και για μια πηγή ήχου που κινείται προς ή μακριά από σας.



Σχήμα 3.45: Βάρκα στη θάλασσα και κίνησή της σε σχέση με τον κυματισμό.

Μετά από αυτήν την εισαγωγική ιδέα, ας πάμε πιο κοντά στην πραγματικότητα. Παρατηρήστε την Εικόνα 3.46. Έστω ότι η συχνότητα εκπομπής της πηγής είναι f και η ταχύτητα της είναι u_s . Η Άννα μετρά τη συχνότητα του κύματος που εκπέμφθηκε από την κινούμενη προς αυτήν πηγή και τη βρίσκει f_+ . Την ίδια στιγμή, ο Πάνος μετρά τη συχνότητα του κύματος που εκπέμφθηκε από την κινούμενη μακριά από αυτόν πηγή και τη βρίσκει f_- . Θα δούμε τώρα πως συσχετίζεται η συχνότητα f , η ταχύτητα της πηγής u_s και οι συχνότητες f_- , f_+ .

Είναι σημαντικό να καταλάβετε ότι όταν ένα κυματικό μέτωπο “φύγει” από την πηγή, η κίνησή του εξαρτάται μόνο από τις ιδιότητες του μέσου διάδοσης. Με άλλα λόγια, η κίνηση της πηγής δεν επηρεάζει πλέον το ηχητικό κύμα που έχει εκπεμφθεί. Έτσι, κάθε κυκλικό κυματικό (που στην πραγματικότητα είναι σφαιρικό) μέτωπο του Σχήματος 3.46 έχει κέντρο το σημείο εκπομπής του. Το σημείο 3 έχει μόλις εκπέμψει



Σχήμα 3.46: Φαινόμενο Doppler για κινούμενη πηγή.

ένα κυματικό μέτωπο αλλά δε φαίνεται στο σχήμα καθώς δεν έχει προλάβει να ταξιδέψει καμιά απόσταση.

Παρατηρήστε ότι τα κυματικά μέτωπα έχουν έλθει πιο κοντά στην κατεύθυνση κίνησης της πηγής και έχουν απομακρυνθεί πίσω της. Η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών μετώπων είναι ένα μήκος κύματος λ , οπότε το μήκος κύματος λ_+ που μετράει η Άννα είναι μικρότερο από το μήκος κύματος $\lambda = \frac{u}{f}$ που θα εξέπεμπε η πηγή αν ήταν ακίνητη. Όμοια, το μήκος κύματος λ_- είναι μεγαλύτερο του μήκους κύματος λ . Τα κύματα διαδίδονται μέσω στο μέσο με ταχύτητα u . Κατά συνέπεια, η συχνότητα $f_+ = \frac{u}{\lambda_+}$ που ακούει ο παρατηρητής (Άννα) στον οποίο πλησιάζει η πηγή είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα f . Η απόσταση d που φαίνεται στο Σχήμα 3.46 είναι η διαφορά μεταξύ του πόσο μακριά κινήθηκε το κύμα και πόσο μακριά ταξίδεψε η πηγή τη χρονική στιγμή $t = 3T$. Αυτές οι αποστάσεις ισούνται με

$$\Delta x_{\text{wave}} = ut = 3uT \quad (3.294)$$

$$\Delta x_{\text{source}} = u_s t = 3u_s T \quad (3.295)$$

Η απόσταση d καλύπτει τρία μήκη κύματος: οπότε το μήκος κύματος που εκπέμφθηκε από την πηγή που πλησιάζει την Άννα είναι

$$\lambda_+ = \frac{d}{3} = \frac{\Delta x_{\text{wave}} - \Delta x_{\text{source}}}{3} = (u - u_s)T \quad (3.296)$$

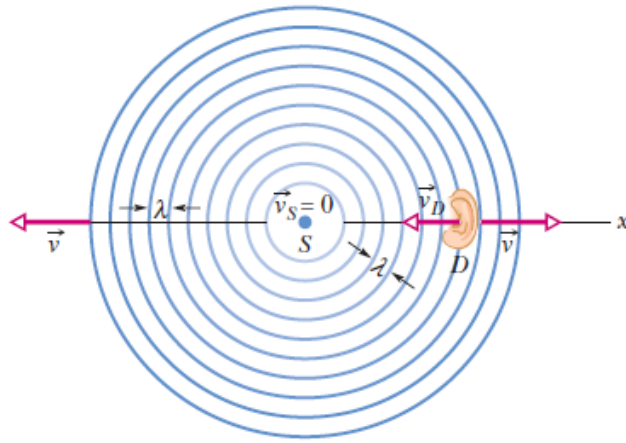
Η συχνότητα που ακούει η Άννα είναι

$$f_+ = \frac{u}{\lambda_+} = \frac{u}{u - u_s} f \quad (3.297)$$

Μπορείτε να κάνετε τους ίδιους συλλογισμούς και να βρείτε τη συχνότητα f_- που ακούει ο Πάνος;

Δείτε τώρα το Σχήμα 3.47. Ο παρατηρητής κινείται προς ακίνητη πηγή συχνότητας f και μήκους κύματος λ . Η πηγή εκπέμπει κυματικά μέτωπα με απόσταση λ . Ας κάνουμε μια διαφορετική απόδειξη για αυτήν την περίπτωση. Ο παρατηρητής κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{u}_D = \vec{u}_o$, δηλ. η θέση του δίνεται από τη σχέση

$$x_o(t) = x_0 + u_o t \quad (3.298)$$



Σχήμα 3.47: Φαινόμενο Doppler για κινούμενο παρατηρητή.

με $u_o < 0$ αφού κινείται προς τα αριστερά. Η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το ηχητικό κύμα της πηγής θα είναι της μορφής

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (3.299)$$

Ο παρατηρητής μετρά λοιπόν το κύμα

$$s_o(t) = A \sin(kx_o(t) - \omega t + \phi) \quad (3.300)$$

ανάλογα με τη θέση που βρίσκεται. Άρα

$$s_o(t) = A \sin(kx_o + ku_o t - \omega t + \phi) \quad (3.301)$$

$$= A \sin((ku_o - \omega)t + kx_o + \phi) \quad (3.302)$$

$$= A \sin(\omega' t + kx_o + \phi) \quad (3.303)$$

με $\omega' = ku_o - \omega$ η γωνιακή συχνότητα που λαμβάνει ο παρατηρητής και $kx_o + \phi$ μια σταθερή αρχική φάση. Επειδή όμως $u_o < 0$, η ω' είναι αρνητική. Όμως η συχνότητα είναι θετικός αριθμός, οπότε μπορούμε να πούμε ότι

$$\omega' = |ku_o - \omega| = \omega - ku_o \quad (3.304)$$

Η παρατηρούμενη συχνότητα f' θα είναι

$$f' = \frac{|\omega'|}{2\pi} = \frac{\omega - ku_o}{2\pi} \quad (3.305)$$

κι επειδή

$$k = \frac{\omega}{u} \quad (3.306)$$

θα είναι

$$f' = \frac{\omega \left(1 - \frac{u_o}{u}\right)}{2\pi} \quad (3.307)$$

$$= \frac{\omega}{2\pi} \left(1 - \frac{u_o}{u}\right) \quad (3.308)$$

$$= \left(\frac{u - u_o}{u}\right) f \quad (3.309)$$

Επειδή όμως $u_o < 0$, μπορούμε να γράψουμε

$$f' = \left(\frac{u + |u_o|}{u}\right) f \quad (3.310)$$

Αντίθετα, αν $u_o > 0$, δηλ. ο παρατηρητής κινείται προς τα δεξιά,

$$f' = \left(\frac{u - |u_o|}{u} \right) f \quad (3.311)$$

Συνοψίζοντας,

- Αν ο παρατηρητής κινείται προς τα αριστερά και το κύμα προς τα δεξιά (OXI η πηγή), τότε η ποσότητα u_o είναι αρνητική, κι έτσι

$$f' = \left(\frac{u + |u_o|}{u} \right) f \quad (3.312)$$

- Αν ο παρατηρητής κινείται προς τα δεξιά και το κύμα προς τα δεξιά (OXI η πηγή), τότε η ποσότητα u_o είναι θετική, κι έτσι

$$f' = \left(\frac{u - |u_o|}{u} \right) f \quad (3.313)$$

Ας συνοψίσουμε λοιπόν τώρα τις πιθανές καταστάσεις.

Περιπτώσεις Φαινομένου Doppler

- Κινούμενη πηγή προς ακίνητο παρατηρητή: Ας υποθέσουμε αρχικά ότι η πηγή είναι κινούμενη προς ακίνητο παρατηρητή. Η συχνότητα της πηγής είναι $f = 1/T$ και η ταχύτητά της u_s , ενώ η ταχύτητα του ήχου είναι u . Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f_+ = \frac{u}{\lambda_+} = \frac{u}{\lambda - \frac{u_s}{f}} = \frac{u}{\frac{u}{f} - \frac{u_s}{f}} = \left(\frac{u}{u - u_s} \right) f = \left(\frac{1}{1 - \frac{u_s}{u}} \right) f \quad (3.314)$$

δηλ. μια συχνότητα μεγαλύτερη της εκπεμπόμενης!

- Κινούμενη πηγή από ακίνητο παρατηρητή: Ας υποθέσουμε τώρα ότι η πηγή είναι κινούμενη απομακρυνόμενη από ακίνητο παρατηρητή. Η συχνότητα της πηγής είναι $f = 1/T$ και η ταχύτητά της u_s , ενώ η ταχύτητα του ήχου είναι u . Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f_- = \frac{u}{\lambda_-} = \frac{u}{\lambda + \frac{u_s}{f}} = \frac{u}{\frac{u}{f} + \frac{u_s}{f}} = \left(\frac{u}{u + u_s} \right) f = \left(\frac{1}{1 + \frac{u_s}{u}} \right) f \quad (3.315)$$

δηλ. μια συχνότητα μικρότερη της εκπεμπόμενης!

- Κινούμενος παρατηρητής προς ακίνητη πηγή: Ας υποθέσουμε τώρα ότι η πηγή είναι ακίνητη και ο παρατηρητής κινούμενος προς αυτή. Η συχνότητα της πηγής είναι $f = 1/T$ και η ταχύτητά του παρατηρητή u_o κατά μέτρο, ενώ η ταχύτητα του ήχου είναι u . Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f_+ = \frac{u'}{\lambda} = \left(\frac{u + u_o}{u} \right) f = \left(1 + \frac{u_o}{u} \right) f \quad (3.316)$$

δηλ. μια συχνότητα μεγαλύτερη της εκπεμπόμενης!

- Κινούμενος παρατηρητής από ακίνητη πηγή: Ας υποθέσουμε ότι η πηγή είναι ακίνητη και ο παρατηρητής κινούμενος απομακρυνόμενος από αυτή. Η συχνότητα της πηγής είναι $f_0 = 1/T$ και η ταχύτητά του παρατηρητή u_o κατά μέτρο, ενώ η ταχύτητα του ήχου είναι u . Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f_- = \frac{u'}{\lambda} = \left(\frac{u - u_o}{u} \right) f = \left(1 - \frac{u_o}{u} \right) f \quad (3.317)$$

δηλ. μια συχνότητα μικρότερη της εκπεμπόμενης!

Γενική Σχέση του **Doppler**

Μπορούμε να ενοποιήσουμε τις τέσσερις παραπάνω περιπτώσεις – και να συμπεριλάβουμε και σχετική κίνηση μεταξύ πηγής και παρατηρητή – με τη σχέση

$$f' = \left(\frac{u \pm u_o}{u \pm u_s} \right) f \quad (3.318)$$

Προσέξτε ότι οι ταχύτητες μπαίνουν ως μέτρο στην παραπάνω σχέση. Πώς όμως επιλέγουμε τα πρόσημα στην παραπάνω σχέση; Αν η πηγή και ο παρατηρητής κινούνται ο ένας προς τον άλλο, τότε επιλέγουμε πρόσημα που αυξάνουν τη συχνότητα f' . Αν η πηγή και ο παρατηρητής απομακρύνονται ο ένας από τον άλλο, τότε επιλέγουμε πρόσημα που μειώνουν τη συχνότητα f' . Με άλλα λόγια, μπορείτε να υπολογίζεται τα πρόσημα βλέποντας μεμονωμένα την πηγή και μεμονωμένα τον παρατηρητή (θεωρώντας ακίνητο τον παρατηρητή και την πηγή, αντίστοιχα).

Δείτε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.31:

Πώς θα επιλέξουμε πρόσημα στη γενική σχέση του Doppler στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- (α') η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή αλλά αυτός απομακρύνεται από αυτή.
- (β') η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή αλλά αυτός την πλησιάζει.
- (γ') η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή κι αυτός επίσης απομακρύνεται από αυτή.
- (δ') η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή και αυτός επίσης την πλησιάζει.

Λύση:

- (α') Αφού η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή, πρέπει να αυξήσουμε τη συχνότητα, μικραίνοντας τον παρονομαστή: $u - u_s$. Αφού ο παρατηρητής απομακρύνεται από αυτή, πρέπει να μικρύνουμε τον αριθμητή, ώστε να μειώσουμε τη συχνότητα: $u - u_o$. Άρα

$$f' = \frac{u - u_o}{u - u_s} f \quad (3.319)$$

- (β') Αφού η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή, πρέπει να μειώσουμε τη συχνότητα, μεγαλώνοντας τον παρονομαστή: $u + u_s$. Αφού ο παρατηρητής την πλησιάζει, πρέπει να μεγαλώσουμε τον αριθμητή, ώστε να αυξήσουμε τη συχνότητα: $u + u_o$. Άρα

$$f' = \frac{u + u_o}{u + u_s} f \quad (3.320)$$

- (γ') Αφού η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή, πρέπει να μειώσουμε τη συχνότητα, μεγαλώνοντας τον παρονομαστή: $u + u_s$. Αφού ο παρατηρητής επίσης απομακρύνεται από αυτή, πρέπει να μικρύνουμε τον αριθμητή, ώστε να μειώσουμε τη συχνότητα: $u - u_o$. Άρα

$$f' = \frac{u - u_o}{u + u_s} f \quad (3.321)$$

- (δ') Αφού η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή, πρέπει να αυξήσουμε τη συχνότητα, μικραίνοντας τον παρονομαστή: $u - u_s$. Αφού ο παρατηρητής επίσης την πλησιάζει, πρέπει να μεγαλώσουμε τον αριθμητή, ώστε να αυξήσουμε τη συχνότητα: $u + u_o$. Άρα

$$f' = \frac{u + u_o}{u - u_s} f \quad (3.322)$$

Παράδειγμα 3.32:

Το ξυπνητήρι σας παράγει έναν ήχο συχνότητας 600 Hz. Ένα πρωί “κολλάει” και δεν μπορείτε να το κλείσετε. Στην απελπισία σας, το πετάτε (“αφήνετε”) από το παράθυρο. Αν υποθέσετε ότι η ταχύτητα του ήχου είναι 343 m/s, και ότι βρίσκεστε στον 4ο όροφο (15 μέτρα από το έδαφος), τι συχνότητα θα ακούσετε λίγο πριν γίνει κομματάκια;

Λύση:

Επειδή η πηγή του ήχου απομακρύνεται από μας, αναμένουμε η συχνότητα που ακούμε να είναι μικρότερη από 600 Hz. Από τη σχέση του Doppler θα έχουμε

$$f' = \frac{u}{u + u_s} f \quad (3.323)$$

Έστω (A) η θέση που αφήνουμε το ξυπνητήρι από το παράθυρο, και η στιγμή που $t = 0$. Το ξυπνητήρι εκτελεί ελεύθερη πτώση ως το έδαφος - θέση (B). Θεωρούμε τη συμβολή των αξόνων μας στο σημείο (A), με θετική φορά προς τα πάνω. Ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει το ξυπνητήρι στο έδαφος μπορεί να βρεθεί από την Κινητική ως

$$y_B = y_A + u_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (3.324)$$

$$-h = 0 + 0 - \frac{1}{2}gt^2 \quad (3.325)$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3.326)$$

Επίσης,

$$u_B = u_A - gt_B = 0 - gt = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow |u_B| = \left| \sqrt{2gh} \right| \text{ m/s} \approx 17.14 \text{ m/s} \quad (3.327)$$

με το πρόσημο – να δείχνει τη φορά της ταχύτητας (προς τα κάτω). Από τη σχέση του Doppler ξανά έχουμε

$$f' = \frac{u}{u + u_B} f = \frac{343}{343 + 17.14} 600 \approx 571 \text{ Hz} \quad (3.328)$$

Εναλλακτικά μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη σχέση

$$u_B^2 = u_A^2 - 2g\Delta y \quad (3.329)$$

για να βρείτε πιο εύκολα την ταχύτητα στη θέση B.

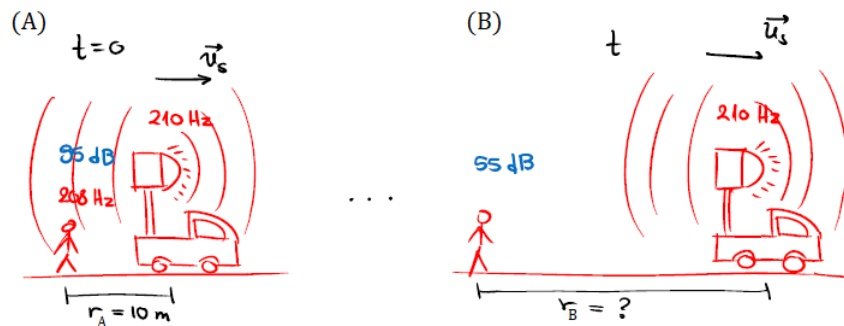
Παράδειγμα 3.33:

Από το ηχείο ενός πλανόδιου πωλητή που κινείται με σταθερή ταχύτητα εκπέμπεται ένα ημίτονο στα 210 Hz. Όταν βρίσκεστε στα 10 m από το ηχείο, μετράτε την ηχοστάθμη του ήχου και τη βρίσκετε στα 95 dB στα 208 Hz. Πόσο χρόνο θα πάρει μέχρι η ηχοστάθμη να πέσει στα ανεκτά επίπεδα των 55 dB; Υποθέστε θερμοκρασία στους 20 βαθμούς Κελσίου.

Λύση:

Δείτε το (καταπληκτικό ☺) Σχήμα 3.48. Αρχικά, η ταχύτητα του ήχου είναι

$$u_s = 331 \sqrt{1 + \frac{20}{273}} \approx 343 \text{ m/s} \quad (3.330)$$



Σχήμα 3.48: Πλανόδιος πωλητής με ηχείο.

Από τη σχέση του Doppler έχουμε

$$f' = \frac{u}{u + u_s} f \Rightarrow u_s = \left(\frac{f}{f'} - 1 \right) u = \left(\frac{210}{208} - 1 \right) 343 \approx 3.3 \text{ m/s} \quad (3.331)$$

αφού η πηγή απομακρύνεται από μας. Η ένταση του ήχου στις θέσεις (A), όπου είναι η θέση που μετράμε την ηχοστάθμη και στη θέση (B) που έχει φτάσει στα υποφερτά επίπεδα των 55 dB είναι αντίστοιχα

$$I_A = 10^{95/10} I_0 \quad (3.332)$$

$$I_B = 10^{55/10} I_0 \quad (3.333)$$

Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{10^{9.5}}{10^{5.5}} = 10^4 \quad (3.334)$$

Όμως η ένταση του ήχου σχετίζεται με την απόσταση από την πηγή με τη σχέση

$$I_A = \frac{P_{avg}}{4\pi r_A^2} \quad (3.335)$$

και

$$I_B = \frac{P_{avg}}{4\pi r_B^2} \quad (3.336)$$

και διαιρώντας ξανά κατά μέλη λαμβάνουμε την πολύ χρήσιμη σχέση

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{r_B^2}{r_A^2} \quad (3.337)$$

Αφού ο λόγος των εντάσεων είναι 10^4 , το ίδιο θα είναι και ο λόγος των αποστάσεων, οπότε

$$\frac{r_B^2}{r_A^2} = 10^4 \Rightarrow r_B^2 = 10^4 r_A^2 = 10^6 \Rightarrow r_B = 1000 \text{ m} \quad (3.338)$$

Οπότε ο πωλητής πρέπει να φτάσει στο ένα χιλιόμετρο ώστε η ηχοστάθμη να πέσει τα 55 dB. Ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει αυτήν την απόσταση είναι

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{u} = \frac{1000 - 10}{3.3} = \frac{990}{3.3} = 300 \text{ s} \quad (3.339)$$

Άρα τελικά πρέπει να περιμένουμε 5 λεπτά για να πέσει η ηχοστάθμη στα 55 dB.

Παράδειγμα 3.34:

Μια σφυρίχτρα συχνότητας 540 Hz κινείται σε κύκλο ακτίνας 0.6 m με γωνιακή ταχύτητα 15 rad/s. Ποιά είναι η χαμηλότερη και η υψηλότερη συχνότητα που ακούει ένας ακίνητος ακροατής ο οποίος βρίσκεται αρκετά μακριά από το κέντρο του κύκλου;

Λύση:

Λόγω της απόστασης του ακροατή από τον κύκλο που διαγράφει η σφυρίχτρα, θεωρούμε ότι η κίνηση της σφυρίχτρας είναι ευθύγραμμη, μπρος-πίσω επάνω στη διάμετρο του κύκλου που ενώνει τον ακροατή με το κέντρο του κύκλου. Η γραμμική ταχύτητα της σφυρίχτρας ισούται με

$$u = \omega r \implies u = 0.6 \cdot 15 = 9 \text{ m/s} \quad (3.340)$$

Όταν η σφυρίχτρα πλησιάζει τον ακροατή, έχουμε

$$f' = \frac{u}{u - u_s} f = \frac{343}{343 - 9} 540 = 555 \text{ Hz} \quad (3.341)$$

Όταν απομακρύνεται από αυτόν,

$$f' = \frac{u}{u + u_s} f = \frac{343}{343 + 9} 540 = 526 \text{ Hz} \quad (3.342)$$

3.9 Στάσιμα Κύματα

Ως τώρα, γνωρίσαμε μόνο οδεύοντα κύματα, δηλ. ηχητικά κύματα που συνέβαλλαν σε κάποιο σημείο στη διεύθυνση διάδοσης τους. Άραγε θα αλλάξει κάτι αν βάλουμε τις πηγές του ήχου αντικρουστά μεταξύ τους; Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια κοινή πηγή που συνδέουμε δυο ηχεία τα οποία βρίσκονται αντικρουστά το ένα με το άλλο. Έτσι, τα κύματα θα έχουν την ίδια συχνότητα, το ίδιο μήκος κύματος, και το ίδιο πλάτος, αλλά διαφορετική ταχύτητα (αντίθετης φοράς, ίδιου μέτρου όμως). Ας δούμε πως αυτά συμβάλλουν στο χώρο ανάμεσά τους.

Θεωρώντας μηδενική αρχική φάση και για τα δυο κύματα για λόγους απλούστευσης, είναι

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad (3.343)$$

$$= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t) \quad (3.344)$$

$$= (2A \sin(kx)) \cos(\omega t) \quad (3.345)$$

με χρήση της γνωστής τριγωνομετρικής ταυτότητας. Παρατηρήστε ότι το κύμα στο οποίο καταλήξαμε δεν έχει την εξίσωση του οδεύοντος κύματος, δηλ. δεν εξαρτάται από την έκφραση $kx - \omega t$ - άρα δεν είναι ένα οδεύον κύμα. Τέτοια κύματα ονομάζονται **στάσιμα** κύματα. Σε ένα στάσιμο κύμα δεν υπάρχει η έννοια της κυματικής διάδοσης. Γενικότερα, στάσιμη ονομάζεται η ταλάντωση με στάσιμο περίγραμμα που αποτελείται από την υπέρθεση δυο όμοιων κυμάτων που ταξιδεύουν προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Σίγουρα στεναχωρηθήκατε ☹ που το αποτέλεσμα δεν ήταν ένα οδεύον κύμα σαν κι αυτά με τα οποία ασχολούμαστε τόσες παραγράφους πίσω, αλλά η εξίσωση πρέπει να σας είναι οικεία. Ας επιλέξουμε ένα στοιχείο του μέσου διάδοσης του κύματος, $x = x_0$:

$$y(x_0, t) = (2A \sin(kx_0)) \cos(\omega t) = A(x_0) \cos(\omega t) \quad (3.346)$$

Η παραπάνω σχέση μας λέει ότι κάθε στοιχείο που βρίσκεται στη θέση x εκτελεί ΑΑΤ! Επίσης, το πλάτος της αρμονικής κίνησης, $2A \sin(kx_0)$, ενός στοιχείου x_0 εξαρτάται από τη θέση του στοιχείου στο μέσο. Με άλλα λόγια, διαφορετικά στοιχεία του μέσου ταλαντώνονται με διαφορετικό τρόπο από τα υπόλοιπα: με την ίδια συχνότητα ω αλλά με διαφορετικό πλάτος.

3.9.1 Δεσμοί και Αντιδεσμοί

Δεδομένου ότι έχουμε μια στάσιμη ταλάντωση, θα αναρωτιέστε αν υπάρχουν στοιχεία του μέσου που να μην ταλαντώνονται καθόλου, δηλ. η θέση τους, x_0 , να είναι τέτοια που $2A \sin(kx_0) = 0$. Πράγματι υπάρχουν τέτοια στοιχεία και αρκεί να λύσουμε την προηγούμενη εξίσωση για να τα βρούμε.

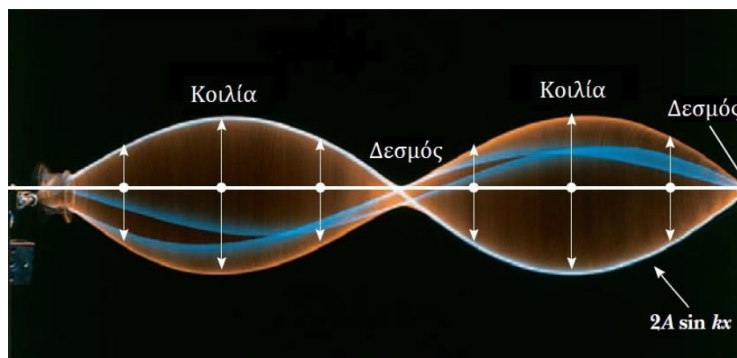
$$\sin(kx) = 0 \iff kx = n\pi \implies \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \implies x = \frac{n\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.347)$$

Τα στοιχεία αυτά ονομάζονται **δεσμοί**. Επίσης, υπάρχουν στοιχεία που εκτελούν ταλάντωση με το μεγαλύτερο δυνατό πλάτος που επιτρέπει το στάσιμο περίγραμμα τους. Μπορούμε να τα βρούμε λύνοντας τη σχέση

$$\sin(kx) = 1 \iff kx = n\pi \pm \frac{\pi}{2} \implies x = \frac{(2n+1)\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 3, \dots \quad (3.348)$$

Τα στοιχεία αυτά ονομάζονται **αντιδεσμοί** (ή κοιλίες). Είναι πολύ εύκολο να αποδείξετε ότι η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κοιλιών είναι ίση με $\lambda/2$, η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών δεσμών είναι ίση με $\lambda/2$, και η απόσταση μεταξύ δεσμού και επόμενης κοιλίας είναι ίση με $\lambda/4$.

Ας δούμε - επιτέλους - ένα στάσιμο κύμα, τους δεσμούς και τους αντιδεσμούς του. Δείτε το Σχήμα 3.49. Παρατηρήστε στο σχήμα σημειωμένους τους δεσμούς και τους αντιδεσμούς, το περίγραμμα του κύματος,



Σχήμα 3.49: Στάσιμο κύμα.

και κάποια ενδιάμεσα σημεία.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.35:

Δυο κύματα τα οποία διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις, δημιουργούν ένα στάσιμο κύμα. Οι επιμέρους κυματοσυναρτήσεις είναι

$$y_1(x, t) = 4 \sin(3x - 2t) \quad (3.349)$$

$$y_2(x, t) = 4 \sin(3x + 2t) \quad (3.350)$$

με x, y να μετρώνται σε εκατοστά και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

(α') Βρείτε το πλάτος της απλής αρμονικής κίνησης για το στοιχείο του μέσου που βρίσκεται στη θέση $x = 2.3$ εκατοστά.

(β') Βρείτε τις θέσεις των δεσμών και των κοιλιών αν το ένα άκρο της χορδής βρίσκεται στο σημείο $x = 0$.

Λύση:

(α') Έχουμε

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = 8 \sin(3x) \cos(2t) \quad (3.351)$$

με χρήση απλής τριγωνομετρίας. Οπότε

$$8 \sin(3 \cdot 2.3) = 8 \sin(6.9) \approx 4.6 \text{ cm} \quad (3.352)$$

(β') Για τους δεσμούς έχουμε

$$x_\delta = \frac{n\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.353)$$

και για τους αντιδεσμούς

$$x_a = \frac{(2n+1)\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.354)$$

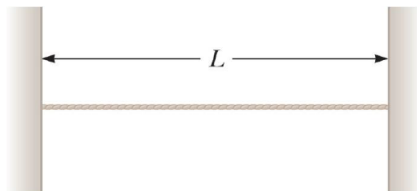
Το μήκος κύματος είναι $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3} \text{ m}$, οπότε

$$x_\delta = \frac{n\pi}{3}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.355)$$

$$x_a = \frac{(2n+1)\pi}{6}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.356)$$

3.9.2 Κύματα υπό Οριακές Συνθήκες

Δείτε το Σχήμα 3.50. Έχουμε ένα νήμα τεντωμένο και δεμένο στα άκρα του με δυο τοίχους. Το τελευταίο



Σχήμα 3.50: Τεντωμένο νήμα.

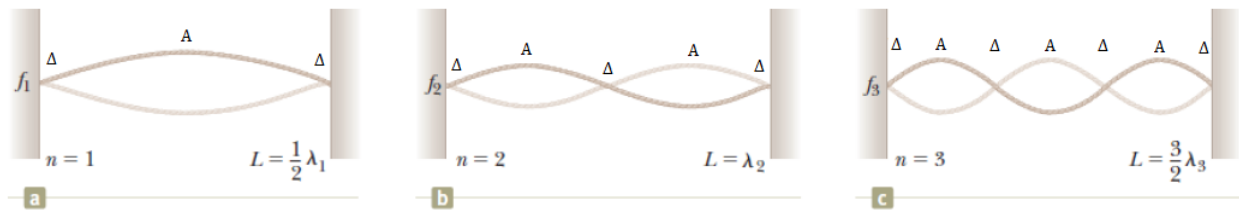
έχει ως συνέπεια το νήμα να έχει υποχρεωτικά δεσμούς στα άκρα του, αν ένα στάσιμο κύμα δημιουργηθεί επάνω του. Ας πούμε ότι διεγείρουμε το νήμα στο μέσον του, με το δάχτυλό μας. Τότε θα δημιουργήσουμε δυο ημιτονοειδή κύματα που θα ταξιδέψουν προς αντίθετες κατευθύνσεις, θα ανακλαστούν όταν φτάσουν στα άκρα του νήματος, και θα επιστρέψουν με ίδιο πλάτος και συχνότητα, δημιουργώντας έτσι ένα στάσιμο κύμα.

Ονομάζουμε **οριακή συνθήκη** το γεγονός ότι το νήμα έχει υποχρεωτικά δεσμούς στα άκρα του. Αυτό έχει άμεση συνέπεια στο μήκος κύματος του στάσιμου κύματος: θα είναι προκαθορισμένο, αφού

$$2A \sin(kL) = 0 \implies kL = \frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi \implies \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.357)$$

Αφού $u = \lambda f \implies f_n = \frac{n}{2L}$, και η συχνότητα του κύματος είναι επίσης προκαθορισμένη. Η οριακή συνθήκη προκαλεί ένα συγκεκριμένο αριθμό διακριτών στάσιμων κυμάτων στο νήμα, που λέγονται κανονικοί τρόποι ή ιδιομορφές (modes). Κάθε μια ιδιομορφή έχει τη δική της συχνότητα, η οποία υπολογίζεται εύκολα. Το φαινόμενο όπου μόνο συγκεκριμένες συχνότητες ταλάντωσης οδηγούν σε στάσιμο κύμα λέγεται **κβαντισμός**.

Κάθε κανονικός τρόπος ταλάντωσης ορίζεται ως η ταλάντωση που έχει οριακές συνθήκες στα άκρα της (δεσμοί) και κάθε δεσμός απέχει $1/4$ του μήκους κύματος από τον επόμενο/προηγούμενο αντιδεσμό. Δείτε το Σχήμα 3.51. Στο σχήμα βλέπετε τους τρεις πρώτους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης. Με Δ



Σχήμα 3.51: Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης.

έχουν σημειωθεί οι δεσμοί και με A οι αντιδεσμοί. Για το n -οστό κανονικό τρόπο ταλάντωσης, το μήκος κύματος θα είναι

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.358)$$

και οι φυσικές συχνότητες θα είναι

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = n \frac{u}{2L} = n f_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.359)$$

Αν το νήμα έχει τάση T και γραμμική πυκνότητα μάζας μ , τότε οι φυσικές συχνότητες περιγράφονται ως

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.360)$$

Για $n = 1$, η συχνότητα f_1 λέγεται **θεμελιώδης συχνότητα**. Από την εξίσωση (3.359) παρατηρούμε ότι όλες οι υπόλοιπες συχνότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους και οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης με αυτές τις συχνότητες ονομάζονται **αρμονικές**. Στο Σχήμα 3.51 βλέπετε την πρώτη, τη δεύτερη, και την τρίτη αρμονική. Για να παρουσιαστεί μόνο μια αρμονική, πρέπει το νήμα να διεγερθεί ώστε να πάρει το σχήμα της επιθυμητής αρμονικής. Αφού το διεγείρουμε, το νήμα θα ταλαντωθεί στην αντίστοιχη συχνότητα. Προφανώς καταλαβαίνετε ότι αυτό μπορούμε να το κάνουμε για το πολύ τις τρεις - τέσσερις πρώτες αρμονικές, γιατί μετά το πράγμα δυσκολεύει ☹. Αν όμως διεγείρουμε το νήμα με τυχαίο τρόπο, μόνο κύματα που ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες θα “επιζήσουν” στο νήμα: οι αρμονικές ☺. Μάλιστα, η τυχαία διέγερση του νήματος (ας υποθέσουμε ότι συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = 0$) μπορεί να ιδωθεί ως η αρχική μορφή του νήματος για $t = 0$:

$$y(x, 0) = f(x) \quad (3.361)$$

Μπορεί κανείς να δείξει μαθηματικά ότι λόγω της παρουσίας δεσμών για $x = 0$, $x = L$, δηλ. $f(0) = f(L) = 0$, η μορφή που δώσαμε στο νήμα με τυχαίο τρόπο μπορεί να γραφεί ως

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \quad (3.362)$$

Το παραπάνω άθροισμα ονομάζεται **Σειρά Fourier**. Οι όροι της Σειράς Fourier είναι ακριβώς οι χωρικές μορφές των αρμονικών που αναπτύσσονται επάνω στο νήμα αμέσως μετά τη διέγερσή του. Οι συντελεστές A_k σας πληροφορούν για το “πόση” (πόσο “δυνατά” διεγείρεται) από την κάθε αρμονική περιέχεται στο στάσιμο κύμα που δημιουργείται πάνω στο νήμα, και του οποίου το αρχικό σχήμα δώσατε με τυχαίο τρόπο. Έτσι, το στάσιμο κύμα θα έχει τη μορφή

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \quad (3.363)$$

με $\omega_n = n\omega_1 = 2\pi n f_1 = n \frac{\pi u}{L}$.

Παράδειγμα 3.36:

Οι βιολόγοι πιστεύουν ότι μερικά είδη αράχνης “κουρδίζουν” τον ιστό τους με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι βέλτιστος στην παραγωγή συχνοτήτων που αντιστοιχούν στην “πάλη” που κάνει ένα θήραμα όταν πιαστεί σε αυτόν. Ένα νήμα του ιστού μιας αράχνης έχει τυπική διάμετρο 20 μm και ο ιστός έχει πυκνότητα 1300 kg/m^3 . Για την παραγωγή θεμελιώδους συχνότητας στα 100 Hz, πόση πρέπει να είναι η τάση ενός νήματος μήκους 12 εκατοστών που πρέπει να υφάνει η αράχνη;

Λύση:

Το μήκος κύματος ενός στάσιμου κύματος σε ένα νήμα που ταλαντώνεται στη θεμελιώδη συχνότητα είναι $\lambda_1 = 2L$. Η γραμμική πυκνότητα του νήματος είναι $\mu = \rho A = 1300 \cdot \pi r^2 = 3.14 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2$. Για να ταλαντωθεί το νήμα στη θεμελιώδη συχνότητα ($n = 1$) των 100 Hz, θα πρέπει

$$f_1 = \frac{u}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho A}} \Rightarrow T = 4L^2 f_1^2 \rho A = 2.4 \cdot 10^{-4} \text{ N} \quad (3.364)$$

Παράδειγμα 3.37:

Ένα σπάνιο βιολί Stradivarius παίζει μια νότα μήκους κύματος 39.1 cm η οποία ακούγεται μελωδικά στο αυτί σας. Το δωμάτιο είναι σχετικά ζεστό, οπότε η ταχύτητα του ήχου είναι 344 m/s. Αν η γραμμική πυκνότητα της χορδής είναι 0.6 gr/m και η τάση της είναι 150 N, πόσο είναι το μήκος του ταλαντούμενου τμήματος της χορδής του βιολιού;

Λύση:

Το κύμα σε ένα τεντωμένο νήμα/χορδή με δεσμούς στα δυο άκρα του είναι στάσιμο. Το μήκος κύματος ενός στάσιμου κύματος σε ένα νήμα που ταλαντώνεται στη θεμελιώδη συχνότητα είναι $\lambda_1 = 2L$. Το μήκος κύματος που φτάνει στο αυτί σας είναι $\lambda = 0.391 \text{ m}$, οπότε η συχνότητα είναι

$$f = \frac{u_{\text{air}}}{\lambda} = 879.8 \text{ Hz} \quad (3.365)$$

Αυτή είναι και η συχνότητα που φέρει το κύμα στη χορδή. Έτσι

$$879.8 = \frac{u_{\text{string}}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{T_s}{\mu}} \Rightarrow \lambda = 0.568 \text{ m} \quad (3.366)$$

Οπότε

$$L = \frac{\lambda}{2} = 28.4 \text{ cm} \quad (3.367)$$

3.9.3 Διακροτήματα

Στη μελέτη των στάσιμων κυμάτων, είδαμε φαινόμενα συμβολής κυμάτων με την ίδια συχνότητα. Ανάλογα με τη θέση του στοιχείου στο χώρο, είχαμε διαφορετικό πλάτος ταλάντωσης του στοιχείου, σύμφωνα με τη σχέση

$$y(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (3.368)$$

Αυτού του είδους η συμβολή ονομάζεται *χωρική συμβολή*. Όμως τι θα συμβεί αν τα συμβαλλόμενα κύματα έχουν λίγο διαφορετική συχνότητα; Τότε σε ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου τα συμβαλλόμενα κύματα θα είναι πότε σε φάση και πότε εκτός φάσης. Αυτό μπορεί να περιγραφεί ως μια *χρονική εναλλαγή* μεταξύ καταστρεπτικής και ενισχυτικής συμβολής. Η συμβολή αυτή ονομάζεται *χρονική συμβολή*. Αυτή η περιοδική μεταβολή του πλάτους του κύματος σε ένα δεδομένο σημείο λόγω της υπέρθεσης κυμάτων με λίγο διαφορετικές συχνότητες ονομάζεται **διακρότημα**. Μπορείτε να ακούσετε ένα διακρότημα αν παίξετε

δυο γειτονικά πλήκτρα στο πιάνο. Με λίγο περισσότερη λεπτομέρεια, έστω οι συχνότητες f_1, f_2 για δυο κύματα με ίσα πλάτη. Οι σχέσεις που τα περιγράφουν είναι

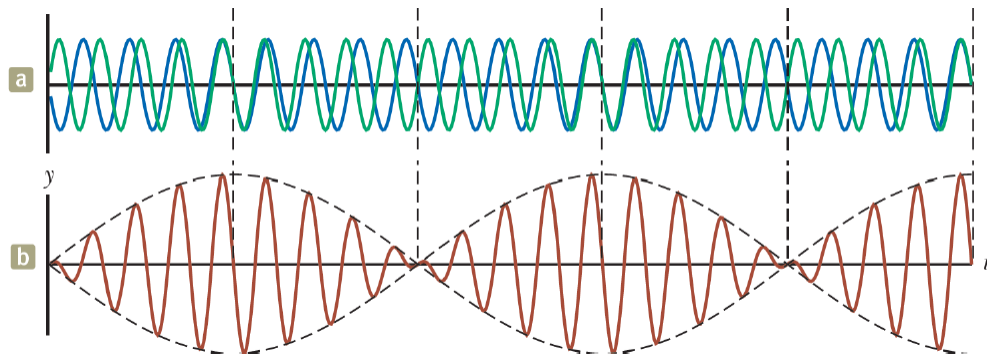
$$y_1(t) = A \cos(2\pi f_1 t) \quad (3.369)$$

$$y_2(t) = A \cos(2\pi f_2 t) \quad (3.370)$$

Το συνολικό κύμα θα είναι

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 2A \cos\left(\frac{2\pi(f_1 - f_2)t}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi(f_1 + f_2)t}{2}\right) \quad (3.371)$$

Τα δυο κύματα $y_1(t)$ και $y_2(t)$ φαίνονται στο Σχήμα 3.52(a) και το συνολικό κύμα στο Σχήμα 3.52(b). Η



Σχήμα 3.52: Διακρότημα.

διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα ονομάζεται *περιβάλλουσα - envelope*, με εξίσωση

$$y_{env}(t) = 2A \cos\left(\frac{2\pi(f_1 - f_2)t}{2}\right) \quad (3.372)$$

Η περιβάλλουσα εμφανίζει ακρότατα όταν

$$\cos(\pi(f_1 - f_2)t) = \pm 1 \quad (3.373)$$

Άρα υπάρχουν δυο μέγιστα σε κάθε περίοδο του κύματος. Έτσι η συχνότητα του διακροτήματος είναι

$$f_{beat} = \frac{2|f_1 - f_2|}{2} = |f_1 - f_2| \quad (3.374)$$

Παράδειγμα 3.38:

Η Μυρέτα περιμένει στην πλατφόρμα ενός σταθμού τρένων ενώ δυο τρένα πλησιάζουν από την ίδια πλευρά της πλατφόρμας με ταχύτητα 8.0 m/s. Και τα δυο τρένα σφυρίζουν την άφιξή τους, με μια σειρήνα ίδιας συχνότητας f , και το ένα τρένο βρίσκεται σε μια απόσταση πίσω από το άλλο. Αφού το πρώτο τρένο περάσει το σημείο που βρίσκεται η Μυρέτα αλλά πριν την προσπεράσει και το δεύτερο, αυτή ακούει ένα διακρότημα στα 4.0 Hz. Ποιά είναι η συχνότητα των σειρηνών των τρένων;

Λύση:

Η Μυρέτα είναι ακίνητη ως παρατηρητής, ενώ τα τρένα την πλησιάζουν. Από τη σχέση του Doppler έχουμε

$$f' = \frac{u}{u - u_s} f \quad (3.375)$$

Για το τρένο που πλησιάζει, η Μυρέτα ακούει συχνότητα

$$f' = \frac{343}{335}f \quad (3.376)$$

Για το τρένο που βρίσκεται πίσω, η Μυρέτα ακούει συχνότητα

$$f'' = \frac{u}{u + u_s}f = \frac{343}{351}f \quad (3.377)$$

Η συχνότητα του διακροτήματος είναι

$$f_{beat} = |f' - f''| \Rightarrow f' - f'' = f_{beat} \Leftrightarrow \left[\frac{343}{335} - \frac{343}{351} \right] f = 4 \Rightarrow f = 85.7 \text{ Hz} \quad (3.378)$$

3.10 Ασκήσεις

Παράδειγμα 3.39:

Ένα σώμα μάζας 1.5 kg είναι δεμένο σε ελατήριο και εκτελεί Α.Α.Τ. με συνάρτηση θέσης

$$x(t) = 0.074 \cos(4.16t - 2.42) \quad (3.379)$$

με όλα τα μεγέθη να έχουν μετρηθεί στο Διεθνές Σύστημα (θέση και πλάτος σε m, συχνότητα σε rad/s, φάση σε rad, χρόνος σε s). Βρείτε

- (α') το χρόνο που απαιτείται για μια πλήρη ταλάντωση
- (β') τη σταθερά του ελατηρίου
- (γ') τη μέγιστη ταχύτητα που λαμβάνει το σώμα
- (δ') τη μέγιστη δύναμη που ασκείται στο σώμα
- (ε') τη θέση, ταχύτητα, και επιτάχυνση του σώματος όταν $t = 1.00$ s
- (ς') τη δύναμη του ελατηρίου την παραπάνω χρονική στιγμή

Λύση:

(α') Ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη ταλάντωση ισούται με την περίοδό του:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4.16} = 1.51 \text{ s} \quad (3.380)$$

(β') Ξέρουμε ότι

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega^2 m = (4.16)^2 \cdot 1.5 = 25.95 \text{ N/m} \quad (3.381)$$

(γ') Ξέρουμε ότι

$$u_{\max} = \omega A = 4.16 \cdot 0.074 = 0.3078 \text{ m/s} \quad (3.382)$$

(δ') Η μέγιστη δύναμη πάνω στο σώμα ασκείται όταν βρίσκεται στη μέγιστη απομάκρυνση (είτε συμπίεση είτε έκταση του ελατηρίου) από τη θέση ισορροπίας, αφού

$$F_{\max} = |kx_{\max}| = 25.95 \cdot 0.074 = 1.9203 \text{ N} \quad (3.383)$$

(ε') Από τις εξισώσεις της Α.Α.Τ

$$x(1) = 0.074 \cos(4.16 - 2.42) = 0.074(-0.1684) = -0.0124 \text{ m} \quad (3.384)$$

$$u(1) = -4.16 \cdot 0.074 \sin(4.16 - 2.42) = -0.3034 \text{ m/s} \quad (3.385)$$

$$a(1) = -(4.16)^2 \cdot 0.074 \cos(4.16 - 2.42) = 0.2157 \text{ m/s}^2 \quad (3.386)$$

(ς') Θα είναι

$$F_{t=1} = -kx(1) = -25.95 \cdot (-0.0124) = 0.3218 \text{ N} \quad (3.387)$$

Παράδειγμα 3.40:

Ένα σώμα εκτελεί Απλή Αρμονική Ταλάντωση. Η περίοδός της είναι 0.9 δευτερόλεπτα και το πλάτος της είναι 0.32 μέτρα. Όταν $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 0.32$ m και βρίσκεται στιγμιαία σε ακινησία. Υπολογίστε το χρόνο που θα χρειαστεί για να κινηθεί

- (α') από τη θέση $x = 0.32$ m στη θέση $x = 0.16$ m
- (β') από τη θέση $x = 0.16$ m στη θέση $x = 0$ m

Λύση:

Αν η περίοδος της ΑΑΤ είναι 0.9 δευτερόλεπτα, η συχνότητά της θα είναι

$$f = 1/T = \frac{10}{9} \text{ Hz} \quad (3.388)$$

και η κυκλική συχνότητα

$$\omega = 2\pi f = \frac{20\pi}{9} \text{ rad/s} \quad (3.389)$$

Το πλάτος της είναι $A = 0.32 \text{ m}$. Αφού για $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = A$ και ακίνητο, τότε οι αρχικές συνθήκες της ΑΑΤ είναι $x(0) = A$, $u(0) = 0$. Η γενική μορφή της ΑΑΤ είναι

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) = 0.32 \cos\left(\frac{20\pi}{9}t + \phi\right) \quad (3.390)$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$x(0) = 0.32 \cos(\phi) = 0.32 \implies \phi = 0 \quad (3.391)$$

Δε χρειαζόμαστε τη δεύτερη αρχική συνθήκη, άρα

$$x(t) = 0.32 \cos\left(\frac{20\pi}{9}t\right) \quad (3.392)$$

(α') Στη θέση $x = 0.16 \text{ m}$, το σώμα είναι ακίνητο. Ο χρόνος που απαιτείται για να κινηθεί στη θέση $x = 0.16 \text{ m}$ δίνεται ως

$$x(t) = 0.16 \iff 0.32 \cos\left(\frac{20\pi}{9}t\right) = 0.16 \iff \cos\left(\frac{20\pi}{9}t\right) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad (3.393)$$

Η λύση της παραπάνω τριγωνομετρικής εξίσωσης είναι

$$\frac{20\pi}{9}t = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.394)$$

Θεωρούμε ότι ο χρόνος που ζητείται αφορά την πρώτη φορά που το σώμα πηγαίνει από τη θέση $x = 0.32$ στη θέση $x = 0.16$, άρα θέτουμε $k = 0$ παραπάνω, και έχουμε

$$\frac{20\pi}{9}t = \frac{\pi}{3} \iff t = \frac{9}{60} = 0.15 \text{ s} \quad (3.395)$$

(β') Μπορούμε να υπολογίσουμε το χρόνο που απαιτείται από τη θέση $x = 0.32$ ως τη θέση $x = 0$ και να αφαιρέσουμε το χρόνο του πρώτου ερωτήματος. Θα είναι

$$x(t) = 0 \iff 0.32 \cos\left(\frac{20\pi}{9}t\right) = 0 \iff \cos\left(\frac{20\pi}{9}t\right) = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (3.396)$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$\frac{20\pi}{9}t = 2\pi k \pm \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.397)$$

Θεωρούμε ότι ο χρόνος που ζητείται αφορά την πρώτη φορά που το σώμα πηγαίνει από τη θέση $x = 0.32$ στη θέση $x = 0$, άρα θέτουμε $k = 0$ παραπάνω, και έχουμε

$$\frac{20\pi}{9}t = \frac{\pi}{2} \iff t = \frac{9}{40} = 0.225 \text{ s} \quad (3.398)$$

Ο ζητούμενος χρόνος θα είναι $t = t_2 - t_1 = 0.225 - 0.15 = 0.075 \text{ s}$.

Παράδειγμα 3.41:

Στις αρχές του 2004, επιστήμονες στο Πανεπιστήμιο Purdue της Αμερικής χρησιμοποίησαν μια πολύ ευαίσθητη τεχνική για να μετρήσουν τη μάζα ενός ιού από αυτούς που χρησιμοποιούνται στα εμβόλια της ευλογιάς. Η διαδικασία περιλάμβανε τη μέτρηση της συχνότητας ταλάντωσης μιας πολύ λεπτής και μικρής φέτας σιλικόνης - μόλις 30 νανόμετρων μήκους - με χρήση λέιζερ: η πρώτη μέτρηση έγινε χωρίς τον ιό επάνω, ενώ η δεύτερη μέτρηση έγινε με τον ιό επάνω στη φέτα σιλικόνης. Η διαφορά στη μάζα του ταλαντωτή προκάλεσε μεταβολές στη συχνότητα ταλάντωσης. Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε την όλη διαδικασία ως ένα σύστημα {μάζας, ελατηρίου}.

(α') Δείξτε ότι ο λόγος των συχνοτήτων ταλάντωσης με και χωρίς τον ιό πάνω στη φέτα σιλικόνης δίνεται από τη σχέση

$$\frac{f_{s+v}}{f_s} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_v}{m_s}}} \quad (3.399)$$

Οι δείκτες v και s δηλώνουν ιό (virus) και σιλικόνη (silicon), αντίστοιχα.

(β') Η φέτα σιλικόνης έχει μάζα $2.1 \cdot 10^{-16}$ g (γραμμάρια) και συχνότητα ταλάντωσης $2.0 \cdot 10^{15}$ Hz χωρίς τον ιό, ενώ με τον ιό η συχνότητα ταλάντωσης γίνεται $2.87 \cdot 10^{14}$ Hz. Πόση είναι η μάζα του ιού;

Λύση:

Οι δείκτες v και s δηλώνουν ιό (virus) και σιλικόνη (silicon), αντίστοιχα.

(α') Οι συχνότητες ταλάντωσης δίνονται από τις σχέσεις

$$f_s = \sqrt{\frac{k}{m_s}} \quad (3.400)$$

$$f_{s+v} = \sqrt{\frac{k}{m_{s+v}}} \quad (3.401)$$

με $m_{s+v} = m_s + m_v$, και

$$\frac{f_{s+v}}{f_s} = \sqrt{\frac{\frac{k}{m_{s+v}}}{\frac{k}{m_s}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{m_{s+v}}}{\frac{1}{m_s}}} = \sqrt{\frac{m_s}{m_{s+v}}} = \sqrt{\frac{m_s}{m_s + m_v}} \quad (3.402)$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα στον παρονομαστή το m_s , παίρνουμε

$$\frac{f_{s+v}}{f_s} = \sqrt{\frac{m_s}{m_s \left(1 + \frac{m_v}{m_s}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_v}{m_s}}} \quad (3.403)$$

(β') Από την προηγούμενη σχέση έχουμε

$$\frac{f_{s+v}}{f_s} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_v}{m_s}}} \iff f_s^2 = f_{s+v}^2 \left(1 + \frac{m_v}{m_s}\right) \quad (3.404)$$

$$m_v = m_s \frac{f_s^2 - f_{s+v}^2}{f_{s+v}^2} \quad (3.405)$$

$$= 2.1 \cdot 10^{-16} \left(\frac{4 \cdot 10^{30} - (2.87)^2 \cdot 10^{28}}{(2.87)^2 \cdot 10^{28}} \right) \quad (3.406)$$

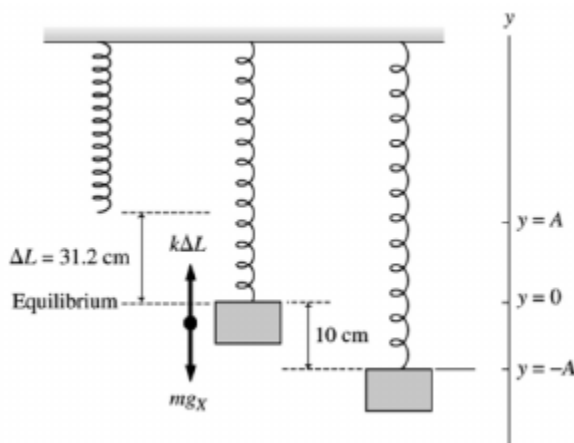
$$= 9.988 \cdot 10^{-15} \text{ g} \quad (3.407)$$

Παράδειγμα 3.42:

Κατά το πρώτο σας διαπλανητικό ταξίδι στον πλανήτη X έτυχε να πάρετε μαζί σώμα μάζας 200 g, ένα ελατήριο μήκους 40 cm, ένα μέτρο και ένα χρονόμετρο. Θέλετε να μελετήσετε την επιτάχυνση κατά την ελεύθερη πτώση στον πλανήτη X , καθώς η τιμή της δεν συμπεριλαμβάνεται στον τουριστικό οδηγό. Μια νύχτα κρεμάτε το ελατήριο από το ταβάνι του δωματίου σας και του κρεμάτε το σώμα. Παρατηρείτε ότι το σώμα εκτείνει το ελατήριο κατά 31.2 cm. Τότε επιμηκύνεται το ελατήριο κατά 10 cm και το αφήνετε. Με το χρονόμετρο βρίσκετε ότι 10 ταλαντώσεις χρειάζονται 14.5 s για να εκτελεστούν. Βάσει των παρεχόμενων πληροφοριών πόσο είναι το g ;

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 3.53. Θεωρούμε θετική φορά της κίνησης προς τα πάνω. Στο σημείο ισορροπίας ισχύει ο



Σχήμα 3.53: Μέτρηση g στον Πλανήτη X .

1ος νόμος του Newton:

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \quad (3.408)$$

$$\vec{F}_s + \vec{F}_g = \vec{0} \quad (3.409)$$

$$k\Delta L - mg_X = 0 \quad (3.410)$$

οπότε

$$\frac{k}{m} = \frac{g_X}{\Delta L} \quad (3.411)$$

Για την απλή αρμονική κίνηση $k/m = \omega^2$, επομένως

$$\omega^2 = \frac{g_X}{\Delta L} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g_X}{\Delta L}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow g_X = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Delta L \quad (3.412)$$

$$= \left(\frac{2\pi}{14.5/10}\right)^2 (0.312) \quad (3.413)$$

$$= 5.86 \text{ m/s}^2 \quad (3.414)$$

Παράδειγμα 3.43:

Ένα μεγάλο κουτί P , το οποίο είναι συνδεδεμένο με ένα λεπτό ελατήριο, εκτελεί οριζόντια, απλή αρμονική κίνηση καθώς γλιστράει κατα μήκος μιας λείας επιφανείας με συχνότητα $f = 1.5 \text{ Hz}$. Ένα κουτί B βρίσκεται ακίνητο πάνω στο P και ο συντελεστής της στατικής τριβής ανάμεσα στα δύο κουτιά είναι $\mu_s = 0.6$. Ποιο είναι το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης για το οποίο το κουτί B δεν ολισθαίνει;

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 3.54. Η μέγιστη επιτάχυνση για το ταλαντευόμενο σύστημα είναι



Σχήμα 3.54: Κουτιά το ένα πάνω στο άλλο.

$$a_{\max} = A\omega^2 = 4\pi^2 A f^2 \quad (3.415)$$

Η δύναμη της τριβής που δημιουργείται μεταξύ των δύο κουτιών πρέπει να είναι τέτοια ώστε να μπορεί το κουτί B να επιταχυνθεί με αυτήν την επιτάχυνση. Επομένως αν είναι έτοιμο να γλιστρήσει

$$f_s = f_{s\max} = \mu_s n \quad (3.416)$$

Λόγω ισορροπίας στον άξονα $y'y$, ο 1ος νόμος του Newton μας δίνει

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{n} + \vec{F}_g = \vec{0} \implies n = F_g = mg \quad (3.417)$$

οπότε από το 2ο νόμο του Newton

$$f_{s\max} = \mu_s n = \mu_s mg = ma = m(4\pi^2 A f^2) \quad (3.418)$$

το οποίο δίνει και το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης

$$A = \frac{\mu_s g}{4\pi^2 f^2} = \frac{(0.6)(980)}{4\pi^2 (1.5)^2} = 6.62 \text{ cm} \quad (3.419)$$

Παράδειγμα 3.44:

Ένα κουτί κείται πάνω σε λεία επιφάνεια, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.55(a), και συνδέεται με δύο ελατήρια, σταθερές k_1 και k_2 αντίστοιχα. Δείξτε ότι η συχνότητα ταλάντωσης του κουτιού δίνεται από τον τύπο

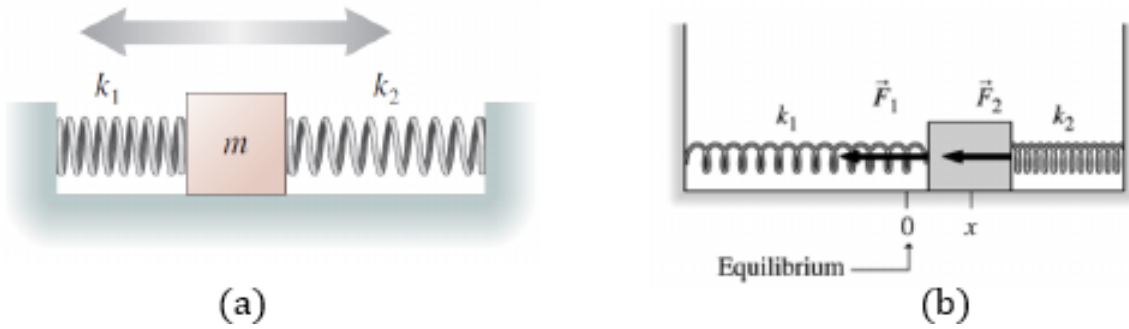
$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$$

όπου f_1 και f_2 είναι οι συχνότητες με τις οποίες θα ταλαντωνόταν αν ήταν συνδεδεμένο μόνο με ένα εξ' αυτών.

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 3.55(b.) Στο κουτί ασκούνται δύο δυνάμεις. Αν το κουτί έχει θετική μετατόπιση, δηλαδή $x > 0$, και οι δύο δυνάμεις (η μια απωθητική η άλλη ελκτική) έχουν κατεύθυνση προς τα αριστερά και έχουν αρνητικές τιμές:

$$F_{\text{net},x} = F_{sp1,x} + F_{sp2,x} = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x = -k_{\text{eff}} x \quad (3.420)$$



Σχήμα 3.55: Σχήματα Άσκησης 3.44.

όπου $k_{\text{eff}} = k_1 + k_2$ είναι η συνολική σταθερά των ελατηρίων. Αυτό σημαίνει ότι η ταλάντωση του κουτιού υπό την δράση και των δυο ελατηρίων είναι ίδια με την ταλάντωση που θα εκτελούσε αν το κουτί ήταν δεμένο σε ένα ελατήριο, με σταθερά k_{eff} . Επομένως για την συχνότητα του κουτιού έχουμε

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{\frac{k_1}{4\pi^2 m} + \frac{k_2}{4\pi^2 m}} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \quad (3.421)$$

Παράδειγμα 3.45:

Σε ένα λιμάνι (όχι του Ηρακλείου), η παλίρροια προκαλεί την άνοδο και κάθοδο των κυμάτων. Συγκεκριμένα, η επιφάνεια της θάλασσας ανεβαίνει και κατεβαίνει απόσταση d (από το υψηλότερο σημείο ως το χαμηλότερο), κινούμενη σε απλή αρμονική κίνηση με περίοδο 12.5 ώρες. Αν ξεκινήσετε τη μέτρησή σας από το υψηλότερο σημείο (που κάτι σημαίνει αυτό για την αρχική φάση της αρμονικής κίνησης $\odot$), πόσο χρόνο χρειάζεται το νερό να κατέβει απόσταση $0.25d$ από το υψηλότερο σημείο;

Λύση:

Αφού η απόσταση μεταξύ του υψηλότερου και του χαμηλότερου σημείου της επιφάνειας της θάλασσας είναι d , τότε μπορούμε να μοντελοποιήσουμε την άνοδο και την κάθοδο της ως απλή αρμονική κίνηση με πλάτος $d/2$. Αν η περίοδος μας δίνεται ως 12.5 ώρες, τότε η συχνότητα θα είναι $\omega = 2\pi f = 2\pi/T = \frac{2\pi}{12.5}$ rad/h. Το πρόβλημα μας ζητά να ξεκινήσουμε τη μέτρησή μας από το υψηλότερο σημείο, δηλ. για $t = 0$, η απλή αρμονική κίνηση της επιφάνειας της θάλασσας θα δίνεται ως

$$x(0) = A \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow \frac{d}{2} = \frac{d}{2} \cos(0 + \phi) \Rightarrow \cos(\phi) = 1 \Rightarrow \phi = 0 \quad (3.422)$$

Άρα

$$x(t) = \frac{d}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{12.5}t\right) \quad (3.423)$$

με το χρόνο t να εκφράζεται σε ώρες. Για να κατέβει το νερό απόσταση $0.25d$ από το υψηλότερο σημείο, σημαίνει ότι τότε το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι $\frac{d}{2} - \frac{d}{4} = \frac{d}{4}$. Οπότε

$$\frac{d}{4} = \frac{d}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{12.5}t\right) \quad (3.424)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{12.5}t\right) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad (3.425)$$

$$\frac{2\pi}{12.5}t = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.426)$$

$$\frac{1}{12.5}t = k \pm \frac{1}{6} \quad (3.427)$$

και θέτοντας $k = 0$ για να βρούμε την πρώτη φορά που κατεβαίνει από το μέγιστο ύψος μέχρι το δοσμένο ύψος, έχουμε

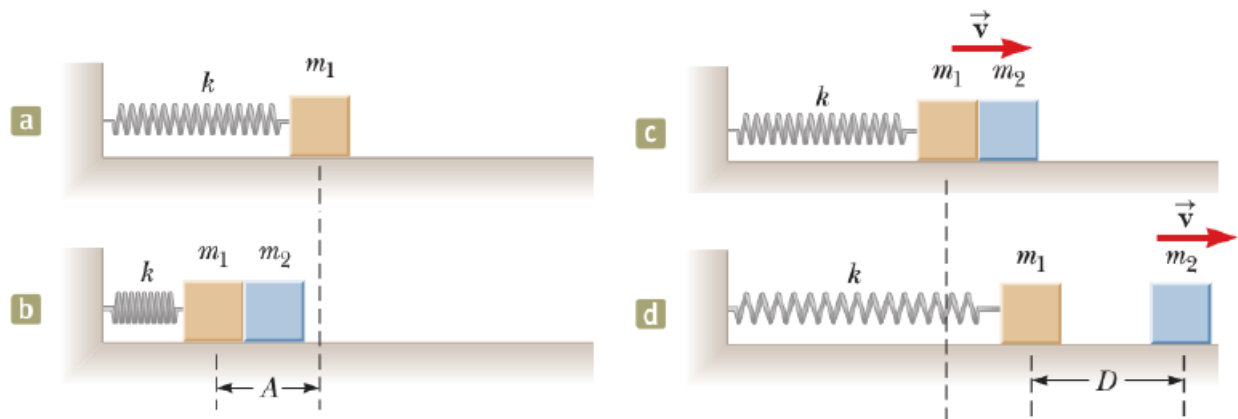
$$\frac{t}{12.5} = \frac{1}{6} \iff 6t = 12.5 \iff t = 2.0833 \text{ ώρες} \quad (3.428)$$

Παράδειγμα 3.46:

Ένα σώμα μάζας $m_1 = 9 \text{ kg}$ συνδεδεμένο με ελατήριο σταθεράς $k = 100 \text{ N/m}$ βρίσκεται αρχικά σε ισορροπία, όπως στο Σχήμα 3.56(a). Ένα δεύτερο σώμα μάζας $m_2 = 7 \text{ kg}$ κινείται αργά προς τα αριστερά σπρώχνοντας το σώμα m_1 και συμπιέζει το ελατήριο κατά $A = 0.2 \text{ m}$, όπως στο Σχήμα 3.56(b). Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο και τα σώματα αρχίζουν να κινούνται προς τα δεξιά. Η τριβή του επιπέδου θεωρείται αμελητέα. Όταν το σώμα m_1 φτάνει στο σημείο ισορροπίας, χάνει την επαφή με το m_2 (γιατί;) και εκείνο συνεχίζει να κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα u .

(α') Βρείτε την ταχύτητα u .

(β') Πόσο απέχουν τα σώματα όταν το ελατήριο είναι πλήρως τεντωμένο για πρώτη φορά;



Σχήμα 3.56: Κουτιά με ελατήριο.

Λύση:

(α') Η συνολική ενέργεια στη θέση μέγιστης συμπίεσης του ελατηρίου είναι ελαστική και ίση με $U_s = \frac{1}{2}kA^2 = 2 \text{ J}$ και ισούται με τη μηχανική ενέργεια του συστήματος {σώματα, ελατήριο}, το οποίο είναι πολυμελές και απομονωμένο, με μόνη δύναμη που παράγει έργο τη δύναμη του ελατηρίου, που είναι συντηρητική. Στη θέση ισορροπίας, η συνολική ενέργεια είναι μόνο κινητική, δηλ. από την ΑΔΜΕ στο σύστημα έχουμε

$$\Delta E_{mech}^{b \rightarrow c} = 0 \quad (3.429)$$

$$E_{mech}^b = K_c + U_{sc} \quad (3.430)$$

$$E_{mech}^b = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 + 0 \quad (3.431)$$

$$u^2 = \frac{2E_{mech}}{m_1 + m_2} \quad (3.432)$$

$$u = 0.5 \text{ m/s} \quad (3.433)$$

Αυτή είναι η ταχύτητα του m_1 και του m_2 στο σημείο ισορροπίας. Πριν από το σημείο αυτό, το σώμα m_2 κινείται με σταθερή ταχύτητα 0.5 m/s , ενώ το σώμα m_1 αρχίζει να επιβραδύνει λόγω της δύναμης του ελατηρίου.

(β') Η ενέργεια του συστήματος {ελατήριο, σώμα m_1 } στη θέση ισορροπίας είναι

$$\frac{1}{2}m_1u^2 = 1.125 \text{ J} \quad (3.434)$$

Αυτό είναι ίσο επίσης με $\frac{1}{2}k(A')^2$, όπου A' είναι το πλάτος ταλάντωσης του προαναφερθέντος συστήματος. Έτσι,

$$\frac{1}{2}100(A')^2 = 1.125 \implies A' = 0.15 \text{ m} \quad (3.435)$$

Η περίοδος του συστήματος είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 1.885 \text{ s} \quad (3.436)$$

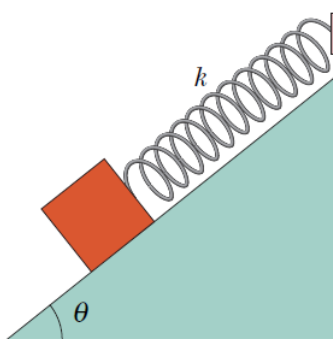
και απαιτείται χρόνος $\frac{1}{4}T = 0.47 \text{ s}$ αφού περάσει το σημείο ισορροπίας για να φτάσει το ελατήριο σε πλήρη έκταση για πρώτη φορά. Η απόσταση που χωρίζει τα σώματα m_1 και m_2 είναι

$$D = u\left(\frac{T}{4}\right) - A' = 8.56 \text{ cm} \quad (3.437)$$

Παράδειγμα 3.47:

Στο Σχήμα 3.57, ένα σώμα βάρους 14 N που ολισθαίνει χωρίς τριβές σε κεκλιμένο γωνίας 40° , συνδέεται με το πάνω μέρος του κεκλιμένου μέσω ελατηρίου μήκους 0.45 m και σταθεράς 120 N/m.

- (α') Αν το σώμα αφεθεί απαλά μετά τη σύνδεση με το ελατήριο (χωρίς να ταλαντωθεί), πόσο μακριά από την κορυφή του κεκλιμένου βρίσκεται η θέση ισορροπίας του συστήματος;
 (β') Αν το σώμα τραβιέται ελαφρά προς το κάτω μέρος του κεκλιμένου και αφήνεται ελεύθερο, ποιά είναι η περίοδος της ταλάντωσης που πραγματοποιείται;



Σχήμα 3.57: Ελατήριο, σώμα, και κεκλιμένο.

Λύση:

- (α') Αφού το σώμα συνδεθεί στο ελατήριο, θα τεντώσει το ελατήριο για κάποια απόσταση και μετά θα ισορροπήσει. Έστω d αυτή η απόσταση μέχρι τη θέση ισορροπίας. Έστω ένας νοητός άξονας x' παραλληλός του κεκλιμένου. Στη θέση αυτή, αφού το σώμα ισορροπεί θα ισχύει ο 1ος νόμος του Newton

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \iff \vec{F}_s + \vec{F}_{g_x} = \vec{0} \implies F_s = F_{g_x} \quad (3.438)$$

$$kd = mg \sin(\theta) \quad (3.439)$$

$$d = \frac{mg \sin(\theta)}{k} = 0.075 \text{ m} \quad (3.440)$$

Άρα το σώμα θα ισορροπήσει σε συνολική απόσταση από την κορυφή του κεκλιμένου ίση με $0.075 + 0.45 = 0.525 \text{ m}$.

(β') Η περίοδος της ταλάντωσης εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του ελατηρίου και του σώματος, καθώς

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 0.686 \text{ s} \quad (3.441)$$

Παράδειγμα 3.48:

Ένα σώμα μάζας $M = 5.4 \text{ kg}$ βρίσκεται ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο, και είναι δεμένο σε ελατήριο σταθεράς $k = 6000 \text{ N/m}$. Μια σφαίρα μάζας $m = 0.095 \text{ kg}$ χτυπά το σώμα, και αφού σφηνώνεται μέσα στο σώμα (θεωρώντας ότι η κρούση δε συμπιέζει το ελατήριο), το νέο σώμα {σφαίρα, σώμα} αποκτά ταχύτητα $u_{m,M} = 1.089 \text{ m/s}$. Το νέο σώμα συμπιέζει το ελατήριο, και στη συνέχεια εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το νέο σώμα.

Λύση:

Στο πρόβλημα αυτό, πρέπει να βρούμε τη μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου, όταν αυτό συμπιέζεται από το σώμα {σφαίρα, σώμα} μάζας $M + m$. Θεωρούμε ότι, απουσία τριβών, το σύστημα {ελατήριο, σώματα} είναι απομονωμένο, καθώς η μόνη δύναμη που παράγει έργο στο σύστημα είναι η δύναμη του ελατηρίου (η κάθετη δύναμη από το έδαφος και η δύναμη του βάρους είναι μεν δυνάμεις που δρουν στο σύστημα αλλά είναι κάθετες στη μετατόπιση που πραγματοποιεί το σώμα, και έτσι το έργο τους είναι μηδέν), η οποία είναι συντηρητική. Στη διαδρομή από το σημείο Α (σημείο που το σώμα αποκτά την ταχύτητα που αναφέρει η εκφώνηση) ως το σημείο Β (σημείο μέγιστης συμπίεσης του ελατηρίου), ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας.

$$E_{mech}^A = E_{mech}^B \quad (3.442)$$

$$K_A + U_{sA} = K_B + U_{sB} \quad (3.443)$$

$$\frac{1}{2}(m + M)u_A^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (3.444)$$

$$(m + M)u_A^2 = kx^2 \quad (3.445)$$

$$x^2 = \frac{(m + M)u_A^2}{k} \quad (3.446)$$

$$x = \sqrt{\frac{(m + M)u_A^2}{k}} = 0.0329 \text{ m} \quad (3.447)$$

Επιλέξαμε τη θετική ρίζα καθώς η συμπίεση του ελατηρίου γίνεται προς τα δεξιά, όπου θεωρούμε ότι πρόκειται για τη θετική φορά μετρήσεων θέσης σε σχέση με τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου ($x = 0$). Άρα το πλάτος της ταλάντωσης που θα υποστεί το σύστημα θα είναι $A = 0.033 \text{ m}$.

Παράδειγμα 3.49:

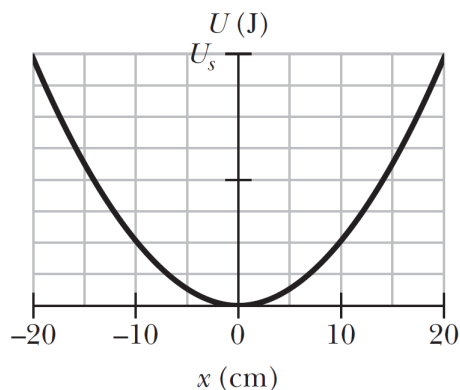
Το Σχήμα 3.58 δίνει ένα γενικό γράφημα για την ελαστική δυναμική ενέργεια για ένα σώμα μάζας 2 kg στην μορφή $b x^2$, με το x σε εκατοστά. Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η τιμή U_s που είναι μαρκαρισμένη στον κάθετο άξονα ισούται με 2.0 J .

(α') Αν το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας του με ταχύτητα 85 cm/s , θα επιστρέψει πίσω πριν φτάσει τη θέση $x = 15 \text{ cm}$;

(β') Αν ναι, σε ποιά θέση, κι αν όχι, ποιά είναι η ταχύτητά του στη θέση $x = 15 \text{ cm}$;

Λύση:

Το σύστημα {σώμα, ελατήριο} είναι πολυμελές και απομονωμένο, με μόνη δύναμη που παράγει έργο τη δύναμη του ελατηρίου, που είναι συντηρητική. Οπότε η μηχανική του ενέργεια είναι σταθερή. Γνωρίζουμε



Σχήμα 3.58: Γράφημα και AAT.

ότι όταν το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας, έχει μέγιστη ταχύτητα (και μηδενική ελαστική δυναμική ενέργεια, καθώς το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος). Όλη η μηχανική ενέργεια σε αυτή τη θέση είναι κινητική ενέργεια, άρα

$$E_{\text{mech}} = K_{\text{max}} = \frac{1}{2} m u_{\text{max}}^2 = 0.72 \text{ J} \quad (3.448)$$

Κοιτάζοντας το γράφημα, βλέπουμε ότι $U(x = 10) = 0.5 \text{ J}$. Αφού η ελαστική δυναμική ενέργεια είναι της μορφής $b x^2$, η σταθερά b θα είναι ίση με $5.0 \cdot 10^{-3} \text{ J/cm}^2$. Άρα

$$U(x) = 5.0 \cdot 10^{-3} \cdot 12^2 = 0.72 \text{ J} \quad (3.449)$$

όταν $x = 12 \text{ cm}$. Άρα το σώμα πράγματι επιστρέφει πίσω πριν φτάσει τη θέση $x = 15 \text{ cm}$, αφού το σύστημα για $x = 12 \text{ cm}$ έχει δυναμική ενέργεια που ισούται με τη συνολική μηχανική του ενέργεια.

Παράδειγμα 3.50:

Ένα σώμα σε απλή αρμονική ταλάντωση περιγράφει τη θέση του ως

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.450)$$

σε σχέση με τη θέση ισορροπίας του. Αν $\phi = \pi/5$, τότε πόσο ποσοστό της συνολικής ενέργειας του ταλαντωτή βρίσκεται αποθηκευμένο ως ελαστική δυναμική ενέργεια του, όταν $t = 0$;

Λύση:

Όταν $\phi = \pi/5$ και $t = 0$, τότε

$$x(0) = A \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \quad (3.451)$$

Η συνολική ενέργεια του ταλαντωτή θα είναι

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} k A^2 \quad (3.452)$$

για κάθε χρονική στιγμή. Η ελαστική δυναμική ενέργεια τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι

$$U(t = 0) = \frac{1}{2} k x(0)^2 \quad (3.453)$$

Ο λόγος των δυο είναι

$$\frac{U(0)}{E_{\text{tot}}} = \frac{\frac{1}{2} k x(0)^2}{\frac{1}{2} k A^2} = \frac{\frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\pi/5)}{\frac{1}{2} k A^2} = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \quad (3.454)$$

οπότε

$$U(0) = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) E_{tot} = 0.6545 E_{tot} \quad (3.455)$$

άρα το ποσοστό της συνολικής ενέργειας του ταλαντωτή που βρίσκεται αποθηκευμένο ως ελαστική δυναμική ενέργεια τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι 65.45%.

Παράδειγμα 3.51:

Ένα σώμα μάζας 10 γραμμαρίων εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος 2.0 mm, μέγιστη επιτάχυνση $8.0 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2$, και άγνωστη αρχική φάση ϕ .

Βρείτε

- (α') την περίοδο της κίνησης, T
- (β') τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος, u_{max}
- (γ') τη συνολική μηχανική ενέργεια του ταλαντωτή
- (δ') το μέτρο της δύναμης ελατηρίου επάνω στο σώμα όταν αυτό βρίσκεται στη θέση μέγιστης μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας, και στη θέση μισής μέγιστης μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας

Λύση:

- (α') Για να βρούμε την περίοδο χρειαζόμαστε κάποια συχνότητα. Από τη σχέση της μέγιστης επιτάχυνσης, έχουμε

$$a_{max} = \omega^2 A = 8.0 \cdot 10^3 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a_{max}}{A}} = 2000 \text{ rad/s} \quad (3.456)$$

Άρα

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 3.1 \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad (3.457)$$

- (β') Η μέγιστη ταχύτητα είναι

$$u_{max} = \omega A = 4.0 \text{ m/s} \quad (3.458)$$

- (γ') Η συνολική ενέργεια είναι

$$E_{mech} = \frac{1}{2} k A^2 \quad (3.459)$$

αλλά δε γνωρίζουμε το k , τη σταθερά του ελατηρίου. Όμως ξέρουμε ότι

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = \omega^2 m = 4 \cdot 10^4 \text{ N/m} \quad (3.460)$$

Οπότε

$$E_{mech} = \frac{1}{2} k A^2 = 0.08 \text{ J} \quad (3.461)$$

- (δ') Η δύναμη δίνεται από τη γνωστή σχέση $F_s = -kx(t)$. Στη μέγιστη μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας, η δύναμη θα είναι (κατά μέτρο)

$$F_s = kx \Big|_{x=A} = (4.0 \cdot 10^4)(2.0 \cdot 10^{-3}) = 80 \text{ N} \quad (3.462)$$

ενώ στη μισή μέγιστη μετατόπιση θα είναι

$$F_s = kx \Big|_{x=A/2} = (4.0 \cdot 10^4)(1.0 \cdot 10^{-3}) = 40 \text{ N} \quad (3.463)$$

Παράδειγμα 3.52:

Ένα εγκάρσιο κύμα σε ένα σχοινί περιγράφεται από τη σχέση

$$y(x, t) = 0.0075 \cos(\pi(40x + 250t)) \quad (3.464)$$

με όλα τα μεγέθη στην παραπάνω σχέση να έχουν μετρηθεί στο Διεθνές Σύστημα (θέσεις και πλάτος σε m, κυματαριθμός σε rad/m, συχνότητα σε rad/s, χρόνος σε s).

(α') Βρείτε το πλάτος, την περίοδο, τη συχνότητα, το μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

(β') Το κύμα ταξιδεύει προς τη θετική πλευρά του άξονα x' ή προς την αρνητική; Εξηγήστε.

(γ') Η μάζα ανά μονάδα μήκους του σχοινιού είναι $\mu = 0.05 \text{ kg/m}$. Βρείτε την τάση του, T .

(δ') Βρείτε την μέση ισχύ, P , του κύματος.

Λύση:

(α') Από την εξίσωση του κύματος έχουμε

$$A = 0.0075 \text{ m} \quad (3.465)$$

$$T = \frac{1}{\frac{\omega}{2\pi}} = \frac{1}{\frac{250\pi}{2\pi}} = 0.008 \text{ s} \quad (3.466)$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.008} = 125 \text{ Hz} \quad (3.467)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{40\pi} = 0.05 \text{ m} \quad (3.468)$$

$$u = \lambda f = 0.05 \cdot 125 = 6.25 \text{ m/s} \quad (3.469)$$

(β') Προς την αρνητική (αριστερά), γιατί είναι της μορφής $A \sin(kx + \omega t)$.

(γ') Γνωρίζουμε ότι

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow u^2 = \frac{T}{\mu} \Rightarrow T = u^2 \mu = (6.25)^2 \cdot 0.05 = 1.95 \text{ N} \quad (3.470)$$

(δ') Η μέση ισχύς, P , του κύματος είναι

$$P = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 u = 5.42 \text{ W} \quad (3.471)$$

Παράδειγμα 3.53:

Ένα ημιτονοειδές κύμα συχνότητας 500 Hz ταξιδεύει με ταχύτητα $u = 350 \text{ m/s}$.

(α') Πόσο μακριά βρίσκονται δυο σημεία του κύματος που διαφέρουν κατά $\pi/3$ στη φάση;

(β') Πόση είναι η διαφορά φάσης μεταξύ δυο μετατοπίσεων ενός σημείου του κύματος, όταν αυτές διαφέρουν χρονικά κατά 0.001 s;

Λύση:

Ένα ημιτονοειδές κύμα δίνεται από τη σχέση

$$y(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi) \quad (3.472)$$

Για $f = 500 \text{ Hz}$, $\omega = 2\pi f = 1000\pi \text{ rad/s}$ και από τη σχέση $u = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{u}{f} = \frac{350}{500} = 0.7 \text{ m}$ και άρα $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.7} = \frac{20\pi}{7} \text{ rad/m}$. Επίσης, η περίοδος του κύματος θα είναι $T = \frac{1}{f} = 0.002 \text{ sec}$. Οπότε

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{20\pi}{7}x \pm 1000\pi t + \phi\right) \quad (3.473)$$

Έστω ότι το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά, δηλ.

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{20\pi}{7}x - 1000\pi t + \phi\right) \quad (3.474)$$

- (α') Τα σημεία του κύματος που απέχουν ένα μήκος κύματος, έχουν διαφορά φάσης 2π . Άρα τα σημεία που έχουν διαφορά φάσης $\pi/3$ θα έχουν μήκος κύματος $\lambda/6 = 0.1167$ m. Εναλλακτικά, για δυο στοιχεία του κύματος, x_1, x_2 , θα πρέπει

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \frac{\pi}{3} \quad (3.475)$$

$$\frac{20\pi}{7}x_2 - \omega t + \phi - \frac{20\pi}{7}x_1 + \omega t - \phi = \frac{\pi}{3} \quad (3.476)$$

$$\frac{20\pi}{7}(x_2 - x_1) = \frac{\pi}{3} \quad (3.477)$$

$$\Delta x = \frac{7}{60} = 0.1167 \text{ m} \quad (3.478)$$

- (β') Ξέρουμε ότι ένα σημείο του κύματος εκτελεί Απλή Αρμονική Κίνηση με το ίδιο πλάτος A και συχνότητα ω , αλλά με διαφορετική φάση. Σε χρόνο μιας περιόδου $T = 0.002$ s, η διαφορά φάσης μεταξύ δυο μετατοπίσεων θα είναι 2π . Σε χρόνο $t = 0.001$ s, που αποτελεί το μισό της περιόδου, η διαφορά φάσης μεταξύ των δυο μετατοπίσεων θα είναι π rad. Εναλλακτικά, αν θέσουμε $x = 0$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, και $t_2 - t_1 = 0.001$ ο δοσμένος χρόνος, τότε

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = -1000\pi(t_2 - t_1) = -1000\pi \cdot 0.001 = -\pi \text{ rad} \quad (3.479)$$

που πρακτικά δηλώνει ότι η διαφορά φάσης ισούται με π .

Παράδειγμα 3.54:

Ένα ημιτονοειδές κύμα σε χορδή περιγράφεται από την εξίσωση

$$y(t) = 0.15 \sin(0.8x - 50t) \quad (3.480)$$

με x, y σε μέτρα και t σε δευτερόλεπτα. Η πυκνότητα μάζας της χορδής είναι $\rho = 12$ gr/m.

- (α') Βρείτε τη μέγιστη εγκάρσια επιτάχυνση ενός σημείου της χορδής.
 (β') Προσδιορίστε τη μέγιστη εγκάρσια δύναμη σε ένα τμήμα της χορδής μήκους 1 cm.
 (γ') Προσδιορίστε την τάση του σχοινιού και συγκρίνετε με τη μέγιστη εγκάρσια δύναμη επαναφοράς του προηγούμενου ερωτήματος.

Λύση:

Συγκρίνοντας τη δεδομένη σχέση με τη γενική εξίσωση κύματος, έχουμε ότι $k = 0.8$ rad/m, $\omega = 50$ rad/s, $A = 0.15$ m.

- (α') Έχουμε

$$a = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -0.15 \cdot (-50)^2 \cdot \sin(0.8x - 50t) \quad (3.481)$$

άρα $a_{\max} = 0.15 \cdot 50^2 = 375$ m/s².

- (β') Για το τμήμα του ενός εκατοστού με μέγιστη δύναμη να ασκείται πάνω του,

$$\Sigma F = ma = 0.045 \text{ N} \quad (3.482)$$

- (γ') Για να βρούμε την τάση του νήματος, υπολογίζουμε πρώτα την ταχύτητα του κύματος

$$u = \lambda f = \frac{\omega}{k} = 62.5 \text{ m/s} \quad (3.483)$$

Οπότε

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = \mu u^2 = 46.9 \text{ N} \quad (3.484)$$

Οι δυο δυνάμεις έχουν λόγο περίπου 10^3 , δηλ. η μια είναι 1000 φορές μεγαλύτερη από την άλλη!

Παράδειγμα 3.55:

Ένα ηχητικό κύμα της μορφής

$$s(x, t) = s_{\max} \cos(kx - \omega t + \phi) \quad (3.485)$$

ταξιδεύει με ταχύτητα 343 m/s σε αέριο μέσα σε μακρύ οριζόντιο σωλήνα. Σε κάποια χρονική στιγμή, ένα μόριο αερίου A στη θέση $x = 2 \text{ m}$ λαμβάνει τη μέγιστη μετατόπιση (θετική) από τη θέση ισορροπίας του, που ισούται με $6 \cdot 10^{-9} \text{ m}$, ενώ ένα μόριο αερίου B στη θέση $x = 2.07 \text{ m}$ μετατοπίζεται κατά $2 \cdot 10^{-9}$ από τη θέση ισορροπίας του. Όλα τα μόρια μεταξύ των A και B έχουν ενδιάμεσες μετατοπίσεις από τη θέση ισορροπίας τους. Πόση είναι η συχνότητα του κύματος;

Λύση:

Έστω ότι η χρονική στιγμή που αναφέρει το πρόβλημα είναι η $t = 0$. Τότε, για το στοιχείο A, θα έχουμε

$$s(x_A, 0) = s_{\max} \cos(kx_A + \phi) \quad (3.486)$$

$$s(2, 0) = 6 \cdot 10^{-9} \cos(2k + \phi) = 6 \cdot 10^{-9} \quad (3.487)$$

ενώ για το στοιχείο B θα είναι

$$s(x_B, 0) = s_{\max} \cos(kx_B + \phi) \quad (3.488)$$

$$s(2.07, 0) = 6 \cdot 10^{-9} \cos(2.07k + \phi) = 2 \cdot 10^{-9} \quad (3.489)$$

Για να βρούμε τη συχνότητα, δεδομένης της ταχύτητας διάδοσης, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$u = \lambda f \quad (3.490)$$

άρα χρειαζόμαστε το μήκος κύματος λ . Από την πρώτη σχέση παίρνουμε ότι

$$\cos(2k + \phi) = 1 \iff 2k + \phi = 0 \iff \phi = -2k \quad (3.491)$$

και αντικαθιστώντας στη δεύτερη

$$3 \cos(2.07k + \phi) = 1 \iff \cos(2.07k + \phi) = \frac{1}{3} \iff 2.07k + \phi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 1.231 \quad (3.492)$$

και άρα

$$2.07k - 2k = 1.231 \iff 0.07k = 1.231 \iff k = 17.585 \quad (3.493)$$

και από τη σχέση

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \iff \lambda = \frac{2\pi}{k} = 0.357 \text{ m} \quad (3.494)$$

Τέλος, η εξίσωση (3.490) μας δίνει

$$f = \frac{u}{\lambda} = \frac{343}{0.357} = 960.78 \text{ Hz} \quad (3.495)$$

Παράδειγμα 3.56:

Ένα εγκάρσιο ημιτονοειδές κύμα κινείται κατά μήκος νήματος στη θετική κατεύθυνση του άξονα x με ταχύτητα 80 m/s. Για $t = 0$, το απειροστά μικρό τμήμα του νήματος στη θέση $x = 0$ έχει εγκάρσια μετατόπιση 4.0 εκατοστών από τη θέση ισορροπίας του και δεν κινείται. Η μέγιστη εγκάρσια ταχύτητα του ίδιου τμήματος είναι 16 m/s.

- (α') Ποιά η συχνότητα f του κύματος;
 (β') Ποιό το μήκος κύματος λ ;
 (γ') Γράψτε την κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το κύμα.

Λύση:

- (α') Γνωρίζουμε ότι το απειροστά μικρό τμήμα νήματος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και γνωρίζουμε ότι η μέγιστη ταχύτητά του δίνεται από τη σχέση

$$u_{\max} = \omega A \quad (3.496)$$

$$\omega = \frac{16}{0.04} = 400 \text{ rad/s} \quad (3.497)$$

Οπότε

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 64 \text{ Hz} \quad (3.498)$$

- (β') Από τη σχέση $u = \lambda f$, παίρνουμε

$$\lambda = \frac{u}{f} = \frac{80}{64} = 1.26 \text{ m}. \quad (3.499)$$

- (γ') Για την κυματοσυνάρτηση $y(x, t)$ μπορούμε να γράψουμε

$$y(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi) \quad (3.500)$$

Το πλάτος είναι $A = 0.04 \text{ m}$ από εκφώνηση. Ο κυματαριθμός k δίνεται ως

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \approx 5.0 \text{ rad/m} \quad (3.501)$$

και γνωρίζουμε από το (α) ερώτημα ότι $\omega = 400 \text{ rad/s}$. Άρα

$$y(x, t) = 0.04 \sin(5x - 400t + \phi) \quad (3.502)$$

με το πρόσημο – να οφείλεται στη διάδοση προς τα δεξιά (όπως αναφέρει η εκφώνηση). Η αρχική φάση ϕ μπορεί να βρεθεί αν αξιοποιήσουμε το απειροστά μικρό τμήμα νήματος στη θέση $x = 0$, που έχει εγκάρσια μετατόπιση $y(0, 0) = 0.04 \text{ m}$ όταν $t = 0$. Οπότε

$$y(0, 0) = 0.04 \sin(\phi) = 0.04 \iff \sin(\phi) = 1 \implies \phi = \frac{\pi}{2} \quad (3.503)$$

Οπότε συνολικά

$$y(x, t) = 0.04 \sin\left(5x - 400t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.504)$$

$$= 0.04 \cos(5x - 400t) \quad (3.505)$$

Παράδειγμα 3.57:

Η εξίσωση ενός εγκάρσιου κύματος που ταξιδεύει σε μακρύ νήμα δίνεται από την κυματοσυνάρτηση

$$y(x, t) = 6.0 \sin(0.02\pi x + 4.0\pi t) \quad (3.506)$$

με y, x σε εκατοστά και t σε δευτερόλεπτα. Βρείτε

- (α') το πλάτος της κυματοσυνάρτησης
- (β') το μήκος κύματος
- (γ') τη συχνότητα του κύματος
- (δ') την ταχύτητα του κύματος
- (ε') τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος
- (ς') τη μέγιστη εγκάρσια ταχύτητα ενός σωματιδίου του νήματος
- (ζ') πόση είναι η εγκάρσια μετατόπιση για το σημείο $x = 3.5$ cm του νήματος, όταν $t = 0.26$ s.

Λύση:

(α') Από την κυματοσυνάρτηση, το πλάτος είναι $A = 6.0$ cm.

(β') Από τον κυματαριθμό k , έχουμε

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \implies \lambda = 1 \text{ m} \quad (3.507)$$

(γ') Η συχνότητα είναι $\omega = 4.0\pi$ rad/s, οπότε

$$f = \omega/(2\pi) = 2.0 \text{ Hz} \quad (3.508)$$

(δ') Η ταχύτητα του κύματος είναι

$$u = \lambda f = 2 \text{ m/s} \quad (3.509)$$

(ε') Το κύμα διαδίδεται στο x -άξονα προς τα αριστερά, αφού το πρόσημο της συχνότητας ω είναι θετικό στην εξίσωση της κυματοσυνάρτησης.

(ς') Αφού κάθε τμήμα του νήματος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ξέρουμε ότι η μέγιστη ταχύτητα του θα είναι

$$u_{\max} = \omega A = 0.75 \text{ m/s}. \quad (3.510)$$

(ζ') Για το ζητούμενο σημείο τη δεδομένη χρονική στιγμή, θα έχουμε

$$y(3.5, 0.26) = 6.0 \sin(0.02\pi(3.5) + 4.0\pi(0.26)) = 6.0 \sin(1.11\pi) = -2.02 \text{ cm} \quad (3.511)$$

Παράδειγμα 3.58:

Ένας τρόπος να μετρήσουμε την αύξηση θερμοκρασίας του πλανήτη, είναι να μετρήσουμε τη μέση θερμοκρασία του ωκεανού. Ο τρόπος με τον οποίο παίρνουν μετρήσεις οι ερευνητές είναι καταμετρώντας το χρόνο που χρειάζεται να διαδοθούν οι ηχητικοί παλμοί σε μεγάλες υποβρύχιες αποστάσεις. Σε βάθος 1000 m, όπου η θερμοκρασία της θάλασσας είναι σταθερή γύρω στους 4°C , η μέση ταχύτητα του ήχου είναι 1480 m/s. Από εργαστηριακές μετρήσεις γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του ήχου αυξάνεται κατά 4 m/s για κάθε μοναδιαία (1.0°C) αύξηση της θερμοκρασίας. Σε ένα πείραμα, όπου παρήχθησαν ήχοι στην Καλιφόρνια και έγιναν αντιληπτοί στο Νότιο Ειρηνικό, τα ηχητικά κύματα διένυσαν 8000 km.

- (α') Σε πόσα δευτερόλεπτα T ταξίδεψαν τα κύματα τη συγκεκριμένη απόσταση;
- (β') Αν η ελάχιστη χρονική μεταβολή που μπορεί να εντοπιστεί με ακρίβεια είναι $\Delta t = 1.0$ s, ποιά η ταχύτητα των κυμάτων σε χρόνο $T' = T + \Delta t$ δευτερόλεπτα;
- (γ') Ποιά είναι η μικρότερη μεταβολή της μέσης θερμοκρασίας ΔC που μπορεί να μετρηθεί, λόγω αυτού του περιορισμού στη χρονική ακρίβεια;

Λύση:

(α') Από την Κινητική έχουμε

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} \iff \Delta t = t - 0 = T = \frac{\Delta x}{u} = \frac{8000000}{1480} = 5405.40 \text{ s} \quad (3.512)$$

(β') Επίσης, ξανά από τους νόμους της Κίνησης

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8000000}{5406.40} = 1479.72 \text{ s} \quad (3.513)$$

(γ') Από τα παραπάνω, θα είναι

$$u = 1480 + 4\Delta C \implies |\Delta C| = \frac{|u - 1480|}{4} = \frac{|1479.72 - 1480|}{4} = 0.07^\circ \text{ C} \quad (3.514)$$

Παράδειγμα 3.59:

Ένα πρωινό Σαββάτου, οπότε και θέλετε να ξεκουραστείτε από τις διαλέξεις Φυσικής της εβδομάδας που πέρασε, ο γείτονάς σας αποφασίζει να περάσει καλώδιο ethernet από το σαλόνι στην κουζίνα του, μέσω του τοίχου, για να έχει internet και στην κουζίνα. Ο τοίχος είναι αρκετά παχύς και το τρυπάνι του δυσκολεύεται, κάνοντας αρκετό θόρυβο, πράγμα που σας εκνευρίζει και δυσκολεύει την προσπάθειά σας να κοιμηθείτε ξανά. Σαν να μην έφτανε αυτό, ο άλλος γείτονάς σας, στην άλλη πλευρά του ορόφου, θέλει να στερεώσει την smart TV του στον τοίχο του σαλονιού του. Επειδή γενικά η πολυκατοικία είναι γερή κατασκευή, το τρυπάνι και του δεύτερου γείτονα προστίθεται στο συνολικό θόρυβο. Θεωρήστε ότι τα δυο τρυπάνια δουλεύουν σε περίπου ίση απόσταση από το κρεβάτι σας, και η ένταση των ηχητικών κυμάτων των δυο εργαλείων είναι περίπου ίδια. Πάνω στα νεύρα σας, γιατί δε σας αφήνουν να κοιμηθείτε, παίρνετε τηλεφώνο το φίλο σας και του λέτε “Δεν μπορώ να κλείσω μάτι, η ηχοστάθμη με τα δυο τρυπάνια είναι διπλάσια αυτής με το ένα τρυπάνι!” Ο φίλος σας, που μόλις τελείωσε το διάβασμα της ύλης της Κυματικής, κρυφογελάει με αυτή σας την κουβέντα. Γιατί;

Λύση:

Η φράση “Δεν μπορώ να κλείσω μάτι, η ηχοστάθμη με τα δυο τρυπάνια είναι διπλάσια αυτής με το ένα τρυπάνι!” υπονοεί ότι η ηχοστάθμη μιας έντασης I_1 διπλασιάζεται όταν διπλασιάζεται η ένταση $2I_1$, δηλ. ότι αν

$$\beta_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} \quad (3.515)$$

η ηχοστάθμη του ενός τρυπανιού, τότε ισχύει

$$\beta_2 = 10 \log \frac{2I_1}{I_0} = 2\beta_1 \quad (3.516)$$

Ας δούμε αν αυτό ισχύει.

$$\beta_2 = 10 \log \frac{2I_1}{I_0} = 2\beta_1 = 2 \cdot 10 \log \frac{I_1}{I_0} \quad (3.517)$$

$$10 \log \frac{2I_1}{I_0} = 10 \log \frac{I_1^2}{I_0^2} \quad (3.518)$$

$$\frac{2I_1}{I_0} = \frac{I_1^2}{I_0^2} \quad (3.519)$$

$$2 = \frac{I_1}{I_0} \quad (3.520)$$

$$I_1 = 2I_0 \quad (3.521)$$

Παρατηρούμε ότι ο διπλασιασμός της ηχοστάθμης όταν διπλασιάζεται η ένταση συμβαίνει μόνον όταν $I_1 = 2I_0$. Προφανώς, η ένταση των τρυπανιών είναι πολύ μεγαλύτερη από την ελάχιστη αντιληπτή ένταση I_0 , άρα η φράση είναι όντως λάθος στη συγκεκριμένη περίπτωση.

Παράδειγμα 3.60:

Δείξτε ότι η διαφορά μεταξύ των επιπέδων decibel β_1, β_2 ενός ήχου συνδέεται με το λόγο των αποστάσεων r_1, r_2 από την ηχητική πηγή με τη σχέση

$$\beta_2 - \beta_1 = 20 \log \frac{r_1}{r_2} \quad (3.522)$$

Λύση:

Είναι

$$\beta_2 = 10 \log \frac{I_2}{I_0}, \quad \beta_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} \quad (3.523)$$

οπότε

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1} \quad (3.524)$$

Επίσης,

$$I_2 = \frac{P}{4\pi r_2^2}, \quad I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2} \quad (3.525)$$

που δίνει

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \quad (3.526)$$

Άρα

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = 20 \log \frac{r_1}{r_2} \quad (3.527)$$

Παράδειγμα 3.61:

Αν μια ωτασπίδα μειώνει το επίπεδο της ηχοστάθμης κατά 20 dB, πόσος είναι ο λόγος της τελικής προς την αρχική ένταση (χωρίς ωτασπίδα);

Λύση:

Έστω i ο δείκτης που συμβολίζει την κατάσταση χωρίς ωτασπίδα, και f ο δείκτης που συμβολίζει την κατάσταση με ωτασπίδα. Θα είναι

$$\beta_f = 10 \log_{10} \frac{I_f}{I_0} \quad (3.528)$$

$$\beta_i = 10 \log_{10} \frac{I_i}{I_0} \quad (3.529)$$

και

$$\beta_f - \beta_i = -20 = 10 \left(10 \log_{10} \frac{I_f}{I_0} - \log_{10} \frac{I_i}{I_0} \right) \quad (3.530)$$

$$-2 = \log_{10} \frac{I_f}{I_i} \quad (3.531)$$

$$\frac{I_f}{I_i} = 10^{-2} \quad (3.532)$$

Παράδειγμα 3.62:

Ο υπολογιστής σας “κράσαρε” πετώντας μπλέ οθόνη, την ώρα που ακούγατε σε υψηλή ένταση την αγαπημένη σας μουσική. Λόγω του κρασαρίσματος, ο ήχος “κόλλησε” σε ένα ημίτονο των 1000 Hz, κάνοντας την ακρόαση αφάνταστα ενοχλητική. Θεωρήστε ότι τα ηχητικά κύματα διαδίδονται σε σφαιρικά κυματικά μέτωπα.

(α') Δείξτε ότι ο λόγος δυο ηχητικών εντάσεων I_1, I_2 της ίδιας πηγής ισούται με τον αντίστροφο λόγο των αποστάσεων, r_1, r_2 , από την πηγή, στο τετράγωνο, δηλ. δείξτε ότι

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

(β') Όταν ο Η/Υ σας “κολλάει”, βρίσκεστε σε απόσταση 1 m από αυτόν. Με μεγάλη δυσκολία, μετράτε τον ήχο και βρίσκετε ότι έχει ηχοστάθμη 95 dB. Λόγω της ενοχλησής σας, αρχίζετε να τρέχετε μακριά. Σε πόση απόσταση πρέπει να φτάσετε για να ακούτε τον ενοχλητικό ήχο σε μια υποφερτή ηχοστάθμη των 55 dB;

Λύση:

(α') Γνωρίζουμε ότι τα ηχητικά κύματα διαδίδονται σε σφαιρικά κυματικά μέτωπα και η εντάσεις τους δίνονται από τη σχέση

$$I = \frac{P_{avg}}{4\pi r^2} \quad (3.533)$$

με r την ακτίνα του κυματικού μετώπου, δηλ. την απόσταση της πηγής από το δέκτη. Για δυο ηχητικά κύματα εντάσεων I_1, I_2 που έρχονται από την ίδια πηγή έχουμε

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{P_{avg}}{4\pi r_1^2}}{\frac{P_{avg}}{4\pi r_2^2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (3.534)$$

(β') Ο ήχος με ηχοστάθμη 95 dB έχει ένταση

$$\beta_1 = 10 \log_{10} \frac{I_1}{I_0} \iff 9.5 = \log_{10} \frac{I_1}{10^{-12}} \iff 10^{9.5} = \frac{I_1}{10^{-12}} \iff I_1 = 10^{-2.5} \text{ W/m}^2 \quad (3.535)$$

Όμοια, για τον ήχο με ηχοστάθμη 55 dB θα έχει ένταση

$$\beta_2 = 10 \log_{10} \frac{I_2}{I_0} \iff 5.5 = \log_{10} \frac{I_2}{10^{-12}} \iff 10^{5.5} = \frac{I_2}{10^{-12}} \iff I_2 = 10^{-6.5} \text{ W/m}^2 \quad (3.536)$$

Άρα από το προηγούμενο ερώτημα

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (3.537)$$

$$\frac{10^{-2.5}}{10^{-6.5}} = \frac{r_2^2}{1^2} \quad (3.538)$$

$$r_2^2 = 10^4 \quad (3.539)$$

$$r_2 = 10^2 \text{ m} \quad (3.540)$$

Άρα πρέπει να απομακρυνθούμε 100 (!) μέτρα από τον υπολογιστή μας. Καλύτερα να του κάνουμε επανεκκίνηση! ☺

Παράδειγμα 3.63:

Μια ισοτροπική πηγή ήχου εκπέμπει ηχητικό κύμα έντασης 0.008 W/m^2 σε απόσταση 10 m από αυτή.

(α') Πόση είναι η ένταση του ήχου στα 5.0 μέτρα από την πηγή;

(β') Πόση είναι η ηχοστάθμη στα 10 μέτρα από την πηγή;

Λύση:

Η ένταση του ήχου που εκπέμπει ισοτροπικά μια πηγή σε απόσταση r δίνεται ως

$$I = \frac{P_{avg}}{4\pi r^2} \quad (3.541)$$

με P_{avg} τη μέση ισχύ της πηγής.

(α') Αν $r_1 = 10 \text{ m}$ και $r_2 = 5 \text{ m}$, τότε

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{P}{4\pi r_1^2}}{\frac{P}{4\pi r_2^2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (3.542)$$

η οποία δίνει

$$\frac{0.008}{I_2} = \frac{25}{100} \iff I_2 = 0.008 \cdot 4 = 0.032 \text{ W/m}^2 \quad (3.543)$$

(β') Η ηχοστάθμη δίνεται από τη σχέση

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I_1}{I_0} \quad (3.544)$$

με I_0 την ένταση αναφοράς στα 1000 Hz , που είναι 10^{-12} W/m^2 . Άρα

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{8 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}} = 10 \log_{10}(8 \cdot 10^9) \quad (3.545)$$

$$= 10 \log_{10} 8 + 10 \log_{10} 10^9 = 90 + 10 \log_{10} 8 \quad (3.546)$$

$$= 9.03 + 90 = 99.03 \text{ dB} \quad (3.547)$$

Παράδειγμα 3.64:

Ο ήχος ανιχνεύεται από το αυτί μας αν ένα ηχητικό κύμα προκαλέσει ταλάντωση στο τύμπανο του αυτιού μας. Μια τυπική διάμετρος του τυμπάνου είναι περίπου ίση με 8.4 χιλιοστά.

(α') Πόση ενέργεια παραδίδεται στο τύμπανο κάθε φορά που κάποιος ψιθυρίζει (ηχοστάθμη 20 dB) ένα μυστικό στο αυτί σας για χρόνο ενός δευτερολέπτου; Χρησιμοποιήστε ένταση αναφοράς $I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

(β') Για να καταλάβετε πόσο ευαίσθητο είναι το αυτί σας σε πολύ μικρές ποσότητες ενέργειας, υπολογίστε πόσο γρήγορα ένα κουνούπι μάζας $m = 2.0 \text{ mg}$ πρέπει να πετάξει για να έχει ένα τέτοιο ποσό κινητικής ενέργειας.

Λύση:

Αφού η διάμετρος του τυμπάνου είναι 8.4 χιλιοστά, η ακτίνα του θα είναι $r = 4.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

(α') Η ενέργεια σχετίζεται με τη μέση ισχύ ως

$$P = \frac{E}{\Delta t} \quad (3.548)$$

άρα

$$E = P\Delta t \quad (3.549)$$

Για την ισχύ ηχητικού κύματος ξέρουμε ότι

$$I = \frac{P}{A} \Rightarrow P = IA \quad (3.550)$$

με A την επιφάνεια κάθετα στην οποία προσπίπτει το ηχητικό κύμα. Αφού μιλάμε για ένα τύμπανο, η επιφάνεια του τυμπάνου έχει εμβαδό $A = \pi r^2 = 17.64\pi \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$. Άρα

$$E = IA\Delta t \quad (3.551)$$

Γνωρίζουμε την ηχοστάθμη β του ηχητικού κύματος, άρα πρέπει να βρούμε την ένταση. Είναι

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad (3.552)$$

$$\frac{\beta}{10} = \log_{10} \frac{I}{10^{-12}} \quad (3.553)$$

$$I = 10^{\beta/10} 10^{-12} \quad (3.554)$$

$$= 10^2 10^{-12} \quad (3.555)$$

$$= 10^{-10} \text{ W/m}^2 \quad (3.556)$$

Οπότε τελικά

$$E = IA\Delta t = 10^{-10} 17.64\pi \cdot 10^{-6} = 17.64\pi \cdot 10^{-16} = 55.41 \cdot 10^{-16} = 5.54 \cdot 10^{-15} \text{ J} \quad (3.557)$$

(β') Το κουνούπι μάζας $m = 2.0 \text{ mg}$, δηλ. $m = 2 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$ θα έχει ταχύτητα

$$K = 5.54 \cdot 10^{-15} = \frac{1}{2} mu^2 \Rightarrow u^2 = \frac{2 \cdot 5.54 \cdot 10^{-15}}{2 \cdot 10^{-6}} = 5.54 \cdot 10^{-9} \Rightarrow u = 7.44 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} \quad (3.558)$$

Παράδειγμα 3.65:

Δυο ηχητικές πηγές A και B όπως στο Σχήμα 3.59 είναι συνδεδεμένες με τον ίδιο ενισχυτή και εκπέμπουν ημιτονοειδή κύματα σε φάση. Το ηχείο B βρίσκεται σε απόσταση 2.0 m στα δεξιά του ηχείου A. Η συχνότητα του ήχου που παράγεται από τα ηχεία είναι ίση με 206 Hz. Θεωρήστε σημείο P ανάμεσα στα ηχεία και κατά μήκος νοτιής γραμμής που τα συνδέει, σε απόσταση x από το ηχείο A. Θεωρήστε ότι $u_{\text{sound}} = 344 \text{ m/s}$. Και τα δυο ηχεία εκπέμπουν ηχητικά κύματα που ταξιδεύουν από τα ηχεία προς το σημείο P. Για ποιές τιμές του x έχουμε

(α') καταστρεπτική συμβολή στο P

(β') ενισχυτική συμβολή στο P

Οι παραπάνω δυο περιπτώσεις σχεδόν ποτέ δε συμβαίνουν στην πράξη. Γιατί όχι; (σκεφτείτε ελεύθερα)

Λύση:

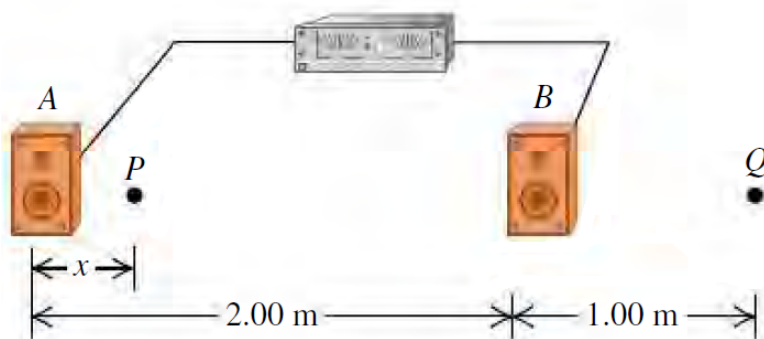
Το μήκος κύματος του ηχητικού κύματος είναι

$$u = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{u}{f} = \frac{344}{206} = 1.67 \text{ m} \quad (3.559)$$

Αν θεωρήσουμε ότι στο ηχείο (A) βρίσκεται το σημείο αναφοράς μας, (0), η θέση x θα είναι θετική, ως θέση δεξιά του σημείου αναφοράς. Η διαφορά διαδρομής των δυο ηχητικών κυμάτων είναι

$$\Delta r = |r_2 - r_1| = |2 - x - x| = |2 - 2x| \quad (3.560)$$

Αν $2 - 2x > 0 \Rightarrow \Delta r = |2 - 2x| = 2 - 2x$:



Σχήμα 3.59: Σχήμα Παραδείγματος 3.65.

(α') Για καταστρεπτική συμβολή στο σημείο P θα πρέπει

$$\Delta r = (2m + 1)\frac{\lambda}{2} \iff 2 - 2x = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.561)$$

Για $m = 0$

$$2 - 2x = \frac{\lambda}{2} \iff 4 - 4x = \lambda \iff x = \frac{4 - \lambda}{4} = 0.582 \text{ m} \quad (3.562)$$

Για $m = 1$

$$2 - 2x = 3\frac{\lambda}{2} \iff 4 - 4x = 3\lambda \iff x = \frac{4 - 3\lambda}{4} = -0.2525 \text{ m} \quad (3.563)$$

που ως αρνητική τιμή, απορρίπτεται. Το ίδιο συμβαίνει για $m > 1$. Άρα τελικά πιθανές τιμές για το x είναι

- $x = 0.582 \text{ m}$

(β') Για ενισχυτική συμβολή στο σημείο P θα πρέπει

$$\Delta r = m\lambda \iff 2 - 2x = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.564)$$

Για $m = 0$

$$2 - 2x = 0 \iff x = 1.00 \text{ m} \quad (3.565)$$

Για $m = 1$

$$2 - 2x = \lambda \iff x = \frac{2 - \lambda}{2} = 0.165 \text{ m} \quad (3.566)$$

Για $m = 2$

$$2 - 2x = 2\lambda \iff x = \frac{2 - 2\lambda}{2} = -0.67 \text{ m} \quad (3.567)$$

που είναι αρνητική, άρα απορρίπτεται. Το ίδιο συμβαίνει για $m > 2$. Άρα τελικά πιθανές τιμές για το x είναι

- $x = 0.165 \text{ m}$
- $x = 1.00 \text{ m}$

Αν $2 - 2x < 0 \implies \Delta r = |2 - 2x| = 2x - 2$:

(α') Για καταστρεπτική συμβολή στο σημείο P θα πρέπει

$$\Delta r = (2m + 1)\frac{\lambda}{2} \iff 2x - 2 = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.568)$$

Για $m = 0$

$$2x - 2 = \frac{\lambda}{2} \iff 4x - 4 = \lambda \iff x = \frac{4 + \lambda}{4} = 1.4175 \text{ m} \quad (3.569)$$

Για $m = 1$

$$2x - 2 = 3\frac{\lambda}{2} \iff 4x - 4 = 3\lambda \iff x = \frac{4 + 3\lambda}{4} = 2.2525 \text{ m} \quad (3.570)$$

που είναι εκτός της απόστασης των δυο ηχείων. Το ίδιο συμβαίνει για $m > 1$. Άρα πιθανές τιμές για το x είναι

- $x = 1.4175 \text{ m}$

(β') Για ενισχυτική συμβολή στο σημείο P θα πρέπει

$$\Delta r = m\lambda \iff 2x - 2 = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.571)$$

Για $m = 0$

$$2x - 2 = 0 \iff x = 1.00 \text{ m} \quad (3.572)$$

Για $m = 1$

$$2x - 2 = \lambda \iff x = \frac{2 + \lambda}{2} = 1.835 \text{ m} \quad (3.573)$$

Για $m = 2$

$$2x - 2 = 2\lambda \iff x = \frac{2 + 2\lambda}{2} = 2.67 \text{ m} \quad (3.574)$$

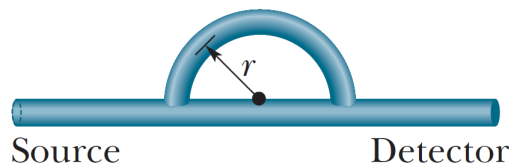
που είναι εκτός της απόστασης των δυο ηχείων. Το ίδιο συμβαίνει για $m > 2$. Άρα πιθανές τιμές για το x είναι

- $x = 1.835 \text{ m}$
- $x = 1.00 \text{ m}$

Οι παραπάνω περιπτώσεις σχεδόν ποτέ δε συμβαίνουν στην πράξη γιατί τα ηχεία δεν είναι στην πραγματικότητα σημειακές πηγές και σε κάθε σημείο δε συμβάλλουν μόνο τα δυο κύματα από τα ηχεία (Α) και (Β) αλλά και ανακλάσεις τους από το περιβάλλον.

Παράδειγμα 3.66:

Στο Σχήμα 3.60, ένα ηχητικό κύμα με μήκος κύματος 0.4 m ταξιδεύει από μια πηγή (source) διαμέσου ενός σωλήνα προς έναν ανιχνευτή (detector), και ακολουθεί δυο διαδρομές: ένα κομμάτι του ταξιδεύει ευθύγραμμα ενώ ένα άλλο περνά από έναν ημικυκλικό σωλήνα, και “επανενώνεται” με το πρώτο κομμάτι. Στο σημείο επανένωσης, τα δυο κύματα συμβάλλουν. Ποιά είναι η μικρότερη ακτίνα r του ημικυκλικού σωλήνα που επιτρέπει να ακουστεί ένα ελάχιστο έντασης ήχου στο σημείο επανένωσης;



Σχήμα 3.60: Σχήμα Παραδείγματος 3.66.

Λύση:

Το ηχητικό κύμα ακολουθεί διαφορετικές διαδρομές και συμβάλλει στο σημείο επανένωσης των δυο κυμάτων. Για να ακουστεί ένα ελάχιστο έντασης ήχου στο συγκεκριμένο σημείο, θα πρέπει τα κύματα να συμβάλλουν καταστρεπτικά, καθώς μόνο σε καταστρεπτική συμβολή έχουμε το ελάχιστο της έντασης του ήχου. Άρα

$$\Delta r = |r_2 - r_1| = \pi r - 2r = (\pi - 2)r \quad (3.575)$$

με r_2 την ημικυκλική διαδρομή και r_1 την ευθεία διαδρομή μήκους μιας διαμέτρου του ημικυκλίου. Αφού το ηχητικό κύμα που δημιουργείται από τη συμβολή των επιμέρους κυμάτων προέρχεται από δυο όμοια κύματα, η διαφορά αρχικής φάσης στο σημείο συμβολής θα είναι ίση με μηδέν, δηλ.

$$\Delta\phi = 0 \quad (3.576)$$

Από τις εξισώσεις καταστρεπτικής συμβολής έχουμε ότι

$$\Delta r = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (3.577)$$

δηλ.

$$(\pi - 2)r = (2m + 1)\frac{\lambda}{2} \iff r = \frac{(2m + 1)\lambda}{2(\pi - 2)} \quad (3.578)$$

και για $m = 0$ θα είναι

$$r = \frac{\lambda}{2(\pi - 2)} = \frac{0.2}{\pi - 2} = 0.175 \text{ m} \quad (3.579)$$

Παράδειγμα 3.67:

Ένας ακίνητος ανιχνευτής κίνησης στέλνει ηχητικά κύματα συχνότητας 0.15 MHz προς όλες τις κατευθύνσεις. Ένα φορτηγό πλησιάζει τον ανιχνευτή με ταχύτητα 45 m/s. Θεωρήστε ότι η ταχύτητα του ήχου ισούται με 343 m/s.

(α') Ποιά είναι η συχνότητα που λαμβάνει ο οδηγός του φορτηγού;

(β') Ποιά είναι η συχνότητα που λαμβάνει πίσω ο ανιχνευτής κίνησης, αν υποθέσετε ότι τώρα το φορτηγό ανακλά τα κύματα που λαμβάνει, δηλ. αποτελεί κινούμενη πηγή ήχου;

Λύση:

(α') Ο οδηγός του φορτηγού θεωρείται κινούμενος παρατηρητής που πλησιάζει την πηγή και ο ανιχνευτής κίνησης είναι ακίνητη πηγή ηχητικών κυμάτων. Από την εξίσωση Doppler έχουμε

$$f_{driver} = \frac{u + u_0}{u} f = \frac{45 + 343}{343} 0.15 = 0.169 \text{ MHz} \quad (3.580)$$

(β') Το φορτηγό ανακλά τα κύματα που λαμβάνει, άρα μπορούμε να το θεωρήσουμε ως μια δευτερεύουσα πηγή, κινούμενη προς ακίνητο παρατηρητή, με συχνότητα εκπομπής τη συχνότητα που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Άρα

$$f_{motion-detector} = \frac{u}{u - u_s} f_{driver} = \frac{343}{343 - 45} \frac{343 + 45}{343} 0.15 = \frac{388}{298} 0.15 = 0.1953 \text{ MHz} \quad (3.581)$$

Παράδειγμα 3.68:

Μια νυχτερίδα για να εντοπίσει έντομα εκπέμπει ένα υπερηχητικό “τερέτισμα” και μετά ακούει την ηχώ των εντόμων. Θεωρούμε ότι το τερέτισμα της νυχτερίδας έχει συχνότητα 25 kHz. Πόσο γρήγορα και προς ποιά κατεύθυνση πρέπει να πετάξει η νυχτερίδα για να είμαστε εμείς σε θέση να ακούσουμε έστω και αμυδρά το τερέτισμα στα 20 kHz;

Λύση:

Προφανώς εμείς είμαστε ακίνητοι και η νυχτερίδα πρέπει να πετάξει μακριά από εμάς, ώστε η συχνότητα που θα ακούσουμε να είναι μικρότερη από την παραγόμενη. Άρα από τη σχέση του Doppler

$$f' = \frac{u}{u + u_{bat}} f \iff \frac{20}{25} = \frac{u}{u + u_{bat}} \iff \frac{4}{5} = \frac{343}{343 + u_{bat}} \implies u_{bat} = 85.75 \text{ m/s} \quad (3.582)$$

Παράδειγμα 3.69:

Μια σφυρίχτρα συχνότητας 540 Hz κινείται σε κύκλο ακτίνας 0.6 m με γωνιακή ταχύτητα 15 rad/s. Ποιά είναι η χαμηλότερη και η υψηλότερη συχνότητα που ακούει ένας ακίνητος ακροατής ο οποίος βρίσκεται αρκετά μακριά από το κέντρο του κύκλου;

Λύση:

Λόγω της απόστασης του ακροατή από τον κύκλο που διαγράφει η σφυρίχτρα, θεωρούμε ότι η κίνηση της σφυρίχτρας είναι ευθύγραμμη, μπρος-πίσω επάνω στη διάμετρο του κύκλου που ενώνει τον ακροατή με το κέντρο του κύκλου. Η γραμμική ταχύτητα της σφυρίχτρας ισούται με

$$u = \omega r \Rightarrow u = 0.6 \cdot 15 = 9 \text{ m/s} \quad (3.583)$$

Όταν η σφυρίχτρα πλησιάζει τον ακροατή, έχουμε

$$f' = \frac{u}{u - u_s} f = \frac{343}{343 - 9} 540 = 555 \text{ Hz} \quad (3.584)$$

Όταν απομακρύνεται από αυτόν,

$$f' = \frac{u}{u + u_s} f = \frac{343}{343 + 9} 540 = 526 \text{ Hz} \quad (3.585)$$

Παράδειγμα 3.70:

Η σειρήνα ενός περιπολικού εκπέμπει ηχητικό κύμα συχνότητας 1200 Hz όταν βρίσκεται σε ακινησία. Το περιπολικό είναι κρυμμένο στην εθνική οδό με τη σειρήνα σε λειτουργία και το ηχητικό κύμα ανακλάται σε κινούμενο επί της οδού αυτοκίνητο και επιστρέφει στο περιπολικό με συχνότητα 1250 Hz. Το περιπολικό βρίσκεται στην άκρη του δρόμου και έτσι το αυτοκίνητο έρχεται από μακριά και στη συνέχεια προσπερνά το περιπολικό.

- (α') Πόσο γρήγορα κινούνται το αυτοκίνητο; Θεωρήστε ότι το αυτοκίνητο λειτουργεί ως δεύτερη “πηγή”, όταν το κύμα ανακλάται και επιστρέφει στο περιπολικό.
 (β') Ποιά συχνότητα θα λάμβανε το περιπολικό αν κινούνταν κι αυτό με ταχύτητα 20 m/s προς ερχόμενο το αυτοκίνητο;

Λύση:

- (α') Θεωρούμε ότι το αυτοκίνητο λειτουργεί ως δεύτερη “πηγή”, όταν το κύμα ανακλάται και επιστρέφει στο περιπολικό. Άρα, αν υποθέσουμε ότι πλησιάζει το περιπολικό, λαμβάνει μια διαφορετική συχνότητα από τη συχνότητα εκπομπής, και αυτή θα είναι

$$f_{car} = \frac{u_{sound} + u_o}{u_{sound}} f_{police} \quad (3.586)$$

Λειτουργώντας ως πηγή, εκπέμπει την παραπάνω συχνότητα πίσω στο περιπολικό. Το περιπολικό λοιπόν, ως ακίνητος παρατηρητής θα λαμβάνει συχνότητα κινούμενης προς αυτόν πηγής

$$f' = \frac{u_{sound}}{u_{sound} - u_o} f_{car} \quad (3.587)$$

$$= \frac{u_{sound}}{u_{sound} - u_o} \frac{u_{sound} + u_o}{u_{sound}} f_{police} \quad (3.588)$$

$$= \frac{u_{sound} + u_o}{u_{sound} - u_o} f_{police} \quad (3.589)$$

$$1250 = \frac{344 + u_o}{344 - u_o} 1200 \quad (3.590)$$

και άρα

$$u_o = 7.02 \text{ m/s} \quad (3.591)$$

- (β') Η παραπάνω σχέση τροποποιείται για κινούμερο παρατηρητή προς κινούμενη προς αυτόν πηγή. Άρα η συχνότητα που φτάνει στο αυτοκίνητο θα είναι

$$f_{car} = \frac{u_{sound} + u_o}{u_{sound} - u_{police}} f_{police} = \frac{344 - 7.02}{344 - 20} 1200 = 1300 \text{ Hz} \quad (3.592)$$

και αυτή εκπέμπεται πίσω στο περιπολικό. Άρα το περιπολικό, ως κινούμενος παρατηρητής προς κινούμενη προς αυτόν πηγή, θα λαμβάνει συχνότητα

$$f' = \frac{u_{sound} + u_{police}}{u_{sound} - u_o} f_{police} = \frac{344 + 20}{344 - 7.02} 1300 = 1404 \text{ Hz} \quad (3.593)$$

Παράδειγμα 3.71:

Ένα υποβρύχιο Α ταξιδεύει οριζόντια μέσα στον ωκεανό με ταχύτητα 11 m/s. Εκπέμπει ευθεία μπροστά ένα ηχητικό σήμα συχνότητας $f = 5.27 \cdot 10^3 \text{ Hz}$. Το υποβρύχιο Β βρίσκεται μπροστά από το Α και ταξιδεύει με 3 m/s προς την ίδια κατεύθυνση με το Α.

(α') Ποιά είναι η ταχύτητα του ήχου σε αυτήν την περίπτωση;

(β') Βρείτε τη συχνότητα που λαμβάνει ένα μέλος του πληρώματος στο Β.

Λύση:

- (α') Η ταχύτητα του ήχου πρέπει να είναι αυτή του μέσου διάδοσης, δηλ. του θαλασσινού νερού, $u = 1533 \text{ m/s}$.
- (β') Τα δυο υποβρύχια πλησιάζουν το ένα το άλλο και κινούνται και τα δυο, αλλά προς την ίδια κατεύθυνση. Από τη σχέση του Doppler έχουμε

$$f' = \frac{u + u_B}{u - u_A} f = 5298 \text{ Hz} \quad (3.594)$$

με u_B , u_A οι ταχύτητες των αντίστοιχων υποβρυχίων.

Παράδειγμα 3.72:

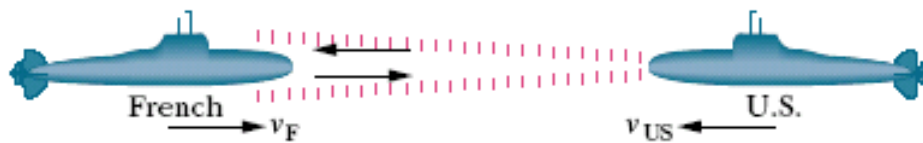
Στο Σχήμα 3.61, ένα Γαλλικό κι ένα Αμερικανικό υποβρύχιο (μη επανδρωμένα και τα δυο) κινούνται το ένα προς το άλλο κατά τη διάρκεια εμπλοκής σε ακίνητα νερά στο Βόρειο Ατλαντικό. Το Γαλλικό υποβρύχιο κινείται με ταχύτητα $u_F = 50.0 \text{ km/h}$ και το αμερικανικό με ταχύτητα $u_{US} = 70.0 \text{ km/h}$. Το Γαλλικό υποβρύχιο στέλνει ένα σήμα σόναρ (sonar) (ηχητικό κύμα στο νερό) συχνότητας $f = 10^3 \text{ Hz}$. Τα κύματα σόναρ διαδίδονται με ταχύτητα $u_{sonar} = 5470 \text{ km/h}$.

(α') Πόση είναι η συχνότητα που ανιχνεύεται από το Αμερικανικό υποβρύχιο;

(β') Πόση είναι η συχνότητα που ανιχνεύεται από το Γαλλικό υποβρύχιο στο σήμα που επιστρέφει αφού ανακλασθεί από το Αμερικανικό υποβρύχιο;

(γ') Το ένα από τα δυο υποβρύχια ρίχνει μια τορπίλη και βυθίζει το άλλο υποβρύχιο. Το υποβρύχιο που χτυπήθηκε βυθίζεται στον πυθμένα της θάλασσας όπου και εκρήγνυται. Η έκρηξη μεταδίδει έναν παλμό προς την επιφάνεια του νερού κι έναν προς τον πυθμένα. Ο παλμός που ταξίδεψε προς την επιφάνεια, ανακλάστηκε και επέστρεψε πίσω στον πυθμένα. Αυτή η διαδρομή του παλμού συνέβη αρκετές φορές. Κάθε φορά που χτυπούσε στον πυθμένα, ένας σειсмоγράφος κατέγραφε τη δόνηση του εδάφους λόγω του παλμού. Οι διαδοχικές καταγραφές των παλμών στο σειсмоγράφο απείχαν χρονικά $\Delta t = 0.25 \text{ s}$. Σε πόσο βάθος D βυθίστηκε το υποβρύχιο; Θεωρήστε ότι οι παλμοί αυτοί διαδίδονται στο θαλασσινό νερό με ταχύτητα $u_p = 1500 \text{ m/s}$.

Λύση:



Σχήμα 3.61: Υποβρύχια σε αντιπαράθεση.

- (α') Έχουμε κινούμενη πηγή προς κινούμενο παρατηρητή (και οι δυο πλησιάζουν μεταξύ τους). Η συχνότητα που ανιχνεύει το αμερικανικό υποβρύχιο είναι

$$f_{us} = \frac{u + u_o}{u - u_s} f = \frac{5470 + 70}{5470 - 50} 1000 = \frac{5540}{5420} 1000 = 1022 \text{ Hz} \quad (3.595)$$

Μπορούμε να αφήσουμε τις ταχύτητες ως km/h χωρίς να κάνουμε μετατροπές, αφού ο λόγος ταχυτήτων είναι καθαρός αριθμός, αρκεί τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής να εκφράζονται σε km/h.

- (β') Η συχνότητα που ανιχνεύει το γαλλικό υποβρύχιο είναι

$$f_{fr} = \frac{u + u_o}{u - u_s} f_{us} = \frac{5470 + 50}{5470 - 70} 1022 = 1044 \text{ Hz} \quad (3.596)$$

- (γ') Η διαδρομή του παλμού από τη στιγμή που ξεκινά για την επιφάνεια ως ότου χτυπήσει στον πυθμένα και καταγραφεί από το σειсмоγράφο είναι $2D$. Τη διαδρομή αυτή τη διανύει σε $\Delta t = 0.25 \text{ s}$. Αφού η ταχύτητα διάδοσης είναι $u = 1500 \text{ m/s}$, τότε

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2D}{\Delta t} \Rightarrow 2D = u\Delta t = 1500 \cdot 0.25 \Rightarrow D = 187.5 \text{ m} \quad (3.597)$$

Άρα το υποβρύχιο βυθίστηκε στα 187.5 m.

Παράδειγμα 3.73:

- (α') Έχετε κλείσει εισιτήριο για τη συναυλία του Μαραβέγια στο Ηράκλειο. Λόγω κίνησης φτάνετε καθυστερημένος/η στο χώρο αλλά η φίλη σας έχει κρατήσει χώρο για σας. Τρέχετε γρήγορα στη θέση σας, πλησιάζοντας ευθύγραμμα το συναυλιακό χώρο, και παρατηρείτε ότι ένας ήχος από την κιθάρα του μπασιστα, συχνότητας 262 Hz, σας ακούγεται 1 Hz υψηλότερα. Πόσο γρήγορα τρέχετε;
- (β') Ένας ομιλητής που μιλά κανονικά παράγει ομιλία ηχοστάθμης 40 dB σε απόσταση 0.9 m. Αν η ελάχιστη ηχοστάθμη για την καθαρή ακρόαση του ομιλητή είναι 20 dB, δείξτε ότι η απόσταση που μπορεί κανείς να ακούσει καθαρά τον ομιλητή είναι 9 m.

Λύση:

- (α') Προφανώς η πηγή είναι ακίνητη, άρα $u_s = 0$, ενώ εμείς είμαστε ο κινούμενος παρατηρητής με ταχύτητα u_o . Από το φαινόμενο Doppler και θεωρώντας ότι η ταχύτητα του ήχου είναι $u = 343 \text{ m/s}$, θα έχουμε

$$f' = \frac{u + u_o}{u} f \Rightarrow u_o = u \left(\frac{f'}{f} - 1 \right) \Rightarrow u_o = 343 \left(\frac{263}{262} - 1 \right) \approx 1.31 \text{ m/s} \quad (3.598)$$

- (β') Επειδή τα ηχητικά κύματα διαδίδονται σε σφαιρικά κυματικά μέτωπα, η ένταση ενός κύματος σε απόσταση r από την πηγή εκπομπής δίνεται ως

$$I = \frac{P_{avg}}{4\pi r^2} \quad (3.599)$$

Έστω δυο κύματα εντάσεων I_1, I_2 σε αποστάσεις r_1, r_2 που αντιστοιχούν σε ηχοστάθμη 40 και 20 dB αντίστοιχα. Θα έχουμε

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (3.600)$$

Από την ηχοστάθμη του πρώτου κύματος, είναι

$$\beta_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} \Rightarrow \frac{I_1}{I_0} = 10^{\frac{\beta_1}{10}} \quad (3.601)$$

ενώ για το δεύτερο κύμα

$$\beta_2 = 10 \log \frac{I_2}{I_0} \Rightarrow \frac{I_2}{I_0} = 10^{\frac{\beta_2}{10}} \quad (3.602)$$

Ο λόγος I_1/I_2 δίνει

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}} = \frac{r_2^2}{0.9^2} \Rightarrow r_2^2 = 10^2 0.9^2 = 81 \Rightarrow r_2 = 9 \text{ m} \quad (3.603)$$

Παράδειγμα 3.74:

Λύστε ξανά το παρακάτω πρόβλημα που είδατε στο τμήμα της θεωρίας σχετικά με το φαινόμενο Doppler αλλά χρησιμοποιώντας ενεργειακά θεωρήματα αυτή τη φορά: Το ξυπνητήρι σας παράγει έναν ήχο συχνότητας 600 Hz. Ένα πρωί “κολλάει” και δεν μπορείτε να το κλείσετε. Στην απελπισία σας, το πετάτε (“αφήνετε”) από το παράθυρο. Αν υποθέσετε ότι η ταχύτητα του ήχου είναι 343 m/s, και ότι βρίσκεστε στον 4ο όροφο (15 μέτρα από το έδαφος), τι συχνότητα θα ακούσετε λίγο πριν γίνει κομματάκια;

Λύση:

Θεωρούμε ως σύστημα το ξυπνητήρι και τη Γη. Το σύστημα είναι πολυμελές και απομονωμένο, καθώς μόνο η δύναμη του βάρους ασκείται πάνω στο ξυπνητήρι παράγοντας έργο, και αυτή η δύναμη είναι συντηρητική. Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το έδαφος και θετική φορά της κίνησης προς τα επάνω. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ του σημείο ρίψης Α και του σημείου επαφής με το έδαφος Β.

$$\Delta E_{mech}^{A \rightarrow B} = 0 \quad (3.604)$$

$$\Delta K_{A \rightarrow B} + \Delta U_{gA \rightarrow B} = 0 \quad (3.605)$$

$$K_B - K_A + U_{gB} - U_{gA} = 0 \quad (3.606)$$

$$\frac{1}{2} m u_B^2 - 0 - mgh = 0 \quad (3.607)$$

$$u_B^2 = 2gh \quad (3.608)$$

$$u_B = -\sqrt{2gh} \quad (3.609)$$

με το πρόσημο να δηλώνει ότι το διάνυσμα της ταχύτητας έχει αντίθετη φορά της θετικής, δηλ. “δείχνει” προς τα κάτω (Γη). Αντικαθιστώντας, το μέτρο της ταχύτητας στη θέση Β είναι $u_B = 17.14 \text{ m/s}$. Επειδή το ξυπνητήρι (πηγή ήχου) απομακρύνεται από εμάς, θα ισχύει

$$f' = \frac{u}{u + u_s} f = \frac{343}{343 + 17.14} 600 = 571 \text{ Hz} \quad (3.610)$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως σύστημα το ξυπνητήρι, και ως μη απομονωμένο (αφού του ασκείται η εξωτερική δύναμη του βάρους), μπορούμε να εφαρμόσουμε το ΘΜΚΕΕ από τη θέση ρίψης Α ως τη θέση επαφής με το έδαφος Β. Θα είναι

$$\Delta K_{A \rightarrow B} = W_{F_g} \quad (3.611)$$

$$K_B - K_A = \vec{F}_g \cdot \Delta \vec{y} \quad (3.612)$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 - 0 = -F_g \vec{j} \cdot (0 - h)\vec{j} \quad (3.613)$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 = -mg(-h) \quad (3.614)$$

$$u_B^2 = 2gh \quad (3.615)$$

$$u_B = -\sqrt{2gh} \quad (3.616)$$

η οποία είναι ίδια απάντηση με αυτή που μας έδωσε η ΑΔΜΕ, κ η υπόλοιπη λύση είναι ίδια.

Παράδειγμα 3.75:

Ένας εκκεντρικός γιατρός πιστεύει ότι μπορεί να θεραπεύσει την φαλάκρα ζεσταίνοντας το κρανίο με ηχητικά κύματα. Οι ασθενείς του κάθονται κάτω από μεγάφωνα, όπου τα κεφάλια τους βομβαρδίζονται με 93 dB καταπραϋντικών ηχητικών κυμάτων των 800 Hz. Έστω ότι μοντελοποιούμε το φαλακρό κεφάλι ως ένα ημισφαίριο με διάμετρο 16 cm. Αν τα 10 J ηχητικής ενέργεια θεωρούνται κατάλληλη δΟΣΟΛΟΓΙΑ, πόσα λεπτά πρέπει να διαρκεί μια επίσκεψη στον γιατρό;

Λύση:

Σύμφωνα με την εκφώνηση θεωρούμε το φαλακρό κεφάλι ως ημισφαίριο με ακτίνα $R = 0.08$ m. Αυτό συνεπάγεται ότι το εμβαδόν της επιφάνειας είναι

$$A = 2\pi R^2 = 0.0402 \text{ m}^2 \quad (3.617)$$

Γνωρίζουμε ότι $\beta = 93$ dB και $\Delta E = 0.10$ J. Επίσης γνωρίζουμε ότι $I = I_0 \cdot 10^{\beta/10}$, $P = IA$ όπως και $P = \Delta E/\Delta t$. Επομένως

$$\Delta t = \frac{\Delta E}{P} = \frac{\Delta E}{IA} = \frac{0.1}{(10^{-12} \cdot 10^{9.3})(0.0402)} = 1250 \text{ s} = 20.83 \approx 21 \text{ min} \quad (3.618)$$

Παράδειγμα 3.76:

Η χορδή μιας κιθάρας ταλαντώνεται στη θεμελιώδη ιδιομορφή της, και έχει δεσμούς στα δυο άκρα της. Το ταλαντούμενο μέρος της χορδής είναι μήκους 0.386 m. Η μέγιστη εγκάρσια επιτάχυνση ενός σημείου στο μέσο του ταλαντούμενου μέρους είναι ίση με $8.4 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2$ και η μέγιστη εγκάρσια ταχύτητα είναι ίση με 3.8 m/s.

- (α') Ποιό είναι το πλάτος του στάσιμου κύματος που λαμβάνει χώρα πάνω στη χορδή;
- (β') Ποιά είναι η ταχύτητα των εγκάρσιων κυμάτων που ταξιδεύουν στη χορδή;

Λύση:

(α') Έχουμε την εξίσωση του στάσιμου κύματος

$$y(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (3.619)$$

Γνωρίζουμε ότι το μήκος της χορδής είναι $L = 0.386$ m και άρα το μήκος κύματος της θεμελιώδους ιδιομορφής είναι $\lambda = 2L$, ενώ το μέσο της χορδής θα είναι $x = L/2$. Ψάχνουμε το πλάτος A . Μπορούμε να το βρούμε από την Α.Α.Τ που εκτελεί κάθε στοιχείο της χορδής. Για το στοιχείο στο μέσο της χορδής, θα έχουμε

$$y\left(\frac{L}{2}, t\right) = A \sin(kx) \cos(\omega t) \Big|_{x=L/2} = A \sin\left(\frac{2\pi L}{2L} \frac{L}{2}\right) \cos(\omega t) = A \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\omega t) = A \cos(\omega t) \quad (3.620)$$

Η μέγιστη ταχύτητα για την Α.Α.Τ που εκτελεί το στοιχείο στο μέσο της χορδής είναι

$$u_{max} = \omega A \quad (3.621)$$

και η μέγιστη επιτάχυνση

$$a_{max} = \omega^2 A \quad (3.622)$$

Άρα

$$\frac{u_{max}}{a_{max}} = \frac{1}{\omega} \implies \omega = \frac{a_{max}}{u_{max}} = 2.21 \cdot 10^3 \text{ rad/s} \quad (3.623)$$

Οπότε

$$A = \frac{u_{max}}{\omega} = 1.72 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (3.624)$$

(β') Η ταχύτητα του κύματος θα είναι

$$u = \lambda f = \lambda \frac{\omega}{2\pi} \quad (3.625)$$

Για το μήκος κύματος, το μήκος κύματος της θεμελιώδους ιδιομορφής βρήκαμε ότι είναι $\lambda = 2L$.

Οπότε

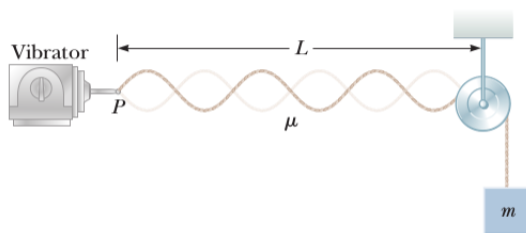
$$u = \frac{2L\omega}{2\pi} = \frac{L\omega}{\pi} = 271.54 \text{ m/s} \quad (3.626)$$

Παράδειγμα 3.77:

Στην παρακάτω διάταξη του Σχήματος 3.62, ένα σώμα κρέμεται από σχοινί πυκνότητας μάζας $\mu = 0.002 \text{ kg/m}$ που περνάει από μια (αβαρή και χωρίς τριβές) τροχαλία. Το σχοινί συνδέεται σε ένα δονητή σταθερής συχνότητας f και το μήκος του σχοινοῦ ανάμεσα στο δονητή και την τροχαλία είναι $L = 2 \text{ m}$. Όταν η μάζα m του σώματος είναι 16 ή 25 kg παρατηρούνται στάσιμα κύματα στο σχοινί. Αν όμως η μάζα του είναι μεταξύ 16 και 25 kg, τότε δεν παρατηρούνται στάσιμα κύματα.

(α') Ποιά είναι η συχνότητα του δονητή; (σημειώστε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τάση στο σχοινί τόσο μικρότερος θα είναι ο αριθμός των κόμβων του στάσιμου κύματος)

(β') Ποιά είναι η μεγαλύτερη τιμή μάζας του σώματος για την οποία θα παρατηρηθούν στάσιμα κύματα;



Σχήμα 3.62: Δονητής με νήμα και σώμα.

Λύση:

(α') Έστω ότι n είναι ο αριθμός των κόμβων του στάσιμου κύματος που προκύπτει από το σώμα μάζας 25 kg. Οπότε, $n + 1$ είναι ο αριθμός των κόμβων για το στάσιμο κύμα που προκύπτει από το σώμα μάζας 16 kg. Για στάσιμα κύματα, είναι $\lambda = \frac{2L}{n}$ και η συχνότητα είναι $f = \frac{u}{\lambda}$. Η συχνότητα δεν αλλάζει όταν αλλάζουν οι μάζες. Άρα

$$f = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T_n}{\mu}} \quad (3.627)$$

$$f = \frac{n+1}{2L} \sqrt{\frac{T_{n+1}}{\mu}} \quad (3.628)$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις

$$\frac{n+1}{n} = \frac{5}{4} \quad (3.629)$$

Άρα, $4n + 4 = 5n \implies n = 4$, και άρα $f = 350$ Hz.

(β') Για την τάση $T_n = mg$, έχουμε

$$f = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T_n}{\mu}} \implies m = \frac{4L^2 f^2 \mu}{n^2 g} \quad (3.630)$$

Για $n = 1$, είναι

$$m = 400 \text{ kg} \quad (3.631)$$



4. Ηλεκτρισμός

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τα φαινόμενα που σχετίζονται με τον ηλεκτρισμό. Ο ηλεκτρισμός - μαζί με το μαγνητισμό - είναι κεφαλαιώδους σημασίας για τον τεχνολογικό πλούτο που βλέπουμε γύρω μας, ξεκινώντας από τα θεμέλια του: οι νόμοι του ηλεκτρομαγνητισμού έθεσαν πριν από λίγες δεκάδες χρόνια τις βάσεις για την έκρηξη της τεχνολογίας. Από τα smartphones, τις τηλεοράσεις, τους ηλεκτροκινητήρες, τους υπολογιστές, και τα ηχοσυστήματα, μέχρι τους επιταχυντές σωματιδίων, τους δορυφόρους, τα διαστημικά τηλεσκόπια, και τους πυραύλους, οι νόμοι αυτοί είναι πάντα παρόντες.

Ο ηλεκτρισμός «συνοδεύει» τον άνθρωπο από την αρχαιότητα, πολύ πριν καταλάβουμε τι ακριβώς είναι. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι και οι Έλληνες γνώριζαν τα ηλεκτρικά ψάρια και τα ηλεκτρικά “χτυπήματά” τους, ενώ γύρω στο 600 π.Χ. ο Θαλής ο Μιλήσιος παρατήρησε ότι όταν τρίβεις ήλεκτρο (κεχριμπάρι¹) με γούνα, αυτό έλκει μικρά αντικείμενα, όπως φτερά ή άχυρα. Αυτή ήταν ουσιαστικά η πρώτη συστηματική παρατήρηση στατικού ηλεκτρισμού, και από τη λέξη ήλεκτρον γεννήθηκαν αργότερα οι Αγγλικοί όροι electric και electricity.

Παρόλα αυτά, για πολλούς αιώνες ο ηλεκτρισμός έμενε μια περιέργεια. Το 1600 ο Άγγλος William Gilbert ξεχωρίζει για πρώτη φορά καθαρά τον μαγνητισμό από τον στατικό ηλεκτρισμό και εισάγει τη λέξη electricus για τα φαινόμενα που σχετίζονται με το ήλεκτρο. Στον 18ο αιώνα, με τα πειράματα στα φορτία και τις δυνάμεις μεταξύ τους (Coulomb), αρχίζουμε να καταλαβαίνουμε ότι υπάρχουν δύο είδη φορτίου και ότι “όμοια απωθούνται, αντίθετα έλκονται”.

Η πραγματική “επανάσταση” όμως ξεκινά στα τέλη του 18ου και στις αρχές του 19ου αιώνα. Ο Volta κατασκευάζει την πρώτη μπαταρία γύρω στο 1800, παρέχοντας σταθερή πηγή ηλεκτρικού ρεύματος. Λίγο αργότερα, ο Ørsted και ο Ampère ανακαλύπτουν τη σχέση ρεύματος και μαγνητικού πεδίου, ο Faraday δείχνει πώς η μεταβολή μαγνητικού πεδίου παράγει ρεύμα (ηλεκτρομαγνητική επαγωγή), και ο Maxwell ενοποιεί όλα αυτά σε ένα συνεπές μαθηματικό πλαίσιο με τις εξισώσεις του – αποδεικνύοντας ότι το φως είναι ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Στο τέλος του 19ου αιώνα, με εφευρέτες όπως ο Edison, ο Tesla και ο Westinghouse, ο ηλεκτρισμός περνά από το εργαστήριο στο σπίτι και γίνεται η “ραχοκοκαλιά” του σύγχρονου πολιτισμού.

¹Η λέξη “ηλεκτρικός” προέρχεται από την αρχαία Ελληνική λέξη “ήλεκτρο”, που σημαίνει το κεχριμπάρι. Το κεχριμπάρι είναι απολιθωμένη ρητίνη, παράγωγο των κωνοφόρων δένδρων.

4.2 Στοιχεία της Ύλης

Η ύλη γύρω μας αποτελείται από άτομα. Κάθε άτομο έχει έναν πολύ μικρό, θετικά φορτισμένο πυρήνα (περιέχει πρωτόνια και ουδέτερα νετρόνια) και γύρω του κινούνται ηλεκτρόνια που έχουν αρνητικό φορτίο. Στα ουδέτερα άτομα, ο αριθμός πρωτονίων ισούται με τον αριθμό των ηλεκτρονίων, οπότε τα συνολικά φορτία “ισορροπούν” και το σώμα ονομάζεται ηλεκτρικά ουδέτερο. Σε ορισμένα υλικά, όπως τα μέταλλα, μερικά ηλεκτρόνια δεν είναι «δεμένα» σε ένα συγκεκριμένο άτομο, αλλά κινούνται σχετικά ελεύθερα μέσα στο υλικό. Αυτά ονομάζονται **ελεύθερα ηλεκτρόνια** και είναι υπεύθυνα για το έλλειμμα ή πλεόνασμα φορτίου στα μέταλλα

4.3 Ηλεκτρικές Δυνάμεις

Όλοι μας έχουμε “δει” ηλεκτρικές δυνάμεις γύρω μας. Αρκεί να τρίψουμε ένα μπαλόνι στα μαλλιά μας και θα δούμε ότι μπορεί να έλξει μικρά κομματάκια χαρτιού. Μια τέτοια συμπεριφορά της ύλης αναφέρεται ως **ηλεκτρική φόρτιση**. Κατά την τριβή, επιφανειακά ηλεκτρόνια μεταφέρονται από τα μαλλιά στο μπαλόνι και το μπαλόνι αποκτά έτσι αρνητικό φορτίο (πλεόνασμα ηλεκτρονίων), ενώ τα μαλλιά μένουν φορτισμένα θετικά. Όταν πλησιάσουμε το φορτισμένο μπαλόνι στα κομμάτια χαρτί (που ήταν αρχικά ουδέτερα), μετακινούνται ελάχιστα τα φορτία μέσα στο χαρτί, έτσι ώστε η πλευρά του χαρτιού που είναι προς το μπαλόνι να έλκεται από αυτό. Φυσικά, όσο περισσότερο τρίβουμε το μπαλόνι στα μαλλιά μας, τόσο μεγαλύτερη ποσότητα φορτισμένων σωματιδίων μεταφέρεται (μέχρι κάποιου ορίου βέβαια).

Η ηλεκτρική φόρτιση ενός σώματος δεν είναι τίποτε άλλο από πλεόνασμα ή έλλειμμα ηλεκτρονίων! Αν ένα σώμα χάσει ηλεκτρόνια, μένει με περισσότερα πρωτόνια, δηλ. φορτίζεται θετικά. Αντίθετα, αν κερδίσει ηλεκτρόνια, έχει περισσότερα αρνητικά φορτία, δηλ. φορτίζεται αρνητικά. Η μεταφορά φορτίων γίνεται κυρίως με δύο τρόπους:

- Μεταφορά ηλεκτρονίων : π.χ. με τριβή δύο υλικών (το ένα δίνει, το άλλο παίρνει ηλεκτρόνια) ή με επαφή ενός φορτισμένου σώματος με ένα ουδέτερο (τα ηλεκτρόνια «τρέχουν» από το ένα στο άλλο).
- Κίνηση ιόντων (φορτισμένων ατόμων ή μορίων) σε υγρά, όπου ολόκληρα φορτισμένα σωματίδια κινούνται και μεταφέρουν φορτίο.

Με απλά πειράματα οι επιστήμονες έδειξαν ότι υπάρχουν δυο είδη ηλεκτρικής φόρτισης: θετική και αρνητική. Σε ένα άτομο, τα ηλεκτρόνια έχουν αρνητική φόρτιση και τα πρωτόνια έχουν θετική φόρτιση, ενώ τα νετρόνια (το έτερο σωματίδιο του πυρήνα του ατόμου, μαζί με τα πρωτόνια) είναι ηλεκτρικά ουδέτερα. Πειραματικά επίσης αποδείχθηκαν οι εξής δυο κανόνες:

- Φορτία ίδιου προσήμου απωθούνται
- Φορτία αντίθετου προσήμου έλκονται

Η έλξη και η απώθηση γίνεται μέσω έγερσης **ηλεκτρικών δυνάμεων** επάνω στα φορτία.

Όταν σε ένα απομονωμένο σύστημα υπάρχει μεταφορά φορτίου, το συνολικό φορτίο του συστήματος διατηρείται: αυτή είναι η περίφημη **Αρχή Διατήρησης του Ηλεκτρικού Φορτίου**. Η μεταφορά φορτίου δημιουργεί απλώς πλεόνασμα φορτίου σε ένα σώμα και έλλειψη φορτίου στο άλλο. Ποιός είναι όμως ο φορέας των φορτίων; Φορέας φορτίου ονομάζεται ένα σωματίδιο που φέρει ηλεκτρικό φορτίο και μπορεί να κινηθεί ελεύθερα. Τέτοιοι φορείς φορτίου μπορεί να είναι ηλεκτρόνια ή ιόντα, μεταξύ άλλων. Πλέον γνωρίζουμε ότι στα μέταλλα τα ηλεκτρόνια είναι αυτά που μπορούν να μεταφέρουν το ηλεκτρικό φορτίο από ένα σώμα σε ένα άλλο, μεταφέροντας απλά τον εαυτό τους από το ένα στο άλλο σώμα, δημιουργώντας έτσι πλεόνασμα θετικού φορτίου στο σώμα που εγκατέλειψαν (θετική φόρτιση) ή πλεόνασμα αρνητικού φορτίου στο σώμα που μεταφέρθηκαν (αρνητική φόρτιση).

Το 1909, ο R. Milikan ανακάλυψε ότι το ηλεκτρικό φορτίο, που συμβολίζουμε συνήθως με το γράμμα q ή Q , απαντάται στη φύση σε ακέραια πολλαπλάσια ενός στοιχειώδους ηλεκτρικού φορτίου e :

$$q = Ne, \quad N \in \mathbb{Z} \quad (4.1)$$

Αυτή η παρατήρηση χαρακτηρίζει το ηλεκτρικό φορτίο ως **κβαντισμένο**. Το στοιχειώδες αυτό φορτίο φέρει και το ηλεκτρόνιο, με αρνητικό πρόσημο, $-e$, ενώ ένα πρωτόνιο φέρει θετικό φορτίο $+e$. Το μικρότερο φορτίο που έχει βρεθεί ελεύθερο στη φύση είναι ίσο με $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C, με τη μονάδα μέτρησης C να προέρχεται από το πρώτο γράμμα της λέξης Coulomb, προς τιμήν του Charles Coulomb, για τον οποίο θα μιλήσουμε πολύ σύντομα. Φυσικά, σε μακροσκοπική κλίμα οι ακέραιοι N είναι τόσο μεγάλοι, ώστε το φορτίο μπορεί να αντιμετωπιστεί με εξαιρετική ακρίβεια ως συνεχές μέγεθος, γι' αυτό και στα παραδείγματα που θα ακολουθούν εμφανίζονται “αυθαίρετες” τιμές σε Coulomb.

4.3.1 Κατηγορίες Υλικών

Τα υλικά γύρω μας κατηγοριοποιούνται σε τρεις (τουλάχιστον) κατηγορίες με βάση την ηλεκτρική συμπεριφορά τους:

- **Αγωγοί:** ονομάζονται τα υλικά μέσα στα οποία τα ηλεκτρικά φορτία (κυρίως ηλεκτρόνια) μπορούν να κινούνται σχετικά ελεύθερα. Τυπικά παραδείγματα είναι τα μέταλλα, όπως ο χαλκός, το αλουμίνιο, ο χρυσός κ.λπ. Σ' αυτά τα υλικά, τα εξωτερικά ηλεκτρόνια των ατόμων δεν είναι “δεμένα” σε ένα μόνο άτομο, αλλά σχηματίζουν ένα είδος “ηλεκτρονικού νέφους” που εκτείνεται σε όλο το υλικό. Έτσι, όταν εφαρμόζεται διαφορά δυναμικού (τάση), αυτά τα ηλεκτρόνια “σπρώχνονται” και δημιουργούν ηλεκτρικό ρεύμα. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των αγωγών είναι η αντίστασή τους: όσο πιο μικρή αντίσταση έχει ένα υλικό, τόσο καλύτερος αγωγός είναι. Όμως η αντίσταση ενός αγωγού αυξάνεται συνήθως με τη θερμοκρασία: όταν το μέταλλο ζεσταίνεται, τα άτομα του πάλλονται εντονότερα και δυσκολεύουν τη ροή των ηλεκτρονίων, αυξάνοντας τις συγκρούσεις και, άρα, την αντίσταση. Γι' αυτό σε πολλές εφαρμογές (π.χ. καλώδια μεταφοράς ενέργειας) προσπαθούμε να χρησιμοποιούμε υλικά με χαμηλή αντίσταση και να περιορίζουμε τις απώλειες σε θερμότητα.
- **Μονωτές:** ονομάζονται τα υλικά στα οποία τα ηλεκτρικά φορτία δεν μπορούν να κινηθούν εύκολα. Σε αυτά, τα ηλεκτρόνια είναι ισχυρά δεσμευμένα στα άτομα ή στους χημικούς δεσμούς, οπότε δεν υπάρχει “ελεύθερη” θάλασσα ηλεκτρονίων όπως στα μέταλλα. Παραδείγματα μονωτών είναι το γυαλί, το ξύλο (ξηρό), το πλαστικό, το καουτσούκ, ο αέρας κ.ά. Γι' αυτό χρησιμοποιούμε πλαστικό γύρω από μεταλλικούς αγωγούς στα καλώδια: το πλαστικό δεν αφήνει το ρεύμα να “ξεφύγει” και μας προστατεύει από ηλεκτροπληξία. Βέβαια, κανένας μονωτής δεν είναι τέλειος. Αν η τάση γίνει πολύ μεγάλη, μπορεί να προκληθεί διάσπαση του μονωτή (π.χ. ο αέρας ιονίζεται και δημιουργείται σπινθήρας ή κεραυνός). Επιπλέον, υπάρχουν υλικά ενδιάμεσα, οι ημιαγωγοί, όπως το πυρίτιο, που σε ορισμένες συνθήκες συμπεριφέρονται σαν μονωτές και σε άλλες σαν αγωγοί – πάνω σε αυτά στηρίζεται όλη η σύγχρονη ηλεκτρονική (τρανζίστορ, ολοκληρωμένα κυκλώματα κ.λπ.).
- **Ημιαγωγοί:** μια και τους αναφέραμε, οι ημιαγωγοί είναι υλικά που βρίσκονται “ανάμεσα” σε αγωγούς και μονωτές: σε κανονικές συνθήκες δεν είναι ιδιαίτερα καλοί αγωγοί, αλλά με τις σωστές παρεμβάσεις (θερμοκρασία, φως, προσθήκη προσμίξεων) η αγωγιμότητά τους μπορεί να αλλάξει δραματικά. Κλασικά παραδείγματα είναι το πυρίτιο (Si) και το γερμάνιο (Ge). Σε ατομικό επίπεδο, ο ημιαγωγός έχει μια ενεργειακή “ζώνη σθένους” και μια “ζώνη αγωγιμότητας”, χωρισμένες από ένα σχετικά μικρό ενεργειακό χάσμα. Αν δοθεί λίγη ενέργεια (π.χ. θερμική ή φωτονίων), κάποια ηλεκτρόνια “πηδούν” από τη ζώνη σθένους στη ζώνη αγωγιμότητας και έτσι το υλικό αρχίζει να άγει ρεύμα – όχι τόσο καλά όσο ένα μέταλλο, αλλά πολύ καλύτερα από έναν μονωτή. Το πραγματικά “μαγικό” με τους ημιαγωγούς έρχεται όταν τους “νοθεύουμε” (doping), δηλαδή όταν προσθέτουμε πολύ μικρές ποσότητες άλλων στοιχείων. Αν βάλουμε άτομα που δίνουν “έξτρα” ηλεκτρόνια (τύπου n), δημιουργούνται ελεύθεροι φορείς αρνητικού φορτίου. Αν βάλουμε άτομα που “λείπει” ένα ηλεκτρόνιο (τύπου p), δημιουργούνται “θετικοί” φορείς. Όταν ενώσουμε περιοχές τύπου p και n , σχηματίζεται η επαφή $p-n$, η βάση για διόδους, τρανζίστορ, LEDs, φωτοβολταϊκά κ.λπ. Πάνω σε τέτοιες δομές χτίζεται όλη η σύγχρονη ηλεκτρονική και υπολογιστική τεχνολογία: από τα πιο απλά κυκλώματα μέχρι τα ολοκληρωμένα κυκλώματα με δισεκατομμύρια τρανζίστορ μέσα σε ένα μόνο chip.

4.3.2 Ο Νόμος του Coulomb

Ο Charles Coulomb ανακάλυψε το μέτρο των ηλεκτρικών δυνάμεων ανάμεσα σε φορτισμένα σωματίδια. Από τα πειράματά του προέκυψε ότι:

Νόμος του Coulomb

Η ηλεκτρική δύναμη ανάμεσα σε δυο ακίνητα φορτισμένα σωματίδια q_1, q_2 (σημειακά – αμελητέων διαστάσεων) που απέχουν απόσταση r μεταξύ τους δίνεται από τη σχέση

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (4.2)$$

όπου k_e μια σταθερά που ονομάζεται *σταθερά του Coulomb*.

Ξανά πειραματικά, αποδείχθηκε ότι η ηλεκτρική δύναμη είναι **συντηρητική**. Ως δύναμη, η μονάδα μέτρησής της το Διεθνές Σύστημα είναι το Newton – N, όπως θα περιέμενε κανείς. Η σταθερά k_e έχει την τιμή

$$k_e = 8.987 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \quad (4.3)$$

και πολλές φορές τη χρησιμοποιούμε αριθμητικά στη μορφή

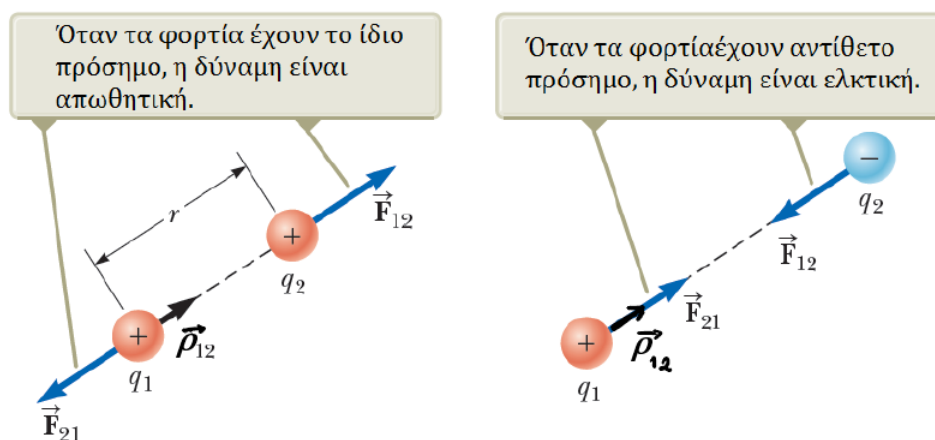
$$k_e = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \quad (4.4)$$

ενώ όταν η αριθμητική τιμή δεν είναι απαραίτητη, είναι βολικότερο να τη γράφουμε ως

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (4.5)$$

με $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ μια νέα σταθερά που ονομάζεται **διηλεκτρική σταθερά του κενού**, και η οποία μετράει το πώς “ανταποκρίνεται” το κενό σε ένα ηλεκτρικό πεδίο (το τι είναι, θα το μάθετε σύντομα!). Με άλλα λόγια, λέει πόσο “εύκολα” δημιουργούνται ηλεκτρικά πεδία στο κενό εξ αιτίας ηλεκτρικών φορτίων.

Κάθε δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος, όμως το μέτρο της ηλεκτρικής δύναμης σημειακών φορτίων που γνωρίσαμε δεν είναι γραμμένο ως τέτοιο. Για να γράψουμε τη διανυσματική του μορφή θα πρέπει να ορίσουμε ένα διάνυσμα μοναδιαίου μέτρου, που να ξεκινά από το ένα φορτίο και να καταλήγει σε ένα άλλο. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυο φορτία, όπως στο Σχήμα 4.1. Στο αριστερό τμήμα του σχήματος,



Σχήμα 4.1: Δύναμη Coulomb σε διανυσματική μορφή.

έχουμε δυο θετικά φορτία q_1, q_2 σε απόσταση r . Ως ομόσημα φορτία, αυτά απωθούνται. Η δύναμη $\vec{F}_{12}$ που ασκεί το φορτίο q_1 στο φορτίο q_2 πρέπει να ξεκινά από το q_2 και να “φεύγει” μακριά από αυτό, με διεύθυνση αυτή της ευθείας που ενώνει τα δυο φορτία. Αντίστοιχα θα είναι και η κατεύθυνση της δύναμης $\vec{F}_{21}$. Οπότε μπορούμε να γράψουμε

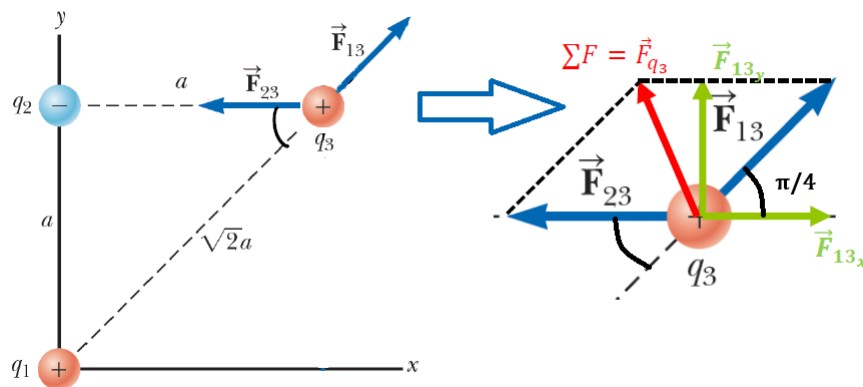
$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{Q}_{12} \quad (4.6)$$

και να σχεδιάσουμε όπως στο σχήμα. Στο δεξιό τμήμα του σχήματος, έχουμε δυο ετερόσημα φορτία. Η μόνη διαφορά είναι στο ότι τα φορτία έλκονται και οι δυνάμεις πρέπει να σχεδιαστούν όπως στο σχήμα. Βλέπετε ότι τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{Q}_{12}, \vec{Q}_{21}$ έχουν την ίδια φορά και στις δυο περιπτώσεις. Η φορά της δύναμης εξαρτάται από την αλγεβρική τιμή της, δηλ. από την ποσότητα $k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$, και συγκεκριμένα από το γινόμενο $q_1 q_2$, καθώς οι υπόλοιπες ποσότητες είναι σταθερές. Έχουμε όμως στη διάθεσή μας καλύτερα “όπλα” από αυτόν το διανυσματικό τρόπο γραφής – όπως η ανάλυση σε συνιστώσες.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.1:

Τρία ακίνητα σημειακά φορτία βρίσκονται στις γωνίες ενός ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου όπως στο Σχήμα 4.2. Δίνεται ότι $q_1 = q_3 = 5 \mu\text{C}$, $q_2 = -2 \mu\text{C}$, και $a = 0.1 \text{ m}$. Βρείτε τη συνισταμένη ηλεκτρική δύναμη που ασκείται στο q_3 .



Σχήμα 4.2: Συνισταμένη δύναμη τριών φορτίων.

Λύση:

Δυο δυνάμεις ασκούνται επάνω στο φορτίο q_3 : η απωστική δύναμη $\vec{F}_{13}$ από το φορτίο q_1 και η ελκτική δύναμη $\vec{F}_{23}$ από το φορτίο q_2 , όπως αυτές φαίνονται στο Σχήμα 4.2. Θα προβάλουμε τις δυνάμεις στους άξονες xy . Προσέξτε ότι το ορθογώνιο τρίγωνο είναι ισοσκελές (με ίσες πλευρές a). Ως εκ τούτου, η γωνία θ μεταξύ του άξονα x' και της δύναμης $\vec{F}_{13}$ θα είναι ίση με $\pi/4$, ως κατά κορυφήν γωνία με τη γωνία του ισοσκελούς τριγώνου.

Μπορούμε να γράψουμε τη δύναμη F_{q_3} σε συνιστώσες:

$$\vec{F}_{q_3} = F_{q_{3x}} \vec{i} + F_{q_{3y}} \vec{j} \quad (4.7)$$

Θα έχουμε

$$F_{13} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{r_{13}^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{25 \cdot 10^{-12}}{2(0.1)^2} = 11.25 \text{ N} \quad (4.8)$$

$$F_{23} = k_e \frac{|q_2||q_3|}{r_{23}^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{10 \cdot 10^{-12}}{(0.1)^2} = 9.0 \text{ N} \quad (4.9)$$

Θεωρώντας θετικές φορές τις συμβατικές, στον x -άξονα θα έχουμε

$$\vec{F}_{q_{3x}} = \vec{F}_{13x} + \vec{F}_{23x} \Rightarrow F_{q_{3y}} = F_{13x} - F_{23} = F_{13} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - F_{23} = 7.9 - 9.0 = -1.1 \text{ N} \quad (4.10)$$

Στον y -άξονα,

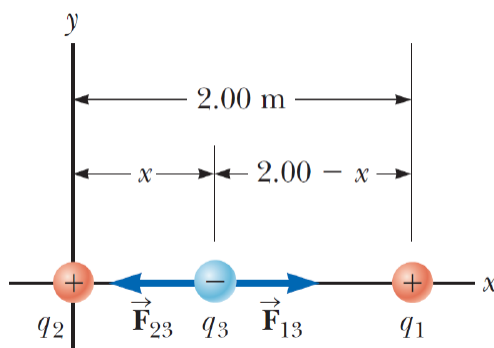
$$\vec{F}_{q_{3y}} = \vec{F}_{13y} \Rightarrow F_{q_{3y}} = F_{13} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 7.9 \text{ N} \quad (4.11)$$

Οπότε

$$\vec{F}_{q_3} = F_{q_{3x}} \vec{i} + F_{q_{3y}} \vec{j} = (-1.1 \text{ N}) \vec{i} + (7.9 \text{ N}) \vec{j} \quad (4.12)$$

Παράδειγμα 4.2:

Τρία φορτισμένα σωματίδια βρίσκονται επάνω στον x -άξονα όπως στο Σχήμα 4.3. Το φορτίο $q_1 = 15 \mu\text{C}$ βρίσκεται στη θέση $x = 2 \text{ m}$, το φορτίο $q_2 = 6 \mu\text{C}$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, και η συνισταμένη των δυνάμεων στο q_3 είναι μηδέν. Βρείτε τις συντεταγμένες του q_3 .



Σχήμα 4.3: Μηδενική συνισταμένη δύναμη δυο φορτίων.

Λύση:

Από την εκφώνηση ισχύει ότι το φορτίο ισορροπεί, άρα από τον 1ο νόμο του Newton

$$\sum \vec{F}_{q_3} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \vec{0} \Rightarrow F_{23} - F_{13} = 0 \Leftrightarrow F_{23} = F_{13} \quad (4.13)$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Coulomb έχουμε

$$F_{23} = k_e \frac{|q_2||q_3|}{x^2} \quad (4.14)$$

$$F_{13} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{(2-x)^2} \quad (4.15)$$

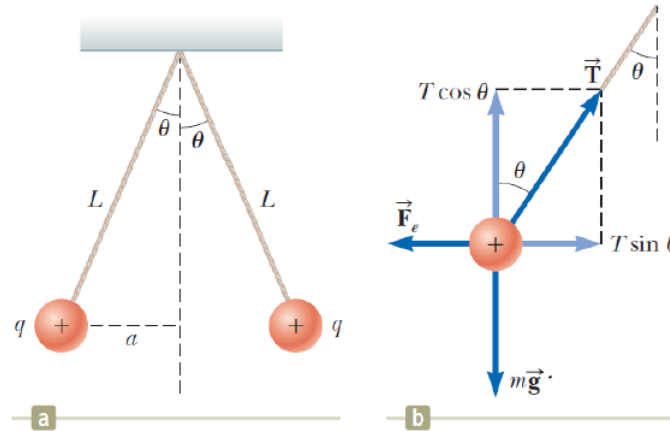
και εξισώνοντας έχουμε

$$\frac{|q_2|}{x^2} = \frac{|q_1|}{(2-x)^2} \Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 8 = 0 \quad (4.16)$$

Το τριώνυμο έχει δυο λύσεις, την $x_1 = 0.755 \text{ m}$ και την $x_2 = -3.44 \text{ m}$. Επιλέγουμε τη λύση x_1 καθώς αυτή είναι θετική, όπως πρέπει βάσει της εκφώνησης και του σχήματος. Η άλλη ρίζα x_2 αποτελεί μια θέση στον x -άξονα όπου $F_{13} = F_{23}$ αλλά οι δυνάμεις αυτές έχουν την ίδια φορά – οπότε το φορτίο δεν ισορροπεί.

Παράδειγμα 4.3:

Δυο όμοιες φορτισμένες σφαίρες, καθεμιά μάζας $m = 3 \cdot 10^{-2}$ kg, κρέμονται σε ισορροπία όπως στο Σχήμα 4.4. Το μήκος κάθε σχοινιού είναι 0.15 m, ενώ η γωνία θ είναι 5 μοίρες. Βρείτε το μέτρο του φορτίου κάθε σφαίρας.



Σχήμα 4.4: (a) Κρεμαστά φορτία, (b) διάγραμμα δυνάμεων.

Λύση:

Το σώμα φορτίου q και μάζας m ισορροπεί. Δείτε το Σχήμα 4.4(b), όπου έχει σχεδιαστεί το διάγραμμα δυνάμεων επάνω στο αριστερό φορτίο, με $\vec{T}$ την τάση του νήματος. Από τον 1ο νόμο του Newton θα είναι

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad (4.17)$$

Αναλύοντας κατά άξονες και προβάλλοντας την τάση του νήματος T σε δυο συνιστώσες όπως στο σχήμα, θα έχουμε

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \iff \vec{F}_e + \vec{T}_x = \vec{0} \implies F_e = T_x = T \sin(\theta) \quad (4.18)$$

δηλ.

$$k_e \frac{|q|^2}{(2a)^2} = T \sin(\theta) \quad (4.19)$$

και

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{F}_g + \vec{T}_y = \vec{0} \implies T_y = mg \quad (4.20)$$

δηλ.

$$mg = T \cos(\theta) \quad (4.21)$$

Διαιρώντας κατά μέλη

$$\frac{k_e \frac{|q|^2}{4a^2}}{mg} = \tan(\theta) \iff |q|^2 = \frac{4a^2 mg \tan(\theta)}{k_e} \quad (4.22)$$

Από την τριγωνομετρία του σχήματος έχουμε ότι

$$a = L \sin(\theta) \quad (4.23)$$

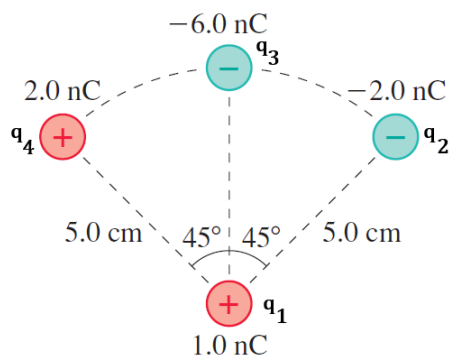
με θ σε ακτίνια (radians), οπότε

$$|q|^2 = \frac{4L^2 \sin^2(\theta) mg \tan(\theta)}{k_e} \quad (4.24)$$

$$= \sqrt{\frac{4L^2 \sin^2(\theta) mg \tan(\theta)}{k_e}} \quad (4.25)$$

Παράδειγμα 4.4:

Ποιά είναι η συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ στο σωματίδιο φορτίου 1 nC^a στο κάτω μέρος του Σχήματος 4.5;



Σχήμα 4.5: Φορτία σε κυκλικό τόξο.

Δώστε την απάντησή σας υπό μορφή συνιστωσών. Θεωρήστε ότι $k_e = 9.0 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.

^a $1 \text{ nC} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ C}$

Λύση:

Έστω ότι το φορτίο 1 nC βρίσκεται στο σημείο αναφοράς ενός συστήματος συντεταγμένων και έστω ότι το ονομάζουμε q_1 . Αντίστοιχα, $q_3 = -6.0 \text{ nC}$, ενώ το φορτίο q_2 θα βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, και το q_4 στο δεύτερο τεταρτημόριο, όπως στο Σχήμα 4.5. Η συνολική ηλεκτρική δύναμη στο q_1 είναι το διανυσματικό άθροισμα των ηλεκτρικών δυνάμεων από τα άλλα τρία φορτία. Άρα

$$\vec{F}_{21} = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2}, \text{ με φορά προς το } q_2 \quad (4.26)$$

$$= 0.72 \cdot 10^{-5}, \text{ με φορά προς το } q_2 \quad (4.27)$$

$$= (0.72 \cdot 10^{-5} \text{ N})(\cos(45^\circ)\vec{i} + \sin(45^\circ)\vec{j}) \quad (4.28)$$

$$\vec{F}_{31} = k_e \frac{|q_3||q_1|}{r^2}, \text{ με φορά προς το } q_3 \quad (4.29)$$

$$= (2.16 \cdot 10^{-5} \text{ N})\vec{j} \quad (4.30)$$

$$\vec{F}_{41} = k_e \frac{|q_1||q_4|}{r^2}, \text{ με φορά προς το } q_4 \quad (4.31)$$

$$= (0.72 \cdot 10^{-5} \text{ N})(\cos(45^\circ)\vec{i} - \sin(45^\circ)\vec{j}) \quad (4.32)$$

Αναλύοντας και προσθέτοντας ανά συνιστώσες (κάντε το! - εξάσκηση ☺) έχουμε

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} = (1.02 \cdot 10^{-5} \text{ N})\vec{i} + (2.2 \cdot 10^{-5} \text{ N})\vec{j} \quad (4.33)$$

4.4 Ηλεκτρικά Πεδία

Ένα πολύ άμεσο ερώτημα που μπορούμε να θέσουμε είναι το εξής: “Πώς γνωρίζει ένα ηλεκτρικά φορτισμένο σωματίδιο ότι στην ευρύτερη περιοχή του υπάρχει ένα δεύτερο φορτίο ώστε να αναπτυχθεί ηλεκτρική αλληλεπίδραση μέσω ηλεκτρικής δύναμης;” Σε αυτό θα μας βοηθήσει η έννοια του **ηλεκτρικού πεδίου** που αναπτύχθηκε από τον M. Faraday. Ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει σε μια περιοχή του χώρου γύρω από ένα φορτισμένο σωματίδιο q που ονομάζεται **πηγή φορτίου**. Όταν ένα άλλο (μικρότερο) φορτισμένο σωματίδιο – που καμιά φορά ονομάζεται **δοκιμαστικό φορτίο** – q_0 εισέρχεται στο ηλεκτρικό πεδίο, μια ηλεκτρική δύναμη ασκείται πάνω του. Ορίζουμε λοιπόν το ηλεκτρικό πεδίο – λόγω της επίδρασης της πηγής φορτίου επάνω σε άλλα φορτισμένα σωματίδια – ως η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται ανά μονάδα φορτίου:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0} \quad (4.34)$$

Λύνοντας ως προς $\vec{F}_e$ βρίσκουμε ότι ένα ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει σε ένα σημείο του χώρου αν ένα φορτισμένο σωματίδιο (με μικρό φορτίο q_0) υφίσταται μια ηλεκτρική δύναμη

$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E} \quad (4.35)$$

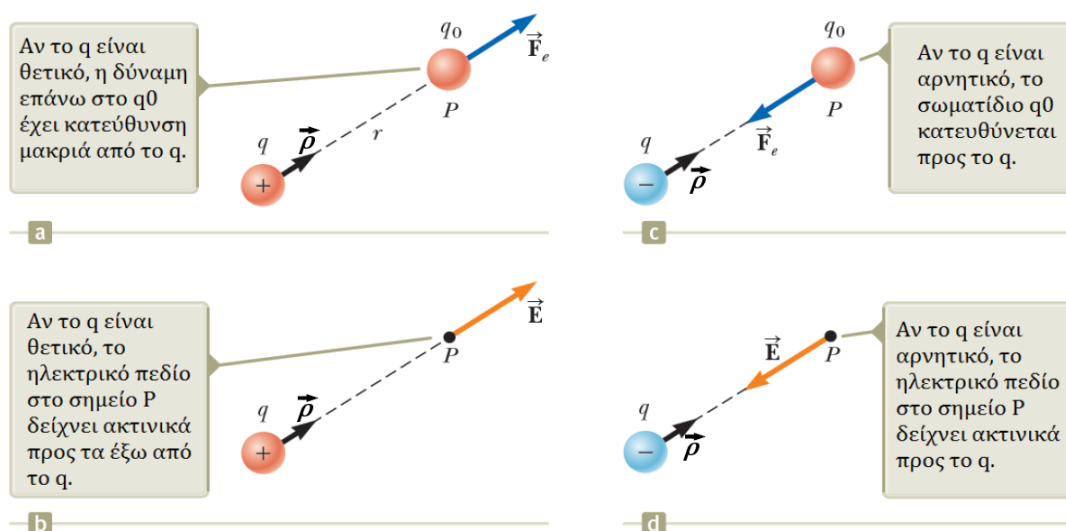
Παρατηρήστε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι διάνυσμα. Προσέξτε επίσης ότι αν το q_0 είναι θετικό, η ηλεκτρική δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με το ηλεκτρικό πεδίο, ενώ αν είναι αρνητικό, η ηλεκτρική δύναμη και το ηλεκτρικό πεδίο είναι αντίρροπα διανύσματα. Αντικαθιστώντας τη σχέση του Coulomb στη σχέση του ηλεκτρικού πεδίου καταλήγουμε ότι

$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \vec{e} \quad (4.36)$$

με το μέτρο του πεδίου να δίνεται απλά ως

$$E = k_e \frac{|q|}{r^2} \quad (4.37)$$

με r την απόσταση μεταξύ της πηγής φορτίου q και του σημειακού φορτίου q_0 . Πολλές φορές ονομάζουμε αυτό το δεύτερο μικρότερο φορτίο q_0 ως δοκιμαστικό φορτίο. Παρατηρήστε – και – στο Σχήμα 4.6 ότι **το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου εξαρτάται μόνο από την πηγή φορτίου – όχι από το δοκιμαστικό φορτίο!** Από το ίδιο σχήμα, το ηλεκτρικό πεδίο εξ' αιτίας πηγής φορτίου q σε ένα σημείο P του



Σχήμα 4.6: Ηλεκτρικό πεδίο, σημειακά φορτία, και ηλεκτρική δύναμη.

χώρου έχει τη φορά που θα είχε η ηλεκτρική δύναμη επάνω σε ένα **θετικό** δοκιμαστικό φορτίο που θα τοποθετούνταν στο σημείο P .

Ηλεκτρικό πεδίο γύρω από σημειακό φορτίο

- Το ηλεκτρικό πεδίο γύρω από μια **θετική πηγή φορτίου** $q > 0$ έχει διεύθυνση ακτινική και φορά **μακριά** από την πηγή φορτίου.
- Το ηλεκτρικό πεδίο γύρω από μια **αρνητική πηγή φορτίου** $q < 0$ έχει διεύθυνση ακτινική και φορά **πρός** την πηγή φορτίου.

Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε περίπτωση ισούται με

$$E = k_e \frac{|q|}{r^2} \quad (4.38)$$

με r την απόσταση της πηγής φορτίου από το εκάστοτε σημείο ενδιαφέροντος.

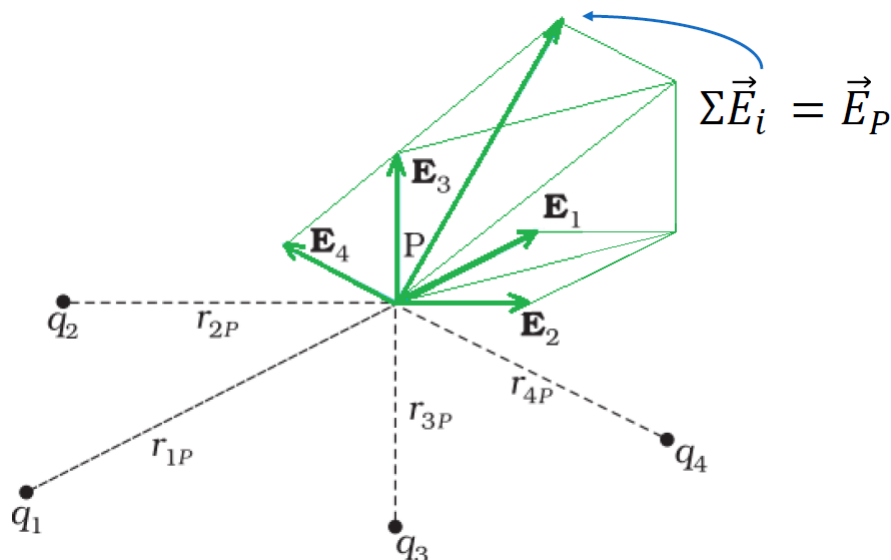
4.4.1 Ηλεκτρικό Πεδίο Σημειακών Φορτίων

Στην περίπτωση πολλών πηγών φορτίων q_i , συμπεριφερόμαστε όπως και με τις δυνάμεις, δηλ. χειριζόμαστε το πεδίο ως διανυσματικό μέγεθος και προσθέτουμε διανυσματικά τις επιμέρους συνεισφορές. Έστω ένα σημείο P στο χώρο γύρω από πολλές πηγές φορτίου. Το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο αυτό θα δίνεται ως

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{q_1} + \vec{E}_{q_2} + \dots = \sum_i \vec{E}_{q_i} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{q}_i \quad (4.39)$$

με r_i την απόσταση κάθε πηγής φορτίου από ένα σημείο P και $\vec{q}_i$ το μοναδιαίο διάνυσμα από την πηγή i στο σημείο P . Φυσικά μεγάλη ευκολία μας προσφέρει όχι τόσο η παραπάνω γραφή όσο η ανάλυση σε συνιστώσες όπως τη γνωρίζουμε από το κεφάλαιο της Μηχανικής.

Δείτε ένα παράδειγμα πολλαπλών πηγών φορτίου και του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα τυχαίο σημείο στο Σχήμα 4.7.



Σχήμα 4.7: Πολλαπλές πηγές φορτίου και ηλεκτρικό πεδίο.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

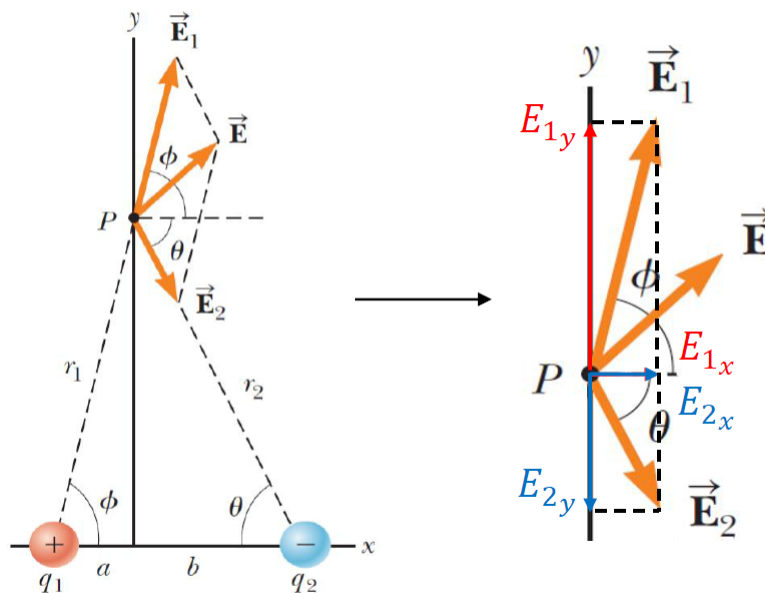
Παράδειγμα 4.5:

Φορτία q_1, q_2 βρίσκονται στον οριζόντιο άξονα, σε αποστάσεις a και b αντίστοιχα, από την αρχή των αξόνων, όπως στο Σχήμα 4.8.

(α') Βρείτε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο $P(0, y)$.

(β') Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P στην ειδική περίπτωση που $|q_1| = |q_2|$ και $a = b$.

(γ') Στο β) ερώτημα βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο όταν $y \gg a$.



Σχήμα 4.8: Ηλεκτρικό πεδίο λόγω σημειακών φορτίων.

Λύση:

(α') Τα μέτρα των ηλεκτρικών πεδίων εξ' αιτίας των φορτίων q_1, q_2 στο σημείο P είναι

$$E_1 = k_e \frac{|q_1|}{r_1^2} = k_e \frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \quad (4.40)$$

$$E_2 = k_e \frac{|q_2|}{r_2^2} = k_e \frac{|q_2|}{b^2 + y^2} \quad (4.41)$$

και αναλύοντας σε συνιστώσες τα διανύσματα αυτά, υιοθετώντας τις συμβατικές θετικές φορές ενός συστήματος συντεταγμένων, έχουμε

$$\vec{E}_x = \vec{E}_{1x} + \vec{E}_{2x} \implies E_x = E_{1x} + E_{2x} \quad (4.42)$$

$$\vec{E}_y = \vec{E}_{1y} + \vec{E}_{2y} \implies E_y = E_{1y} - E_{2y} \quad (4.43)$$

και οι συνιστώσες των $\vec{E}_1, \vec{E}_2$, στο σύστημα αξόνων θα έχουν μέτρο

$$E_{1x} = E_1 \cos(\phi) = k_e \frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \cos(\phi) \quad (4.44)$$

$$E_{1y} = E_1 \sin(\phi) = k_e \frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \sin(\phi) \quad (4.45)$$

$$E_{2x} = E_2 \cos(\theta) = k_e \frac{|q_2|}{b^2 + y^2} \cos(\theta) \quad (4.46)$$

$$E_{2y} = E_2 \sin(\theta) = k_e \frac{|q_2|}{b^2 + y^2} \sin(\theta) \quad (4.47)$$

Οπότε η συνισταμένη των δυνάμεων στο σημείο P θα είναι

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (E_{1x} + E_{2x})\vec{i} + (E_{1y} - E_{2y})\vec{j} \quad (4.48)$$

$$= k_e \left(\frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \cos(\phi) + \frac{|q_2|}{b^2 + y^2} \cos(\theta) \right) \vec{i} + k_e \left(\frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \sin(\phi) - k_e \frac{|q_2|}{b^2 + y^2} \sin(\theta) \right) \vec{j} \quad (4.49)$$

$$= k_e \left(\frac{a|q_1|}{(a^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{b|q_2|}{(b^2 + y^2)^{3/2}} \right) \vec{i} + k_e \left(\frac{y|q_1|}{(a^2 + y^2)^{3/2}} - k_e \frac{y|q_2|}{(b^2 + y^2)^{3/2}} \right) \vec{j} \quad (4.50)$$

(β') Η ισότητα των φορτίων ($|q_1| = |q_2| = q$) και των αποστάσεων φέρνει και την ισότητα των γωνιών ϕ και θ . Αντικαθιστώντας στις προηγούμενες σχέσεις

$$E_x = k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \cos(\theta) + k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \cos(\theta) = 2k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \cos(\theta) \quad (4.51)$$

$$E_y = k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \sin(\theta) - k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \sin(\theta) = 0 \quad (4.52)$$

Άρα

$$\vec{E}_P = \vec{E}_x = \left(2k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \cos(\theta) \right) \vec{i} \quad (4.53)$$

$$= \left(2k_e \frac{q}{a^2 + y^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right) \vec{i} \quad (4.54)$$

$$= \left(2k_e \frac{qa}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \right) \vec{i} \quad (4.55)$$

(γ') Στο προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε ότι

$$\vec{E}_P = \left(2k_e \frac{qa}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \right) \vec{i} \quad (4.56)$$

Αν $y \gg a$, αυτό σημαίνει ότι $y^2 + a^2 \approx y^2$, οπότε

$$\vec{E}_P = \left(2k_e \frac{qa}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \right) \vec{i} \approx \left(2k_e \frac{qa}{y^3} \right) \vec{i} \quad (4.57)$$

Παράδειγμα 4.6:

Δυο όμοιες μικρές σφαίρες φορτίζονται με φορτία $100 \cdot 10^{-9}$ C και $-100 \cdot 10^{-9}$ C αντίστοιχα, και κρέμονται σε ισορροπία από νήμα μήκους 0.5 m υπό επίδραση ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου 100000 N/C, όπως στο Σχήμα 4.9(α). Θεωρήστε ότι $k_e = 9.0 \cdot 10^9$ Nm²/C. Πόση είναι η μάζα κάθε σφαίρας;

Λύση:

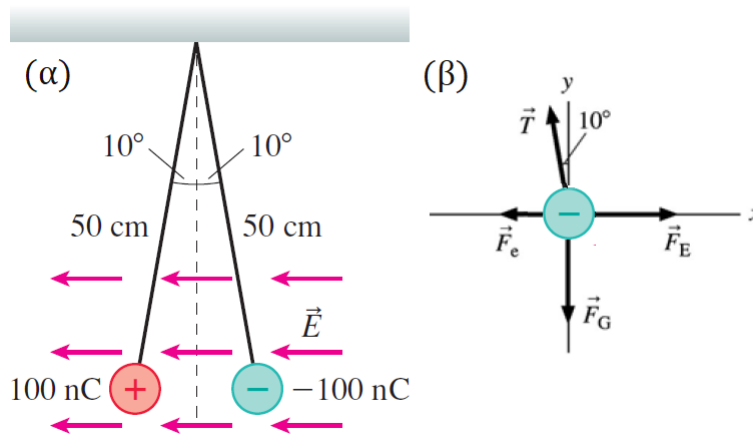
Δείτε το Σχήμα 4.9(β). Οι δυο ηλεκτρικές δυνάμεις υπολογίζονται ως

$$F_E = |q|E = 1.00 \cdot 10^{-2} \text{ N} \quad (4.58)$$

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2} = \frac{9.0 \cdot 10^{-5}}{r^2} \quad (4.59)$$

Από τη γεωμετρία του Σχήματος 4.9, έχουμε

$$\sin(10^\circ) = \frac{\frac{r}{2}}{0.5} \implies r = 0.174 \quad (4.60)$$



Σχήμα 4.9: Κρεμαστές σφαίρες σε ηλεκτρικό πεδίο.

οπότε

$$F_e = 3 \cdot 10^{-3} \text{ N} \quad (4.61)$$

Ξανά από το σχήμα, παρατηρούμε ότι λόγω ισορροπίας στους x και y άξονες ισχύει ο 1ος νόμος του Newton, και άρα

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \iff \vec{T}_x + \vec{F}_E + \vec{F}_e = \vec{0} \implies T \sin(10^\circ) + F_e = F_E \quad (4.62)$$

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \iff \vec{T}_y + \vec{F}_G = \vec{0} \implies T \cos(10^\circ) = mg \quad (4.63)$$

Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$\tan(10^\circ) = \frac{F_E - F_e}{mg} \iff m = \frac{F_E - F_e}{g \tan(10^\circ)} = 0.41 \cdot 10^{-2} = 4.1 \text{ gr} \quad (4.64)$$

4.4.2 Ηλεκτρικό Πεδίο Κατανομής Φορτίου

Η εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου είναι χρήσιμη για μικρά φορτία. Πολλές φορές όμως έχουμε μια κατανομή φορτίου αντί για σημειακά φορτία. Σε αυτές τις περιπτώσεις η περιγραφή του ηλεκτρικού φορτίου είναι συνεχώς και ομοιόμορφα κατανεμημένη σε όλο το μήκος ή την επιφάνεια ή τον όγκο του φορτισμένου σώματος. Δείτε για παράδειγμα το Σχήμα 4.10. Μπορούμε να τμηματοποιήσουμε την κατανομή σε μικρότερα φορτία Δq_i , με το καθένα να απέχει απόσταση r_i από το σημείο P , και να πούμε ότι στο σημείο P το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να περιγραφεί ως

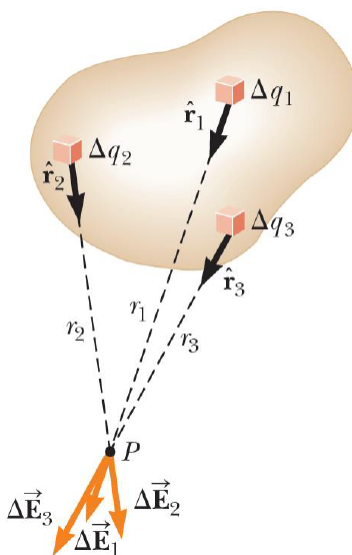
$$\vec{E} \approx k_e \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \vec{e}_i \quad (4.65)$$

Αν αυτή η τμηματοποίηση “σπάει” την κατανομή φορτίου σε μικρά φορτία Δq , τα οποία όμως αν είναι απειροστά μικρά, δηλ. dq , τότε το παραπάνω άθροισμα μπορεί να γραφεί ως ολοκλήρωμα

$$\vec{E} = k_e \int \frac{dq}{r^2} \vec{e} \quad (4.66)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι διανυσματικό. Θα δούμε όμως πως μπορούμε να το χειριστούμε χωρίς κανένα πρόβλημα. Στην προσπάθειά μας αυτή θα ορίσουμε τρεις χρήσιμες ποσότητες:

- γραμμική πυκνότητα φορτίου: $\lambda = Q/l$



Σχήμα 4.10: Κατανομή φορτίου.

- επιφανειακή πυκνότητα φορτίου: $\sigma = Q/A$
- χωρική πυκνότητα φορτίου: $\rho = Q/V$

με l, A, V το μήκος, το εμβαδό, και τον όγκο μιας επιφάνειας αντίστοιχα. Το σκεπτικό πίσω από την εύρεση ποσοτήτων (είτε είναι τώρα το ηλεκτρικό πεδίο είτε αργότερα το ηλεκτρικό δυναμικό και άλλα - ακόμα και η ηλεκτρική δύναμη μεταξύ μη σημειακών σωμάτων) είναι το παρακάτω:

Εύρεση Ηλεκτρικού Πεδίου Κατανομής Φορτίου

- Ελέγχουμε την κατανομή φορτίου για τυχούσες συμμετρίες που διευκολύνουν την κατάσταση (π.χ. ακυρώνοντας κάποιες συνιστώσες του ηλ. πεδίου).
- Υπολογίζουμε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου dE που συνεισφέρει ένα απειροστά μικρό τμήμα της κατανομής, θεωρώντας το ως σημειακό φορτίο dq .
- Εκφράζουμε (συνήθως) το φορτίο dq συναρτήσει της εκάστοτε πυκνότητας φορτίου.
- Προσπαθούμε να εκφράσουμε τις μεταβλητές ποσότητες στο ηλεκτρικό πεδίο συναρτήσει γνωστών σταθερών - πάντα θα υπάρχει όμως μια άγνωστη μεταβλητή.
- Αναλύουμε το ηλεκτρικό πεδίο που βρήκαμε σε συνιστώσες κατά x και y .
- Αθροίζουμε όλες τις συνεισφορές από όλα τα απειροστά μικρά τμήματα της κατανομής παίρνοντας το ολοκλήρωμα για κάθε συνιστώσα

$$E_x = \int dE_x \text{ και } E_y = \int dE_y \quad (4.67)$$

και βρίσκουμε το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο ζητούμενο σημείο ως

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} \quad (4.68)$$

Ας δούμε τέσσερα χαρακτηριστικά παραδείγματα - υπάρχουν αρκετά ακόμα στο τέλος του κεφαλαίου, στην παράγραφο "Ασκήσεις".

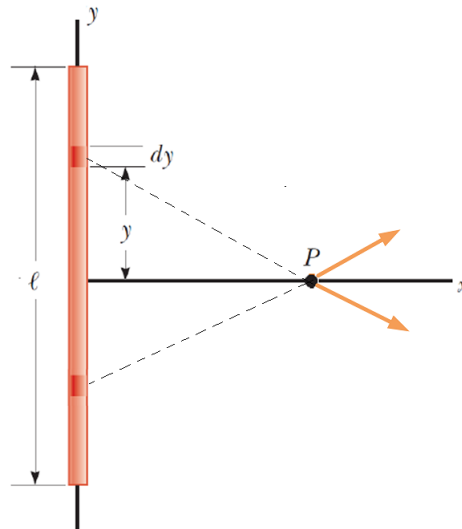
Παράδειγμα 4.7:

(α') Αν μια ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδος με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ , μήκους l , και συνολικού φορτίου Q βρίσκεται κάθετα στον άξονα $x'x$, και πάνω στον άξονα $y'y$, όπως στο Σχήμα 4.11, υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P που απέχει απόσταση x από το σημείο $(0, 0)$ που αποτελεί το μέσον της ράβδου. Σας δίνεται ότι

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} \quad (4.69)$$

(β') Πως συμπεριφέρεται η ράβδος αν την απομακρύνουμε αρκετά από το σημείο $(0, 0)$, δηλ. αν $x \gg l$;

(γ') Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στην περίπτωση που η ράβδος γίνει απειροστά μεγάλη, διατηρώντας την γραμμική πυκνότητά της λ σταθερή, δηλ. υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο ίδιο σημείο όταν $l \rightarrow +\infty$. Θα χρειαστεί να παραγοντοποιήσετε το υπόριζο της απάντησής σας στο ερώτημα (α).



Σχήμα 4.11: Κατανομή φορτίου σε ράβδο.

Λύση:

(α') Τμηματοποιούμε τη ράβδο σε απειροστά μικρά τμήματα φορτίου dq και μήκους dy , όπως στο Σχήμα 4.11. Για κάθε τέτοιο τμήμα θα ισχύει

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{dq}{dy} \implies dq = \lambda dy \quad (4.70)$$

Αν όμως πάρουμε δυο συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ τμήματα της ράβδου και υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο, παρατηρούμε πως λόγω της συμμετρίας, το ηλεκτρικό πεδίο στο ζητούμενο σημείο θα έχει μόνο x -συνιστώσα, διότι οι y -συνιστώσες αλληλοακυρώνονται. Αυτό ισχύει γιατί τα συμμετρικά φορτία είναι ίδια, όπως και οι αποστάσεις τους από το σημείο P . Άρα για ένα απειροστά μικρό τμήμα της ράβδου dy με απειροστά μικρό φορτίο dq , το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P θα είναι

$$dE = k_e \frac{dq}{r^2} = k_e \frac{dq}{x^2 + y^2} \quad (4.71)$$

Η x -συνιστώσα του παραπάνω θα είναι

$$dE_x = dE \cos(\theta) = k_e \frac{dq}{x^2 + y^2} \cos(\theta) \quad (4.72)$$

με θ τη γωνία που σχηματίζει ο οριζόντιος άξονας με την απόσταση r . Από την τριγωνομετρία του σχήματος, έχουμε

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.73)$$

Τότε

$$dE_x = k_e \frac{dq}{x^2 + y^2} \cos(\theta) = k_e \frac{\lambda dy}{x^2 + y^2} \cos(\theta) = k_e \lambda \frac{xdy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (4.74)$$

Μπορούμε να αθροίσουμε (ολοκληρώσουμε) τις συνεισφορές από όλα τα απειροστά μικρά τμήματα φορτίου dq . Αφού η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι dy , θα πρέπει στα άκρα του ολοκληρώματος να βάλουμε τις τεταγμένες των φορτίων στα άκρα της ράβδου. Έτσι, για το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο

$$E = E_x = \int dE_x = \int k_e \lambda \frac{xdy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = k_e \lambda x \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (4.75)$$

$$= k_e \lambda x \frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{y=-l/2}^{l/2} = k_e \lambda x \left(\frac{l/2}{x^2 \sqrt{x^2 + (l/2)^2}} - \frac{-l/2}{x^2 \sqrt{x^2 + (l/2)^2}} \right) \quad (4.76)$$

$$= k_e \lambda x \frac{l}{x^2 \sqrt{x^2 + (l/2)^2}} \quad (4.77)$$

κι επειδή $\lambda l = Q$, έχουμε τελικά

$$\vec{E}_x = k_e \left(\frac{Q}{x \sqrt{x^2 + (l/2)^2}} \right) \vec{i} \quad (4.78)$$

(β') Αν $x \gg l$, τότε $x^2 + (l/2)^2 \approx x^2$, οπότε

$$E_x = k_e \frac{Q}{x \sqrt{x^2}} = k_e \frac{Q}{x^2} \quad (4.79)$$

δηλ.

$$\vec{E}_x = \left(k_e \frac{Q}{x \sqrt{x^2}} \right) \vec{i} = \left(k_e \frac{Q}{x^2} \right) \vec{i} \quad (4.80)$$

οπότε η συμπεριφορά της είναι αυτή ενός σημειακού φορτίου. Τέτοιους ελέγχους πρέπει να κάνουμε συχνά για να καταλαβαίνουμε αν το αποτέλεσμα μας έχει νόημα σε "ακραίες" περιπτώσεις. Όταν απομακρυνόμαστε αρκετά από μια κατανομή φορτίου τότε αυτή πιθανότατα θα συμπεριφέρεται πλέον σαν σημειακό φορτίο.

(γ') Γράφουμε το παραπάνω αποτέλεσμα ως

$$E_x = k_e \frac{Q}{xl/2} \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2/l^2}} = k_e \frac{2\lambda}{x} \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2/l^2}} \quad (4.81)$$

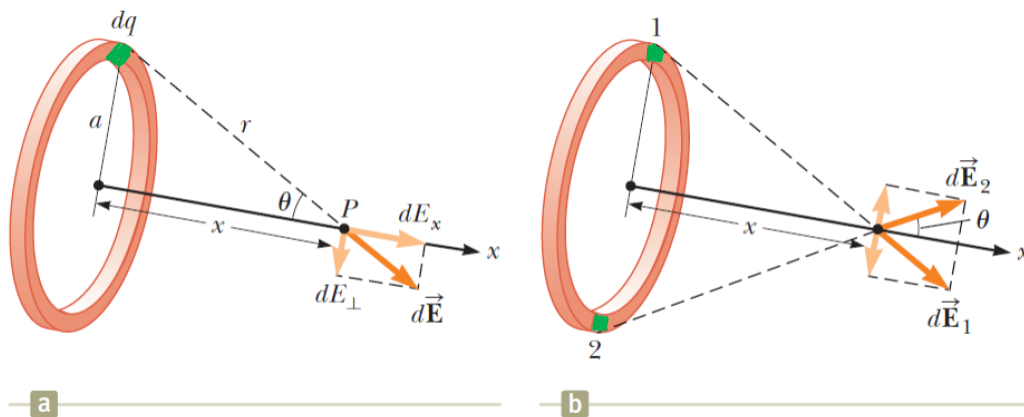
αφού $Q/l = \lambda$, και θέτοντας $l \rightarrow +\infty$, έχουμε

$$E = k_e \frac{2\lambda}{x} \quad (4.82)$$

Στην περίπτωση αυτή, η ράβδος μήκους l έχει πλέον άπειρο μήκος. Βλέπετε ότι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι αντιστρόφως ανάλογο του x και όχι του x^2 .

Παράδειγμα 4.8:

Ένας δακτύλιος ακτίνας a φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό φορτίο Q . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P , όπως δείχνει το Σχήμα 4.12, που βρίσκεται σε απόσταση x από το κέντρο του δακτυλίου και στον κάθετο άξονα στο επίπεδο του δακτυλίου. Τι συμβαίνει αν $x \gg a$;



Σχήμα 4.12: Κατανομή φορτίου σε δακτύλιο.

Λύση:

Μπορείτε να παρατηρήσετε στο Σχήμα 4.12(a) ότι για ένα απειροστά μικρό τμήμα δακτυλίου φορτίου dq και μήκους ds , το ηλεκτρικό πεδίο dE στο σημείο P έχει δυο συνιστώσες, dE_x και dE_y . Για ένα συμμετρικό ως προς τον άξονα x και αντιδιαμετρικό του προηγούμενου σημείο, η y -συνιστώσα του αλληλοαναιρείται με την y -συνιστώσα του προηγούμενου σημείου, όπως στο Σχήμα 4.12(b). Οπότε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P έχει μόνο x -συνιστώσα. Άρα

$$\vec{E}_P = \vec{E}_x \quad (4.83)$$

Ας βρούμε τη συνεισφορά dE του σημειακού φορτίου dq στο συνολικό ηλεκτρικό πεδίο. Θα είναι

$$dE_x = dE \cos(\theta) = k_e \frac{dq}{r^2} \cos(\theta) = k_e \frac{dq}{x^2 + a^2} \cos(\theta) \quad (4.84)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος έχουμε

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (4.85)$$

οπότε

$$dE_x = k_e \frac{dq}{x^2 + a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = k_e \frac{xdq}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.86)$$

Αθροίζουμε όλες τις συνεισφορές ηλεκτρικού πεδίου από όλα τα σημειακά φορτία dq του δακτυλίου και έχουμε

$$E_P = E_x = \int dE_x = k_e x \int \frac{dq}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.87)$$

Εδώ μπορούμε να κάνουμε ένα “κόλπο” για να συντομεύσουμε τη λύση μας. Το διαφορικό της ολοκλήρωσης είναι το dq , και η μεταβλητή q δεν υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμα, ενώ όλες οι άλλες ποσότητες είναι σταθερές. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$E_x = k_e x \int \frac{dq}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = k_e x \frac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \int dq \quad (4.88)$$

αρκεί να ερμηνεύσουμε σωστά το ολοκλήρωμα

$$\int dq \quad (4.89)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό σημαίνει πολύ απλά “το άθροισμα όλων των σημειακών φορτίων dq του δακτυλίου”. Μα το άθροισμα όλων αυτών των φορτίων μας δίνει το συνολικό φορτίο Q ! Οπότε

$$\int dq = Q \quad (4.90)$$

και τελικά

$$E_x = k_e x \frac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \int dq = k_e \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.91)$$

Ας δούμε και μια άλλη λύση όμως. Κάνοντας τα ίδια με πριν καταλήγουμε ξανά στη σχέση

$$dE_x = k_e \frac{xdq}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.92)$$

Ο δακτύλιος είναι ομοιόμορφα φορτισμένος, οπότε έχει γραμμική πυκνότητα φορτίου $\lambda = Q/l$, με l το συνολικό μήκος του δακτυλίου, που είναι $2\pi a$. Ισχύει

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{dq}{ds} \implies dq = \lambda ds \quad (4.93)$$

Αθροίζουμε όλες τις συνεισφορές ηλεκτρικού πεδίου από όλα τα σημειακά φορτία dq του δακτυλίου και έχουμε

$$E_P = E_x = \int dE_x = k_e x \int \frac{dq}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = k_e x \int \frac{\lambda ds}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.94)$$

Τώρα ολοκληρώνουμε ως προς το μήκος του δακτυλίου, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$E_x = k_e x \frac{\lambda}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \int ds \quad (4.95)$$

και αρκεί να ερμηνεύσουμε σωστά το ολοκλήρωμα

$$\int ds \quad (4.96)$$

που βέβαια σημαίνει “το άθροισμα όλων των απειροστά μικρών τμημάτων ds του δακτυλίου”. Το άθροισμα όλων αυτών δεν είναι άλλο από το συνολικό μήκος του δακτυλίου που είναι $2\pi a$. Άρα

$$\int ds = 2\pi a \quad (4.97)$$

και τελικά

$$E_x = k_e x \frac{\lambda}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \int ds = E_x = k_e x \frac{2\pi a \lambda}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.98)$$

Η σχέση απλοποιείται αν χρησιμοποιήσουμε ότι

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{Q}{2\pi a} \implies Q = 2\pi a \lambda \quad (4.99)$$

οπότε τελικά

$$E_x = k_e \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.100)$$

Είδατε λοιπόν ότι και στις δυο περιπτώσεις, το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P γράφεται ως

$$\vec{E}_P = \left(k_e \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \right) \vec{i} \quad (4.101)$$

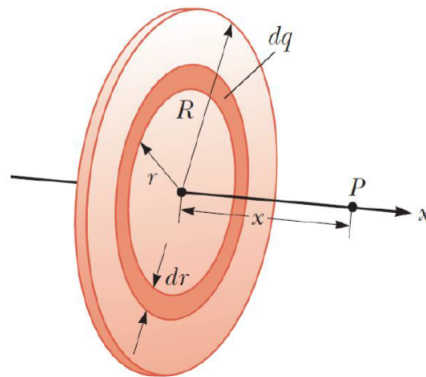
Στην περίπτωση που $x \gg a$, τότε $a^2 + x^2 \approx x^2$ και έτσι το αποτέλεσμα γράφεται ως

$$E_P = k_e \frac{Qx}{x^3} = k_e \frac{Q}{x^2} \quad (4.102)$$

πράγμα που δείχνει ότι ο δακτύλιος συμπεριφέρεται ως σημειακό φορτίο όταν απομακρυνθούμε πολύ από αυτόν.

Παράδειγμα 4.9:

Ένας δίσκος ακτίνας R φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο επιφανειακό θετικό φορτίο Q πυκνότητας σ . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P , όπως δείχνει το Σχήμα 4.13, που βρίσκεται σε απόσταση x από το κέντρο του δίσκου και στον κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του δίσκου. Τι συμβαίνει αν $R \rightarrow \infty$;



Σχήμα 4.13: Κατανομή φορτίου σε δίσκο.

Λύση:

Μπορούμε να αξιοποιήσουμε την προηγούμενη άσκηση και να θεωρήσουμε ότι ο δίσκος αποτελείται από “σημειακούς” δακτυλίους. Από το αποτέλεσμα που βρήκαμε πριν, το ηλεκτρικό πεδίο ενός δακτυλίου ακτίνας a στο σημείο P είναι

$$E_P = k_e \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.103)$$

Η συμμετρία και η αλληλοακύρωση της y -συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου ισχύει και εδώ. Ένας δακτύλιος ακτίνας r , φορτίου dq , και “πάχους” dr θα συνεισφέρει ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P

$$dE_P = dE_x = k_e \frac{dqx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.104)$$

Ο δίσκος είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ , δηλ.

$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad (4.105)$$

Για ένα δακτυλιοειδές τμήμα δίσκου, θα είναι

$$\sigma = \frac{dq}{dA} = \frac{dq}{2\pi r dr} \implies dq = 2\pi r \sigma dr \quad (4.106)$$

Άρα η συνεισφορά ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P από ένα “σημειακό” δακτύλιο είναι

$$dE_P = k_e \frac{dqx}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = 2\pi\sigma x k_e \frac{rdr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.107)$$

Αν αθροίσουμε (ολοκληρώσουμε) τις συνεισφορές από κάθε “σημειακό” δακτύλιο θα έχουμε το ηλεκτρικό πεδίο του συνολικού δίσκου, δηλ.

$$E_P = \int dE_P = 2\pi\sigma x k_e \int \frac{rdr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.108)$$

Τα άκρα του ολοκληρώματος πρέπει να είναι οι ακραίες πιθανές ακτίνες κάθε δακτυλίου που συνιστούν το δίσκο (αφού το διαφορικό μας είναι το dr). Οι δυνατές ακτίνες είναι από 0 ως R , κι έτσι

$$E_P = 2\pi\sigma x k_e \int_0^R \frac{rdr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.109)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να μας δοθεί ή να βρεθεί σε πίνακες, αλλά ας δοκιμάσουμε να το λύσουμε με αλλαγή μεταβλητής. Θέτουμε

$$u = r^2 + x^2 \implies du = 2rdr \quad (4.110)$$

και

$$u_1 = 0^2 + x^2 = x^2 \quad (4.111)$$

$$u_2 = R^2 + x^2 \quad (4.112)$$

Οπότε

$$E_P = k_e \pi \sigma x \int_{x^2}^{R^2+x^2} \frac{du}{u^{3/2}} = -2k_e \pi \sigma x \frac{1}{\sqrt{u}} \Big|_{x^2}^{R^2+x^2} \quad (4.113)$$

$$= 2k_e \pi \sigma x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) = 2k_e \pi \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \quad (4.114)$$

Στην περίπτωση που $R \rightarrow \infty$, ο δίσκος γίνεται άπειρου μεγέθους, και η παραπάνω σχέση γίνεται

$$E_P = \lim_{R \rightarrow \infty} 2k_e \pi \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) = 2k_e \pi \sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (4.115)$$

Μπορείτε να ελέγξετε τι συμβαίνει αν $x \gg R$; Πρέπει να βρείτε ότι ο δίσκος συμπεριφέρεται ως σημειακό φορτίο! ☺

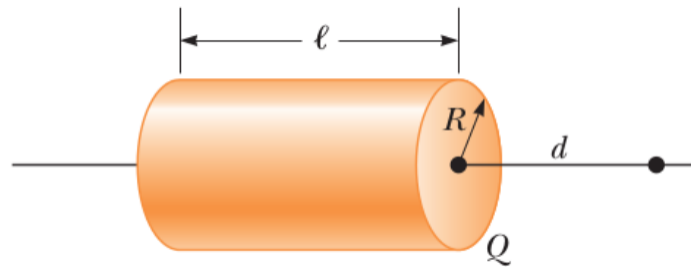
Παράδειγμα 4.10:

- (α') Στο Σχήμα 4.14, ο κυλινδρικός φλοιός ακτίνας R είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με συνολικό φορτίο Q , και έχει μήκος l . Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση d δεξιά του.
- (β') Αντί για φλοιό, θεωρήστε ένα συμπαγή κύλινδρο με ίδιες διαστάσεις όπως προηγουμένως και φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο στον όγκο του, και ξαναλύστε το πρόβλημα.

Λύση:

- (α') Θεωρούμε τον φλοιό ως ένα σύνολο από φορτισμένους δακτυλίους. Ισχύουν οι συμμετρίες που αναφέραμε σε προηγούμενη άσκηση. Ξέρουμε ότι το μέτρο ηλεκτρικού πεδίου που προκαλεί ένας δακτύλιος πάνω στην ευθεία που περνάει απ' το κέντρο του και είναι κάθετη στο επίπεδό του δίνεται από τη σχέση

$$E = k_e Q \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.116)$$



Σχήμα 4.14: Κατανομή φορτίου σε κύλινδρο.

και αφορά μόνο τη x -συνιστώσα του, ενώ x είναι μια θέση πάνω στον άξονα που υπολογίζουμε το πεδίο. Ένας ομοιόμορφα φορτισμένος δακτύλιος με πάχος dx έχει φορτίο Qdx/l , και συνεισφέρει ηλεκτρικό πεδίο στο ζητούμενο σημείο που δίνεται ως

$$dE = \frac{k_e x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \frac{Qdx}{l} \quad (4.117)$$

Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο είναι το άθροισμα της συνεισφοράς ηλεκτρικού πεδίου κάθε σημειακού δακτυλίου, δηλ.

$$E = \int dE = \int_d^{d+l} \frac{k_e x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \frac{Qdx}{l} \quad (4.118)$$

$$= \frac{k_e Q}{2l} \int_d^{d+l} (x^2 + R^2)^{-3/2} 2x dx \quad (4.119)$$

$$= \frac{k_e Q}{2l} \frac{(x^2 + R^2)^{-1/2}}{-1/2} \Big|_d^{d+l} \quad (4.120)$$

$$= \frac{k_e Q}{2l} \left[\frac{1}{(d^2 + R^2)^{1/2}} - \frac{1}{((d+l)^2 + R^2)^{1/2}} \right] \quad (4.121)$$

και άρα

$$\vec{E} = \frac{k_e \lambda}{2} \left[\frac{1}{(d^2 + R^2)^{1/2}} - \frac{1}{((d+l)^2 + R^2)^{1/2}} \right] \vec{i} \quad (4.122)$$

(β') Θεωρήστε τον κύλινδρο ως ένα σύνολο από φορτισμένους δίσκους, καθέναν με πάχος dx , φορτίο Qdx/l και επιφανειακό φορτίο $\sigma = Qdx/\pi R^2 l$. Ισχύουν οι συμμετρίες που αναφέραμε σε προηγούμενη άσκηση. Ξέρουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που συνεισφέρει ένας δίσκος πάνω στην ευθεία που περνάει απ' το κέντρο του και είναι κάθετη στο επίπεδό του δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{2k_e Q}{R^2} \left(1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right) \quad (4.123)$$

και αφορά μόνο τη x -συνιστώσα του, ενώ x είναι μια θέση πάνω στον άξονα που υπολογίζουμε το πεδίο. Ένας δίσκος συνεισφέρει ηλεκτρικό πεδίο

$$dE = \frac{2\pi k_e Q dx}{R^2 l} \left(1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right) \quad (4.124)$$

Οπότε το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο είναι το άθροισμα της συνεισφοράς ηλεκτρικού πεδίου κάθε δίσκου, δηλ.

$$E = \int dE = \int_d^{d+l} \frac{2\pi k_e Q dx}{R^2 l} \left(1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right) \quad (4.125)$$

$$= \frac{2k_e Q}{R^2 l} \left[\int_d^{d+l} dx - \frac{1}{2} \int_d^{d+l} (x^2 + R^2)^{-1/2} 2x dx \right] \quad (4.126)$$

$$= \frac{2k_e Q}{R^2 l} \left[x \Big|_d^{d+l} - \frac{1}{2} \frac{(x^2 + R^2)^{1/2}}{1/2} \Big|_d^{d+l} \right] \quad (4.127)$$

$$= \frac{2k_e Q}{R^2 l} \left[l + (d^2 + R^2)^{1/2} - ((d+l)^2 + R^2)^{1/2} \right] \quad (4.128)$$

και άρα

$$\vec{E} = \frac{2k_e Q}{R^2 l} \left[l + (d^2 + R^2)^{1/2} - ((d+l)^2 + R^2)^{1/2} \right] \vec{i} \quad (4.129)$$

■

Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα χρησιμοποιήσαμε την ίδια φιλοσοφία προσέγγισης: από ένα μικρό, “σημειακό” φορτίο (είτε πραγματικό είτε απλά κατανομή μικρού φορτίου) γενικεύσαμε σε ολόκληρη την κατανομή φορτίου: υπολογίσαμε αρχικά τη συνεισφορά του πεδίου σε ένα σημείο λόγω σημειακού φορτίου και αθροίσαμε (ολοκληρώσαμε) όλες τις συνεισφορές που οφείλονται στα σημειακά φορτία που αποτελούν την κατανομή, βρίσκοντας έτσι το ηλεκτρικό της πεδίο.

4.4.3 Δυναμικές Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου

Ένα σημαντικό διαισθητικό πρόβλημα στη μελέτη και κατανόηση των ηλεκτρικών πεδίων είναι ότι δεν μπορούμε να τα δούμε. Μπορούμε να καταλάβουμε την ύπαρξη τους με όσα έχουμε αναφέρει, αλλά μέχρι εκεί. Ας προσπαθήσουμε λοιπόν να αυξήσουμε την κατανόησή μας για αυτά. Ένας βολικός τρόπος αναπαράστασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι οι **δυναμικές γραμμές**: ένα εργαλείο *αναπαράστασης* του ηλεκτρικού πεδίου, και όχι πραγματικές “γραμμές” στο χώρο.

Οι δυναμικές γραμμές σχεδιάζονται με συγκεκριμένο τρόπο, ακολουθώντας τους παρακάτω κανόνες:

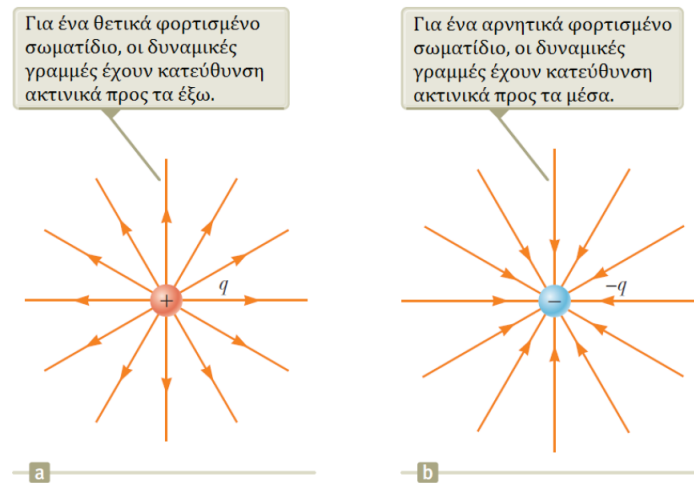
- Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ είναι εφαπτόμενο σε μια δυναμική γραμμή που διέρχεται από κάθε σημείο του χώρου.
- Η κατεύθυνση μιας δυναμικής γραμμής σε ένα σημείο του χώρου είναι η ίδια με την κατεύθυνση της δύναμης (και άρα και της επιτάχυνσης) που θα ασκούνταν σε ένα θετικά φορτισμένο δοκιμαστικό φορτίο στο σημείο αυτό.
- Ο αριθμός των γραμμών ανά μονάδα επιφάνειας διαμέσου μιας επιφάνειας που είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές είναι ανάλογη του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου: με άλλα λόγια, οι δυναμικές γραμμές είναι πυκνότερες όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι ισχυρότερο (έχει μεγαλύτερη τιμή).

Το φλέγον  ερώτημα λοιπόν είναι **πως τις σχεδιάζουμε**. Ξανά, μπορούμε να σημειώσουμε τέσσερις κανόνες:

- Για μεμονωμένα σημειακά φορτία, οι γραμμές κατευθύνονται ακτινικά προς τα “έξω” (θετικό φορτίο) ή προς τα “μέσα” (αρνητικό φορτίο).
- Για δύο ανόμοια φορτία, οι γραμμές πρέπει να ξεκινούν από θετικό φορτίο και να καταλήγουν σε αρνητικό φορτίο. Αν υπάρχει πλεόνασμα κάποιου φορτίου, τότε κάποιες δυναμικές γραμμές θα ξεκινούν από ή θα τελειώνουν “πολύ μακριά” (στο άπειρο).
- Ο αριθμός των γραμμών που ξεκινούν από ένα θετικό φορτίο ή πλησιάζουν ένα αρνητικό φορτίο είναι ανάλογος του μέτρου του φορτίου.
- Οι δυναμικές γραμμές δεν τέμνονται.

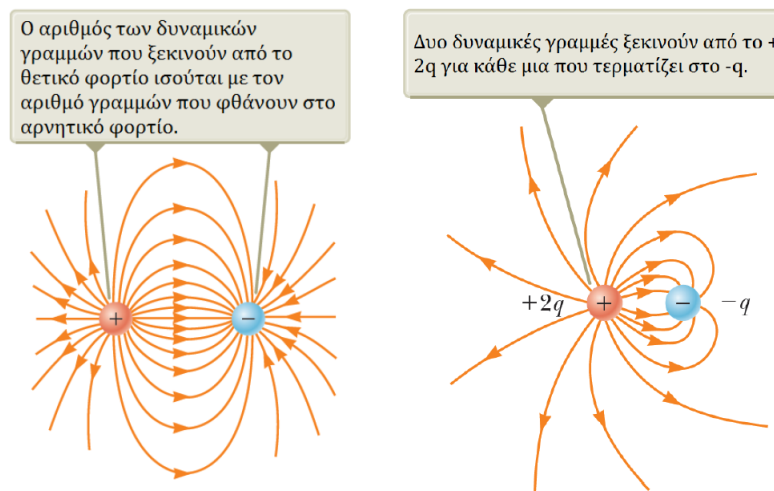
Προσέξτε: οι δυναμικές γραμμές **δεν** αποτελούν την τροχιά κάποιου φορτίου που κινείται στο ηλεκτρικό πεδίο! Εξάιρεση σε αυτήν την πρόταση αποτελούν η περίπτωση ηλεκτρικού πεδίου ενός (μοναδικού) σημειακού φορτίου και η περίπτωση ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου (το οποίο μελετάμε αμέσως μετά), καθώς και άλλες πολύ ειδικές περιπτώσεις. Στην ουσία, οι δυναμικές γραμμές *χαρτογραφούν* το πεδίο στο χώρο αλλά δεν αποτελούν εν γένει κάποιου είδους μονοπάτι!

Για ένα θετικό κι ένα αρνητικό σημειακό φορτίο, οι δυναμικές γραμμές φαίνονται στο Σχήμα 4.15. Όταν δυο ή περισσότερα φορτία βρίσκονται στον ίδιο χώρο, τότε οι δυναμικές γραμμές σχεδιάζονται με



Σχήμα 4.15: Δυναμικές γραμμές σημειακών φορτίων.

βάσει τους παραπάνω κανόνες και φαίνονται στο Σχήμα 4.16.



Σχήμα 4.16: Δυναμικές γραμμές σε ζεύγος σημειακών φορτίων.

4.4.4 Ομογενές Ηλεκτρικό Πεδίο

Πολλές πρακτικές εφαρμογές περιλαμβάνουν τη χρήση ενός **ομογενούς** (ή σχεδόν ομογενούς) ηλεκτρικού πεδίου. Ομογενές ονομάζεται το ηλεκτρικό πεδίο που έχει **όλες τις δυναμικές γραμμές του παράλληλες και ομόρροπες μεταξύ τους**, που ξεκινούν από θετικά φορτία και καταλήγουν σε αρνητικά, ενώ το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι παντού σταθερό.

Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο μάζας m και φορτίου q μέσα σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$. Το ηλεκτρικό πεδίο θα εγείρει ηλεκτρική δύναμη επάνω στο σωματίδιο. Το σωματίδιο θα κινηθεί υπό επίδραση δύναμης, δηλ. θα αποκτήσει επιτάχυνση η οποία δίνεται από το 2ο νόμο του Newton ως

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = m\vec{a} \implies \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} \quad (4.130)$$

Καταλαβαίνετε ότι αν το σωματίδιο έχει θετικό φορτίο $q > 0$, η κίνηση του σωματιδίου θα είναι προς την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου. Στην αντίθετη περίπτωση το σωματίδιο θα κινηθεί προς την αντίθετη κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών.

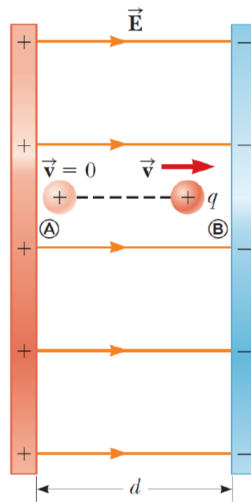
Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.11:

Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ με κατεύθυνση επάνω στον άξονα $x'x$ δημιουργείται ανάμεσα σε δυο παράλληλες φορτισμένες πλάκες που απέχουν απόσταση d , όπως στο Σχήμα 4.17. Σωματίδιο φορτίου $+q$ και μάζας m αφήνεται από το σημείο (A) και επιταχύνεται ως στο σημείο (B).

(α') Βρείτε την ταχύτητα του σωματιδίου στη θέση (B) με εξισώσεις Κινητικής.

(β') Υπολογίστε ξανά το προηγ. ερώτημα με χρήση ενεργειακών θεωρημάτων.



Σχήμα 4.17: Φορτίο σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

Λύση:

(α') Το σώμα μάζας m και φορτίου q εκτελεί ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση. Από τις εξισώσεις της Κινητικής, θεωρώντας θετική φορά προς τα δεξιά,

$$u_B^2 = u_A^2 + 2a_x \Delta x = 0 + 2a_x \Delta x \quad (4.131)$$

Από το 2ο νόμο του Newton στην οριζόντια κίνηση έχουμε

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \iff \vec{F}_e = m\vec{a}_x \implies F_e = ma_x \iff qE = ma_x \iff a_x = \frac{qE}{m} \quad (4.132)$$

και έτσι

$$u_B^2 = 2a_x \Delta x = 2a_x d = \frac{2qEd}{m} \iff u_B = \sqrt{\frac{2qEd}{m}} \quad (4.133)$$

(β') Θεωρούμε ως σύστημα το {φορτίο}, μονομελές και μη απομονωμένο. Η ηλεκτρική δύναμη που του ασκείται είναι εξωτερική στο σύστημα και παράγει έργο επάνω στο φορτίο. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το ΘΜΚΕΕ ανάμεσα στα σημεία (Α) και (Β).

$$\Delta K_{A \rightarrow B} = \sum W_{ext} \quad (4.134)$$

$$K_B - K_A = W_{F_e} \quad (4.135)$$

$$\frac{1}{2} m u_B^2 - 0 = q E d \quad (4.136)$$

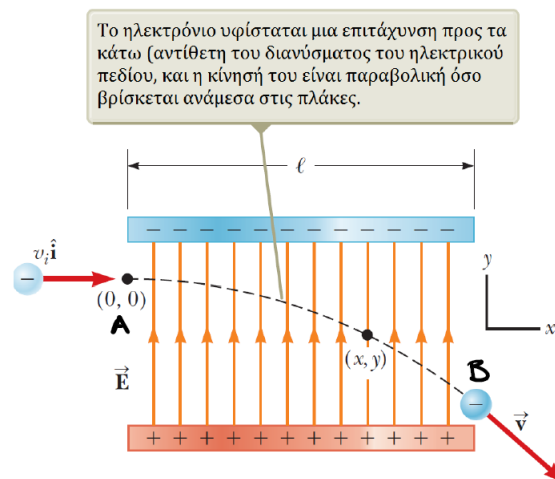
$$u_B^2 = \frac{2qEd}{m} \quad (4.137)$$

$$u_B = \sqrt{\frac{2qEd}{m}} \quad (4.138)$$

Παράδειγμα 4.12:

Ένα ηλεκτρόνιο μπαίνει σε μια περιοχή ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου όπως στο Σχήμα 4.18. Η αρχική ταχύτητα του είναι $u_i = 3 \cdot 10^6$ m/s και το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι $E = 200$ N/C. Το οριζόντιο μήκος των πλακών είναι $l = 0.1$ m. Θεωρήστε γνωστή τη μάζα του ηλεκτρονίου m_e και το φορτίο του, e .

- (α') Βρείτε την επιτάχυνση του ηλεκτρονίου όσο βρίσκεται ανάμεσα στις πλάκες.
 (β') Υποθέτοντας ότι το ηλεκτρόνιο μπαίνει στο πεδίο τη χρονική στιγμή $t = 0$, βρείτε το χρόνο που εγκαταλείπει το πεδίο.
 (γ') Υποθέτοντας ότι η y -συνιστώσα του ηλεκτρονίου όταν μπαίνει στο ηλεκτρικό πεδίο είναι $y = 0$, ποιά είναι αυτή με την οποία εγκαταλείπει το πεδίο;



Σχήμα 4.18: Ηλεκτρόνιο σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

Λύση:

- (α') Το ηλεκτρόνιο επιταχύνεται λόγω του ηλεκτρικού πεδίου, το οποίο προκαλεί ηλεκτρική δύναμη $\vec{F}_e$ με φορά προς τα κάτω, αντίθετα από τη φορά των δυναμικών γραμμών. Το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα στον οριζόντιο άξονα ενώ επιταχύνεται στον κατακόρυφο άξονα της κίνησης του. Θεωρώντας νοητό σύστημα αξόνων με αναφορά το σημείο Α (0, 0), και θεωρώντας ως θετικές φορές της κίνησης τις συμβατικές, εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Newton στον άξονα y ' y :

$$\sum \vec{F}_y = m_e \vec{a}_y \iff \vec{F}_e = m_e \vec{a}_y \implies -F_e = m_e a_y \implies a_y = -\frac{eE}{m_e} \quad (4.139)$$

- (β') Το ηλεκτρόνιο βγαίνει από το πεδίο όταν διανύσει οριζόντια απόσταση l , όσο το μήκος των πλακών. Στον οριζόντιο άξονα το σωματίδιο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση, δηλ.

$$x_B = x_A + u_x t \iff l = 0 + u_x t \iff t = \frac{l}{u_x} = \frac{10^{-1}}{3 \cdot 10^6} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-7} \text{ s} \quad (4.140)$$

- (γ') Ξανά στον y -άξονα, από τις εξισώσεις της Κινητικής

$$y_B = y_A + u_{yA}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (4.141)$$

$$= 0 + 0t + \frac{1}{2} \left(-\frac{eE}{m_e} \right) \left(\frac{l}{u_x} \right)^2 \quad (4.142)$$

$$= -\frac{eEl^2}{2m_e u_x} \quad (4.143)$$

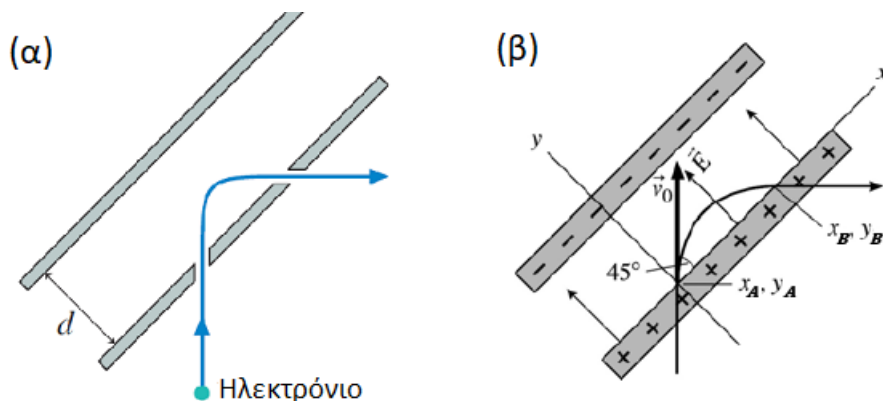
$$\approx -0.0195 \text{ m} \quad (4.144)$$

αποτέλεσμα που συμφωνεί με τη διαίσθησή μας και το σχήμα.

Παράδειγμα 4.13:

Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές, χρειάζεται να κάνουμε μια δέσμη ηλεκτρονίων να στρίψει κατά 90° . Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω της διάταξης του παρακάτω σχήματος. Ένα ηλεκτρόνιο με κινητική ενέργεια $3 \cdot 10^{-17} \text{ J}$ εισέρχεται από μια μικρή οπή από το κάτω μέρος της διάταξης, όπως στο Σχήμα 4.19. Το ηλεκτρόνιο έχει μάζα $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ και φορτίο $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

- (α') Πως θα πρέπει να είναι φορτισμένες οι δύο πλάκες ώστε το ηλεκτρόνιο να στρίψει δεξιά;
(β') Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου αν το ηλεκτρόνιο εξέρχεται από οπή η οποία βρίσκεται 1 cm μακριά από την οπή εισόδου;



Σχήμα 4.19: Ηλεκτρόνιο σε στροφή 90 μοιρών σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

Λύση:

Το ηλεκτρικό πεδίο στην διάταξη είναι ομοιόμορφο, επομένως τα ηλεκτρόνια θα έχουν σταθερή επιτάχυνση. Δείτε το Σχήμα 4.19(β).

- (α') Η πλάκα που βρίσκεται στο κάτω μέρος της διάταξης θα έχει θετική φόρτιση. Το ηλεκτρόνιο θα πρέπει να απωθηθεί από την πλάκα του άνω μέρους, δηλαδή θα πρέπει να έχει αρνητική φόρτιση. Το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να έχει κατεύθυνση όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.19, άρα η κατεύθυνση του ηλεκτρονίου $\vec{d}$ είναι προς την πλάκα που βρίσκεται στο κάτω μέρος.

(β') Επιλέγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων xy ώστε ο άξονας x' να είναι παράλληλος με την πλάκα, που βρίσκεται στο κάτω μέρος της διάταξης. Η αρχή των αξόνων είναι το σημείο εισόδου του ηλεκτρονίου. Τότε η επιτάχυνση του ηλεκτρονίου, που είναι παράλληλη με το ηλεκτρικό πεδίο, είναι $\vec{a} = a\vec{j}$. Για την κινητική ενέργεια έχουμε

$$K_A = \frac{1}{2}m_e u_0^2 = 3 \cdot 10^{-17} \text{ J} \quad (4.145)$$

η οποία μας δίνει αρχική ταχύτητα

$$u_0 = \sqrt{\frac{2K_A}{m_e}} = 8.115 \cdot 10^6 \text{ m/s} \quad (4.146)$$

Άρα οι συνιστώσες της ταχύτητας, στην αρχική θέση A, είναι

$$u_{xA} = u_A \cos 45^\circ = 5.72 \cdot 10^6 \text{ m/s} \quad (4.147)$$

$$u_{yA} = u_A \sin 45^\circ = 5.72 \cdot 10^6 \text{ m/s} \quad (4.148)$$

Ποια επιτάχυνση $\vec{a}$ επιτρέπει στο ηλεκτρόνιο να περάσει από το σημείο $(x_B, y_B) = (1 \text{ cm}, 0 \text{ cm})$; Για τις εξισώσεις κίνησης έχουμε

$$x_B = x_A + u_{xA}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = u_{xA}t = 0.01 \text{ m} \quad (4.149)$$

$$y_B = y_A + u_{yA}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 0.01 \text{ m} \quad (4.150)$$

Από την εξίσωση στον άξονα x' βρίσκουμε

$$t = \frac{x_B}{u_{xA}} = 1.742 \cdot 10^{-9} \text{ s} \quad (4.151)$$

Συνεπώς από την εξίσωση στον άξονα y' έχουμε

$$a_y = \frac{2u_{yA}t}{t^2} = -6.59 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2 \quad (4.152)$$

Όμως η επιτάχυνση του ηλεκτρονίου σε ηλεκτρικό πεδίο είναι

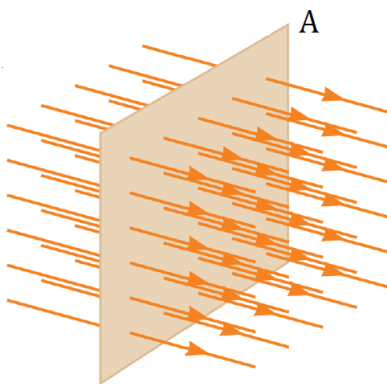
$$a_y = \frac{F_e}{m_e} = \frac{q_e E}{m_e} = -\frac{eE}{m_e} \implies E = -\frac{m_e a}{e} = 37.5 \text{ N/C} \quad (4.153)$$

4.5 Ο Νόμος του Gauss

Σε αυτήν την παράγραφο θα γνωρίσουμε τον περίφημο Νόμο του Gauss, ο οποίος αποτελεί μια από τις διάσημες εξισώσεις του Maxwell. Ο Νόμος του Gauss είναι ένα πολύ χρήσιμο μαθηματικό εργαλείο στις περιπτώσεις που θέλουμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ και το τελευταίο έχει κάποια γεωμετρική συμμετρία. Πριν πάμε όμως στο Νόμο του Gauss πρέπει να περάσουμε από μια άλλη σημαντική έννοια: αυτή της **ηλεκτρικής ροής**.

4.5.1 Ηλεκτρική Ροή

Ως τώρα, θεωρήσαμε το φαινόμενο των δυναμικών γραμμών με ποιοτικό τρόπο. Ήρθε η ώρα να το μελετήσουμε λίγο περισσότερο “ποσοτικά”. Έστω ότι έχουμε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, όπως στο Σχήμα 4.20. Οι δυναμικές γραμμές “κόβουν” κάθετα την επιφάνεια, η οποία έστω ότι έχει εμβαδόν A . Στην εισαγωγή μας για τις δυναμικές γραμμές αναφέραμε ότι η πυκνότητα των γραμμών είναι ανάλογη του μέτρου του πεδίου: πυκνές γραμμές σημαίνει μεγάλο μέτρο πεδίου, ενώ αραιές γραμμές σημαίνει μικρό



Σχήμα 4.20: Επιφάνεια κάθετη σε ομογενές πεδίο.

μέτρο πεδίου. Μπορούμε να πούμε ότι ο αριθμός των δυναμικών γραμμών είναι ανάλογος του γινομένου EA . Αυτό το γινόμενο ονομάζεται **ηλεκτρική ροή** Φ_E . Προτού προχωρήσουμε, ας γίνει ξεκάθαρο ότι δεν υπάρχει τίποτα “ρευστό” στην παραπάνω κατάσταση ή στον ορισμό της ροής. Το πεδίο είναι στατικό, και απλώς είναι μια λέξη που περιγράφει το ηλεκτρικό πεδίο που “διαπερνά” μια επιφάνεια. Έχουμε λοιπόν τον πρώτο ορισμό της ηλεκτρικής ροής για κάθετες στις δυναμικές γραμμές επιφάνειες:

$$\Phi_E = EA \quad (4.154)$$

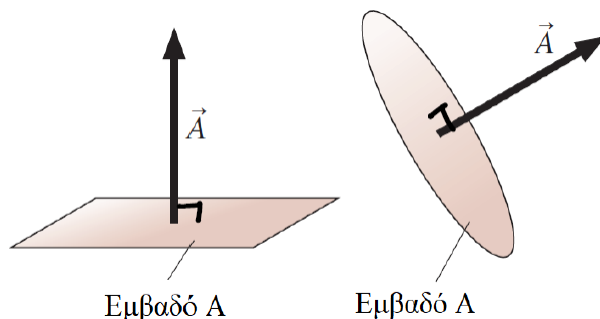
Αν όμως η επιφάνεια δεν είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές; Δεδομένου ότι ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που περνά την κάθετη επιφάνεια και τη μη-κάθετη επιφάνεια είναι ο ίδιος, αυτό που αλλάζει είναι το εμβαδό, το οποίο στην μη-κάθετη επιφάνεια είναι

$$A = A_{\text{perp}} \cos(\theta) \quad (4.155)$$

με θ τη γωνία που σχηματίζουν τα δυο επίπεδα. Αν $\theta = 0$, τότε η επιφάνεια είναι παράλληλη με τις δυναμικές γραμμές και η ηλεκτρική ροή είναι μηδέν. Άρα για επιφάνειες όχι κάθετες με τις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου, η ηλεκτρική ροή δίνεται ως

$$\Phi_E = EA \cos(\theta) \quad (4.156)$$

Όμως το πεδίο σε πολλές περιπτώσεις δεν είναι ομογενές: μπορεί να μεταβάλλεται με την απόσταση ή με

Σχήμα 4.21: Διάνυσμα $\vec{A}$ μιας επιφάνειας.

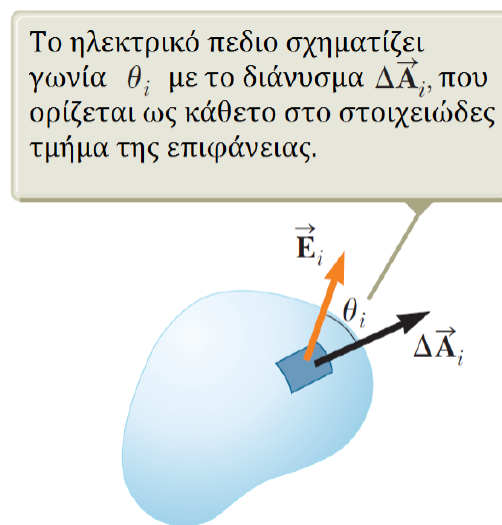
το μέρος της επιφάνειας. Οι ορισμοί που δώσαμε έχουν νόημα για μικρές επιφάνειες με σταθερό ηλεκτρικό πεδίο, αλλά θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμοι στη συνέχεια. Επίσης, το γινόμενο $EA \cos(\theta)$ πρέπει να σας θυμίζει κάτι: μοιάζει με το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων $\vec{E}$ και $\vec{A}$. Μόνο που πράγματι το $\vec{E}$ είναι διάνυσμα αλλά το εμβαδό A της επιφάνειας είναι μονόμετρο μέγεθος (αριθμητική τιμή). Μπορούμε

να κάνουμε κάτι γι' αυτό; Μπορούμε να ορίσουμε ένα διάνυσμα $\vec{A}$ το οποίο θα είναι πάντα κάθετο σε μια επιφάνεια που θα του αντιστοιχίσουμε. Επίσης, μπορούμε να ορίσουμε το μέτρο του διανύσματος αυτού να είναι πάντα ίσο με το εμβαδό της επιφάνειας στην οποία αντιστοιχίζεται! Τέτοια διανύσματα $\vec{A}$ βλέπετε στο Σχήμα 4.21. Με βάση τα παραπάνω μπορούμε τώρα να γράψουμε την ηλεκτρική ροή ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου E διαμέσου μιας επιφάνειας εμβαδού A ως ένα εσωτερικό γινόμενο:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos(\theta) \quad (4.157)$$

με θ τη γωνία μεταξύ των δυο διανυσμάτων.

Ας φύγουμε από τις επίπεδες επιφάνειες και ας πάμε σε γενικότερες. Μια γενική επιφάνεια μπορεί να χωριστεί σε πολύ μικρά στοιχεία επιφάνειας, καθένα με εμβαδό ΔA . Ας ορίσουμε το διάνυσμα $\Delta \vec{A}_i$ του οποίου το μέτρο ισούται με το εμβαδόν του i -οστού στοιχείου της επιφάνειας. Το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στο στοιχείο εμβαδού ΔA_i της επιφάνειας. Έστω ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\vec{E}_i$ στη θέση αυτή και σχηματίζει γωνία θ_i με το διάνυσμα $\Delta \vec{A}_i$, όπως στο Σχήμα 4.22. Η ηλεκτρική ροή διαμέσου αυτής της



Σχήμα 4.22: Τμήμα γενικής επιφάνειας και διανύσματα $\vec{E}$, $\Delta \vec{A}_i$.

επιφάνειας θα είναι

$$\Delta \Phi_{E_i} = \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{A}_i = E_i \Delta A_i \cos(\theta_i) \quad (4.158)$$

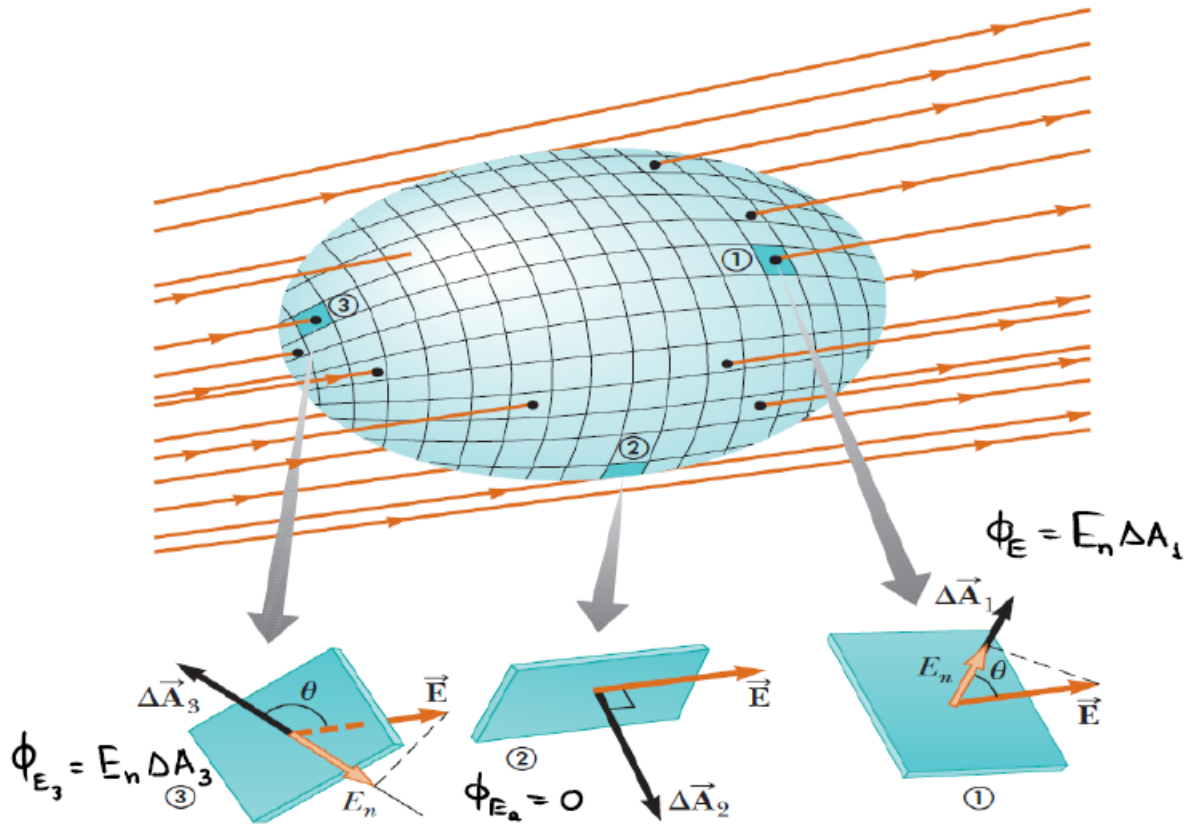
Η συνολική ροή μπορεί να βρεθεί αν τμηματοποιήσουμε σε μικρά τμήματα τη γενική επιφάνεια, υπολογίσουμε τη συνεισφορά ηλεκτρικής ροής από κάθε τμήμα, και αθροίσουμε όλες τις συνεισφορές ροής $\Delta \Phi_{E_i}$ από όλα τα μικρά τμήματα επιφάνειας ΔA_i . Αν τα τμήματα αυτά γίνουν απειροστά μικρά τότε

$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta \Phi_{E_i} = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{A}_i = \int_{\text{επιφάνεια}} \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (4.159)$$

Μη σας προβληματίζει το διανυσματικό ολοκλήρωμα επάνω σε μια επιφάνεια². Θα δούμε τρόπους να το υπολογίσουμε αρκετά απλά και εύκολα.

Μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα οι κλειστές επιφάνειες για την εύρεση της ηλεκτρικής ροής διαμέσου των επιφανειών αυτών. Μια κλειστή επιφάνεια χωρίζει το χώρο σε μια εσωτερική και μια εξωτερική περιοχή, χωρίς να μπορεί κάποιος ή κάτι να κινηθεί από τον ένα χώρο στον άλλο χωρίς να διασχίσει την επιφάνεια του χώρου. Μια τέτοια κλειστή επιφάνεια είναι η επιφάνεια μιας σφαίρας. Ας δούμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις που το ηλεκτρικό πεδίο, ως διάνυσμα, επιδρά σε τμήματα μιας κλειστής επιφάνειας. Δείτε το Σχήμα 4.23. Παρατηρήστε τις περιπτώσεις (1), (2), (3). Στην περίπτωση (1), το ηλεκτρικό πεδίο και το

²Εντάξει, δε λέω πως δεν προκαλεί αίσθηση... :)



Σχήμα 4.23: Επιφάνεια και δυναμικές γραμμές.

διάνυσμα $\Delta\vec{A}_1$ σχηματίζουν γωνία $\theta < 90^\circ$, οπότε η ηλεκτρική ροή θα είναι

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}_1 = EA_1 \cos(\theta) = E_n A_1 > 0 \quad (4.160)$$

με $E_n = E \cos(\theta)$ την προβολή του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου επάνω στο διάνυσμα $\Delta\vec{A}_1$. Στην περίπτωση (2), το ηλεκτρικό πεδίο και το διάνυσμα $\Delta\vec{A}_2$ σχηματίζουν γωνία $\theta = 90^\circ$, οπότε η ηλεκτρική ροή θα είναι

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}_2 = EA_2 \cos(90^\circ) = 0 \quad (4.161)$$

Στην περίπτωση (3), το ηλεκτρικό πεδίο και το διάνυσμα $\Delta\vec{A}_3$ σχηματίζουν γωνία $\theta > 90^\circ$, οπότε η ηλεκτρική ροή θα είναι

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}_3 = EA_3 \cos(\theta) = E_n A_3 < 0 \quad (4.162)$$

με $E_n = E \cos(\theta)$ την προβολή του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου επάνω στο διάνυσμα $\Delta\vec{A}_3$. Η ηλεκτρική ροή μπορεί λοιπόν να είναι θετική, αρνητική, ή μηδενική.

Νωρίτερα αναφέραμε ότι μια κλειστή επιφάνεια έχει “εσωτερικό” και “εξωτερικό”. Το διάνυσμα $d\vec{A}$ ενός απειροστά μικρού τμήματος της κλειστής επιφάνειας δείχνει πάντα προς τα “έξω”, σε αντίθεση με μια απλή επιφάνεια (όχι κλειστή), η οποία έχει $d\vec{A}$ που μπορεί να δείχνει προς τη μια ή την άλλη πλευρά της. Για τον υπολογισμό της ηλεκτρικής ροής σε μια κλειστή επιφάνεια, έχουμε

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_n dA \quad (4.163)$$

με E_n τη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου κάθετη στην επιφάνεια (ή εναλλακτικά, παράλληλη με το διάνυσμα $d\vec{A}$). Με βάση όσα έχουμε πει ως τώρα, η συνολική ηλεκτρική ροή Φ_E διαμέσου μιας κλειστής

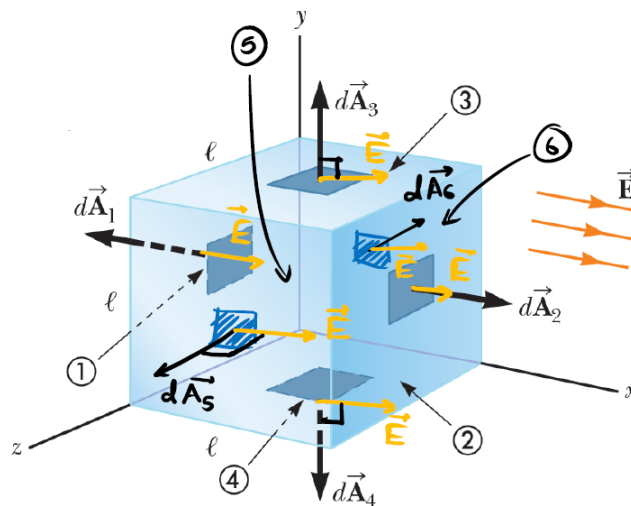
επιφάνειας είναι ανάλογη του αριθμού των δυναμικών γραμμών που εξέρχονται από την επιφάνεια μείον τον αριθμό των δυναμικών γραμμών που εισέρχονται στην επιφάνεια. Αυτό σημαίνει ότι:

- Μπαίνουν περισσότερες δυναμικές γραμμές απόσες βγαίνουν; Αρνητική Φ_E διαμέσου της επιφάνειας
- Βγαίνουν περισσότερες δυναμικές γραμμές απόσες μπαίνουν; Θετική Φ_E διαμέσου της επιφάνειας

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.14:

Θεωρήστε ένα ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ με προσανατολισμό στο x -άξονα του χώρου. Ένας κύβος με μήκος ακμής l τοποθετείται στο πεδίο, όπως στο Σχήμα 4.24. Βρείτε την ηλεκτρική ροή διαμέσου της επιφάνειας του κύβου.



Σχήμα 4.24: Κύβος σε ηλεκτρικό πεδίο.

Λύση:

Από όσα έχουμε πει, περιμένουμε η ηλεκτρική ροή θα είναι μηδέν, αφού όσες δυναμικές γραμμές μπαίνουν από τη μια πλευρά του κύβου, τόσες βγαίνουν από την άλλη (απέναντι) του πλευρά (ο κύβος αποτελεί κλειστή επιφάνεια). Ας επιβεβαιώσουμε τη διαίσθησή μας. Αριθμούμε κάθε πλευρά του κύβου από 1 ως 6. Επιλέγουμε μικρές επιφάνειες εμβαδού dA_i σε καθεμία και σχεδιάζουμε το κάθετο διάνυσμα $d\vec{A}_i$ σε αυτές. Έχουμε

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \sum_{i=1}^6 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}_i \quad (4.164)$$

Επειδή οι πλευρές 3, 4, 5, 6 είναι παράλληλες με τις δυναμικές γραμμές, η ηλεκτρική ροή είναι μηδέν. Μένουν οι επιφάνειες 1, 2. Οπότε

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 \quad (4.165)$$

Τα διανύσματα $\vec{E}, d\vec{A}_1$ είναι αντίρροπα ενώ τα $\vec{E}, d\vec{A}_2$ ομόρροπα, οπότε

$$\vec{E} \cdot d\vec{A}_1 = -E dA_1 \quad (4.166)$$

και

$$\vec{E} \cdot d\vec{A}_2 = E dA_2 \quad (4.167)$$

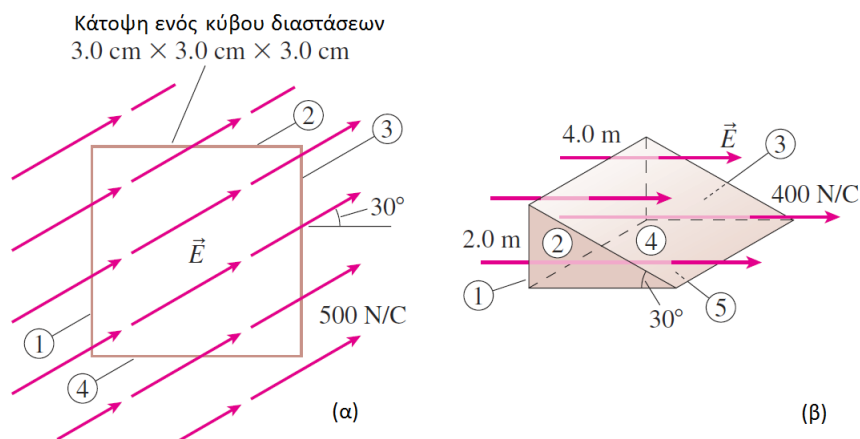
και άρα

$$\Phi_E = - \oint E dA_1 + \oint E dA_2 = -E \oint dA_1 + E \oint dA_2 \quad (4.168)$$

Όμως $\oint A_1 = \oint A_2$, μια και πρόκειται για πλευρές κύβου, και τελικά $\Phi_E = 0$, όπως αναμέναμε.

Παράδειγμα 4.15:

- (α') Το Σχήμα 4.25(α) δείχνει μια κάτοψη ενός κύβου διαστάσεων $3 \cdot 3 \cdot 3$ εκατοστών. Βρείτε την ηλεκτρική ροή Φ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ των επιφανειών 1 ως 4. Πόση είναι η συνολική ηλεκτρική ροή διαμέσου του κύβου;
- (β') Βρείτε την ηλεκτρική ροή Φ_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ των επιφανειών 1 ως 5 του Σχήματος 4.25(β). Πόση είναι η συνολική ηλεκτρική ροή διαμέσου του στερεού;



Σχήμα 4.25: Ηλεκτρική ροή διαμέσου στερεών.

Λύση:

- (α') Η ηλεκτρική ροή διαμέσου μιας επιφάνειας A είναι $\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos(\theta)$, όπου θ η γωνία μεταξύ του ηλεκτρικού πεδίου και του διανύσματος $\vec{A}$ που είναι κάθετο στην επιφάνεια, έχει μέτρο ίσο με το εμβαδό της επιφάνειας, και δείχνει προς τα έξω από την επιφάνεια. Άρα

$$\Phi_1 = EA \cos(\theta_1) = 500 \cdot 9 \cdot 10^{-4} \cdot \cos(150^\circ) = -0.39 \text{ Nm}^2/\text{C} \quad (4.169)$$

$$\Phi_2 = EA \cos(\theta_2) = 500 \cdot 9 \cdot 10^{-4} \cdot \cos(60^\circ) = 0.23 \text{ Nm}^2/\text{C} \quad (4.170)$$

$$\Phi_3 = EA \cos(\theta_3) = 500 \cdot 9 \cdot 10^{-4} \cdot \cos(30^\circ) = 0.39 \text{ Nm}^2/\text{C} \quad (4.171)$$

$$\Phi_4 = EA \cos(\theta_4) = 500 \cdot 9 \cdot 10^{-4} \cdot \cos(120^\circ) = -0.23 \text{ Nm}^2/\text{C} \quad (4.172)$$

Η συνολική ροή διαμέσου των επιφανειών είναι $\Phi_T = \sum \Phi_i = 0 \text{ Nm}^2/\text{C}$.

- (β') Το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια 1 και παράλληλο στις επιφάνειες 2, 3, και 5. Επίσης, η γωνία μεταξύ των $\vec{E}$ και $\vec{A}_4$ είναι 60° μοίρες. Η ηλεκτρική ροή σε αυτές τις 5 επιφάνειες είναι

$$\Phi_1 = E_1 A_1 \cos(\theta_1) = 400 \cdot 2 \cdot \cos(180^\circ) = -3200 \text{ Nm}^2/\text{C} \quad (4.173)$$

$$\Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_5 = 0 \text{ Nm}^2/\text{C} \quad (4.174)$$

$$\Phi_4 = E_4 A_4 \cos(\theta_4) = 400 \cdot \frac{2}{\sin(30^\circ)} \cdot 4 \cdot \cos(60^\circ) = 3200 \text{ Nm}^2/\text{C} \quad (4.175)$$

Η συνολική ηλεκτρική ροή είναι μηδέν ξανά.

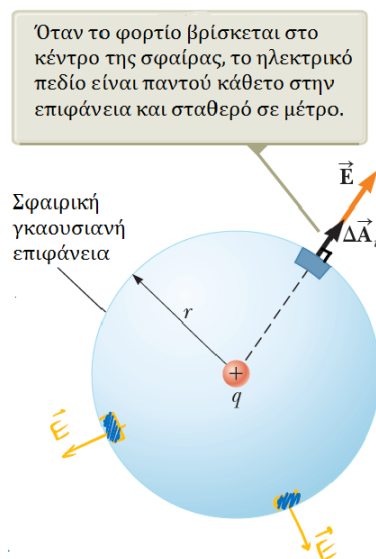
Τώρα που γνωρίζουμε κάποια πράγματα για την ηλεκτρική ροή, υπάρχει άραγε κάποια σχέση μεταξύ της ηλεκτρικής ροής σε μια κλειστή επιφάνεια και του φορτίου που περικλείεται μέσα σε αυτήν; Η απάντηση είναι **ναι** και η σχέση αυτή ονομάζεται **Νόμος του Gauss**.

Ο Νόμος του Gauss είναι θεμελιώδους σημασίας στη μελέτη των ηλεκτρικών πεδίων, καθώς αποτελεί το ισοδύναμο του νόμου του Coulomb για ηλεκτρικά πεδία σημειακών φορτίων, αλλά εφαρμόζεται σε συνεχείς κατανομές πολύ πιο εύκολα απ' ό,τι ο νόμος του Coulomb, ενώ επίσης εφαρμόζεται και σε κινούμενα φορτία κάθε ταχύτητας. Με άλλα λόγια, αποτελεί έναν **περισσότερο θεμελιώδη νόμο** για τα ηλεκτρικά πεδία από το νόμο του Coulomb.

Η φράση “κλειστή επιφάνεια” θα παίξει πολύ σημαντικό ρόλο στη συνέχεια - ήδη γνωρίζουμε τον ορισμό της, πολλές φορές θα την αναφέρουμε και ως γκαουσιανή (Gaussian) επιφάνεια. Ας δούμε λοιπόν το νόμο του Gauss. Έστω ένα θετικό φορτίο q στο κέντρο μιας σφαίρας ακτίνας r . Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της σφαίρας είναι

$$E = k_e \frac{q}{r^2} \quad (4.176)$$

Οι δυναμικές γραμμές είναι παντού κάθετες στην επιφάνεια της σφαίρας, όπως βλέπετε από το Σχήμα 4.26. Άρα το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ είναι πάντα παράλληλο με οποιοδήποτε διάνυσμα $\Delta\vec{A}$ που ανήκει σε τμήμα



Σχήμα 4.26: Φορτίο στο κέντρο γκαουσιανής σφαιρικής επιφάνειας.

της σφαίρας ΔA . Έτσι, το εσωτερικό γινόμενο $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ θα είναι αλγεβρικό. Αν το τμήμα αυτό γίνει πολύ μικρό (dA) τότε η συνολική ηλεκτρική ροή διαμέσου της επιφάνειας της σφαίρας θα είναι

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA \quad (4.177)$$

Το ολοκλήρωμα $\oint dA$ ισούται με το εμβαδόν της γκαουσιανής επιφάνειας, δηλ.

$$\oint dA = 4\pi r^2 \quad (4.178)$$

Οπότε

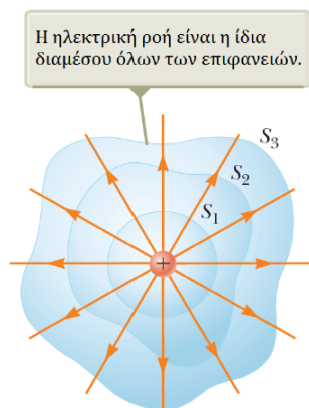
$$\Phi_E = E \oint dA = k_e \frac{q}{r^2} (4\pi r^2) = 4\pi k_e q \quad (4.179)$$

και αν θέσουμε $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$, τελικά θα έχουμε

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.180)$$

Βρήκαμε λοιπόν την ηλεκτρική ροή διαμέσου μιας σφαιρικής επιφάνειας που περικλείει ένα φορτίο q .

Εύκολα μπορεί να θέσει κάποιος/α το ερώτημα “και τι θα συμβεί αν η επιφάνεια δεν είναι σφαιρική;”. Είπαμε ότι η ηλεκτρική ροή είναι ανάλογη του αριθμού των δυναμικών γραμμών που περνούν μέσα από μια επιφάνεια. Αν λοιπόν ένα φορτίο περικλείεται από μια ακανόνιστη επιφάνεια, ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που θα τη διαπερνούν θα είναι ακριβώς ο ίδιος που διαπερνά μια σφαιρική επιφάνεια! Δείτε το Σχήμα 4.27. Το σχήμα επιβεβαιώνει το συμπέρασμά μας. Η επιφάνεια S_1 είναι σφαιρική, άρα $\Phi_E = q/\epsilon_0$,



Σχήμα 4.27: Ηλεκτρική ροή διαμέσου ακανόνιστων επιφανειών.

και αυτή είναι η τιμή της ηλεκτρικής ροής για κάθε μια από τις υπόλοιπες επιφάνειες S_2, S_3 . Οπότε

Ηλεκτρική Ροή Κλειστής Επιφάνειας

Η ηλεκτρική ροή Φ_E διαμέσου οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας γύρω από ένα σημειακό φορτίο είναι

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

και είναι ανεξάρτητη από το σχήμα της.

Τα ερωτήματα όμως παραμένουν: “τι θα αλλάξει αν το φορτίο είναι έξω από την επιφάνεια;”. Η απάντηση εδώ είναι ότι κάθε δυναμική γραμμή του πεδίου του φορτίου που εισέρχεται στην κλειστή επιφάνεια βγαίνει από ένα άλλο μέρος της επιφάνειας. Ο αριθμός των γραμμών που μπαίνουν ισούται με αυτόν που βγαίνουν! Άρα η ηλεκτρική ροή διαμέσου κλειστής επιφάνειας που ΔΕΝ περιέχει φορτίο είναι μηδέν! Μπορείτε μάλιστα να το αποδείξετε, θεωρώντας μικρές επιφάνειες εισόδου με εμβαδόν ΔA και μικρές επιφάνειες εξόδου ΔA των δυναμικών γραμμών, και να υπολογίσετε την ηλεκτρική ροή σε καθεμία, και μετά να τις προσθέσετε.

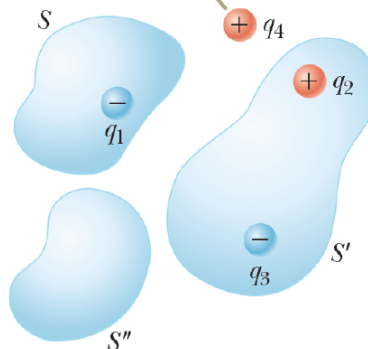
4.5.2 Νόμος του Gauss και Σημειακά Φορτία

Ας επεκτείνουμε τη συζήτησή μας για πολλά (M το πλήθος) φορτία. Η ηλεκτρική ροή για M σημειακά φορτία θα είναι

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint \left(\sum_{i=1}^M \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{A} \quad (4.181)$$

Για παράδειγμα, δείτε το Σχήμα 4.28. Η ηλεκτρική ροή διαμέσου της επιφάνειας S είναι $\Phi_E = \frac{q_1}{\epsilon_0}$. Για την

Το φορτίο q_4 δε συνεισφέρει στην ηλεκτρική ροή καμιάς επιφάνειας επειδή βρίσκεται εκτός όλων των επιφανειών.



Σχήμα 4.28: Ηλεκτρική ροή από πολλά φορτία.

επιφάνεια S' , είναι $\Phi_E = \frac{q_2 + q_3}{\epsilon_0}$, ενώ για την επιφάνεια S'' είναι μηδέν, καθώς δεν περικλείει φορτίο. Το φορτίο q_4 δε συνεισφέρει ηλεκτρική ροή σε καμία επιφάνεια. Εν τέλει

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \quad (4.182)$$

με q_{in} το φορτίο που περιέχεται εντός της επιφάνειας και $\vec{E}$ το ηλεκτρικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο αυτής.

Παράδειγμα 4.16:

Μια σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια περικλείει φορτίο q και έχει ηλεκτρική ροή Φ_E . Τι συμβαίνει στην τελευταία αν

- (α') το φορτίο εντός της τριπλασιάζεται
- (β') η ακτίνα της σφαίρας διπλασιάζεται
- (γ') η επιφάνεια μετατρέπεται σε κύβο
- (δ') το φορτίο μετακινείται σε άλλο σημείο

Λύση:

(α') Σύμφωνα με τη σχέση

$$\Phi_E = \frac{q_{in}}{\epsilon} \quad (4.183)$$

αν $q'_{in} = 3q_{in}$, τότε προφανώς $\Phi'_E = 3\Phi_E$.

(β') Αν η σφαίρα εξακολουθεί να περικλείει το ίδιο φορτίο, τότε δεν αλλάζει η ηλεκτρική ροή.

(γ') Το σχήμα της επιφάνειας δεν παίζει ρόλο, άρα η ηλεκτρική ροή παραμένει ίδια.

(δ') Αν το φορτίο παραμένει εντός της επιφάνειας τότε δεν αλλάζει κάτι.

4.5.3 Νόμος του Gauss και Κατανομή Φορτίου

Ο νόμος του Gauss μπορεί να φανεί εξαιρετικά χρήσιμος για την εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου όταν η κατανομή φορτίου είναι συμμετρική. Αυτό συμβαίνει με την κατάλληλη επιλογή γκαουσιανής (κλειστής) επιφάνειας όπου το διάνυσμα $d\vec{A}$ στο ολοκλήρωμα ορίζεται – και υπολογίζεται – εύκολα. Η επιλογή της γκαουσιανής επιφάνειας πρέπει να είναι τέτοια που να ταιριάζει στη συμμετρία της κατανομής φορτίου. Επιπλέον πρέπει να εκμεταλλευόμαστε τη συμμετρία κατανομής φορτίου για να βγάλουμε το ηλεκτρικό

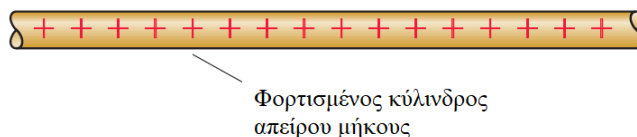
πεδίο $\vec{E}$ εκτός ολοκληρώματος. Αν δεν μπορούμε να βρούμε μια τέτοια επιφάνεια, τότε ο νόμος του Gauss εξακολουθεί να ισχύει αλλά δε μας είναι χρήσιμος για την εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου.

Ας δούμε μερικά είδη συμμετρίας για να κατανοήσουμε καλύτερα την επιλογή επιφάνειας που πρέπει να κάνουμε κάθε φορά. Υποθέστε ότι για ένα ηλεκτρικό πεδίο δε γνωρίζετε τίποτα εκτός του ότι:

- η φορά του είναι από θετικά προς αρνητικά φορτία
- το πεδίο εγείρει μια ηλεκτρική δύναμη σε ένα φορτισμένο σωματίδιο που θα βρεθεί εντός του

Τι μπορείτε να συμπεράνετε για το ηλεκτρικό πεδίο; Σίγουρα όχι πολλά περισσότερα. Αν όμως σας πει κάποιος ότι το ηλεκτρικό πεδίο οφείλεται σε μια κατανομή φορτίου που διατηρεί μια συμμετρία, θα αλλάξει η απάντησή σας; Πριν απαντήσουμε, ας εξηγήσουμε τι ονομάζουμε *συμμετρική* κατανομή φορτίου: είναι η κατανομή που δε μεταβάλλεται από κάποια ομάδα γεωμετρικών μετασχηματισμών που εφαρμόζεται πάνω της.

Για παράδειγμα, θεωρήστε τον φορτισμένο κύλινδρο του Σχήματος 4.29. Ο κύλινδρος έχει άπειρο



Σχήμα 4.29: Ομοιόμορφα φορτισμένος κύλινδρος απείρου μήκους.

μήκος. Κλείστε τα μάτια σας και αφήστε ένα φίλο σας να

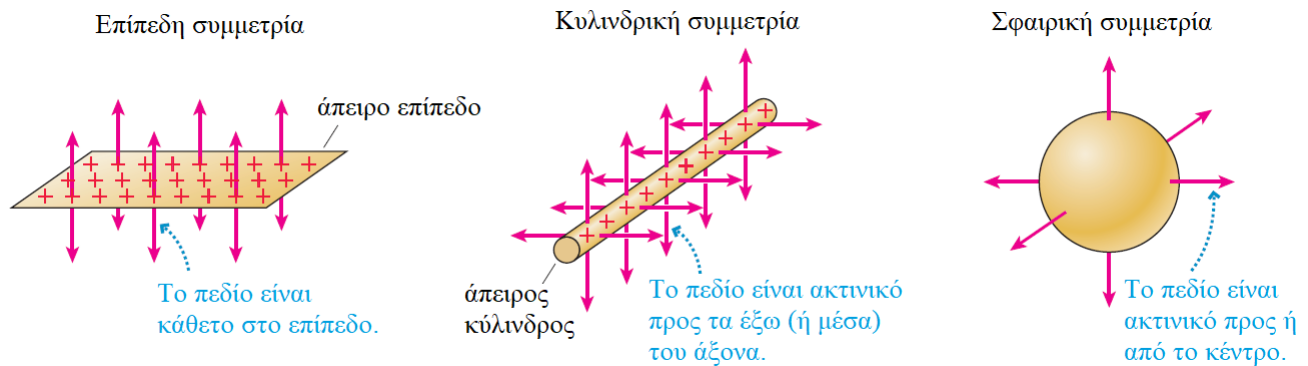
- μετατοπίσει δεξιά-αριστερά τον κύλινδρο (παράλληλα με τον άξονά του)
- περιστρέψει τον κύλινδρο γύρω από τον άξονά του
- αντανakλάσει σε έναν καθρέπτη τον κύλινδρο και σας παρουσιάσει το είδωλό του ως την πραγματική κατανομή

Ανοίξτε τώρα τα μάτια σας. Μπορείτε να καταλάβετε, εμπειρικά ή πειραματικά, αν η κατανομή φορτίου άλλαξε μετά τους μετασχηματισμούς του φίλου σας; Αν όχι, τότε λέμε ότι η κατανομή είναι *συμμετρική* όσον αφορά τον ή τους μετασχηματισμούς που εκτελέστηκαν. Στο παράδειγμα του κυλίνδρου, η συμμετρία είναι κυλινδρική, καθώς ικανοποιεί και τους τρεις μετασχηματισμούς. Όμως υπάρχουν και άλλες συμμετρίες: σφαιρική ή επιπέδου, όπως θα δούμε σύντομα (ή και καθόλου συμμετρίες, βέβαια).

Με βάση τα παραπάνω, η συμμετρία του ηλεκτρικού πεδίου πρέπει να ταιριάζει στη συμμετρία της κατανομής φορτίου! Αν αυτό δεν ίσχυε, τότε θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε το ηλεκτρικό πεδίο για να μάθετε αν άλλαξε η κατανομή του φορτίου μέσω μετασχηματισμού. Με τέτοιους τρόπους μπορούμε να κατανοήσουμε το *σχήμα* του ηλεκτρικού πεδίου.

Θα μας απασχολήσουν οι ακόλουθες συμμετρίες του Σχήματος 4.30 στα επόμενα παραδείγματα. Πρέπει λοιπόν να επιλέξουμε τέτοια επιφάνεια γύρω από το φορτίο ή την κατανομή του έτσι ώστε να ικανοποιείται τουλάχιστον μια από τις παρακάτω συνθήκες σε όλη ή σε τμήμα της επιφάνειας:

1. Η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να θεωρηθεί σταθερή λόγω συμμετρίας επάνω σε όλη την επιφάνεια



Σχήμα 4.30: Κατανομές φορτίων που διατηρούν συμμετρία.

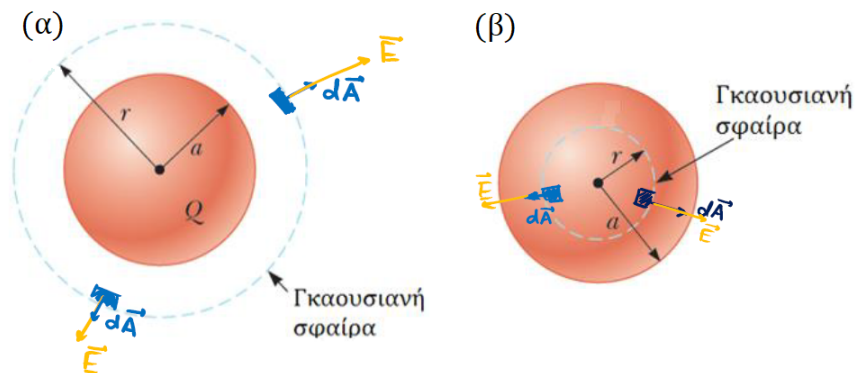
2. Το εσωτερικό γινόμενο του νόμου του Gauss μπορεί να εκφραστεί ως απλό αλγεβρικό γινόμενο $E dA$, δηλ. τα $\vec{E}$, $d\vec{A}$ είναι παράλληλα
3. Το εσωτερικό γινόμενο είναι μηδέν γιατί τα παραπάνω διανύσματα είναι κάθετα
4. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν σε ένα τμήμα επιφάνειας

Ας δούμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα. Ο γενικός κανόνας είναι η γκαουσιανή επιφάνεια που θα επιλέξουμε να “ταιριάζει” με τη συμμετρία της κατανομής φορτίου.

Παράδειγμα 4.17:

Μια μονωμένη στερεή σφαίρα ακτίνας a έχει ομοιόμορφη χωρική πυκνότητα φορτίου ρ σε όλο τον όγκο της και φέρει συνολικό θετικό φορτίο Q .

- (α') Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο εκτός της σφαίρας.
- (β') Επαναλάβετε για ένα σημείο εντός της σφαίρας.



Σχήμα 4.31: Ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα.

Λύση:

- (α') Δείτε το Σχήμα 4.31(α). Ως σφαιρική κατανομή, αναγνωρίζουμε ότι το πρόβλημα έχει σφαιρική συμμετρία και επιλέγουμε σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας r . Ικανοποιούνται οι συνθήκες (1), (2). Εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss και έχουμε

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (4.184)$$

Η συνθήκη (2) μας επιτρέπει να γράψουμε ότι $\vec{E} \cdot d\vec{A} = EA$ και η συνθήκη (1) μας επιτρέπει να βγάλουμε το E έξω από το ολοκλήρωμα. Άρα

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA \quad (4.185)$$

Το ολοκλήρωμα $\oint dA$ ισούται με το εμβαδόν της σφαιρικής επιφάνειας και είναι $A = 4\pi r^2$, οπότε

$$\Phi_E = E \oint dA = 4E\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \implies E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = k_e \frac{Q}{r^2} \quad (4.186)$$

Άρα η σφαίρα συμπεριφέρεται ως σημειακό φορτίο.

(β') Επιλέγουμε σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας $r < a$. Η επιφάνεια περικλείει ένα μικρότερο όγκο σφαίρας για τον οποίο πρέπει να βρούμε πόσο φορτίο περιέχει. Ισχύει ότι

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \quad (4.187)$$

Ξανά, ικανοποιούνται οι συνθήκες (1), (2). Εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\rho V_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \quad (4.188)$$

Λόγω της συνθήκης (2), το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να γραφεί ως αλγεβρικό, και λόγω της (1) μπορούμε να βγάλουμε την ποσότητα E έξω από το ολοκλήρωμα, δηλ.

$$\Phi_E = \oint E dA = \frac{4}{3} \frac{\pi \rho r^3}{\epsilon_0} \iff E \oint dA = \frac{4}{3} \frac{\pi \rho r^3}{\epsilon_0} \iff 4E\pi r^2 = \frac{4}{3} \frac{\pi \rho r^3}{\epsilon_0} \quad (4.189)$$

και άρα το ηλεκτρικό πεδίο έχει μέτρο

$$E = k_e \frac{Q}{a^2} \frac{r}{a} \quad (4.190)$$

Παρατηρήστε τη διαφορά σε σχέση με το προηγούμενο ερώτημα - ένα σφαιρικό υποσύνολο της σφαίρας δε συμπεριφέρεται ως σημειακό φορτίο.

Παράδειγμα 4.18:

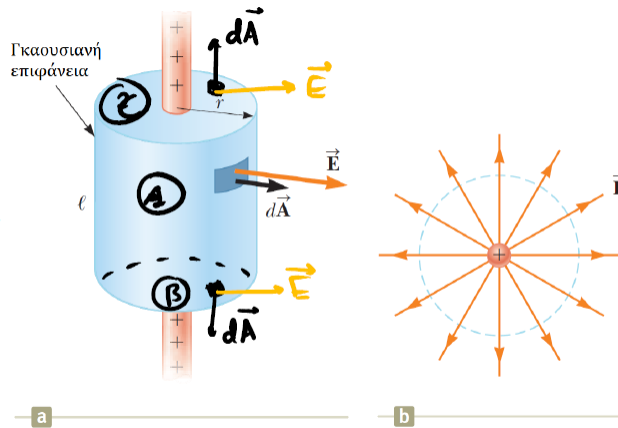
Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r από μια γραμμή θετικά φορτισμένη και άπειρου μήκους. Η γραμμή έχει σταθερή γραμμική πυκνότητα φορτίου λ .

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 4.32. Το πρόβλημα έχει κυλινδρική συμμετρία, οπότε επιλέγουμε γκαουσιανή επιφάνεια έναν κύλινδρο ακτίνας r και μήκους l . Επειδή το μήκος της ράβδου είναι άπειρο, το ηλεκτρικό πεδίο είναι σταθερό σε κάθε σημείο που ισαπέχει απόσταση r από τη ράβδο. Αυτό το δείξαμε ρητά στην εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου σε σημείο μακριά από μια φορτισμένη ράβδο μήκους l . Λόγω αυτού, το ηλεκτρικό πεδίο είναι σταθερό σε κάθε σημείο της επιφάνειας (A). Ικανοποιείται έτσι η συνθήκη (1). Στις επιφάνειες (B), (C) ισχύει ότι $\vec{E} \perp d\vec{A}$. Άρα το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν: ικανοποιείται η συνθήκη (3). Τέλος, στην επιφάνεια (A) ισχύει $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA$, γιατί τα διανύσματα $\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι ομόρροπα: ικανοποιείται η συνθήκη (2). Έχουμε λοιπόν

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \quad (4.191)$$

$$= \oint E dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \quad (4.192)$$



Σχήμα 4.32: Ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδος απείρου μήκους.

$$= E \oint dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \quad (4.193)$$

Το ολοκλήρωμα $\oint dA$ αποτελεί το εμβαδό της επιφάνειας, που είναι $2\pi r l$ και άρα

$$2E\pi r l = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \iff E = \frac{1}{2\pi r} \frac{\lambda}{\epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \quad (4.194)$$

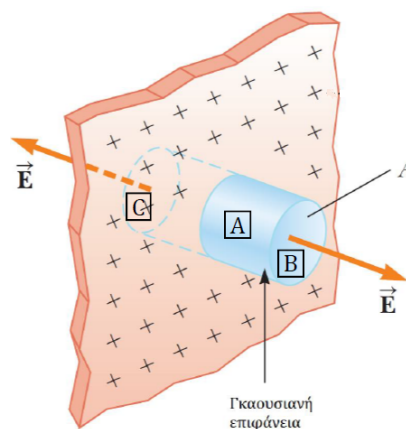
και με $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ έχουμε

$$E = k_e \frac{2\lambda}{r} \quad (4.195)$$

Ανατρέξτε στο Παράδειγμα 4.7(γ) για να δείτε ότι είχαμε καταλήξει ακριβώς σε αυτό το αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 4.19:

Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο λόγω μιας άπειρης επιφάνειας θετικά φορτισμένης με ομοιόμορφη επιφανειακή κατανομή φορτίου σ .



Σχήμα 4.33: Ομοιόμορφα φορτισμένη επιφάνεια.

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 4.33. Για την επιφάνεια ισχύει $\sigma = Q/A \implies q_{in} = \sigma A$. Επιλέγουμε κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια³ κάθετη στο επίπεδο. Όπως δείξαμε και στο Παράδειγμα 4.9, επειδή το επίπεδο έχει άπειρες

³ Δεν ταιριάζει με την κατανομή αλλά θα δείτε ότι δεν έχει σημασία σε αυτό το παράδειγμα.

διαστάσεις, το ηλεκτρικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο μακριά από το επίπεδο θα είναι σταθερό. Αλλά αν υποθέσουμε ότι δεν το ξέρουμε αυτό, και αν θεωρήσουμε ότι είναι απλά σταθερό σε μια επιφάνεια παράλληλη του επιπέδου, απόστασης r από αυτό, δηλ. στις επιφάνειες (B), (C) ικανοποιείται η συνθήκη (1). Στις ίδιες επιφάνειες (B), (C), το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο στα διανύσματα $d\vec{A}$ των αντίστοιχων επιφανειών, οπότε το εσωτερικό τους γινόμενο είναι αλγεβρικό γινόμενο. Αντίθετα, στην επιφάνεια (A) το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στο διάνυσμα $d\vec{A}$, οπότε το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν. Ικανοποιείται η συνθήκη (3). Οπότε τελικά με το νόμο του Gauss έχουμε

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \iff E \oint dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0} \quad (4.196)$$

Το ολοκλήρωμα $\oint dA$ αποτελεί το εμβαδό των δυο επιφανειών (B), (C), δηλ.

$$\oint dA = 2\pi r^2 \quad (4.197)$$

και έτσι

$$2E\pi r^2 = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0} \iff E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (4.198)$$

σταθερό σε κάθε σημείο της γκαουσιανής επιφάνειας. Δείτε ότι είχαμε καταλήξει στο ίδιο αποτέλεσμα και στο Παράδειγμα 4.9.

4.5.4 Αγωγοί και Ηλεκτρικό Πεδίο

Μπορεί κανείς να αποδείξει ότι ένας στέρεος αγωγός σε ηλεκτροστατική ισορροπία (τα φορτία του δεν κινούνται) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

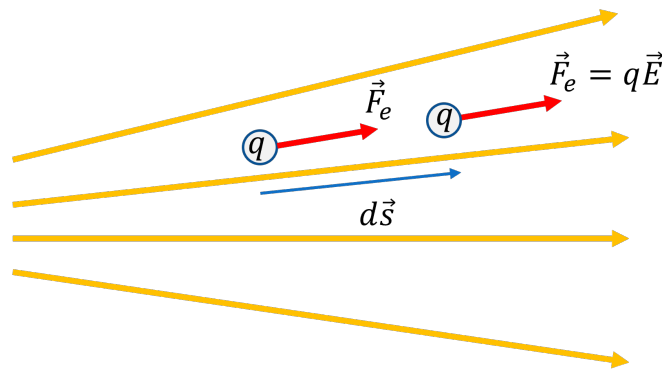
- Το ηλεκτρικό πεδίο ακριβώς έξω από τον αγωγό είναι κάθετο στην επιφάνεια του και έχει μέτρο $E = \sigma/\epsilon_0$.
- Το ηλεκτρικό πεδίο εντός του αγωγού είναι μηδέν.
- Αν ο αγωγός είναι μονωμένος και φέρει φορτίο, το φορτίο βρίσκεται στην επιφάνεια του.
- Σε έναν αγωγό ακαθόριστου σχήματος, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι μεγαλύτερη εκεί που η κυρτότητά του είναι μεγαλύτερη.

4.6 Ηλεκτρικό Δυναμικό

Στη μελέτη της Μηχανικής, κάναμε εκτενή χρήση εξισώσεων κινητικής, δυνάμεων, και των νόμων του Newton, μέχρι που είδαμε ότι παρ' όλη τη δύναμή τους δεν μπορούν να λύσουν πολλά προβλήματα με ευκολία. Στραφήκαμε τότε στις έννοιες της ενέργειας, και τα πράγματα έγιναν σημαντικά απλούστερα. Στη μελέτη του ηλεκτρισμού ως τώρα, τον σχετίσαμε με την έννοια της ηλεκτρικής δύναμης. Ήρθε η ώρα να συσχετίσουμε τα ηλεκτρικά φαινόμενα με την έννοια της ενέργειας! Θα ορίσουμε σύντομα την έννοια του **ηλεκτρικού δυναμικού**. Θα περιγράψουμε φαινόμενα με μεγαλύτερη ευκολία απ' ό,τι με χρήση πεδίων και δυνάμεων – όπως ακριβώς περιγράψαμε ευκολότερα τα φαινόμενα της Κινητικής με ενεργειακά θεωρήματα σε σχέση με την περιγραφή μέσω δυνάμεων και διανυσμάτων. Φυσικά οι εφαρμογές ποικίλλουν και ξεκινούν από τα απλά ηλεκτρικά κυκλώματα και συσκευές μέχρι τους πυρηνικούς αντιδραστήρες και τους ενεργειακούς επιταχυντές.

Ας θεωρήσουμε ένα φορτίο q τοποθετημένο σε ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$. Θεωρούμε το φορτίο και το πεδίο ως ένα **σύστημα**, πολυμελές κι απομονωμένο⁴. Δείτε το Σχήμα 4.34. Λόγω του πεδίου, εγείρεται στο

⁴Σας θυμίζει κάτι;



Σχήμα 4.34: Φορτίο σε πεδίο και έργο ηλεκτρικής δύναμης.

φορτίο ηλεκτρική δύναμη μέτρου $F_e = qE$. Η δύναμη αυτή οφείλεται στο πεδίο – σε μέλος του συστήματος δηλαδή – και το φορτίο κινείται λόγω της δύναμης αυτής. Η ηλεκτρική δύναμη είναι συντηρητική και εσωτερική στο σύστημα και άρα το έργο της είναι εσωτερικό στο σύστημα. Με άλλα λόγια, το ηλεκτρικό πεδίο παράγει εσωτερικό έργο στο σύστημα, όπως ακριβώς η δύναμη του βάρους (το βαρυτικό πεδίο) στο σύστημα {Γη, βιβλίο}, όταν το βιβλίο αφήνεται να πέσει από ύψος.

Έστω τώρα μια απειροστά μικρή μετατόπιση $d\vec{s}$ του σημειακού φορτίου στο ηλεκτρικό πεδίο. Το έργο της ηλεκτρικής δύναμης θα είναι κι αυτό απειροστά μικρό, έστω dW_e , δηλ.

$$dW_e = \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = q\vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.199)$$

Ας ξεσκονίσουμε ☺ λίγο τη Μηχανική κι ας θυμηθούμε ότι το έργο μιας εσωτερικής δύναμης σε ένα απομονωμένο σύστημα ισούται με την αρνητική μεταβολή της δυναμικής του ενέργειας (εδώ, της **ηλεκτρικής δυναμικής του ενέργειας**, U_e !):

$$dW_e = -dU_e \quad (4.200)$$

Άρα

$$dU_e = -dW_e = -q\vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.201)$$

Για μια πεπερασμένη μετατόπιση από το σημείο (Α) στο (Β) θα αθροίσουμε (ολοκληρώσουμε) όλα τα μικρά εργάκια dW_e για όλες τις απειροστά μικρές μετατοπίσεις $d\vec{s}$, και θα έχουμε τόσο το έργο της ηλεκτρικής δύναμης στη διαδρομή $A \rightarrow B$ όσο και μια μεταβολή ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας στην ίδια διαδρομή, της μορφής

$$\Delta U_e^{A \rightarrow B} = -W_e^{A \rightarrow B} = - \int dW_e = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.202)$$

Παρατηρήστε ότι η μεταβολή της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας δεν εξαρτάται από το μονοπάτι που ακολουθεί το φορτίο – λογικό, η ηλεκτρική δύναμη είναι συντηρητική, όπως και το ηλεκτρικό πεδίο. Για μια συγκεκριμένη θέση του φορτίου στο πεδίο, το σύστημα έχει μια δυναμική ενέργεια U_e σε σχέση με μια άλλη θέση που έχει δυναμική ενέργεια $U_e = 0$, ας πούμε, όταν το φορτίο βρίσκεται πολύ μακριά (στο άπειρο). Υποθέστε ότι το φορτίο βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη θέση εντός του πεδίου, και η διάταξη τους αυτή προσδίδει ηλεκτρική δυναμική ενέργεια στο σύστημα ίση με U_e . Διαιρώντας την U_e με το φορτίο έχουμε

$$V = \frac{U_e}{q} \quad (4.203)$$

το οποίο και ονομάζουμε **ηλεκτρικό δυναμικό** V . Η **διαφορά δυναμικού** ΔV ορίζεται ως η μεταβολή στην **ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος** όταν ένα φορτίο q μετακινείται μεταξύ δυο σημείων (Α)

και (B), δια το φορτίο αυτό:

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = V_B - V_A = \frac{\Delta U_e}{q} = -\frac{1}{q} \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.204)$$

Το ηλεκτρικό δυναμικό μετρά δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου, και έτσι μετράται σε J/C, η οποία ποσότητα ονομάζεται Volt - V, προς τιμήν του Alessandro Volta (1745–1827), Ιταλού Φυσικοχημικού, στον οποίο πιστώνεται – μεταξύ άλλων – η εφεύρεση της μπαταρίας. Από την τελευταία σχέση όμως μπορούμε να γράψουμε και ότι το 1 V ισούται με Nm/C.

Παρατηρήστε ότι **η διαφορά δυναμικού δεν εξαρτάται από το φορτίο q που μετακινείται, παρά μόνο από το ηλεκτρικό πεδίο**. Άρα το ηλεκτρικό δυναμικό είναι ένα **χαρακτηριστικό του ηλεκτρικού πεδίου!** Όπως και με τη δυναμική ενέργεια που έχουμε δει ως τώρα (βαρυτική, ελαστική), μόνο διαφορές δυναμικού έχουν νόημα. Πολλές φορές, όπως και στη Μηχανική, ορίζουμε εμείς ένα σημείο/μια περιοχή του ηλεκτρικού πεδίου ως μηδενικού ηλεκτρικού δυναμικού.

Ένα κοινό λάθος που γίνεται στην ερμηνεία του ηλεκτρικού δυναμικού είναι ότι η διαφορά δυναμικού παρομοιάζεται με τη διαφορά ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας. Αυτό δεν ισχύει: οι δυο ποσότητες δεν είναι το ίδιο, δε σημαίνουν το ίδιο πράγμα. Η διαφορά δυναμικού ΔV μεταξύ δυο σημείων (A) και (B) υπάρχει αποκλειστικά λόγω μιας πηγής φορτίου και εξαρτάται από την κατανομή αυτής. Για να υπάρχει διαφορά δυναμικής ενέργειας, πρέπει να υπάρχει ένα σύστημα με τουλάχιστον δυο μέλη! Η δυναμική ενέργεια ανήκει στο σύστημα και αλλάζει μόνον αν ένα φορτίο-μέλος μετακινηθεί σε σχέση με τη θέση ηρεμίας (μηδενικής δυναμικής ενέργειας) του συστήματος!

Μπορείτε να σκεφτείτε την αναλογία με το ηλεκτρικό πεδίο και την ηλεκτρική δύναμη: το πεδίο υπάρχει λόγω μιας πηγής φορτίου, ενώ η ηλεκτρική δύναμη εγείρεται σε ένα άλλο φορτίο στο χώρο του πεδίου – απαιτούνται δηλαδή τουλάχιστον δυο φορτία για την έγερση δύναμης.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι κάποια **εξωτερική δύναμη F_{ext}** μετακινεί ένα φορτίο q στο πεδίο, από ένα σημείο (A) σε ένα σημείο (B), χωρίς να αλλάζει την κινητική του ενέργεια (δηλ. πολύ αργά). Προφανώς όμως αλλάζει η διάταξη του συστήματος, οπότε αλλάζει η ηλεκτρική δυναμική του ενέργεια – θυμηθείτε, το σύστημα *ήταν* απομονωμένο μέχρι τη στιγμή που έδρασε ο εξωτερικός παρατηρητής, αλληλεπιδρώντας ενεργειακά με αυτό μέσω του έργου της δύναμης F_{ext} ! Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας του μη απομονωμένου συστήματος, το έργο αυτής της δύναμης θα είναι

$$\Delta E_{sys}^{A \rightarrow B} = \sum W_{ext} \quad (4.205)$$

$$\Delta K_{A \rightarrow B} + \Delta U_e^{A \rightarrow B} = W_{ext} \quad (4.206)$$

$$0 + q\Delta V_{A \rightarrow B} = W_{ext} \quad (4.207)$$

$$W_{ext} = q\Delta V_{A \rightarrow B} \quad (4.208)$$

Άρα το έργο που παράγει ο εξωτερικός παρατηρητής όταν μετακινεί *αργά* ένα φορτίο από τη θέση A στη θέση B δίνεται από τη σχέση

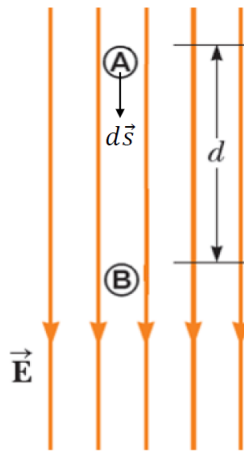
$$W_{ext}^{A \rightarrow B} = q\Delta V_{A \rightarrow B} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -W_e \quad (4.209)$$

που βλέπετε ότι είναι το αρνητικό του έργου της W_e στην ίδια διαδρομή!

4.6.1 Δυναμικό σε Ομογενές Ηλεκτρικό Πεδίο

Ας απλοποιήσουμε τα πράγματα ☺... Έστω ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο όπως στο Σχήμα 4.35. Ας υπολογίσουμε τη διαφορά δυναμικού ΔV ανάμεσα στα σημεία (A) και (B), απόστασης d μεταξύ τους. Μια απειροστά μικρή μετατόπιση $d\vec{s}$ από το (A) στο (B) είναι παράλληλη στις δυναμικές γραμμές, οπότε το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου και της απειροστά μικρής μετατόπισης είναι ομόρροπα. Με βάση τον ορισμό θα έχουμε

$$V_B - V_A = \Delta V_{A \rightarrow B} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B E ds = -E \int_A^B ds = -Ed \quad (4.210)$$



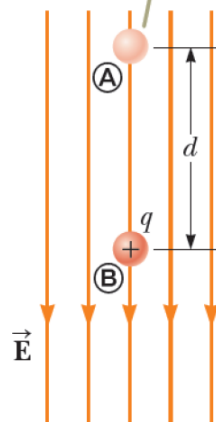
Σχήμα 4.35: Διαφορά δυναμικού σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

με το ολοκλήρωμα $\int ds$ να διαβάζεται ως “το άθροισμα όλων των απειροστά μικρών αποστάσεων ds στη διαδρομή $A \rightarrow B$ ”, και αυτό φυσικά δεν είναι τίποτε άλλο από το μήκος d ! Οπότε καταλήξαμε στο ότι

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = -Ed \quad (4.211)$$

Ας βάλουμε τώρα ένα φορτίο $+q$ που κινείται (αναγκαστικά) από το (A) στο (B), όπως στο Σχήμα 4.36. Η μεταβολή της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας είναι

Όταν ένα θετικό φορτίο μετακινείται από το (A) στο (B), η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος φορτίο-πεδίο μικραίνει.



Σχήμα 4.36: Φορτίο σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

$$\Delta U_e = q\Delta V_{A \rightarrow B} = -qEd \quad (4.212)$$

Παρατηρήστε ότι $\Delta U_e < 0$. Αυτό σημαίνει ότι η δυναμική ενέργεια του συστήματος **φθίνει** όταν το θετικό φορτίο κατευθύνεται προς την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών. Άρα, αν αφήσουμε στη θέση (A) ένα φορτίο $+q$ αυτό θα κινηθεί προς τα “κάτω” λόγω έγερσης ηλεκτρικής δύναμης. Η παρουσία δύναμης επιταχύνει το φορτίο, δηλ. αυτό αποκτά κινητική ενέργεια! Όσο το φορτίο προχωρά προς τα κάτω, τόσο

η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος μειώνεται και τόσο η κινητική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται! Σας εκπλήσσει αυτό; Καταλαβαίνετε γιατί συμβαίνει; Αν όχι, διαβάστε παρακάτω ☺.

Για να δούμε τι θα συμβεί αν – στην ίδια διάταξη – τοποθετήσουμε ένα φορτίο $-q$, το οποίο (αναγκαστικά) θα κινηθεί από το (B) στο (A), οπότε ας το αφήσουμε στη θέση B. Ξανά, η μεταβολή της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας θα είναι

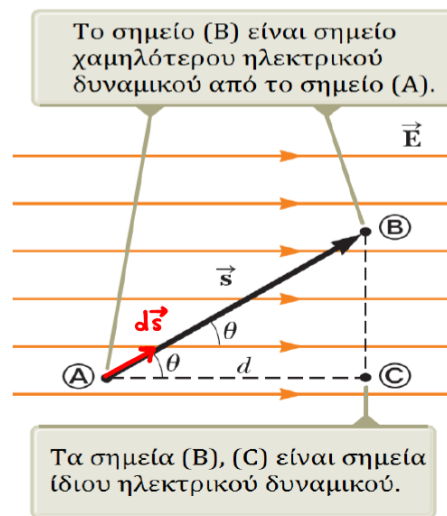
$$\Delta U_e = -q\Delta V_{B \rightarrow A} = -q(Ed) = -qEd \quad (4.213)$$

αφού πλέον η διαδρομή είναι η $B \rightarrow A$, η διαφορά δυναμικού θα πρέπει να μετρηθεί αντίστροφα με πριν:

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = -\Delta V_{B \rightarrow A} \quad (4.214)$$

Ξανά βλέπουμε ότι $\Delta U_e < 0$! Αυτό σημαίνει ότι η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος **φθίνει ξανά** όταν το αρνητικό φορτίο κατευθύνεται προς την αντίθετη κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών. Άρα, αν αφήσουμε στη θέση (B) ένα φορτίο $-q$ αυτό θα κινηθεί προς τα “πάνω” λόγω έγερσης ηλεκτρικής δύναμης. Η παρουσία δύναμης επιταχύνει το φορτίο, δηλ. αυτό αποκτά κινητική ενέργεια! Όσο το φορτίο προχωρά προς τα πάνω, τόσο η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος μειώνεται και τόσο η κινητική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται! Μήπως τώρα δεν εκπλήσσεστε πια αλλά κατανοείτε ότι τα παραπάνω συμβαίνουν λόγω Αρχής Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας στο απομονωμένο σύστημα {πεδίο, φορτίο}, στο οποίο παράγει έργο μόνο η ηλεκτρική δύναμη; ☺

Ας γενικεύσουμε τώρα για μετατόπιση μη παράλληλη στις δυναμικές γραμμές. Έστω η μετατόπιση s από το (A) στο (B) όπως στο Σχήμα 4.37. Παρατηρήστε ότι το σημείο B είναι τώρα διαφορετικό σε σχέση με το σύνηθες σημείο (που τώρα ονομάζεται C), αλλά και τα δυο ανήκουν στην ίδια νοτιή κάθετη επιφάνεια στις δυναμικές γραμμές. Για τη μετατόπιση αυτή, $A \rightarrow B$, θα έχουμε



Σχήμα 4.37: Φορτίο σε κίνηση υπό γωνία με τις δυναμικές γραμμές ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου.

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B E ds \cos(\theta) = -E \cos(\theta) \int_A^B ds = -E s \cos(\theta) = -Ed \quad (4.215)$$

αφού $\int_A^B ds = s$. Άρα για το σύστημα {πεδίο, φορτίο} ισχύει

$$\Delta U_e = q\Delta V_1 = -qEd \quad (4.216)$$

Όμως νωρίτερα δείξαμε ότι

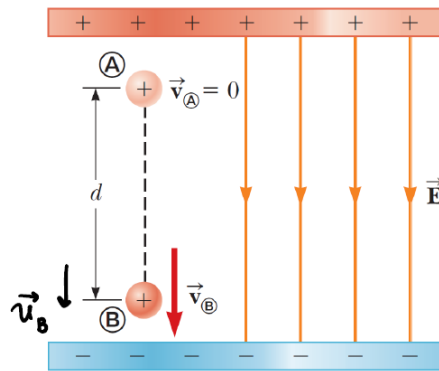
$$\Delta V_{A \rightarrow C} = - \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \int_A^C d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \vec{s} = -Ed \quad (4.217)$$

Άρα $\Delta V_{A \rightarrow B} = \Delta V_{A \rightarrow C}$! Από αυτό συμπεραίνουμε ότι όλα τα σημεία που βρίσκονται σε επίπεδο κάθετο στο πεδίο έχουν ίδιο δυναμικό (αποτελούν **ισοδυναμικές επιφάνειες**).

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.20:

Ένα πρωτόνιο αφήνεται από το σημείο (A) σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μέτρου $8 \cdot 10^4$ V/m. Το πρωτόνιο υπόκειται σε μετατόπιση μέτρου $d = 0.5$ m στο σημείο (B) στην κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου. Βρείτε την ταχύτητα του πρωτονίου αμέσως μετά τη μετατόπισή του. Θεωρήστε ότι $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ και $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg.



Σχήμα 4.38: Πρωτόνιο σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

Λύση:

Θεωρούμε το σύστημα {φορτίο, πεδίο}. Το σύστημα είναι πολυμελές κι απομονωμένο και η μόνη δύναμη που παράγει έργο εντός του συστήματος είναι η ηλεκτρική δύναμη $\vec{F}_e$, η οποία είναι και συντηρητική. Ισχύει η ΑΔΜΕ από το σημείο (A) στο σημείο (B).

$$\Delta E_{mech}^{A \rightarrow B} = 0 \quad (4.218)$$

$$K_B + U_B = K_A + U_A \quad (4.219)$$

$$K_B - K_A = U_A - U_B \quad (4.220)$$

$$K_B - 0 = -(U_B - U_A) \quad (4.221)$$

$$\frac{1}{2} m_p u_B^2 - 0 = -\Delta U_{A \rightarrow B} \quad (4.222)$$

$$\frac{1}{2} m_p u_B^2 = -(-qEd) \quad (4.223)$$

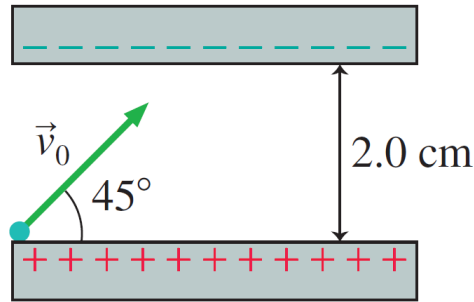
$$u_B^2 = \frac{2qEd}{m_p} \quad (4.224)$$

$$u_B \approx 2.8 \cdot 10^6 \text{ m/s} \quad (4.225)$$

υποθέτοντας ότι θετική φορά της κίνησης είναι προς τη κατεύθυνση του διανύσματος του σχήματος (αν και έχουμε πει ότι τα ενεργειακά θεωρήματα αποτυπώνουν πάντα το μέτρο των ταχυτήτων).

Παράδειγμα 4.21:

Δυο παράλληλες φορτισμένες πλάκες (Σχήμα 4.39) σε απόσταση 2.0 cm δημιουργούν ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μέτρου 10^4 N/C. Ένα ηλεκτρόνιο εκτοξεύεται υπό γωνία 45° από τη θετική πλάκα. Δείξτε ότι η μέγιστη αρχική ταχύτητα u_0 που μπορεί να λάβει το ηλεκτρόνιο χωρίς να χτυπήσει πάνω στην αρνητικά φορτισμένη πλάκα είναι $u_0 = 1.19 \cdot 10^7$ m/s



Σχήμα 4.39: Παράλληλες φορτισμένες πλάκες.

Λύση:

Θεωρούμε σύστημα αξόνων με σημείο αναφοράς $O(0,0)$ στο σημείο εκτόξευσης του ηλεκτρονίου. Θετικές φορές θεωρούμε τις συμβατικές. Αφού το πεδίο είναι ομογενές, το μέτρο του είναι σταθερό παντού. Η δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο μέσα στο πεδίο είναι η ηλεκτρική δύναμη και είναι μοναδική, και έτσι το ηλεκτρόνιο επιταχύνεται με επιτάχυνση (2ος νόμος Newton)

$$\vec{F}_e = m\vec{a} = q\vec{E} \implies \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} \quad (4.226)$$

Άρα

$$a_y = -1.756 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2 \quad (4.227)$$

με το πρόσημο να δηλώνει φορά προς τα κάτω. Η αρχική ταχύτητα u_0 έχει δυο συνιστώσες $u_{O_x} = u_0 \cos(45^\circ)$ και $u_{O_y} = u_0 \sin(45^\circ)$. Το ηλεκτρικό πεδίο έχει φορά προς τα θετικά του άξονα y . Άρα το ηλεκτρόνιο έχει αρνητική επιτάχυνση που προκαλεί μείωση της y -συνιστώσας της ταχύτητας. Έστω η διαδρομή $O \rightarrow A$, με A το σημείο που οριακά το φορτίο ακουμπά την πλάκα. Απαιτούμε $u_{A_y} = 0$ ώστε να μη χτυπήσει στην πλάκα. Από τις εξισώσεις της Κινητικής στη διαδρομή $O \rightarrow A$,

$$u_{A_y}^2 = u_{O_y}^2 + 2a_y\Delta y \implies 0 = u_{O_y}^2 + 2a_y\Delta y \quad (4.228)$$

$$u_{O_y} = \sqrt{-2a_y\Delta y} \quad (4.229)$$

$$= \sqrt{-2(-1.756 \cdot 10^{15} \cdot 0.02)} \quad (4.230)$$

$$= 8.381 \cdot 10^6 \text{ m/s} \quad (4.231)$$

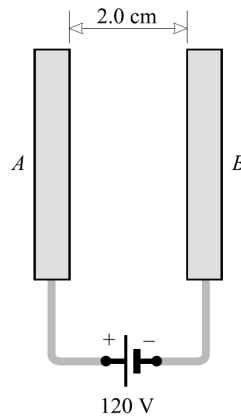
και άρα

$$u_0 = \frac{8.381 \cdot 10^6}{\sin(45^\circ)} = 1.19 \cdot 10^7 \text{ m/s} \quad (4.232)$$

Παράδειγμα 4.22:

Στο Σχήμα 4.40, δυο μεγάλες πλάκες είναι συνδεδεμένες με μια μπαταρία 120 V. Θεωρήστε ότι οι πλάκες βρίσκονται στο κενό, και ότι είναι πολύ μεγαλύτερης διάστασης απ' ό,τι φαίνεται στο σχήμα. Βρείτε

- (α') το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου ανάμεσα στις πλάκες.
- (β') τη δύναμη που ασκείται σε ένα ηλεκτρόνιο ανάμεσα στις πλάκες.
- (γ') την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια που χάνει το σύστημα πεδίο-ηλεκτρόνιο λόγω της κίνησης του ηλεκτρονίου από την πλάκα B στην πλάκα A.
- (δ') την ταχύτητα του ηλεκτρονίου λίγο πριν χτυπήσει στην πλάκα A.



Σχήμα 4.40: Παράλληλες πλάκες σε μπαταρία.

Λύση:

- (α') Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου κατευθύνεται από τη θετική πλάκα A προς την αρνητική πλάκα B και θεωρείται ομογενές. Άρα το μέτρο του δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{120}{0.02} = 6000 \text{ V/m} = 6 \text{ kV/m} \quad (4.233)$$

- (β') Θεωρούμε ως θετική φορά της κίνησης τη συμβατική (δεξιά). Η δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο δίνεται από τη σχέση

$$F_e = qE = -1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 6000 = -9.6 \cdot 10^{-16} \text{ N} \quad (4.234)$$

Το αρνητικό πρόσημο μας λέει ότι το διάνυσμα της ηλεκτρικής δύναμης είναι αντίθετο σε φορά από το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου. Αφού η πλάκα A είναι θετικά φορτισμένη, το ηλεκτρόνιο έλκεται από αυτήν. Άρα η φορά της δύναμης είναι προς τα αριστερά (όπως βλέπουμε το σχήμα).

- (γ') Ξέρουμε ότι η

$$\Delta U_e^{B \rightarrow A} = q\Delta V = 120 \cdot (-1.6 \cdot 10^{-19}) = -1.92 \cdot 10^{-17} \text{ J} \quad (4.235)$$

Ως αρνητική, πράγματι η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος μειώνεται όσο κινείται το φορτίο.

- (δ') Μπορούμε να εφαρμόσουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για την κίνηση του ηλεκτρονίου από την πλάκα B στην πλάκα A. Έχουμε

$$\Delta E_{mech}^{B \rightarrow A} = 0 \quad (4.236)$$

$$\Delta U_e^{B \rightarrow A} + \Delta K^{B \rightarrow A} = 0 \quad (4.237)$$

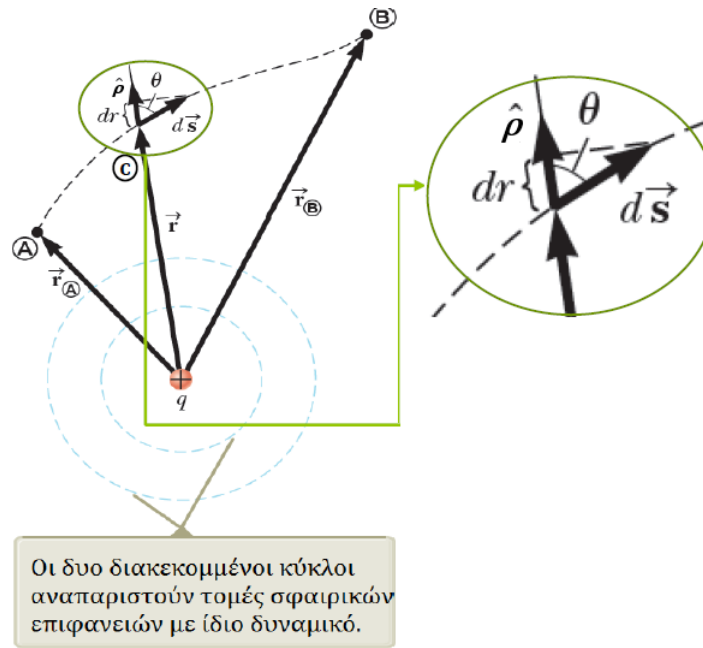
$$\Delta U_e^{B \rightarrow A} + K_A - K_B = -1.92 \cdot 10^{-17} + \frac{1}{2} m u_A^2 - 0 \quad (4.238)$$

$$u_A = 6.5 \cdot 10^6 \text{ m/s} \quad (4.239)$$

4.6.2 Ηλεκτρικό Δυναμικό Σημειακών Φορτίων

Πέρα από ομογενή πεδία, που είναι βέβαια πολύ σημαντικά στην πράξη, θέλουμε να μπορούμε να βρίσκουμε ηλεκτρικά δυναμικά τόσο λόγω σημειακών φορτίων σε ένα χώρο, όσο και λόγω κατανομών φορτίων. Ας ξεκινήσουμε από τα πρώτα και στη συνέχεια θα γενικεύσουμε για κατανομές.

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα σημειακό φορτίο $+q$. Γνωρίζουμε ότι γύρω του αναπτύσσεται ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, σε ακτινική μορφή. Ας βρούμε το ηλεκτρικό δυναμικό σε απόσταση r από το φορτίο (σημείο C), όπως στο Σχήμα 4.41, ξεκινώντας από το γενικό ορισμό της διαφοράς δυναμικού μεταξύ των σημείων (A) και (B). Έστω το (C) ως τυχαίο σημείο της διαδρομής. Θα είναι – προσέξτε λίγο τους συμβολισμούς και



Σχήμα 4.41: Υπολογισμός δυναμικού γύρω από σημειακό φορτίο.

δείτε το μεγεθυμένο τμήμα στο σχήμα:

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B k_e \frac{q}{r^2} \hat{e} \cdot d\vec{s} \quad (4.240)$$

$$= - \int_A^B k_e \frac{q}{r^2} |\hat{e}| ds \cos(\theta) = - \int_A^B k_e \frac{q}{r^2} ds \cos(\theta) \quad (4.241)$$

$$= - \int_A^B k_e \frac{q}{r^2} dr \quad (4.242)$$

Οι παραπάνω σχέσεις μας λένε ότι κάθε μετατόπιση $d\vec{s}$ από το (A) στο (B) προκαλεί μια μεταβολή $d\vec{r}$ στο μέτρο του $\vec{r}$, δηλ. του διανύσματος θέσης. Άρα

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = - \int_A^B k_e \frac{q}{r^2} dr = -k_e q \int_A^B \frac{dr}{r^2} = k_e \frac{q}{r} \Big|_{r=r_A}^{r=r_B} \quad (4.243)$$

Οπότε

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = k_e \frac{q}{r_B} - k_e \frac{q}{r_A} = V_B - V_A \quad (4.244)$$

Παρατηρήστε ότι η διαφορά δυναμικού είναι ανεξάρτητη της διαδρομής – άρα το ηλεκτρικό πεδίο είναι πράγματι συντηρητικό! Επίσης, παρατηρήστε την εξάρτηση από τα r_A, r_B . Παρ' όλα αυτά εμείς δεν

έχουμε βρει ακόμα το ζητούμενο: το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο C , V_C ! Για να το κάνουμε αυτό, ας θεωρήσουμε τη διαφορά δυναμικού

$$V_C - V_\infty \quad (4.245)$$

με

$$V_\infty = k_e \frac{q}{r_\infty} = 0 \quad (4.246)$$

καθώς $r_\infty = \infty$. Θα είναι τότε

$$V_C - 0 = V_C = k_e \frac{q}{r_C} \quad (4.247)$$

Για περισσότερα του ενός φορτία, το ηλεκτρικό δυναμικό είναι μονόμετρο μέγεθος, οπότε

$$V = \sum_i V_i = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (4.248)$$

δηλ. αθροίζουμε τις συνεισφορές ηλεκτρικού δυναμικού στο ζητούμενο σημείο για κάθε πηγή φορτίου ξεχωριστά.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

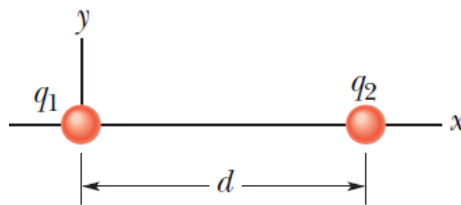
Παράδειγμα 4.23:

Στο Σχήμα 4.42, δυο σωματίδια με φορτία $q_1 = 5e$ και $q_2 = -15e$ βρίσκονται “δεμένα” στις θέσεις τους με απόσταση $d = 0.24$ m μεταξύ τους. Υποθέτοντας ότι το ηλεκτρικό δυναμικό στο άπειρο είναι μηδέν, βρείτε τις

(α') θετικές

(β') και αρνητικές

τιμές του x στις οποίες το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό ισούται με μηδέν.



Σχήμα 4.42: Σχήμα Άσκησης 4.23.

Λύση:

(α') Για $x > d$, έχουμε $d_1 = x$, $d_2 = x - d$, και τότε λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $q_1 = q$ και $q_2 = -3q_1 = -3q$, έχουμε

$$V(x) = k_e \left(\frac{q_1}{d_1} + \frac{q_2}{d_2} \right) = k_e q \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x-d} \right) = 0 \quad (4.249)$$

Λύνοντας έχουμε $x = -\frac{d}{2}$, που είναι άτοπο, καθώς από υπόθεση $d > 0 \implies x > 0$.

(β') Για $0 < x < d$ έχουμε $d_1 = x$, $d_2 = d - x$, και τότε

$$V(x) = k_e \left(\frac{q_1}{d_1} + \frac{q_2}{d_2} \right) = k_e q \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{d-x} \right) = 0 \quad (4.250)$$

Λύνοντας έχουμε $x = \frac{d}{4}$, δηλ. $x = 0.06$ m.

- (γ') Όμοια, για $x < 0$ η απόσταση μεταξύ του q_1 κι ενός σημείου στον άξονα $x'x$ που η τετμημένη του είναι x δίνεται από τη σχέση $d_1 = -x$, ενώ η αντίστοιχη απόσταση για το q_2 δίνεται ως $d_2 = d - x$. Άρα

$$V(x) = k_e \left(\frac{q_1}{d_1} + \frac{q_2}{d_2} \right) = k_e q \left(\frac{1}{-x} + \frac{-3}{d-x} \right) = 0 \quad (4.251)$$

Λύνοντας έχουμε $x = -\frac{d}{2}$, δηλ. $x = -0.12$ m.

■

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ένα φορτίο q_2 έρχεται στο ηλεκτρικό πεδίο πηγής φορτίου q_1 , σε απόσταση r_{12} από αυτή, μέσω εξωτερικής δύναμης έργου $W_{ext} = q_2 \Delta V$. Το φορτίο q_2 έρχεται από πολύ “μακριά”, με $V_{μακριά} = 0$, και πολύ “αργά”. Επίσης, όταν το φορτίο q_2 βρίσκεται “μακριά”, θεωρούμε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των φορτίων ως μηδενική. Το έργο W_{ext} μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια U_e του συστήματος, λόγω ΑΔΕ σε μη απομονωμένο σύστημα! Άρα

$$\Delta U_e = W_{ext} \quad (4.252)$$

$$U_e - 0 = q_2(V - V_{μακριά}) \quad (4.253)$$

$$U_e = q_2 \left(k_e \frac{q_1}{r_{12}} - 0 \right) \quad (4.254)$$

$$= k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (4.255)$$

Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια μπορεί να είναι θετική ή αρνητική, αναλόγως του προσήμου του αριθμητή της. Αν είναι θετική (ομόσημα φορτία), το έργο της εξωτερικής δύναμης είναι θετικό, άρα εισάγεται ενέργεια στο σύστημα: τα ομόσημα φορτία απωθούνται, άρα πρέπει να εισάγει κανείς ενέργεια μέσω έργου για να τα κρατήσει σε απόσταση r_{12} . Αν η παραπάνω δυναμική ενέργεια είναι αρνητική (ετερόσημα φορτία), τότε το έργο της εξωτερικής δύναμης είναι αρνητικό, άρα εξάγεται ενέργεια από το σύστημα: τα φορτία έλκονται, άρα πρέπει να παραχθεί αρνητικό έργο (δύναμη αντίθετη στη μετατόπιση-έλξη των φορτίων) για να τα φέρουμε (και κρατήσουμε) σε απόσταση r_{12} . Γενικεύοντας για πολλά φορτία

$$U_e = \sum U_{e,i,j} = k_e \sum \frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \quad i < j \quad (4.256)$$

Με απλά λογια, **αθροίζουμε όλες τις τιμές δυναμικής ενέργειας που οφείλονται σε ένα ζεύγος φορτίων.**

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.24:

Στο Σχήμα 4.43, ένα φορτίο $q_1 = 2 \mu\text{C}$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων ενώ ένα φορτίο $q_2 = -6 \mu\text{C}$ στη θέση (0,3) m.

(α') Βρείτε το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P με συντεταγμένες (4, 0) m.

(β') Βρείτε τη μεταβολή της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος των δυο φορτίων, συν ένα τρίτο φορτίο $q_3 = 3 \mu\text{C}$, όταν το τελευταίο έρχεται από το άπειρο στο σημείο P .

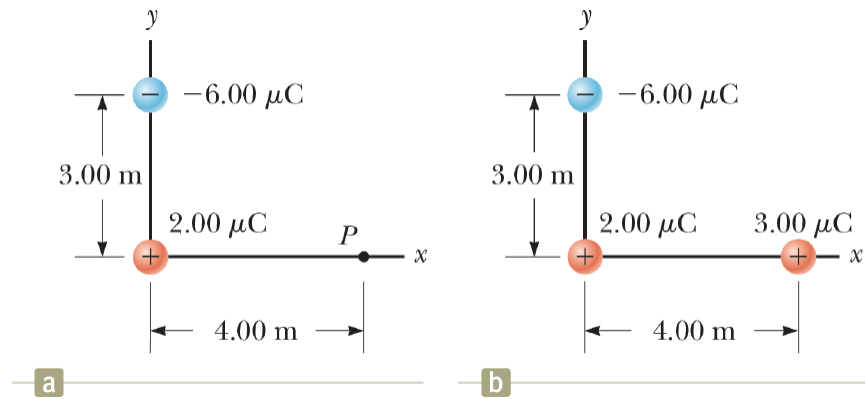
Λύση:

- (α') Το δυναμικό στο σημείο P αποτελείται από το άθροισμα των συνεισφορών δυναμικού λόγω των φορτίων q_1, q_2 . Άρα

$$V_P = k_e \frac{q_1}{r_1} + k_e \frac{q_2}{r_2} \quad (4.257)$$

$$= 8.987 \cdot 10^9 \left(\frac{2 \cdot 10^{-6}}{4} - \frac{6 \cdot 10^{-6}}{5} \right) \quad (4.258)$$

$$\approx -6.3 \cdot 10^3 \text{ V} \quad (4.259)$$



Σχήμα 4.43: Φορτία στο επίπεδο.

(β') Θεωρούμε ότι όταν το φορτίο q_3 βρίσκεται στο άπειρο, η συνολική ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών φορτίων είναι μηδέν. Άρα όταν έρχεται στο σημείο P , το σύστημα αποκτά ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ίση με

$$\Delta U_e = U_f - U_i = U_f - 0 = q_3 V_P \quad (4.260)$$

$$= 3 \cdot 10^{-6} \cdot (-6.3 \cdot 10^3) \quad (4.261)$$

$$\approx -1.9 \cdot 10^{-2} \text{ J} \quad (4.262)$$

Παράδειγμα 4.25:

Δυο σημειακά φορτία βρίσκονται σε απόσταση 2.0 cm μεταξύ τους και έχουν ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ίση με $-180 \cdot 10^{-6} \text{ J}$. Το άθροισμα των φορτίων τους είναι $30 \cdot 10^{-9} \text{ C}$. Βρείτε το φορτίο του καθενός.

Λύση:

Έστω Q_1 και Q_2 τα άγνωστα φορτία. Πρέπει

$$Q_1 + Q_2 = 30 \cdot 10^{-9} \text{ C} \quad (4.263)$$

και

$$U = k_e \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} = -180 \cdot 10^{-6} \text{ J} \quad (4.264)$$

δηλ.

$$Q_1 Q_2 = -4 \cdot 10^{-16} \text{ C}^2 \quad (4.265)$$

Λύνοντας την πρώτη σχέση ως προς Q_2 και αντικαθιστώντας στην δεύτερη, έχουμε

$$Q_1(30 \cdot 10^{-9} - Q_1) = -4 \cdot 10^{-16} \Rightarrow Q_1 = 40 \cdot 10^{-9} \text{ C}, \quad Q_2 = -10 \cdot 10^{-9} \text{ C} \quad (4.266)$$

οι οποίες προκύπτουν ως δυο ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. Άρα τα δυο φορτία είναι

$$Q_2 = -10 \text{ nC} \quad (4.267)$$

$$Q_1 = 40 \text{ nC} \quad (4.268)$$

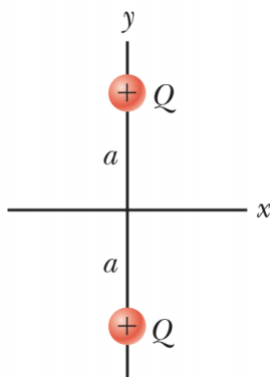
Παράδειγμα 4.26:

Δυο σωματίδια με ίδιο φορτίο Q βρίσκονται πάνω στον άξονα $y'y$, ισαπέχοντας από τον άξονα $x'x$ απόσταση a (το ένα πάνω και το άλλο κάτω από τον $x'x$).

- (α') Σχεδιάστε, σε μονάδες kQ/a , το ηλεκτρικό δυναμικό για τα σημεία του άξονα x στο διάστημα $-3a < x < 3a$.
- (β') Θεωρήστε ότι το φορτίο του σωματιδίου που βρίσκεται στο $y = -a$ γίνεται αρνητικό. Σχεδιάστε το ηλεκτρικό δυναμικό για τα σημεία του άξονα y στο διάστημα $-4a < y < 4a$.

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 4.44.



Σχήμα 4.44: Φορτία στον άξονα $x'x$.

- (α') Το δυναμικό από τα δυο φορτία κατά μήκος του άξονα x είναι

$$V(x) = \frac{k_e Q_1}{r_1} + \frac{k_e Q_2}{r_2} = \frac{k_e Q}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{k_e Q}{\sqrt{x^2 + (-a)^2}} \quad (4.269)$$

$$= \frac{2k_e Q}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{k_e Q}{a} \frac{2}{\sqrt{(x/a)^2 + 1}} \quad (4.270)$$

και για τη γραφική παράσταση

$$\frac{V(x)}{k_e Q/a} = \frac{2}{\sqrt{(x/a)^2 + 1}} \quad (4.271)$$

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 4.45(α).

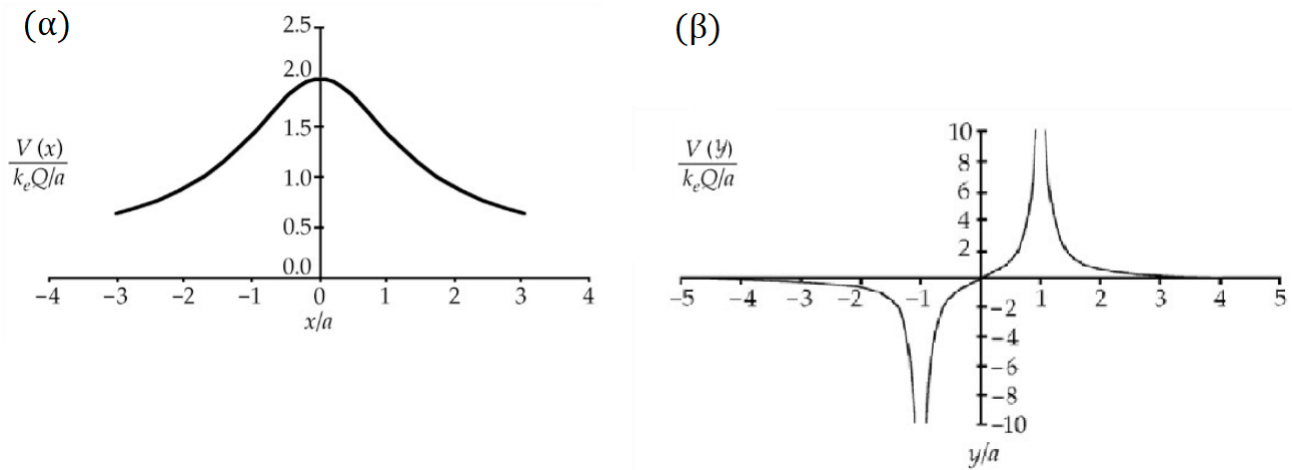
- (β') Το δυναμικό κατά μήκος του y άξονα είναι

$$V(y) = \frac{k_e Q_1}{r_1} + \frac{k_e Q_2}{r_2} = \frac{k_e Q}{|y - a|} + \frac{-k_e Q}{|y + a|} \quad (4.272)$$

$$= \frac{k_e Q}{a} \left(\frac{1}{|y/a - 1|} - \frac{1}{|y/a + 1|} \right) \quad (4.273)$$

$$\frac{V(y)}{k_e Q/a} = \left(\frac{1}{|y/a - 1|} - \frac{1}{|y/a + 1|} \right) \quad (4.274)$$

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 4.45(β).



Σχήμα 4.45: Γραφικές παραστάσεις δυναμικού Παραδείγματος 4.26.

4.6.3 Ηλεκτρικό Πεδίο από Ηλεκτρικό Δυναμικό

Το ηλεκτρικό δυναμικό έχει δυο εξαιρετικές ιδιότητες: (α) είναι μονόμετρο αντί για διανυσματικό μέγεθος, και (β) περιγράφει ένα ηλεκτρικό πεδίο με ενεργειακό τρόπο. Δεδομένων αυτών, μήπως μπορούμε να βρούμε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου E από το ηλεκτρικό δυναμικό ΔV ;

Αν θεωρήσουμε μια μικρή διαφορά δυναμικού dV μεταξύ δυο σημείων απειροστά μικρής απόστασης $d\vec{s}$, τότε

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.275)$$

Αν το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο x -συνιστώσα, τότε

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E_x dx \quad (4.276)$$

και άρα

$$E_x = -\frac{d}{dx} V(x) \quad (4.277)$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε και την y -συνιστώσα,

$$E_y = -\frac{d}{dy} V(y) \quad (4.278)$$

και αντίστοιχα για κάθε συνιστώσα ενός χώρου, ακόμα κι αν το δυναμικό είναι συνάρτηση των x, y, z . Η σχέση αυτή πρέπει να σας θυμίζει από τη Μηχανική τη σχέση μεταξύ συντηρητικής δύναμης και δυναμικής ενέργειας⁵. Αν όμως η κατανομή φορτίου που δημιουργεί το πεδίο έχει άλλου είδους συμμετρία, π.χ. σφαιρική, τότε η πυκνότητα φορτίου εξαρτάται από την ακτινική απόσταση r . Η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$E_r = -\frac{d}{dr} V(r) \quad (4.279)$$

Δείτε ότι η παραπάνω σχέση δουλεύει για την απλή περίπτωση σημειακού φορτίου, που έχει ακτινικό ηλεκτρικό πεδίο γύρω του:

$$E_r = -\frac{d}{dr} V(r) = -\frac{d}{dr} \frac{k_e q}{r} = -k_e q \frac{d}{dr} \frac{1}{r} = k_e \frac{q}{r^2} \quad (4.280)$$

⁵ $F_x = -\frac{d}{dx} U(x)$

Παράδειγμα 4.26:

Το ηλεκτρικό δυναμικό σε μια περιοχή του χώρου δίνεται ως

$$V(x, y, z) = 5x - 3x^2y + 2yz^2 \quad (4.281)$$

(α') Βρείτε την έκφραση για τις συνιστώσες x, y, z του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή αυτή.

(β') Ποιό είναι το μέτρο του πεδίου στο σημείο P με συντεταγμένες $(1, 0, -2)$;

Λύση:

(α') Έχουμε

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -5 + 6xy \quad (4.282)$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 3x^2 - 2z^2 \quad (4.283)$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -4yz \quad (4.284)$$

οπότε το πεδίο γράφεται ως

$$\vec{E} = (-5 + 6xy)\vec{i} + (3x^2 - 2z^2)\vec{j} - (4yz)\vec{k} \quad (4.285)$$

(β') Αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση και έχουμε

$$\vec{E} = -5\vec{i} - 5\vec{j} + 0\vec{k} \quad (4.286)$$

άρα το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου θα είναι

$$|\vec{E}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 0^2} = 7.07 \text{ N/C}. \quad (4.287)$$

Παράδειγμα 4.26:

Ένα ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται από δυο φορτία $+q, -q$ σε απόσταση s μεταξύ τους. Έστω ότι ένα τέτοιο δίπολο βρίσκεται επάνω στον άξονα $y'y$, με το θετικό φορτίο στο σημείο $(0, s/2)$ και το αρνητικό στο σημείο $(0, -s/2)$, όπως στο Σχήμα 4.46(α).

(α') Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό δυναμικό $V(x, y)$ σε ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου.

(β') Χρησιμοποιήστε τη διωνυμική προσέγγιση για να γράψετε την παραπάνω απάντησή σας πιο απλά. Θεωρήστε $s \ll x$ και $s \ll y$.

(γ') Θεωρώντας $s \ll x, y$, βρείτε εκφράσεις για τις x - και y - συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου.

Λύση:

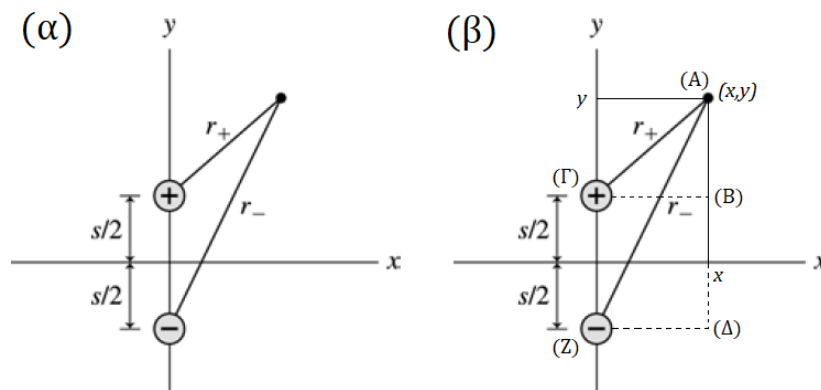
(α') Έστω r_+ και r_- οι αποστάσεις των φορτίων του διπόλου από ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου, όπως στο Σχήμα 4.46(α). Το ηλεκτρικό δυναμικό είναι βαθμωτό μέγεθος, οπότε απλά αθροίζουμε τις συνεισφορές ηλεκτρικού δυναμικού του κάθε φορτίου. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα τρίγωνα ABΓ και ΑΔΖ του Σχήματος 4.46(β) βρίσκουμε ότι

$$r_+ = \sqrt{x^2 + (y - s/2)^2} \quad (4.288)$$

$$r_- = \sqrt{x^2 + (y + s/2)^2} \quad (4.289)$$

Άρα

$$V(x, y) = V_+ + V_- = k_e \frac{q}{r_+} + k_e \frac{-q}{r_-} = k_e q \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - s/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y + s/2)^2}} \right) \quad (4.290)$$

Σχήμα 4.46: Δίπολο στον άξονα $y'y$ Άσκησης 4.26.

(β') Η διωνυμική προσέγγιση μας λέει ότι

$$(1+x)^n \approx 1+nx, \quad \text{αν } x \ll 1 \quad (4.291)$$

Για να την αξιοποιήσουμε πρέπει να γράψουμε το πρώτο κλάσμα ως

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - s/2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - sy + s^2/4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{-sy + s^2/4}{x^2 + y^2}}} \quad (4.292)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{-sy + s^2/4}{x^2 + y^2}}} \approx \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{s^2/4 - sy}{x^2 + y^2} \right] \quad (4.293)$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{sy}{x^2 + y^2} - \frac{1}{8} \frac{s^2}{x^2 + y^2} \right] \quad (4.294)$$

Αν επαναλάβουμε – κάντε το! – για το δεύτερο κλάσμα, καταλήγουμε στο

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y + s/2)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{sy}{x^2 + y^2} - \frac{1}{8} \frac{s^2}{x^2 + y^2} \right] \quad (4.295)$$

Αντικαθιστώντας, παίρνουμε

$$V(x, y) = k_e \frac{qsy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (4.296)$$

(γ') Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου δίνονται αν παραγωγίσουμε το ηλεκτρικό δυναμικό $V(x, y)$ ως προς x και y , δηλ.

$$E_x = -\frac{d}{dx} V(x, y) = -k_e qsy \left(-\frac{3}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right) = k_e \frac{qs(3xy)}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \quad (4.297)$$

$$E_y = -\frac{d}{dy} V(x, y) = -k_e \frac{qs}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - k_e qsy \left(-\frac{3}{2} \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right) = k_e \frac{qs(2y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \quad (4.298)$$

και έτσι το ηλεκτρικό πεδίο γράφεται ως

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} = k_e \frac{qs(3xy)}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \vec{i} + k_e \frac{qs(2y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \vec{j} \quad (4.299)$$

4.6.4 Ηλεκτρικό Δυναμικό Κατανομής Φορτίου

Τα πράγματα ήταν σχετικά απλά σε περιπτώσεις μεμονωμένων σημειακών φορτίων. Τι συμβαίνει όμως σε συνεχείς κατανομές φορτίων; Θα ακολουθήσουμε παρόμοιο σκεπτικό με την εύρεση των ηλεκτρικών πεδίων, δηλ. θα θεωρήσουμε την κατανομή ως άθροισμα σημειακών φορτίων. Ας δούμε τους δυο τρόπους που μπορούμε να ενεργήσουμε:

- Αν η κατανομή φορτίου είναι γνωστή, θεωρούμε το ηλεκτρικό δυναμικό dV σε σημείο P απόστασης r λόγω σημειακού φορτίου dq . Το δυναμικό αυτό δίνεται ως

$$dV = k_e \frac{dq}{r} \quad (4.300)$$

Ολοκληρώνουμε για κάθε σημειακό φορτίο dq παίρνοντας

$$V = \int dV = k_e \int \frac{dq}{r} \quad (4.301)$$

- Αν το ηλεκτρικό πεδίο είναι γνωστό από κάποια άλλη μέθοδο (π.χ. νόμος Gauss), τότε εκτιμούμε το $\vec{E}$ και αντικαθιστούμε στη σχέση

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (4.302)$$

για να βρούμε τη διαφορά δυναμικού ΔV . Τέλος, επιλέγουμε βολικό σημείο μηδενικού δυναμικού

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.27:

Αν μια ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδος με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ , μήκους l , και συνολικό φορτίο Q βρίσκεται *κάθετα* στον άξονα $x'x$, και πάνω στον άξονα $y'y$, όπως στο Σχήμα 4.47, υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P που απέχει απόσταση x από το σημείο $(0,0)$. Έπειτα υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο μέσω του ηλεκτρικού δυναμικού. Σας δίνεται ότι

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \quad (4.303)$$

Λύση:

Τμηματοποιούμε τη ράβδο σε απειροστά μικρά τμήματα φορτίου dq και μήκους dy , όπως στο Σχήμα 4.47. Για κάθε τέτοιο τμήμα θα ισχύει

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{dq}{dy} \implies dq = \lambda dy \quad (4.304)$$

Για ένα τμήμα της ράβδου dy με φορτίο dq το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P θα είναι

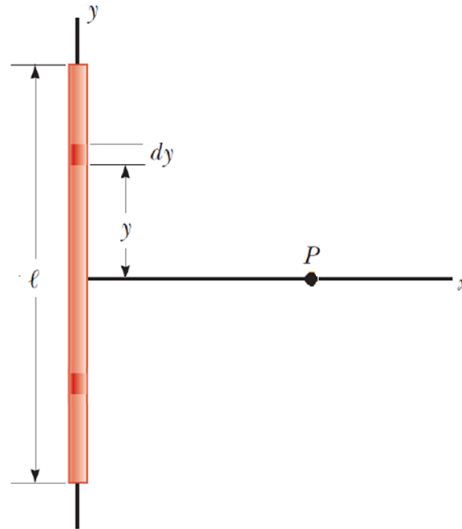
$$dV = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.305)$$

Για όλη τη ράβδο, το ηλεκτρικό δυναμικό θα είναι

$$V = \int dV = \int k_e \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int k_e \lambda \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.306)$$

$$= k_e \lambda \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k_e \lambda \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2}) \Big|_{-l/2}^{l/2} \quad (4.307)$$

$$= k_e \lambda \left(\ln(l/2 + \sqrt{x^2 + (l/2)^2}) - \ln(-l/2 + \sqrt{x^2 + (l/2)^2}) \right) \quad (4.308)$$



Σχήμα 4.47: Κατανομή φορτίου σε ράβδο.

$$= k_e \lambda \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + (l/2)^2} + l/2}{\sqrt{x^2 + (l/2)^2} - l/2} \right) \quad (4.309)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο έχει x -συνιστώσα μόνο – όπως έχουμε δει σε αντίστοιχη άσκηση στο ηλεκτρικό πεδίο – οπότε αρκεί να παραγωγίσουμε ως προς x .

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx} k_e \lambda \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + (l/2)^2} + l/2}{\sqrt{x^2 + (l/2)^2} - l/2} \right) \quad (4.310)$$

$$= -k_e \lambda \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + (l/2)^2} + l/2}{\sqrt{x^2 + (l/2)^2} - l/2} \right) \quad (4.311)$$

και μετά από αρκετές παραγωγούς και άλγεβρα καταλήγουμε στο

$$E_x = \frac{k_e \lambda l}{x \sqrt{x^2 + (l/2)^2}} = k_e \frac{Q}{x \sqrt{x^2 + (l/2)^2}} \quad (4.312)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που είχαμε βρει σε σχετικό παράδειγμα στο ηλεκτρικό πεδίο.

Παράδειγμα 4.28:

Ένας δακτύλιος ακτίνας a φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο θετικό φορτίο Q . Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P , όπως δείχνει το Σχήμα 4.48, που βρίσκεται σε απόσταση x από το κέντρο του δακτυλίου και στον κάθετο άξονα στο επίπεδο του δακτυλίου. Ποιό είναι το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P ;

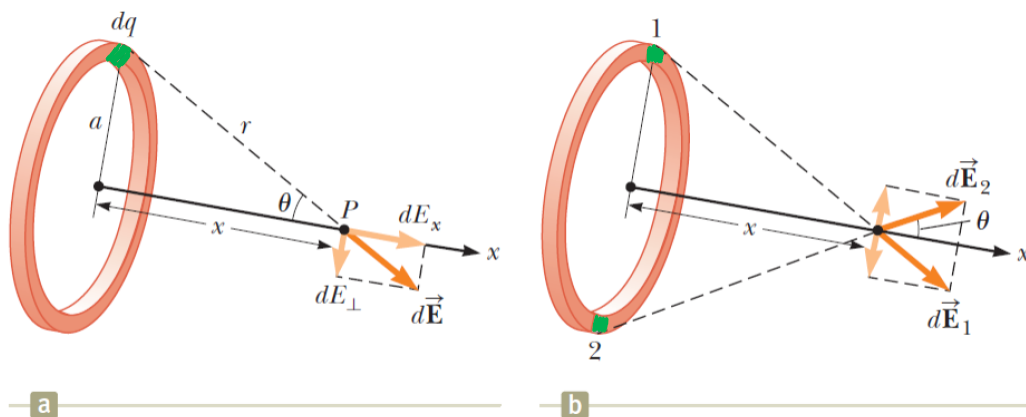
Λύση:

Έστω τμήμα του δακτυλίου με φορτίο dq . Το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P λόγω του φορτίου dq θα είναι

$$dV_P = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{dq}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (4.313)$$

Για το δυναμικό όλου του δακτυλίου στο σημείο P θα έχουμε

$$V_P = \int dV_P = \int k_e \frac{dq}{\sqrt{a^2 + x^2}} = k_e \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \int dq \quad (4.314)$$



Σχήμα 4.48: Κατανομή φορτίου σε δακτύλιο.

Επειδή

$$\int dq = Q \quad (4.315)$$

όπως έχουμε δει, θα είναι τελικά

$$V_P = k_e \frac{Q}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (4.316)$$

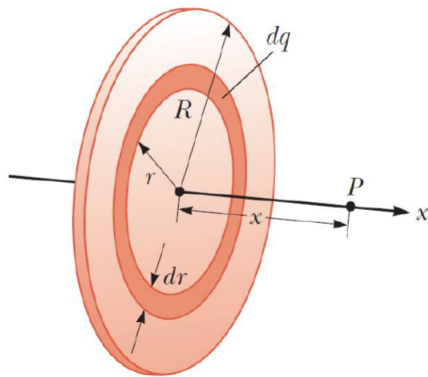
Λόγω συμμετρίας της κατανομής, το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο x -συνιστώσα στο σημείο P . Έτσι

$$E_x = -\frac{d}{dx} V_P = -\frac{d}{dx} k_e \frac{Q}{\sqrt{a^2 + x^2}} = -k_e Q \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} = k_e \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4.317)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που είχαμε βρει σε σχετικό παράδειγμα στο ηλεκτρικό πεδίο.

Παράδειγμα 4.29:

Ένας δίσκος ακτίνας R φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο επιφανειακό θετικό φορτίο Q πυκνότητας σ . Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P , όπως δείχνει το Σχήμα 4.49, που βρίσκεται σε απόσταση x από το κέντρο του δίσκου και στον κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του δίσκου. Ποιό το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P ;



Σχήμα 4.49: Κατανομή φορτίου σε δίσκο.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι ο δίσκος αποτελείται από “πολλούς” δακτυλίους πάχους dr και ακτίνας r , με $0 < r < R$.

Επίσης, για την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ισχύει

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{dq}{dA} \implies dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr \quad (4.318)$$

Θα βρούμε το ηλεκτρικό δυναμικό που συνεισφέρει ένας δακτύλιος ακτίνας r και φορτίου dq . Για έναν τέτοιο διακτύλιο, θα είναι

$$dV_P = k_e \frac{dq}{\sqrt{r^2 + x^2}} \quad (4.319)$$

από το προηγούμενο παράδειγμα. Άρα

$$V_P = \int dV_P = k_e \int \frac{dq}{\sqrt{r^2 + x^2}} = k_e \int_0^R \frac{2\pi r \sigma dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = 2\pi k_e \sigma (\sqrt{R^2 + x^2} - x) \quad (4.320)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο x -συνιστώσα, λόγω συμμετρίας της κατανομής φορτίου. Άρα

$$E_x = -\frac{d}{dx} V_P = -\frac{d}{dx} 2\pi k_e \sigma (\sqrt{R^2 + x^2} - x) = 2\pi k_e \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right) \quad (4.321)$$

μετά από αρκετές πράξεις. ☹ Το αποτέλεσμα είναι ίδιο με αυτό που είχαμε βρει σε σχετικό παράδειγμα στο ηλεκτρικό πεδίο.

4.6.5 Αγωγοί και Ηλεκτρικό Δυναμικό

Ας δούμε αν υπάρχουν ιδιότητες αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία οι οποίες είναι σχετιζόμενες με το ηλεκτρικό δυναμικό. Έστω δυο σημεία (A) και (B) της επιφάνειας του αγωγού. Για κάθε μονοπάτι στην επιφάνεια του από το (A) στο (B), το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στη μετατόπιση $d\vec{s}$. Άρα

$$\Delta V_{A \rightarrow B} = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (4.322)$$

Έτσι καταλαβαίνουμε ότι η επιφάνεια οποιουδήποτε φορτισμένου αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία είναι μια επιφάνεια σταθερού δυναμικού: κάθε σημείο της επιφάνειας έχει το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό. Επιπλέον, το ηλεκτρικό δυναμικό είναι σταθερό οπουδήποτε εντός του αγωγού και ίσο με την τιμή του στην επιφάνεια.

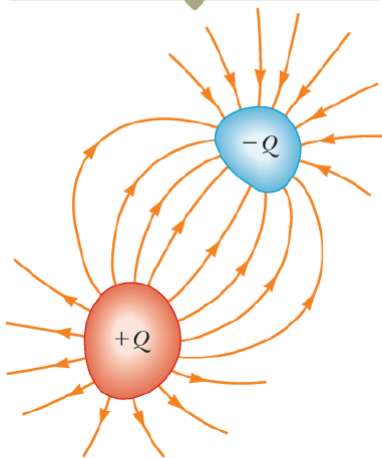
4.7 Χωρητικότητα

Σε αυτήν την παράγραφο θα συζητήσουμε για το πρώτο από τα τρία βασικά συστατικά των ηλεκτρικών κυκλωμάτων: τον **πυκνωτή**. Οι πυκνωτές δεν είναι τίποτα περισσότερο από διατάξεις που αποθηκεύουν ηλεκτρική ενέργεια. Πυκνωτές θα βρείτε παντού: στις μητρικές κάρτες των υπολογιστών σας, στα ραδιόφωνα σας, στις παροχές ρεύματος στο σπίτι σας, στο φλας της φωτογραφικής μηχανής σας, κ.α.

Έστω δυο αγωγοί όπως στο Σχήμα 4.50. Αυτή η απλή διάταξη που βλέπετε ονομάζεται πυκνωτής. Οι αγωγοί λέγονται αγωγίμες πλάκες (κι ας μην είναι πλάκες ☺) ή αλλιώς, σπλισμοί. Αν οι αγωγοί φέρουν φορτίο ίδιου μέτρου $|Q|$ τότε αναπτύσσεται διαφορά δυναμικού ανάμεσά τους – αν και καταλαβαίνετε ότι το συνολικό φορτίο τους είναι (αθροιστικά) μηδέν. Αλήθεια, τι καθορίζει πόσο φορτίο μπορεί να φέρουν; Πειραματικά έχειδειχθεί ότι η ποσότητα φορτίου Q σε ένα πυκνωτή είναι γραμμικά ανάλογη με τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους αγωγούς, ΔV . Η σταθερά αναλογίας εξαρτάται από το σχήμα και την απόσταση των αγωγών. Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$Q = C \Delta V \quad (4.323)$$

Όταν ο πυκνωτής είναι φορτισμένος, οι αγωγοί φέρουν φορτίο ίδιου μέτρου και αντίθετου προσήμου.



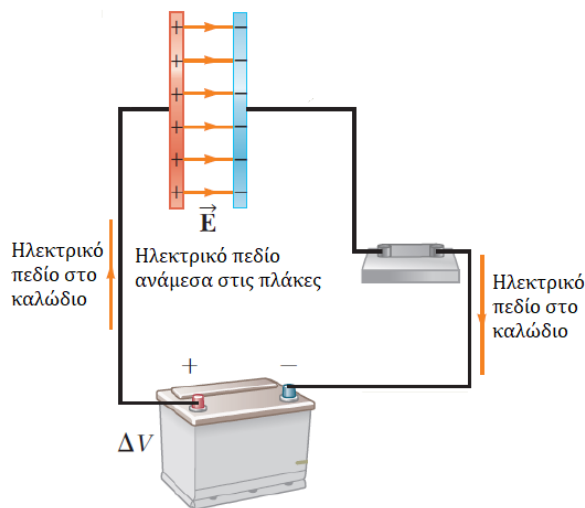
Σχήμα 4.50: Φορτισμένοι αγωγοί σε διάταξη πυκνωτή.

με C αυτή τη σταθερά, αν ορίσουμε τη **χωρητικότητα** C ως το λόγο του μέτρου του φορτίου σε έναν εν των δυο αγωγών προς το μέτρο της διαφοράς δυναμικού ανάμεσά τους:

$$C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} \quad (4.324)$$

Μονάδα μέτρησης της χωρητικότητας είναι 1 C/V ή αλλιώς 1 Farad, προς τιμήν του Michael Faraday, Άγγλου Φυσικοχημικού, που μεταξύ άλλων, εισήγαγε την έννοια των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών, όπως έχουμε ήδη αναφέρει.

Ας θεωρήσουμε έναν πυκνωτή που αποτελείται από δυο παράλληλες πλάκες, όπως στο Σχήμα 4.51. Ένας τρόπος να τον φορτίσουμε είναι να τον συνδέσουμε σε ένα κύκλωμα με μπαταρία. Πριν προ-

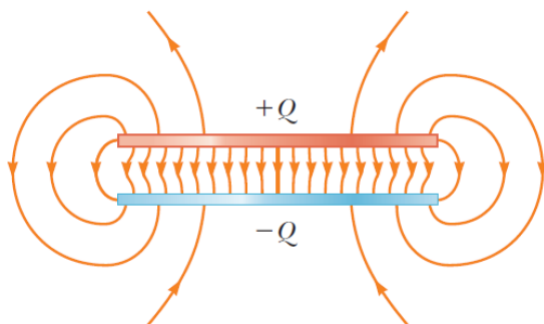


Σχήμα 4.51: Πυκνωτής παράλληλων πλακών.

χωρήσουμε, μερικές εξηγήσεις για τις δυο αυτές καινούριες λέξεις: **ηλεκτρικό κύκλωμα** ονομάζεται ένα μονοπάτι στο οποίο μπορούν να ρέουν φορτία (ηλεκτρόνια, όσον αφορά τους αγωγούς), ενώ ως **μπαταρία** εννοούμε μια συσκευή που μπορεί να διατηρεί μια διαφορά δυναμικού ΔV ανάμεσα στους πόλους

της. **Πόλοι** ονομάζονται περιοχές της μπαταρίας που φορτία μπορούν να βγαίνουν (από τον έναν) και να μπαίνουν (από τον άλλο). Στο εσωτερικό της μπαταρίας συμβαίνουν ηλεκτροχημικές αντιδράσεις που οδηγούν θετικά ιόντα (άτομα ή μόρια) στη μια μεριά της, στον επονομαζόμενο **θετικό πόλο**, ενώ ηλεκτρόνια οδηγούνται στον περίφημο **αρνητικό πόλο** της. Έτσι δημιουργείται περίσσεια ηλεκτρονίων στον αρνητικό πόλο, δηλ. μια περιοχή της μπαταρίας αρνητικά φορτισμένη, και έλλειψη ηλεκτρονίων στο θετικό πόλο, δηλ. μια περιοχή της μπαταρίας θετικά φορτισμένη. Αυτή η χωρική διάταξη φορτίων δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο γύρω από τους πόλους της, άρα και μια διαφορά δυναμικού ανάμεσά τους!

Δείτε λοιπόν ξανά το Σχήμα 4.51. Αν ο πυκνωτής είναι αρχικά αφόρτιστος, η μπαταρία εγκαθιστά ηλεκτρικό πεδίο στα καλώδια. Το πεδίο αυτό έχει τη φορά του σχήματος – από το θετικό πόλο της μπαταρίας προς τον αρνητικό, μέσω του εξωτερικού κυκλώματος. Ας δούμε τη “δεξιά” (μπλέ) πλάκα. Η μπαταρία εγκαθιστά διαφορά δυναμικού μεταξύ πόλου και πλάκας. Έτσι, εγείρεται ηλεκτρικό πεδίο στο καλώδιο και άρα μια ηλεκτρική δύναμη στα ηλεκτρόνια του, τα οποία κινούνται προς την πλάκα. Γιατί; Διότι τα ηλεκτρόνια – λόγω αρνητικού φορτίου – κινούνται προς περιοχές υψηλού δυναμικού. Η κίνηση συνεχίζεται ως ότου η πλάκα, το καλώδιο, και ο αρνητικός πόλος της μπαταρίας έχουν όλα το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό. Όταν αυτό γίνει, η διαφορά δυναμικού παύει να υπάρχει, αφού δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο στο καλώδιο και τα ηλεκτρόνια δεν κινούνται. Η (μπλέ) πλάκα φέρει πλέον αρνητικό φορτίο $-Q$. Τα ακριβώς όμοια ισχύουν και για την “αριστερή” (κόκκινη) πλάκα, με τη διαφορά ότι η πλάκα φορτίζεται θετικά. Στην πραγματικότητα, το ηλεκτρικό πεδίο ενός τέτοιου πυκνωτή είναι όπως στο Σχήμα 4.52. Είναι όμως βολικό να θεωρούμε ότι αν οι πλάκες είναι αρκετά κοντά μεταξύ τους, δηλ. η απόσταση τους d είναι πολύ μικρή, τότε το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα τους είναι σχεδόν ομογενές. Φυσικά αγνοούμε τα (ενδιαφέροντα) φαινόμενα που συμβαίνουν στα άκρα των πλακών. Ας βρούμε τώρα μια έκφραση



Σχήμα 4.52: Ηλεκτρικό πεδίο σε πραγματικό πυκνωτή παράλληλων πλακών.

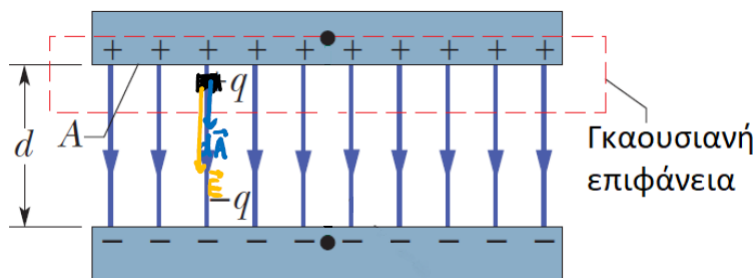
για τη χωρητικότητα C ενός ζεύγους πλακών φορτίου Q η καθεμιά. Η διαδικασία μπορεί θεωρηθεί ως εξής:

1. Υπολογίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο E ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή (ή το ηλεκτρικό φορτίο, αν δεν είναι γνωστό)
2. Υπολογίζουμε τη διαφορά δυναμικού ΔV μεταξύ των πλακών
3. Βρίσκουμε τη χωρητικότητα με τη σχέση $C = \frac{Q}{\Delta V}$

Ο υπολογισμός όλων αυτών είναι σχετικά απλός αν η γεωμετρία του πυκνωτή είναι απλή.

4.7.1 Πυκνωτής Παράλληλων Πλακών

Ας δούμε πρώτα έναν πυκνωτή παράλληλων πλακών, όπως στο Σχήμα 4.53. Έστω ότι οι πλάκες έχουν απόσταση d και εμβαδόν A , η μια πλάκα φέρει φορτίο Q και η άλλη $-Q$. Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι $\sigma = Q/A$. Θεωρούμε ότι οι πλάκες είναι πολύ κοντά μεταξύ τους και το ηλεκτρικό πεδίο που αναπτύσσεται ανάμεσά τους είναι ομογενές. Ξέρουμε ότι η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στις πλάκες



Σχήμα 4.53: Πυκνωτής παράλληλων πλακών.

του έχει μέτρο

$$|\Delta V| = Ed \quad (4.325)$$

Χρειαζόμαστε να βρούμε το φορτίο του, Q . Θα μας φανεί χρήσιμος ο νόμος του Gauss. Θεωρούμε γκαουσιανή επιφάνεια η οποία περιλαμβάνει όλο τον έναν οπλισμό και πάνω σε αυτή ένα τμήμα εμβαδού dA . Ισχύουν οι συνθήκες:

- Τα διανύσματα $\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι παράλληλα μεταξύ τους.
- Το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο της επιφάνειας είναι σταθερό.

Οπότε

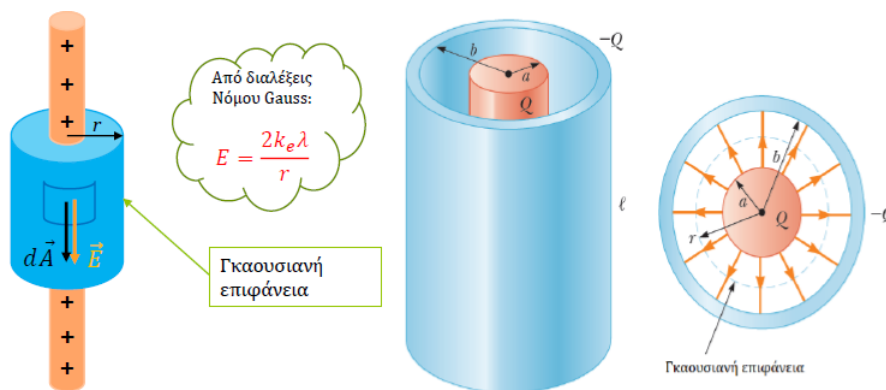
$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \iff Q = EA\epsilon_0 \quad (4.326)$$

Τελικά, η χωρητικότητα του πυκνωτή παράλληλων πλακών είναι

$$C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (4.327)$$

4.7.2 Κυλινδρικός Πυκνωτής

Ο πυκνωτής παράλληλων πλακών δεν είναι ο μόνος που υπάρχει, οπότε ας γνωρίσουμε και τον κυλινδρικό πυκνωτή. Ο τελευταίος αποτελείται από ένα στέρεο κυλινδρικό αγωγό ακτίνας a και φορτίου Q , και περικλείεται από ομοαξονικό αγωγό με κυλινδρικό κέλυφος αμελητέου πάχους, ακτίνας $b > a$ και φορτίου $-Q$. Οι αγωγοί έχουν γραμμική πυκνότητα φορτίου λ . Ας βρούμε τη χωρητικότητα ενός τέτοιου πυκνωτή αν το μήκος του είναι l . Δείτε το Σχήμα 4.54. Από το νόμο του Gauss είχαμε βρει ότι το ηλεκτρικό πεδίο



Σχήμα 4.54: Κυλινδρικός πυκνωτής.

σε απόσταση r μιας άπειρου μήκους ράβδου είναι

$$E_r = k_e \frac{2\lambda}{r} \quad (4.328)$$

Για τη χωρητικότητα όμως θέλουμε τη διαφορά δυναμικού. Πώς θα τη βρούμε; Έστω η διαδρομή από το εξωτερικό μέρος του εσωτερικού αγωγού ως το εσωτερικό μέρος του εξωτερικού, δηλ. από την ακτίνα a ως την b . Οπότε

$$\Delta V_{a \rightarrow b} = V_b - V_a = - \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int \vec{E}_r \cdot d\vec{r} = -2k_e\lambda \int_a^b \frac{dr}{r} \quad (4.329)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα μας δίνει

$$\Delta V = -2k_e\lambda \ln \frac{b}{a} \quad (4.330)$$

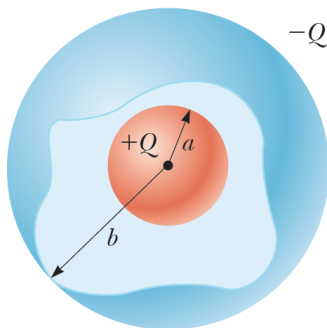
Η χωρητικότητα του κυλινδρικού πυκνωτή είναι

$$C = \frac{|Q|}{|\Delta V|} = \frac{Q}{2k_e\lambda \ln \frac{b}{a}} = \frac{l}{2k_e \ln \frac{b}{a}} \quad (4.331)$$

Ένας πολύ γνωστός σας κυλινδρικός πυκνωτής είναι το ομοαξονικό καλώδιο που χρησιμοποιείται στις τηλεοράσεις.

4.7.3 Σφαιρικός Πυκνωτής

Τέλος, μια ακόμα σημαντική κατηγορία πυκνωτών είναι οι σφαιρικοί πυκνωτές. Ένας σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από ένα σφαιρικό αγωγίμο κέλυφος ακτίνας b και φορτίου $-Q$, ομόκεντρο με μια μικρότερη αγωγίμη σφαίρα ακτίνας a και φορτίου Q , όπως στο Σχήμα 4.55. Ο πυκνωτής έχει σφαιρική συμμετρία,



Σχήμα 4.55: Σφαιρικός πυκνωτής.

οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αποτελέσματα από προηγούμενες παραγράφους για να βρούμε τη χωρητικότητα. Έχουμε ήδη δει ότι η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου εκτός ενός ομοιόμορφου σφαιρικού φορτίου είναι ακτινική και το μέτρο του είναι

$$E = k_e \frac{Q}{r^2} \quad (4.332)$$

Στην περίπτωση μας το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για το πεδίο ανάμεσα στις δυο σφαίρες, δηλ. για $a < r < b$. Η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στις σφαίρες για μια μετατόπιση $d\vec{s}$ είναι

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_a^b E_r dr = -k_e Q \int_a^b \frac{dr}{r^2} = k_e Q \frac{a-b}{ab} \quad (4.333)$$

δεδομένου ότι το διάνυσμα $\vec{E}$ και το διάνυσμα $d\vec{s}$ είναι παράλληλα σε κάθε ακτίνα. Πλέον μπορούμε να βρούμε τη χωρητικότητα ως

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{k_e Q \frac{a-b}{ab}} = \frac{ab}{k_e(b-a)} \quad (4.334)$$

4.7.4 Απομονωμένος Αγωγός

Σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα είχαμε ένα ζεύγος αγωγών που σχημάτιζαν ένα πυκνωτή. Όμως ακόμα και ένας αγωγός έχει χωρητικότητα! Για παράδειγμα, σκεφτείτε έναν απομονωμένο, σφαιρικό, φορτισμένο αγωγό. Το ηλεκτρικό πεδίο γύρω του είναι ακριβώς το ίδιο όπως θα ήταν αν τον περιέβαλλε ένα ομόκεντρο, αγωγίμο σφαιρικό κέλυφος άπειρης ακτίνας, με αντίθετο φορτίο από του σφαιρικού αγωγού. Μπορούμε να φανταστούμε αυτό το φανταστικό κέλυφος ως το δεύτερο αγωγό ενός ζεύγους αγωγών που σχηματίζουν έναν πυκνωτή! Το ηλεκτρικό δυναμικό της σφαίρας ακτίνας a είναι απλά

$$V_a = k_e \frac{Q}{a} \quad (4.335)$$

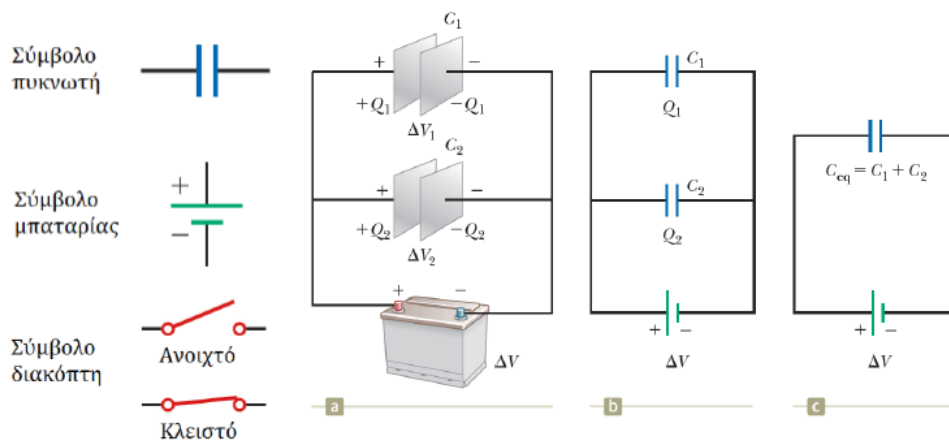
και άρα

$$C = \frac{Q}{\Delta V_{\infty \rightarrow a}} = \frac{Q}{k_e \frac{Q}{a} - 0} = \frac{a}{k_e} = 4\pi\epsilon_0 a \quad (4.336)$$

Παρατηρήστε ότι η χωρητικότητα ενός απομονωμένου, φορτισμένου σφαιρικού αγωγού είναι ανάλογη της ακτίνας a και ανεξάρτητη από το φορτίο του και τη διαφορά δυναμικού του. Δεν ήταν ακριβώς το ίδιο σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα; ☺

4.7.5 Συνδυασμοί Πυκνωτών

Είναι ενδιαφέρον να δούμε τι θα συμβεί αν βάλουμε τους πυκνωτές μας σε διάφορες διατάξεις μεταξύ τους και μεταξύ μιας μπαταρίας (που δουλεύει σαν παροχή διαφοράς δυναμικού, όπως είπαμε). Πρέπει να βρούμε έναν ευκολότερο τρόπο να σχεδιάζουμε τέτοιες συνδεσμολογίες. Δείτε το Σχήμα 4.56. Οι

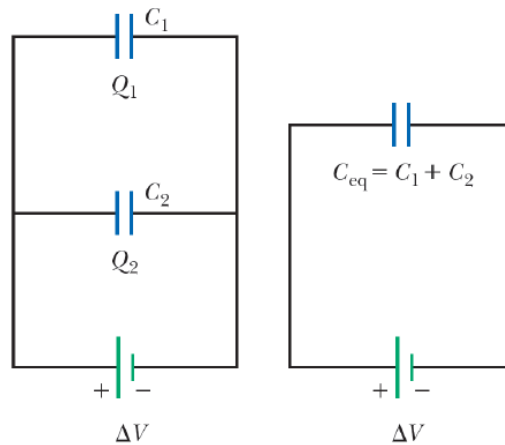


Σχήμα 4.56: Συμβολισμοί.

πυκνωτές θα συμβολίζονται στο εξής με δυο ίσες παράλληλες γραμμές σε μικρή απόσταση μεταξύ τους (με μπλε χρώμα, εν γένει), ενώ η πηγή δυναμικού θα συμβολίζεται με δυο άνισες παράλληλες γραμμές σε μικρή απόσταση (με πράσινο χρώμα, εν γένει). Το Σχήμα 4.56(c) δείχνει το τελικό σχέδιο.

Παράλληλη Σύνδεση

Η πρώτη συνδεσμολογία που θα δούμε αφορά την παράλληλη σύνδεση μεταξύ δυο πυκνωτών με τη μπαταρία, όπως στο Σχήμα 4.57. Προσέξτε, η λέξη “παράλληλα” δε σχετίζεται με τη σχεδίαση της διάταξης. Σχετίζεται με το ότι οι πυκνωτές είναι απευθείας συνδεδεμένοι μεταξύ τους στον έναν τους οπλισμό και απευθείας συνδεδεμένοι μεταξύ τους στον άλλο. Η ίδια διαφορά δυναμικού εφαρμόζεται στα άκρα των δυο ζευγών συνδεδεμένων οπλισμών. Αυτό σημαίνει ότι οι πυκνωτές έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού στα άκρα τους.



Σχήμα 4.57: Παράλληλη Σύνδεση.

Η διαφορά δυναμικού στα άκρα τους είναι ίση με ΔV , δηλ.

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V \quad (4.337)$$

με $\Delta V_1, \Delta V_2$ η διαφορά δυναμικού στα άκρα καθενός πυκνωτή. Οι πυκνωτές φορτίζονται με φορτίο

$$Q_1 = C_1 \Delta V \quad (4.338)$$

$$Q_2 = C_2 \Delta V \quad (4.339)$$

Το συνολικό φορτίο στους πυκνωτές αποτελεί το άθροισμα των επιμέρους φορτίων, δηλ.

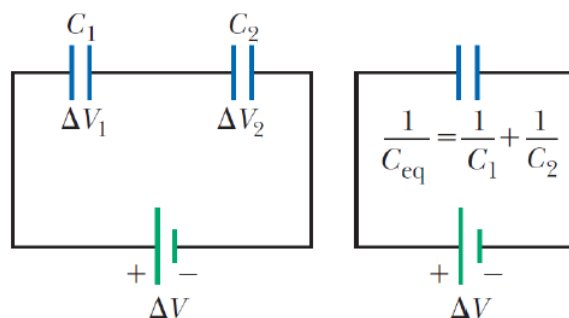
$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V = (C_1 + C_2) \Delta V \quad (4.340)$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι οι δυο πυκνωτές μπορούν να αντικατασταθούν από έναν, με χωρητικότητα $C_{eq} = C_1 + C_2$. Γενικότερα, για N συνδεδεμένους παράλληλους πυκνωτές ισχύει

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i \quad (4.341)$$

Σύνδεση σε Σειρά

Η δεύτερη συνδεσμολογία που θα δούμε αφορά τη σειριακή σύνδεση μεταξύ δυο πυκνωτών όπως στο Σχήμα 4.58. Ξανά, η λέξη “σειριακή” δε σημαίνει κάτι όσον αφορά τη σχεδίαση. Σημαίνει ότι οι πυκνωτές



Σχήμα 4.58: Σειριακή Σύνδεση.

συνδέονται ο ένας μετά τον άλλο, και η όποια διαφορά δυναμικού εφαρμόζεται στα άκρα της όλης συνδεσμολογίας. Συγκεκριμένα, όπως βλέπετε στο Σχήμα 4.58, η αριστερή πλάκα του C_1 και η δεξιά πλάκα

του C_2 είναι συνδεδεμένες με την πηγή. Οι άλλες δυο πλάκες είναι απλά συνδεδεμένες μεταξύ τους, και εφ' όσον το συνολικό τους φορτίο είναι μηδέν, έτσι πρέπει να παραμείνει και μετά απ' οτιδήποτε συμβεί, αφού αποτελούν ένα απομονωμένο - ηλεκτρικά - σύστημα!

Ας θεωρήσουμε αρχικά αφόρτιστους πυκνωτές. Όταν συνδέσουμε την μπαταρία, μεταφέρονται ηλεκτρόνια από την αριστερή πλάκα του C_1 στη δεξιά πλάκα του C_2 . Ένα ισόποσο φορτίο, αλλά αρνητικό, εγκαταλείπει την αριστερή πλάκα του C_2 και άρα αυτή καταλήγει να έχει πλεόνασμα (θετικού) φορτίου. Το αρνητικό φορτίο που εγκαταλείπει την αριστερή πλάκα του C_2 προκαλεί συσσώρευση αρνητικού φορτίου στη δεξιά πλάκα του C_1 . Έτσι και οι δυο πυκνωτές έχουν δεξιές πλάκες με φορτίο $-Q$ και αριστερές πλάκες με φορτίο $+Q$. Με άλλα λόγια, το φορτίο των δυο σειριακών πυκνωτών είναι ίδιο: $Q_1 = Q_2 = Q$.

Προφανώς η διαφορά δυναμικού στα άκρα κάθε πυκνωτή δεν είναι ίδια, αφού δε συνδέονται οι σπλισμοί τους κατευθείαν με την πηγή, όμως σίγουρα θα ισχύει

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 = \Delta V \quad (4.342)$$

Οπότε

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad (4.343)$$

Αν θεωρήσουμε έναν πυκνωτή που έχει την ίδια επίδραση στη συνδεσμολογία με τους δυο πυκνωτές, τότε

$$\Delta V = \frac{Q}{C_{eq}} \quad (4.344)$$

Εξισώνοντας βλέπετε ότι

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{eq}} \quad (4.345)$$

Γενικεύοντας την παραπάνω σχέση για οποιαδήποτε σειριακή σύνδεση πυκνωτών έχουμε

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \quad (4.346)$$

που γράφεται λίγο πιο βολικά ως

$$C_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}} \quad (4.347)$$

Παρατηρήστε ότι:

- Οι παράλληλα συνδεδεμένοι πυκνωτές έχουν όλοι την ίδια διαφορά δυναμικού ΔV , αυτή της πηγής. Οι σειριακά συνδεδεμένοι πυκνωτές έχουν όλοι το ίδιο ποσό φορτίου, Q .
- Η ισοδύναμη χωρητικότητα μιας παράλληλης συνδεσμολογίας πυκνωτών είναι *μεγαλύτερη* από οποιοδήποτε πυκνωτή στη συνδεσμολογία. Η ισοδύναμη χωρητικότητα μιας συνδεσμολογίας σε σειρά είναι *μικρότερη* από οποιοδήποτε πυκνωτή στη συνδεσμολογία.

Μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε ένα πίνακα με τα χαρακτηριστικά κάθε συνδεσμολογίας. Δείτε τον Πίνακα 4.1.

Συνδεσμολογία Πυκνωτών και Ισοδύναμος Πυκνωτής

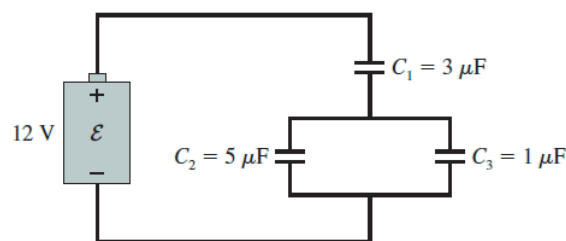
Είδος σύνδεσης	Φορτίο	Δυναμικό	Χωρητικότητα
Παράλληλη	$Q_{eq} = \sum_i Q_i$	$\Delta V_{eq} = \Delta V_i$	$C_{eq} = \sum_i C_i$
Σειριακή	$Q_{eq} = Q_i$	$\Delta V_{eq} = \sum_i \Delta V_i$	$C_{eq} = \left(\sum_i \frac{1}{C_i} \right)^{-1}$

Πίνακας 4.1: Ηλεκτρικές ιδιότητες παράλληλης και σειριακής συνδεσμολογίας πυκνωτών σε σχέση με ισοδύναμο πυκνωτή.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.30:

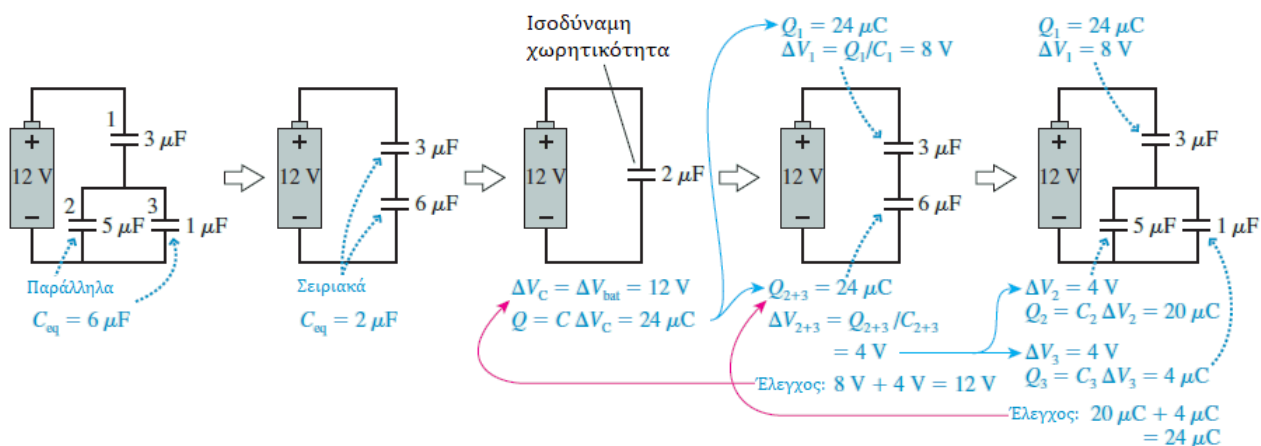
Βρείτε το φορτίο και τη διαφορά δυναμικού στα άκρα καθενός από τους τρεις πυκνωτές του Σχήματος 4.59.



Σχήμα 4.59: Κύκλωμα πυκνωτών.

Λύση:

Η μπαταρία παρέχει διαφορά δυναμικού $\Delta V = 12 \text{ V}$. Οι τρεις πυκνωτές δεν είναι συνδεδεμένοι ούτε σε σειρά ούτε παράλληλα, αλλά μπορούμε να τους χωρίσουμε σε ομάδες που είναι είτε σειριακά είτε παράλληλα συνδεδεμένοι. Η ανάλυση τέτοιων κυκλωμάτων συνίσταται στο συνδυασμό των στοιχείων ώστε να βρεθεί το ισοδύναμο στοιχείο, και μετά στην αντιστροφή της διαδικασίας για να βρεθούν οι ζητούμενες τιμές για κάθε στοιχείο. Αυτή η διαδικασία φαίνεται στο Σχήμα 4.60. Ξεκινώντας από το



Σχήμα 4.60: Ανάλυση κυκλώματος πυκνωτών.

αριστερό κύκλωμα, η ισοδύναμη χωρητικότητα των πυκνωτών των $5\ \mu\text{F}$ και $1\ \mu\text{F}$ σε παραλληλία είναι

$$C_{eq} = 5 + 1 = 6\ \mu\text{F} \quad (4.348)$$

Η ισοδύναμη χωρητικότητα των πυκνωτών των $3\ \mu\text{F}$ και $6\ \mu\text{F}$ σε σειρά είναι

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\ \mu\text{F} \quad (4.349)$$

Η ισοδύναμη χωρητικότητα μας δίνει ότι το συνολικό φορτίο είναι

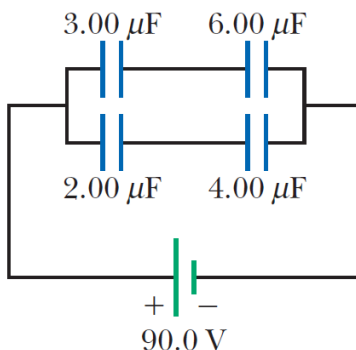
$$Q = C\Delta V = 24\ \mu\text{C} \quad (4.350)$$

Μπορούμε τώρα να πάμε προς τα πίσω. Οι πυκνωτές σε σειρά έχουν όλοι το ίδιο φορτίο, οπότε το φορτίο στον C_1 και στον C_{2+3} θα είναι $\pm 24\ \mu\text{C}$. Βρίσκουμε έτσι ότι $\Delta V_1 = 8\ \text{V}$ και $\Delta V_{2+3} = 4\ \text{V}$. Οι πυκνωτές σε παραλληλία έχουν όλοι την ίδια διαφορά δυναμικού, οπότε $\Delta V_2 = \Delta V_3 = 4\ \text{V}$. Βρίσκουμε έτσι ότι $Q_2 = 20\ \mu\text{C}$ και ότι $Q_3 = 4\ \mu\text{C}$. Το φορτίο και η διαφορά δυναμικού σε καθένα από τους τρεις πυκνωτές φαίνεται στο δεξιά κύκλωμα του Σχήματος 4.60.

Παράδειγμα 4.31:

Για το σύστημα του Σχήματος 4.61, βρείτε:

- (α') την ισοδύναμη χωρητικότητα του συστήματος
- (β') το φορτίο σε καθένα πυκνωτή
- (γ') τη διαφορά δυναμικού σε κάθε πυκνωτή



Σχήμα 4.61: Συνδυασμός Πυκνωτών.

Λύση:

Οι δείκτες των μεταβλητών i υποδηλώνουν τον πυκνωτή χωρητικότητας $i\ \mu\text{F}$.

(α') Για την άνω ομάδα των πυκνωτών σε σειρά, η ισοδύναμη χωρητικότητα δίνεται ως

$$\frac{1}{C_{up}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow C_{up} = 2\ \mu\text{F} \quad (4.351)$$

Για την κάτω ομάδα των πυκνωτών σε σειρά, η ισοδύναμη χωρητικότητα δίνεται ως

$$\frac{1}{C_{down}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow C_{down} = 1.33\ \mu\text{F} \quad (4.352)$$

Αυτές οι δυο χωρητικότητες συνδέονται παράλληλα και έτσι η ισοδύναμη χωρητικότητα δίνεται ως

$$C_{eq} = C_{up} + C_{down} = 2 + 1.33 = 3.33\ \mu\text{F} \quad (4.353)$$

(β') Παρατηρήστε ότι η διαφορά δυναμικού της μπαταρίας είναι αυτή που έχουν στα άκρα τους οι δυο ομάδες πυκνωτών, η άνω και η κάτω. Κάθε συνδυασμός πυκνωτών σε σειρά έχει το ίδιο φορτίο με τον ισοδύναμο πυκνωτή. Για την άνω ομάδα

$$Q_3 = Q_6 = Q_{up} = C_{up}\Delta V = 180 \mu\text{C} \quad (4.354)$$

ενώ για την κάτω ομάδα

$$Q_2 = Q_4 = Q_{down} = C_{down}\Delta V = 120 \mu\text{C} \quad (4.355)$$

(γ') Η διαφορά δυναμικού κατά μήκος καθενός από τους πυκνωτές είναι

$$\Delta V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \Delta V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = 60 \text{ V} \quad (4.356)$$

$$\Delta V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \Delta V_6 = \frac{Q_6}{C_6} = 30 \text{ V} \quad (4.357)$$

Παράδειγμα 4.32:

Δυο πυκνωτές δίνουν ισοδύναμη χωρητικότητα C_p όταν συνδέονται παράλληλα και ισοδύναμη χωρητικότητα C_s όταν συνδέονται σε σειρά. Ποιά είναι η χωρητικότητα του καθενός;

Λύση:

Έχουμε

$$C_p = C_1 + C_2 \quad (4.358)$$

και

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (4.359)$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη στη δεύτερη

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_p - C_1} = \frac{C_p - C_1 + C_1}{C_1(C_p - C_1)} = \frac{C_p}{C_1(C_p - C_1)} \quad (4.360)$$

Απλοποιώντας

$$C_1^2 - C_1 C_p + C_p C_s = 0 \quad (4.361)$$

Οι ρίζες του τριωνύμου δίνονται ως

$$C_1 = \frac{C_p \pm \sqrt{C_p^2 - 4C_p C_s}}{2} = \frac{1}{2}C_p \pm \sqrt{\frac{1}{4}C_p^2 - C_p C_s} \quad (4.362)$$

Διαλέξαμε το θετικό πρόσημο καθώς δεν αλλάζει κάτι στο αποτέλεσμα (το αρνητικό πρόσημο δίνει τις ίδιες τιμές αλλά ανάποδα στους πυκνωτές). Οπότε

$$C_2 = \frac{1}{2}C_p - \sqrt{\frac{1}{4}C_p^2 - C_p C_s} \quad (4.363)$$

Οπότε τελικά

$$C_{1,2} = \frac{1}{2}C_p \pm \sqrt{\frac{1}{4}C_p^2 - C_p C_s} \quad (4.364)$$

Παράδειγμα 4.33:

Για να διορθώσετε ένα τροφοδοτικό για έναν στερεοφωνικό ενισχυτή, χρειάζεστε έναν πυκνωτή χωρητικότητας 100 μF ικανό να αντέξει διαφορά δυναμικού 90 V. Το μόνο άμεσα διαθέσιμο προϊόν στο ηλεκτρολογείο της γειτονιάς σας είναι ένα κουτί με πέντε (5) πυκνωτές χωρητικότητας 100 μF , ικανούς να αντέξουν διαφορά δυναμικού 50 V ο καθένας.

- (α') Ποιός συνδυασμός από αυτούς τους πυκνωτές έχει τα σωστά ηλεκτρικά χαρακτηριστικά; Θα χρησιμοποιήσετε όλους τους πυκνωτές στο κουτί;
 (β') Με το συνδυασμό που βρήκατε, ποιά είναι η μέγιστη διαφορά δυναμικού στα άκρα καθενός από τους πυκνωτές;

Λύση:

- (α') Αν βάλουμε δυο ίδιους πυκνωτές σε σειρά, η διαφορά δυναμικού που θα παρέχεται στο κύκλωμα θα "κοπεί" στα δυο, ισόποσα στα άκρα καθενός πυκνωτή: έτσι ο καθένας θα έχει 45 V στα άκρα του, αλλά η συνολική χωρητικότητα θα μειωθεί στο μισό από όση θέλουμε. Για να διπλασιάσουμε τη χωρητικότητα, θέλουμε άλλο ένα ζεύγος πυκνωτών, ίδιο με αυτό που φτιάξαμε, αλλά σε παράλληλη σύνδεση με το προηγούμενο. Η ισοδύναμη χωρητικότητα θα είναι

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{1}{100}} + \frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{1}{100}} = 100 \mu\text{F} \quad (4.365)$$

Προφανώς ένας πυκνωτής περισσεύει. Υπάρχει άλλη μια διάταξη που δουλεύει (που πάλι περισσεύει ένας πυκνωτής). Μπορείτε να τη βρείτε;

- (β') Καθένας από τους τέσσερις πυκνωτές θα λάβει μέγιστη διαφορά δυναμικού 45 V.

4.7.6 Ενέργεια Πυκνωτή

Ως τελευταίο ερώτημα αφήσαμε το ποσό της ενέργειας που αποθηκεύεται σε έναν πυκνωτή. Ας θεωρήσουμε μια υπεραπλουστευμένη, "μηχανική" διαδικασία φόρτισης ενός πυκνωτή: ένα μικρό ποσό φορτίου μεταφέρεται από τη μια πλάκα μέσω δύναμης προς την άλλη πλάκα. Η δύναμη παράγει έργο στο φορτίο και δημιουργείται μια διαφορά δυναμικού (μικρή) ανάμεσα στις πλάκες. Όσο μεταφέρουμε φορτίο από τη μια πλάκα στην άλλη, τόσο μεγαλώνει η διαφορά δυναμικού, καθώς περισσότερο έργο απαιτείται για τη μεταφορά μιας ποσότητας φορτίου. Το έργο που παράγεται στο σύστημα από την εξωτερική δύναμη εμφανίζεται ως μεταβολή της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος. Γιατί συμβαίνει αυτό; Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας μη απομονωμένου συστήματος!

Έστω ότι ο πυκνωτής έχει φορτίο q σε κάποιο στάδιο της παραπάνω διαδικασίας φόρτισης. Η διαφορά δυναμικού θα είναι

$$\Delta V = q/C \quad (4.366)$$

Το έργο που απαιτείται για τη μεταφορά ενός απειροστά μικρού φορτίου dq από μια πλάκα φορτίου $-q$ σε αυτή φορτίου $+q$ είναι

$$dW = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq \quad (4.367)$$

Αν θέλουμε να βρούμε το συνολικό έργο που απαιτείται για τη φόρτιση του πυκνωτή από μηδενικό φορτίο σε φορτίο Q θα είναι

$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} \quad (4.368)$$

Οπότε το έργο που παράγεται κατά τη φόρτιση του πυκνωτή αποθηκεύεται ως ηλεκτρική δυναμική ενέργεια U_e και άρα

$$U_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \quad (4.369)$$

με τις υπόλοιπες εκφράσεις να προκύπτουν από απλές αντικαταστάσεις από τη σχέση της χωρητικότητας, $Q = C\Delta V$. Θεωρούμε την ενέργεια σε έναν πυκνωτή ως αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται ανάμεσα στις πλάκες του, όσο φορτίζεται. Για έναν πυκνωτή από δυο παράλληλες πλάκες εμβαδού A , που απέχουν d , η ενέργεια που φέρει στο ηλεκτρικό του πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς του είναι

$$U_e = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon_0 A}{d}\right)(Ed)^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 AdE^2 \quad (4.370)$$

με ϵ_0 τη γνωστή διηλεκτρική σταθερά του κενού, που εμφανίζεται και στη μαθηματική έκφραση του νόμου του Coulomb και του ηλεκτρικού πεδίου, και μας πληροφορεί για τη συμπεριφορά (“αντίδραση”) του κενού χώρου σε ένα ηλεκτρικό πεδίο.

Η χρησιμότητα ενός πυκνωτή προέρχεται από το γεγονός ότι μπορεί να φορτιστεί αργά (κάτι που εξαρτάται και από την μπαταρία) αλλά μπορεί να μεταφέρει ενέργεια πολύ γρήγορα! Ένα ανάλογο από τη Μηχανική είναι η “φόρτιση” ενός καταπέλτη. Χρειάζεται πολύς κόπος για να σπλίσεις ένα καταπέλτη αλλά πολύ γρήγορα εκλύει την ενέργεια του πετώντας κάποιο τεράστιο κομμάτι πέτρας. Σκεφτείτε επίσης το φλας της φωτογραφικής μηχανής – που είδαμε και σε παράδειγμα. Η μπαταρία της κάμερας φορτίζει τον πυκνωτή και όταν αυτό συμβεί μπορείτε να διαχύσετε την αποθηκευμένη ενέργεια σε μια λάμπα. Ακόμα και στα μοντέρνα κινητά τηλέφωνα δεν μπορείτε να βγάλετε δυο φωτογραφίες με φλας αμέσως γιατί παίρνει λίγο χρόνο η φόρτιση του αντίστοιχου πυκνωτή. Επίσης, ο απινιδωτής είναι μια πολύ σημαντική εφαρμογή των πυκνωτών στην ιατρική. Μια καρδιακή προσβολή ή ένας τραυματισμός μπορεί να βάλει την καρδιά σας σε μια κατάσταση που λέγεται μαρμαρυγή: η καρδιά σας “αποσυγχρονίζεται” και δεν αντλεί σωστά το αίμα. Ένα δυνατό ηλεκτρικό σοκ στο στήθος σταματά πλήρως την καρδιά, επιτρέποντας στην καρδιά να επανασυγχρονιστεί. Η ενέργεια του απινιδωτή – που φτάνει μέχρι τα 360 J – εκλύεται μόλις σε περίπου 2 ms μέσω δυο πλακών που βάζει ο γιατρός στο στήθος του ασθενούς.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.34:

Δυο ίδιοι πυκνωτές παράλληλων πλακών, καθένας με χωρητικότητα 10 μF φορτίζονται σε διαφορά δυναμικού 50 V και μετά αποσυνδέονται από την μπαταρία. Στη συνέχεια, συνδέονται παράλληλα με τις πλάκες ίδιου φορτίου να συνδέονται μεταξύ τους. Τέλος, η απόσταση μεταξύ των πλακών στον έναν από τους δυο πυκνωτές διπλασιάζεται.

- (α') Βρείτε τη συνολική ενέργεια του συστήματος των δυο πυκνωτών πριν το διπλασιασμό της απόστασης των πλακών.
- (β') Βρείτε τη διαφορά δυναμικού σε κάθε πυκνωτή μετά το διπλασιασμό της απόστασης των πλακών.
- (γ') Βρείτε τη συνολική ενέργεια του συστήματος μετά το διπλασιασμό της απόστασης των πλακών.
- (δ') Ερμηνεύστε τη διαφορά στις απαντήσεις (α), (γ) με βάση τη διατήρηση της ενέργειας.

Λύση:

(α') Λόγω της παράλληλης μεταξύ τους σύνδεσης, η διαφορά δυναμικού είναι η ίδια:

$$U_e = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 + \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = C(\Delta V)^2 = 2.5 \cdot 10^{-2} \text{ J} \quad (4.371)$$

(β') Αφού η χωρητικότητα τέτοιου πυκνωτή δίνεται ως

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (4.372)$$

και η απόσταση d διπλασιάζεται, ο νέος πυκνωτής θα έχει χωρητικότητα $C' = C/2$. Το συνολικό φορτίο είναι το ίδιο με πριν, δηλ.

$$Q_{bef} = Q_{aft} \quad (4.373)$$

$$C(\Delta V) + C(\Delta V) = C(\Delta V') + \frac{C}{2}(\Delta V') \quad (4.374)$$

$$2C(\Delta V) = \frac{3}{2}C(\Delta V') \quad (4.375)$$

$$\Delta V' = \frac{4}{3}\Delta V = 66.7 \text{ V} \quad (4.376)$$

(γ') Η νέα συνολική ενέργεια θα είναι

$$U'_e = \frac{1}{2}C(\Delta V')^2 + \frac{1}{2}C(\Delta V')^2 = \frac{3}{4}C\left(\frac{4\Delta V}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}U_e = 3.3 \cdot 10^{-2} \text{ J} \quad (4.377)$$

(δ') Η διαφορά στις ενέργειες οφείλεται στο θετικό έργο που παρήχθη από κάποιον που τράβηξε τις πλάκες στη διπλάσια απόσταση.

Παράδειγμα 4.35:

Το “φλας” μιας φωτογραφικής μηχανής χρησιμοποιεί μια μπαταρία 3 V για να φορτίσει έναν πυκνωτή. Ο πυκνωτής αποφορτίζεται μέσω του λαμπτήρα που παράγει το φλας. Η εκφόρτιση γίνεται σε $10 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ και η μέση ισχύς που παραδίδεται στο λαμπτήρα είναι 10 W. Ποιά είναι η χωρητικότητα C του πυκνωτή;

Λύση:

Η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή διαχέεται στο περιβάλλον μέσω του φλας, και εφόσον η μέση ισχύς ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας, δηλ.

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (4.378)$$

τότε είναι

$$\Delta E = P\Delta t = 10 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 10^{-4} \text{ J} \quad (4.379)$$

Αυτή είναι η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή. Από τη σχέση

$$U_e = \frac{1}{2}C\Delta V^2 \quad (4.380)$$

έχουμε

$$C = \frac{2U_e}{\Delta V^2} = 22 \cdot 10^{-6} \text{ F} \quad (4.381)$$

4.8 Ρεύμα και Αντίσταση

Ως τώρα θεωρούσαμε τα φορτία ως στάσιμα σε μια περιοχή του χώρου. Καιρός είναι να μελετήσουμε την κίνησή τους! Θα μάθουμε τον όρο **ηλεκτρικό ρεύμα** ή απλά ρεύμα, για την περιγραφή του ρυθμού ροής του ηλεκτρικού φορτίου. Ροές φορτίων υπάρχουν σε ατμοσφαιρικά ηλεκτρικά φαινόμενα, στο ανθρώπινο σώμα, σε ηλεκτρικά συστήματα, στο πλιακό μας σύστημα, και σε τόσα άλλα μέρη. Θα μάθουμε τον όρο **ηλεκτρική αντίσταση** και θα εισάγουμε ένα νέο στοιχείο κυκλώματος, τον **αντιστάτη**.

Τα φορτία που κινούνται σε έναν αγωγό ονομάζονται *φορείς φορτίου*. Στα μέταλλα, οι φορείς φορτίου είναι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια των ατόμων του αγωγού, αλλά μη νομίσετε ότι αυτό ισχύει καθολικά: σε ημιαγωγούς ή άλλους αγωγούς οι φορείς φορτίου είναι διαφορετικοί. Απλά λόγω της σημασίας των μετάλλων στα ηλεκτρικά κυκλώματα, επικεντρώναστε σε αυτά. Τα αγωγά ηλεκτρόνια στα μέταλλα κινούνται τυχαία αλλά δεν έχουν προσανατολισμένη κίνηση προς μια ή άλλη κατεύθυνση. Μπορούμε να τα εξαναγκάσουμε σε μια τέτοια “τάση” (run intended), εφαρμόζοντας ένα ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο θα προκαλέσει προσανατολισμένη κίνηση προς μια κατεύθυνση. Σκεφτείτε ότι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια είναι

μικρά παιδιά σε ένα γεμάτο προαύλιο σχολείου: για έναν εξωτερικό παρατηρητή, κινούνται ακατάπαυστα και τυχαία σε διάφορες κατευθύνσεις. Αν όμως ακουστεί το κουδούνι, όλα τα παιδιά θα κατευθυνθούν – πάλι με τυχαία κίνηση – προσανατολισμένα προς την είσοδο του σχολικού κτηρίου. Αυτή η συνολική κίνηση, η οποία συμβαίνει με τη λεγόμενη *ταχύτητα ολίσθησης* u_d , επιβάλλεται πάνω στην τυχαία θερμική κίνηση κάθε ηλεκτρονίου. Η ταχύτητα ολίσθησης είναι αρκετά μικρή – της τάξης των 10^{-4} m/s.

Δείτε το Σχήμα 4.62. Το σχήμα δείχνει τη ροή αυτής της “θάλασσας” των ελεύθερων ηλεκτρονίων που



Σχήμα 4.62: Ηλεκτρόνια που ρέουν μια διατομή ενός καλωδίου.

κινείται από αριστερά προς τα δεξιά με την ταχύτητα ολίσθησης μέσα σε ένα καλώδιο. Αν μπορούσαμε να μετρήσουμε τα ηλεκτρόνια όσο περνούν από τη διατομή του καλωδίου, τότε θα μπορούσαμε να ορίσουμε το **ρεύμα ηλεκτρονίων** (όχι ηλεκτρικού ρεύματος!) i_e ως τον αριθμό των ηλεκτρονίων ανά δευτερόλεπτο που περνούν τη διατομή του καλωδίου (ή όποιου άλλου αγωγού, φυσικά). Η μονάδα μέτρησης του ρεύματος ηλεκτρονίων είναι 1/s. Με άλλα λόγια, το πλήθος N_e των ηλεκτρονίων που αναφέραμε σε χρονικό διάστημα Δt είναι

$$N_e = i_e \Delta t \implies i_e = \frac{N_e}{\Delta t} \quad (4.382)$$

Η αύξηση της ταχύτητας ολίσθησης u_d θα αυξήσει τον αριθμό των ηλεκτρονίων που περνούν από το καλώδιο ανά δευτερόλεπτο – άρα θα αυξηθεί το ρεύμα ηλεκτρονίων. Μπορεί κανείς να δείξει ότι το ρεύμα ηλεκτρονίων μπορεί να γραφεί ως

$$i_e = n_e A u_d \quad (4.383)$$

με A το εμβαδό της διατομής, n_e ο αριθμός των ηλεκτρονίων ανά κυβικό μέτρο, και u_d η ταχύτητα ολίσθησης. Αν το μήκος του καλωδίου είναι L και η επιφάνεια διατομής του A , τότε ο όγκος του είναι $V = AL$. Το πλήθος των φορτίων σε έναν τέτοιο αγωγό ισούται με $N_e = n_e V = n_e AL$. Αντικαθιστώντας στη Σχέση (4.382) παίρνουμε τη Σχέση (4.383), αν υποθέσουμε ότι η ταχύτητα ολίσθησης είναι σταθερή και ίδια για όλα τα φορτία, και το καλώδιο ομοιόμορφο. Καταλαβαίνετε ότι μπορείτε να αυξήσετε το ρεύμα ηλεκτρονίων αν κάνετε τα ηλεκτρόνια να κινηθούν γρηγορότερα, αν έχετε περισσότερα ανά κυβικό μέτρο, ή αν αυξήσετε το μέγεθος του καλωδίου μέσα από το οποίο ρέουν, αυξάνοντας έτσι τη διατομή του.

Με βάση τα παραπάνω όμως, πώς γίνεται όταν ανάβετε το διακόπτη του φωτός στο δωμάτιο σας, η λάμπα να ανάβει ακαριαία ενώ τα ηλεκτρόνια στα καλώδια κινούνται τόσο αργά; Υποθέστε ότι το καλώδιο που συνδέει τη λάμπα στην οροφή του δωματίου σας με το διακόπτη είναι 6.0 m. Αν το ρεύμα ηλεκτρονίων έχει ταχύτητα ολίσθησης 10^{-4} m/s – όπως τυπικά ισχύει – τότε θα πρέπει κανονικά να απαιτούνται $6.0/10^{-4} = 60000$ δευτερόλεπτα! Αυτός ο χρόνος είναι περίπου 16.5 ώρες! Κάτι μάλλον πάει λάθος στους υπολογισμούς μας... ή όχι; Το σημείο που παραλείψαμε να αναφέρουμε – και που δίνει την απάντηση στο πρόβλημά μας – είναι ότι το καλώδιο είναι γεμάτο από ηλεκτρόνια. Σκεφτείτε την αναλογία με μια μάνικα γεμάτη με νερό. Αν ρίξετε μια μόνο σταγόνα στη μια μεριά της, σχεδόν αμέσως μια άλλη σταγόνα θα πέσει από την άλλη. Έτσι και στο καλώδιο, όταν ένα ηλεκτρόνιο κινείται στο καλώδιο

τη στιγμή που ανάβετε το διακόπτη, άμεσα ένα άλλο ηλεκτρόνιο κινείται στη λάμπα. Δε χρειάζεται να περιμένουμε το ηλεκτρόνιο κοντά στο διακόπτη να φτάσει στη λάμπα.

Αυτή η “θάλασσα ηλεκτρονίων” θα συνεχίσει να κινείται όσο εσείς τη “σπρώχνετε”. Αν σταματήσετε, τα ηλεκτρόνια θα πάψουν να κινούνται προς μια κατεύθυνση και θα επανέλθουν στην τυχαία θερμική τους κίνηση. Γιατί; Γιατί τα ηλεκτρόνια δεν κινούνται σε κενό χώρο. Υπάρχουν συγκρούσεις μεταξύ των ηλεκτρονίων και των ατόμων του μετάλλου, οι οποίες μετατρέπουν την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων σε θερμική – γι’ αυτό ζεσταίνεται το καλώδιο όταν το έχουμε στο ρεύμα. Πρέπει λοιπόν να παρέχουμε συνεχώς “σπρώξιμο”. Πώς; Με την εφαρμογή ενός ηλεκτρικού πεδίου! Αν τα άκρα ενός αγωγμού καλωδίου ενωθούν σε ένα βρόχο (κλειστό μονοπάτι), όλα τα σημεία του βρόχου έχουν το ίδιο ηλεκτρικό δυναμικό. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν, άρα δεν υπάρχει ροή ηλεκτρονίων. Αν όμως τα άκρα του συνδεθούν με μια πηγή διαφοράς δυναμικού (π.χ. μπαταρία), δεν έχουν όλα τα σημεία του βρόχου το ίδιο δυναμικό, γιατί η πηγή εγκαθιστά διαφορά δυναμικού στα άκρα του βρόχου, δημιουργώντας ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο καλώδιο. Το πεδίο προκαλεί ηλεκτρική δύναμη στα ηλεκτρόνια του καλωδίου κι αυτά αρχίζουν να κινούνται προς μια κατεύθυνση, δημιουργώντας τελικά ροή ηλεκτρονίων! Μάλιστα η εγκατάσταση του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα καλώδιο γίνεται με “ταχύτητα” που ισούται με κάποιο ποσοστό της ταχύτητας του φωτός ($3 \cdot 10^8$ m/s), γι’ αυτό και τα ηλεκτρόνια κοντά στη λάμπα κινούνται “άμεσα” με το πάτημα του διακόπτη!

4.8.1 Το Ηλεκτρικό Ρεύμα

Τώρα λοιπόν πρέπει να συνδέσουμε τις έννοιες που έχουμε συζητήσει με τη συμβατική έννοια του ηλεκτρικού ρεύματος που γνωρίζουμε από την καθημερινότητά μας. Ορίζουμε το **ηλεκτρικό ρεύμα** ή απλά ρεύμα ως το ρυθμό ροής φορτίου στη μονάδα του χρόνου:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (4.384)$$

και βλέπετε ότι αποτελεί την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης $Q(t)$ ως προς t . Για σταθερό ρεύμα, το ποσό του φορτίου που υπάρχει σε ρεύμα I κατά το διάστημα Δt είναι

$$Q = I\Delta t \quad (4.385)$$

Μονάδα μέτρησης του ρεύματος στο Διεθνές Σύστημα είναι το Ampere - A, προς τιμήν του A. M. Ampere, Γάλλου Φυσικού και Μαθηματικού, που θεωρείται ένας από τους ιδρυτές του κλασικού ηλεκτρομαγνητισμού (συχνά τον αποκαλούν “Newton του ηλεκτρισμού”, καθώς διατύπωσε μαθηματικά τη σχέση ανάμεσα στο ρεύμα και στο μαγνητικό πεδίο). Η παραπάνω σχέση σχετίζεται στενά με την εξίσωση (4.382). Κάθε ηλεκτρόνιο έχει φορτίο μέτρου e . Άρα το συνολικό φορτίο N_e ηλεκτρονίων είναι $Q = eN_e$. Κατά συνέπεια, το συμβατικό ρεύμα I και το ρεύμα ηλεκτρονίων i_e σχετίζονται ως

$$I = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{eN_e}{\Delta t} = ei_e \quad (4.386)$$

Επειδή τα ηλεκτρόνια είναι οι φορείς φορτίου στα μέταλλα, ο ρυθμός με τον οποίο κινείται το φορτίο είναι e φορές το ρυθμό με τον οποίο κινούνται τα ηλεκτρόνια. Κατά μια έννοια, η διαφορά των I και i_e είναι μόνο μια σταθερά. Παρ’ όλα αυτά έχουν μια θεμελιώδη διαφορά: επειδή τα ρεύματα ήταν γνωστά πριν μάθουμε ποιοι είναι οι φορείς φορτίου, η κίνηση του ρεύματος *ορίζεται ιστορικά* να είναι η κατεύθυνση που φαίνεται να κινούνται τα θετικά φορτία. Με άλλα λόγια, η κατεύθυνση του ρεύματος I είναι αντίθετη στην κίνηση των ηλεκτρονίων!! Έτσι, η κατεύθυνση του ρεύματος I και του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ ταυτίζονται. Αυτή η φαινομενική ασυνέπεια δεν έχει καμία απολύτως επίδραση στην πράξη: τα μαθηματικά δουλεύουν σωστά, τα μετρήσιμα αποτελέσματα είναι τα ίδια, και δε χρειάζεται να ξαναγράψουμε όλη τη Φυσική. ☺ Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να τονίσουμε ότι:

Αρχή Διατήρησης του Ρεύματος σε έναν κλάδο

Σε ένα σταθεροποιημένο^α κλειστό κλάδο κυκλώματος χωρίς διακλαδώσεις, το ηλεκτρικό ρεύμα έχει την ίδια τιμή σε κάθε σημείο του καλωδίου. Η ροή φορτίου που βγαίνει από μία συσκευή είναι ακριβώς ίση με τη ροή φορτίου που μπαίνει στην επόμενη: δεν συσσωρεύεται^β ή χάνεται καθαρό φορτίο μέσα στο καλώδιο.

^αΌταν κλείσουμε έναν διακόπτη σε ένα απλό κύκλωμα, για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα τα ρεύματα και οι τάσεις αλλάζουν μέχρι να “βρουν την ισορροπία τους”. Μετά από λίγο, οι τιμές τους σταθεροποιούνται και δεν αλλάζουν πια με τον χρόνο.

^βΣε μεταβατικά φαινόμενα (π.χ. κατά τη φόρτιση ενός πυκνωτή) μπορεί να υπάρξει προσωρινή συσσώρευση φορτίου σε κάποια περιοχή του κυκλώματος.

Η παραπάνω πρόταση είναι συνέπεια της αρχής διατήρησης του φορτίου, και όπως θα δούμε αργότερα, οδηγεί στον 1ο νόμο του Kirchhoff, ο οποίος αναφέρει ότι “ό,τι ρεύμα μπαίνει σε έναν κόμβο, το ίδιο ρεύμα βγαίνει”. Ας μη βιαζόμαστε όμως. ☺

4.8.2 Πυκνότητα Ρεύματος

Είπαμε ότι το ρεύμα ηλεκτρονίων σε ένα καλώδιο διατομής A δίνεται ως $i_e = n_e A u_d$. Έτσι το ρεύμα θα είναι

$$I = e i_e = n_e e u_d A \quad (4.387)$$

Η ποσότητα $n_e e u_d$ εξαρτάται από τους φορείς φορτίου και από το ηλεκτρικό πεδίο που καθορίζει την ταχύτητα ολίσθησης, ενώ το εμβαδό A είναι απλά μια φυσική διάσταση του καλωδίου. Θα είναι χρήσιμο να διαχωρίσουμε αυτές τις μεταβλητές, ορίζοντας την **πυκνότητα ρεύματος** J σε ένα καλώδιο ως το ρεύμα ανά τετραγωνικό μέτρο διατομής:

$$J = \frac{I}{A} = n_e e u_d \quad (4.388)$$

Οι μονάδες του είναι A/m^2 . Ένα συγκεκριμένο μεταλλικό καλώδιο με εμβαδό διατομής A φέρει ρεύμα $I = JA$.

4.8.3 Ειδική Αγωγιμότητα και Ειδική Αντίσταση

Ας ορίσουμε ως **ειδική αγωγιμότητα** σ ενός υλικού μια σταθερά που περιγράφει την πυκνότητα ρεύματος J δεδομένης μιας τιμής του ηλεκτρικού πεδίου E . Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε ότι

$$J = \sigma E \quad (4.389)$$

Η ειδική αγωγιμότητα χαρακτηρίζει το υλικό ως όλον. Όλα τα τμήματα χαλκού, για παράδειγμα, έχουν την ίδια τιμή του σ ⁶, αλλά η ειδική αγωγιμότητα του αλουμινίου είναι διαφορετική από του χαλκού. Η εξίσωση (4.389) είναι θεμελιώδους σημασίας και ονομάζεται **νόμος του Ohm** (για τα υλικά): ο λόγος της πυκνότητας ρεύματος J προς το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου E είναι σταθερός και ίσος με σ , και ανεξάρτητος από το ηλεκτρικό πεδίο που παράγει το ρεύμα:

$$\sigma = \frac{J}{E} \quad (4.390)$$

Ο νόμος του Ohm – παρ’ όλο που δεν είναι νόμος της Φύσης, όπως ο νόμος της βαρύτητας, για παράδειγμα, αλλά μια εμπειρική σχέση που ισχύει σε ορισμένες περιπτώσεις – είναι σπουδαίας σημαντικότητας γιατί μας πληροφορεί για τρία πράγματα:

⁶Αν βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία.

- Η πυκνότητα ρεύματος J , και άρα το ρεύμα $I = J/A$, εξαρτάται **γραμμικά** από το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου E : Για να διπλασιάσουμε το ρεύμα, πρέπει να διπλασιάσουμε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου που “σπρώχνει” τα φορτία. Η γραμμική αυτή σχέση μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε την αρχή της επαλληλίας για το ρεύμα! Ουσιαστικά, μας οδηγεί σε γραμμικές εξισώσεις που περιγράφουν τα ηλεκτρικά κυκλώματα, και αυτό είναι σπουδαίο γιατί μπορούμε να εφαρμόσουμε ολόκληρο τον πλούτο της Γραμμικής Άλγεβρας στην ανάλυση κυκλωμάτων!
- Το ρεύμα I προκαλείται από ένα ηλεκτρικό πεδίο μέτρου E που ασκεί δύναμη στους φορείς φορτίου: Αυτό το γνωρίζετε ήδη αλλά εδώ δηλώνεται ρητά η σύνδεση του μικρόκοσμου (q , E) με το μακρόκοσμο (σ , J)! Επίσης δηλώνεται ρητά ο μηχανισμός “ηλεκτρική δύναμη $\rightarrow$ ηλεκτρικό πεδίο $\rightarrow$ ταχύτητα ολίσθησης $\rightarrow$ πυκνότητα ρεύματος!
- Η πυκνότητα ρεύματος J επίσης εξαρτάται από την ειδική αγωγιμότητα του υλικού, σ : Διαφορετικοί αγωγοί έχουν διαφορετικές ειδικές αγωγιμότητες, δηλ. το υλικό καθορίζει πόσο ρεύμα παίρνει κανείς για ένα δοθέν ηλεκτρικό πεδίο. Αυτό σημαίνει ότι η ειδική αγωγιμότητα σ “κουβαλάει” μέσα της ολόκληρη τη στερεά κατάσταση του υλικού: τύπος δεσμών, ατέλειες, θερμοκρασία, κλπ. Με έναν και μόνο αριθμό μπορούμε χονδρικά να καταλάβουμε αν το υλικό μας είναι μέταλλο, ημιαγωγός, μονωτής, πόσο ρεύμα μπορεί να “ανεχθεί”, πώς αντιδρά σε μεταβολές θερμοκρασίας κλπ.

Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές είναι βολικότερο να χρησιμοποιούμε το αντίστροφο της ειδικής αγωγιμότητας, που ονομάζεται **ειδική αντίσταση**:

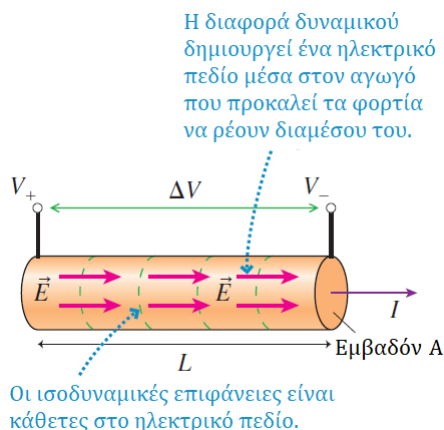
$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (4.391)$$

Η ειδική αντίσταση ενός υλικού μας πληροφορεί για το πόσο “διστακτικά” είναι τα ηλεκτρόνια στην κίνηση τους σε απάντηση στο ηλεκτρικό πεδίο, δηλ. μετρά το βαθμό με τον οποίο ένα υλικό “αντιστέκεται” στη ροή φορτίων: για μια δεδομένη πυκνότητα ρεύματος J , όσο μεγαλύτερη είναι η ρ , τόσο ισχυρότερο ηλεκτρικό πεδίο E απαιτείται.

4.8.4 Αντίσταση

Στην πράξη όμως δε μας ενδιαφέρουν τόσο τα υλικά εν γένει, όσο συγκεκριμένα σχήματα και γεωμετρίες αυτών. Αν εφαρμόσουμε μια διαφορά δυναμικού στα άκρα δυο εντελώς όμοιων (ως προς τη γεωμετρία τους) ράβδων χαλκού και γυαλιού, θα παρατηρήσουμε εντελώς διαφορετικά ρεύματα! Άρα κάθε ράβδος έχει διαφορετική **αντίσταση**. Το τμήμα ράβδου γυαλιού ή χαλκού ονομάζεται **αντιστάτης**.

Το Σχήμα 4.63 δείχνει ένα τμήμα ενός αγωγού στο οποίο το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ δημιουργεί ρεύμα I “σπρώχνοντας” τους φορείς φορτίου. Γνωρίζουμε ήδη ότι το ηλεκτρικό πεδίο απαιτεί μια διαφορά δυναμικού και ότι δείχνει “προς τα κάτω” και είναι κάθετο σε ισοδυναμικές επιφάνειες.



Σχήμα 4.63: Ρεύμα και διαφορά δυναμικού.

Θυμηθείτε ότι μια συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου σχετίζεται με το ηλεκτρικό δυναμικό ως

$$E_s = -\frac{dV}{ds} \quad (4.392)$$

Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι σταθερό μέσα σε έναν αγωγό σταθερής διαμέτρου, οπότε

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta s} = \frac{\Delta V}{L} \quad (4.393)$$

όπου $\Delta V = V_+ - V_-$ είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των άκρων του αγωγού μήκους L . Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε το πεδίο E για να βρούμε το ρεύμα στον αγωγό. Βρήκαμε νωρίτερα ότι

$$J = \sigma E \quad (4.394)$$

και ότι το ρεύμα σε ένα καλώδιο σταθερής διατομής σχετίζεται με την πυκνότητα ρεύματος ως

$$I = JA \quad (4.395)$$

Οπότε

$$I = JA = A\sigma E = \frac{A}{\rho} E \quad (4.396)$$

με ρ την ειδική αντίσταση. Συνδυάζοντας τις σχέσεις έχουμε

$$I = \frac{A}{\rho L} \Delta V \quad (4.397)$$

Σπουδαίο αποτέλεσμα! Μας πληροφορεί ότι το ρεύμα είναι ανάλογο της διαφοράς δυναμικού μεταξύ των άκρων του αγωγού. Αν θέσουμε

$$R = \frac{\rho L}{A} \quad (4.398)$$

και ονομάσουμε **αντίσταση** την ποσότητα αυτή, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$I = \frac{\Delta V}{R} \quad (4.399)$$

Η παραπάνω σχέση μας λέει ότι η εγκατάσταση διαφοράς δυναμικού ΔV ανάμεσα στα άκρα ενός αγωγού αντίστασης R δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο που με τη σειρά του δημιουργεί ηλεκτρικό ρεύμα $I = \Delta V/R$ διαμέσου του αγωγού. Πολλές φορές αναφέρεται κι αυτή ως ο νόμος του Ohm. Μονάδα μέτρησης της αντίστασης είναι το $1 \text{ Ohm} = 1 \text{ V/A}$, προς τιμήν του G. S. Ohm, Γερμανού Φυσικού και Μαθηματικού που συνετέλεσε στην σύλληψη της ιδέας της αντίστασης, και συμβολίζεται με το γράμμα Ω . Η αντίσταση είναι μια ιδιότητα καθενός αγωγού αφού εξαρτάται από το μήκος του, τη διάμετρό του, και την ειδική αντίστασή του.

Προσέξτε ότι η παραπάνω σχέση δεν ισχύει καθολικά για κάθε υλικό. Ισχύει για υλικά που η αντίστασή τους είναι (σχεδόν) σταθερή. Τέτοια υλικά λέγονται **ωμικά**. Τα **μη ωμικά** υλικά έχουν την ιδιότητα το ρεύμα που περνά από αυτά να μην είναι ευθέως ανάλογο της διαφοράς δυναμικού που έχουν στα άκρα του. Μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τα ωμικά υλικά σε τρεις κατηγορίες:

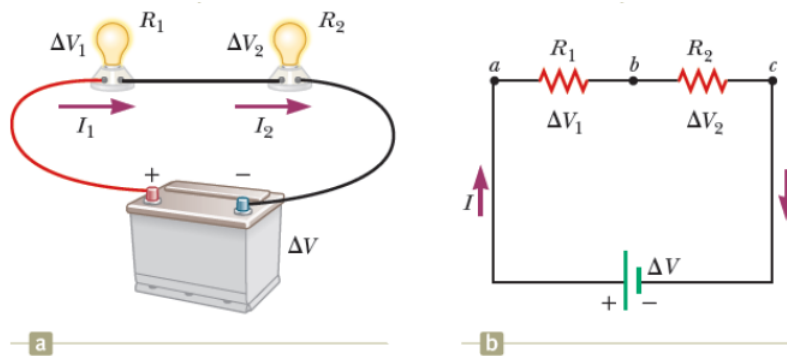
1. Τα καλώδια είναι μέταλλα με πολύ μικρή ειδική αντίσταση ρ και άρα πολύ μικρή αντίσταση R . Ένα ιδανικό καλώδιο έχει $R = 0 \Omega$, οπότε η διαφορά δυναμικού στα άκρα του είναι $\Delta V = 0$, ακόμα κι αν υπάρχει ροή ρεύματος. Θα υιοθετούμε τέτοια ιδανικά μοντέλα στη μελέτη ηλεκτρικών κυκλωμάτων που θα ακολουθήσει.
2. Οι αντιστάτες είναι πολύ κακοί αγωγοί με αντιστάσεις της τάξης των $10^1 - 10^6 \Omega$. Χρησιμοποιούνται για να ελέγχεται το ρεύμα σε ένα κύκλωμα.

3. Οι μονωτές είναι υλικά όπως το γυαλί, το πλαστικό, ο αέρας κ.α. Ένας ιδανικός μονωτής έχει άπειρη αντίσταση, $R = \infty \Omega$. Έτσι, ακόμα κι αν υπάρχει διαφορά δυναμικού στα άκρα του ένας μονωτής δε διαρρέεται από ρεύμα, $I = 0 \text{ A}$. Πρακτικά, όλοι οι μονωτές έχουν $R \gg 10^9 \Omega$ και μπορούν να θεωρηθούν ως ιδανικοί.

Η αντίσταση ενός καλωδίου ή αγωγού αυξάνεται όσο αυξάνεται το μήκος του. Η μείωση της διατομής του επίσης αυξάνει την αντίσταση. Επίσης, είναι σημαντικό να καταλάβετε τη διαφορά μεταξύ ειδικής αντίστασης και αντίστασης. Η πρώτη περιγράφει το υλικό. Η δεύτερη χαρακτηρίζει ένα συγκεκριμένο κομμάτι του αγωγού, με συγκεκριμένη γεωμετρία. Η σχέση μεταξύ των δυο είναι ανάλογη της σχέσης που έχει η πυκνότητα μάζας και η μάζα ενός αντικειμένου.

4.8.5 Συνδυασμοί Αντιστάσεων

Ας δούμε αν το νέο στοιχείο κυκλωμάτων, ο αντιστάτης, μπορεί να συνδυαστεί και να απλοποιηθεί όπως οι πυκνωτές. Για το συμβολισμό των αντιστάτων έχετε ήδη δει παραδείγματα, ας το κάνουμε όμως πιο σαφές: δείτε το Σχήμα 4.64. Ένας αντιστάτης μπορεί να είναι μια λάμπα ή μια οποιαδήποτε συσκευή.



Σχήμα 4.64: Συμβολισμός αντιστατών σε κύκλωμα.

Αντί να σχεδιάζουμε το - όμορφο - σκίτσο αριστερά στο Σχήμα 4.64, προτιμάμε το απλούστερο ισοδύναμο του στα δεξιά.

Σύνδεση σε Σειρά

Ας ξεκινήσουμε από τη σειριακή σύνδεση, όπως στο Σχήμα 4.64, δεξιά. Όπως και στους πυκνωτές, η σειριακή σύνδεση δεν έχει σχέση με το πως σχεδιάζουμε το κύκλωμα στο χαρτί: έχει να κάνει με τη σύνδεση του άκρου ενός αντιστάτη απ' ευθείας με το άκρο ενός επόμενου, ακολουθιακά. Απ' όσα έχουμε πει για το ηλεκτρικό ρεύμα, η ποσότητα φορτίου Q που εξέρχεται του αντιστάτη R_1 θα είναι ίδια με την ποσότητα που εισέρχεται στον αντιστάτη R_2 . Γιατί; Αρχή Διατήρησης του Φορτίου! Οπότε το ρεύμα θα είναι

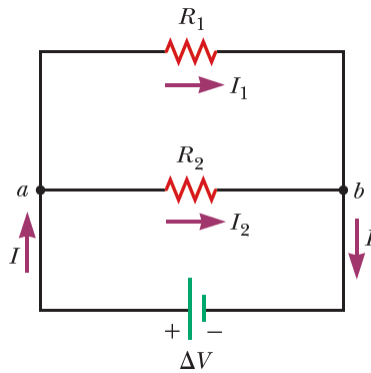
$$I_1 = I_2 = I \quad (4.400)$$

Η διαφορά δυναμικού που παρέχει η πηγή είναι ΔV και ισχύει

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2 = I(R_1 + R_2) \quad (4.401)$$

Οπότε θα μπορούσαμε να “πετάξουμε” τους δυο αντιστάτες του κυκλώματος και να τους αντικαταστήσουμε με τον ισοδύναμο τους, αντίστασης $R_{eq} = R_1 + R_2$. Αυτό ισχύει και για N αντιστάτες σε σειρά, δηλ.

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i \quad (4.402)$$



Σχήμα 4.65: Αντιστάτες σε παραλληλία.

Παράλληλη Σύνδεση

Ας δούμε τώρα την παράλληλη σύνδεση, όπως στο Σχήμα 4.65. Ξανά, η παραλληλία δεν έχει να κάνει με τη σχεδίαση αλλά με το ότι τα άκρα των δυο αντιστατών συνδέονται αντίστοιχα μεταξύ τους. Τα άκρα των δυο αντιστατών είναι απευθείας συνδεδεμένα με τους πόλους της μπαταρίας, οπότε οι δυο αντιστάτες έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού στα άκρα τους: αυτή που παρέχει η μπαταρία. Άρα

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (4.403)$$

Λόγω της Αρχής Διατήρησης του Φορτίου, το ρεύμα που ρέει τον αντιστάτη R_1 και τον αντιστάτη R_2 να είναι αθροιστικά το ίδιο με αυτό που ρέει στο υπόλοιπο κύκλωμα, δηλ.

$$I = I_1 + I_2 \quad (4.404)$$

Οπότε

$$I = I_1 + I_2 \iff \frac{\Delta V}{R_{eq}} = \frac{\Delta V_1}{R_1} + \frac{\Delta V_2}{R_2} = \Delta V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (4.405)$$

Άρα ένας ισοδύναμος αντιστάτης θα πρέπει να έχει αντίσταση

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (4.406)$$

Γενικότερα, για N αντιστάτες συνδεδεμένους παραλληλα θα έχουμε

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \quad (4.407)$$

που γράφεται πιο κομψά ως

$$R_{eq} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{R_i}} \quad (4.408)$$

Μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε ένα πίνακα με τα χαρακτηριστικά κάθε συνδεσμολογίας. Δείτε τον Πίνακα 4.2.

Συνδεσμολογία Αντιστατών και Ισοδύναμος Αντιστάτης			
Είδος σύνδεσης	Ρεύμα	Δυναμικό	Αντίσταση
Παράλληλη	$I_{eq} = \sum_i I_i$	$\Delta V_{eq} = \Delta V_i$	$R_{eq} = \left(\sum_i \frac{1}{R_i} \right)^{-1}$
Σειριακή	$I_{eq} = I_i$	$\Delta V_{eq} = \sum_i \Delta V_i$	$R_{eq} = \sum_i R_i$

Πίνακας 4.2: Ηλεκτρικές ιδιότητες παράλληλης και σειριακής συνδεσμολογίας αντιστατών σε σχέση με ισοδύναμο αντιστάτη.

Συνοπτικά, και για σύγκριση με τους πυκνωτές που έχουμε δει νωρίτερα, ισχύει ο Πίνακας 4.3.

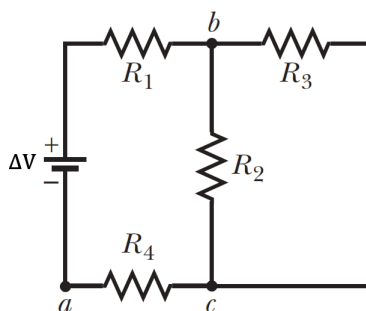
Σχέσεις Ισοδύναμων Χωρητικοτήτων/Αντιστάσεων		
Συνδεσμολογία	Πυκνωτές	Αντιστάτες
Σε σειρά	$C_{eq} = \left(\sum_i \frac{1}{C_i} \right)^{-1}$	$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$
Σε παραλληλία	$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i$	$R_{eq} = \left(\sum_i \frac{1}{R_i} \right)^{-1}$

Πίνακας 4.3: Πίνακας Σχέσεων Ισοδύναμων Αντιστατών/Πυκνωτών.

Παρατηρήστε ότι οι σχέσεις που εξάγαμε για τους αντιστάτες είναι “ανάποδα” απ’ ό,τι για τους πυκνωτές! Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.36:

Δείτε το Σχήμα 4.66.

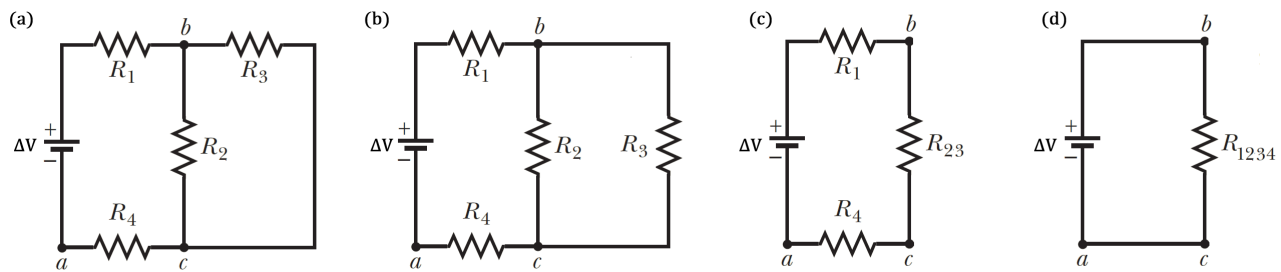


Σχήμα 4.66: Κύκλωμα αντιστατών.

Αν οι αντιστάτες R_1, R_2, R_3, R_4 έχουν αντίσταση 20, 20, 30, 8.0 Ω, αντίστοιχα, βρείτε τον ισοδύναμο αντιστάτη. Ποιό είναι το ρεύμα και η διαφορά δυναμικού στα άκρα του αντιστάτη R_2 αν η πηγή παρέχει διαφορά δυναμικού $\Delta V = 12$ V στο κύκλωμα;

Λύση:

Δείτε το Σχήμα 4.67. Στο Σχήμα 4.67(a) έχουμε το αρχικό κύκλωμα, και παρατηρούμε ότι οι αντιστάτες R_2, R_3 είναι παράλληλα συνδεδεμένοι (το αριστερό άκρο του ενός είναι συνδεδεμένο με το αριστερό άκρο



Σχήμα 4.67: Κύκλωμα αντιστατών σε απλοποίηση.

του άλλου, και αντίστοιχα για το δεξί), και να έχουμε ένα κύκλωμα όπως στο Σχήμα 4.67(b). Άρα μπορούμε να τους αντικαταστήσουμε με έναν, τον R_{23} , με αντίσταση

$$R_{23} = \frac{1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{30}} = \frac{60}{5} = 12 \, \Omega \quad (4.409)$$

όπως στο Σχήμα 4.67(c). Ο ισοδύναμος αυτός αντιστάτης είναι συνδεδεμένος σε σειρά με τους αντιστάτες R_1, R_4 , καθώς το ένα άκρο του ενός είναι συνδεδεμένο με του άλλου ακολουθιακά, και η όλη συνδεσμολογία λαμβάνει διαφορά δυναμικού ίση με 12 V. Άρα μπορούμε να τους αντικαταστήσουμε όλους με έναν, όπως στο Σχήμα 4.67(d), ο οποίος θα έχει αντίσταση

$$R_{1234} = R_1 + R_{23} + R_4 = 20 + 12 + 8 = 40 \, \Omega \quad (4.410)$$

Το ρεύμα που περνά από τον αντιστάτη αυτόν θα είναι

$$I = \frac{\Delta V}{R_{1234}} = \frac{12}{40} = 0.3 \, \text{A} \quad (4.411)$$

Λόγω σειριακής σύνδεσης, το ρεύμα αυτό περνά από τους αντιστάτες R_1, R_{23}, R_4 . Αφού ο ισοδύναμος αντιστάτης R_{23} διαρρέεται από ρεύμα $I_{23} = I = 0.3 \, \text{A}$, και αντικαθιστά δυο παράλληλα συνδεδεμένους αντιστάτες, ο καθένας από αυτούς θα έχει στα άκρα του διαφορά δυναμικού ίση με

$$\Delta V_{23} = \Delta V_2 = \Delta V_3 = IR_{23} = 0.3 \cdot 12 = 3.6 \, \text{V} \quad (4.412)$$

Αυτή η διαφορά δυναμικού παρουσιάζεται στα άκρα καθενός από τους αντιστάτες R_2, R_3 . Άρα για τον αντιστάτη R_2 , το ρεύμα που τον διαρρέει ισούται με

$$I_2 = \frac{\Delta V_2}{R_2} = \frac{3.6}{20} = 0.18 \, \text{A} \quad (4.413)$$