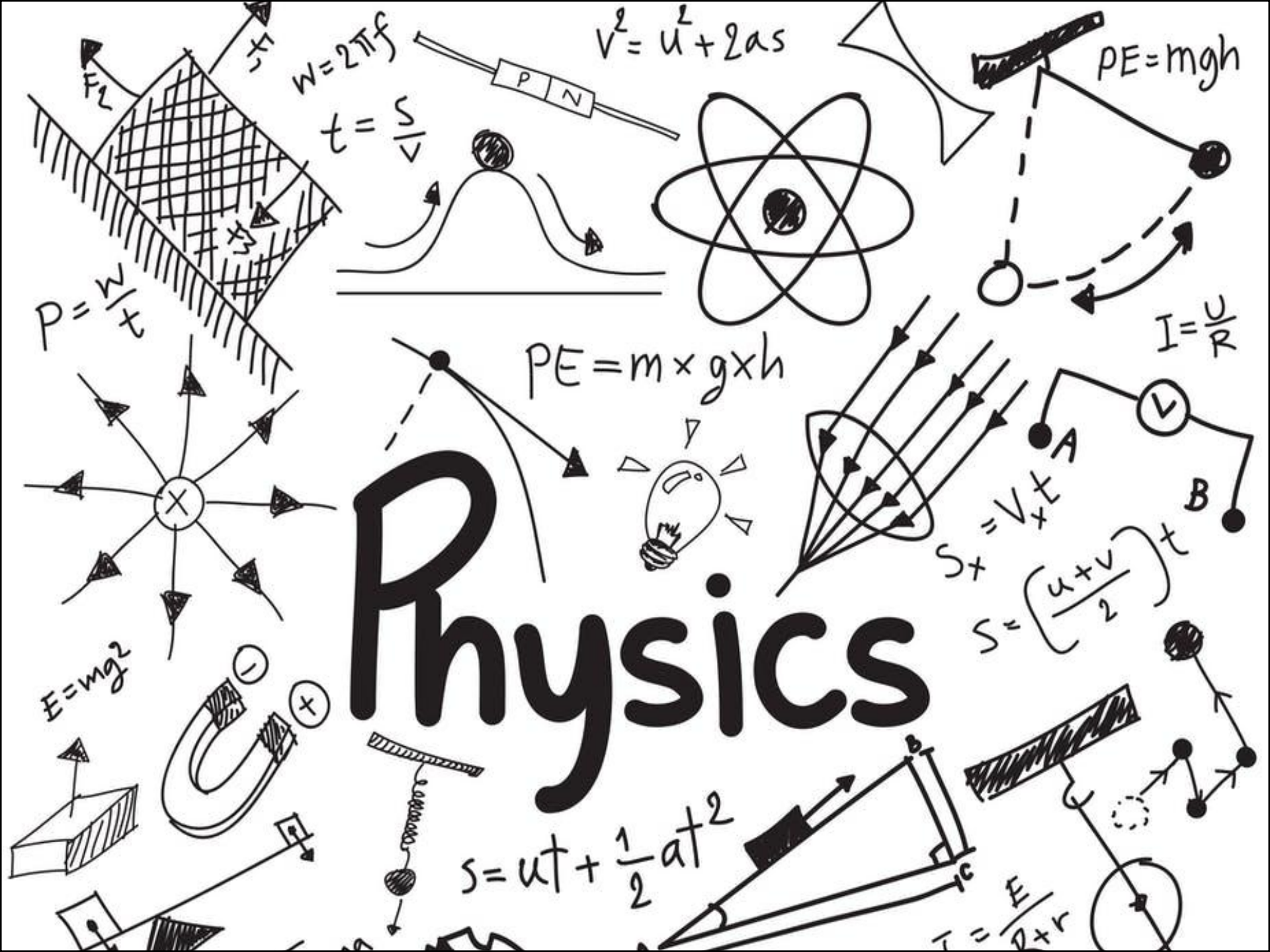

Physics
$v^2 = u^2 + 2as$
$PE = mgh$
$w = 2\pi f$
$t = \frac{s}{v}$
$P = \frac{w}{t}$
$PE = m \times g \times h$
$I = \frac{U}{R}$
$s = ut + \frac{1}{2}at^2$
$E = mg^2$
P
N
A
B
V

Reminder…

- **Διαλέξεις**
  - **Προαιρετική** παρουσία!
  - Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
  - Δεν υπάρχουν απουσίες
  - Υπάρχει **σεβασμός** στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
  - **Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας**: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά



Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος



Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος

Ενέργεια Συστήματος

- Με όσα έχουμε δει ως τώρα
  - **Θέση**
  - **Ταχύτητα**
  - **Επιτάχυνση**
  - **Δύναμη**

και με αρχές όπως οι **νόμοι του Newton**, μπορούμε να λύσουμε πολλά προβλήματα…

- Όμως σε πιο σύνθετα προβλήματα αντιμετωπίζουμε δυσκολίες…
  - Π.χ. αν η δύναμη είναι μεταβαλλόμενη κατά μέτρο ή αν η διαδρομή κίνησης δεν είναι ευθύγραμμη

- Χρειαζόμαστε μια διαφορετική/συμπληρωματική προσέγγιση, που θα κάνει τα προβλήματα πιο απλά…

Ενέργεια Συστήματος

- Κάποιες έννοιες ίσως σας φανούν οικείες, αλλά στη Φυσική απαιτείται λίγο μεγαλύτερη ακρίβεια…
- Ας ξεκινήσουμε με την έννοια της **ενέργειας**
- Ιδέες που έχουμε από την καθημερινότητά μας για την ενέργεια
  - Βενζίνη και πετρέλαιο για μεταφορές και θέρμανση
  - Ηλεκτρισμός για φωτισμό και συσκευές
  - Φαγητό για κατανάλωση
- «Έχεις ενέργεια να πάμε για τρέξιμο?»
  - Ικανότητα να κάνεις κάποια δουλειά, κάποιο… **έργο**

Ενέργεια Συστήματος

- Θα μας απασχολήσουν τρία είδη ενέργειας:
  - **Κινητική, Δυναμική, και Θερμική**

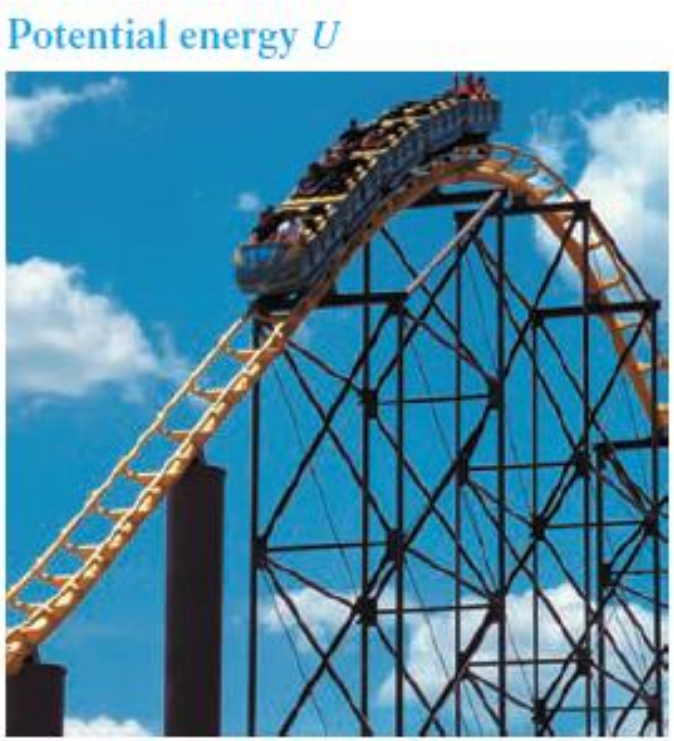
Kinetic energy K



- **Η κινητική ενέργεια είναι η ενέργεια της κίνησης.**
- **Όλα τα κινούμενα αντικείμενα έχουν κινητική ενέργεια.**
- **Όσο μεγαλύτερη μάζα ή όσο πιο γρήγορα κινείται ένα αντικείμενο, τόσο μεγαλύτερη η κινητική του ενέργεια.**

Ενέργεια Συστήματος

- Θα μας απασχολήσουν τρία είδη ενέργειας:
  - **Κινητική, Δυναμική, και Θερμική**



- **Η δυναμική ενέργεια είναι αποθηκευμένη ενέργεια που σχετίζεται με τη θέση ενός αντικειμένου.**
- **Το τρενάκι της εικόνας έχει βαρυτική δυναμική ενέργεια που εξαρτάται από τη θέση του (ύψος) πάνω από το έδαφος.**
- **Θα τη σχετίσουμε με τη δύναμη του βάρους (αλλά και με άλλες που θα δούμε).**

Ενέργεια Συστήματος

- Θα μας απασχολήσουν τρία είδη ενέργειας:
  - **Κινητική, Δυναμική, και Θερμική**

Thermal energy E_{th}



- **Η θερμική ενέργεια είναι το άθροισμα όλων των μικροσκοπικών κινητικών και δυναμικών ενεργειών των ατόμων και δεσμών που συνιστούν ένα σώμα.**
- **Ένα σώμα έχει μεγαλύτερη θερμική ενέργεια όταν είναι ζεστό παρά όταν είναι κρύο.**
- **Θα τη σχετίσουμε με δυνάμεις τριβής.**

Ενέργεια Συστήματος

- Τα παραπάνω δεν αποτελούν ορισμό της ενέργειας
  - …είναι απλά **παραδείγματα**
- Γενικότερα, είναι δύσκολο να οριστεί με ακρίβεια η ενέργεια
  - Είναι περισσότερο… «αφηρημένη» έννοια
  - Θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελεί **έναν αριθμό που σχετίζεται με την κατάσταση ενός… συστήματος**
  - **Αν η χρήση αυτών των αριθμών γίνει σωστά, μπορούμε να προβλέψουμε αποτελέσματα πειραμάτων και να κατασκευάσουμε μηχανές!**
- Κάθε διαδικασία στη φύση αφορά ενέργεια και μεταφορές/ μετασχηματισμούς αυτής

Ενέργεια Συστήματος

- Ξεκινάμε τη συζήτηση θεωρώντας ένα νέο μοντέλο, το **σύστημα**

- Προς το παρόν, ας δούμε τι είναι ένα **σύστημα** και πώς σχετίζεται με την ενέργεια
  - **Συστήματα** μπορεί να είναι:
    - **Ένα ή περισσότερα σώματα**
    - **Μια περιοχή του χώρου**
    - Κάτι που αλλάζει σχήμα και μέγεθος
    - **Συνδυασμός των παραπάνω**

Προς εξέταση

- Αργότερα, θα μιλήσουμε για **μοντέλα ανάλυσης** ενός συστήματος
  - …αντί ενός μόνο σώματος, που είχαμε ως τώρα

Ενέργεια Συστήματος

- Πρώτο βήμα είναι η **αναγνώριση** του συστήματος
- Όταν συζητάμε για ένα σύστημα, είτε αγνοούμε (**απομονωμένο** σύστημα) είτε ενδιαφερόμαστε (**μη απομονωμένο** σύστημα) για τις **ενεργειακές** αλληλεπιδράσεις του περιβάλλοντος με το σύστημα
  - Ακόμα δε γνωρίζουμε ποιές είναι αυτές, με τι σχετίζονται, και πώς τις βρίσκουμε... (απλώς υποθέτουμε – υπομονή ☺)
  - Επίσης υποθέτουμε ότι κάποιες **δυνάμεις** δρουν στο σύστημα και του **μεταβάλλουν την ενεργειακή κατάσταση με κάποιο μηχανισμό**
- Ανεξαρτήτως του συστήματος που επιλέγουμε πάντα υπάρχει το **όριο/σύνορο συστήματος**:
  - Μια (συνήθως) φανταστική επιφάνεια που χωρίζει το σύστημα με το περιβάλλον του
  - Π.χ. σε ένα κιβώτιο, η επιφάνειες του κιβωτίου

Ενέργεια Συστήματος

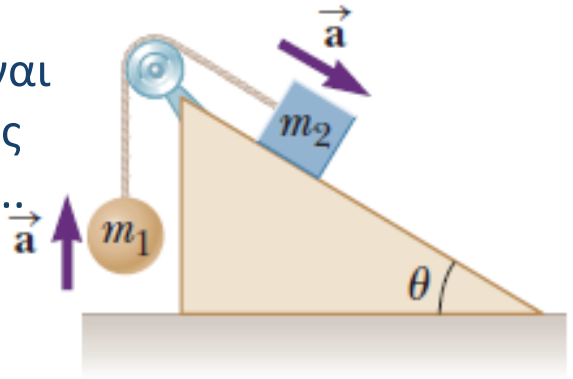


- **Παράδειγμα 1:**
  - Σύστημα {σπόγγος} : **μονομελές**
  - **Μη απομονωμένο** (ασκείται **εξωτερική** δύναμη που το κινεί – **μεταβάλλει την κινητική του ενέργεια**, καθώς υπάρχει και η δύναμη **τριβής** με την επιφάνεια που ολισθαίνει, η οποία αυξάνει τη **θερμική ενέργεια** του συστήματος – και της επιφάνειας)
    - Επιφάνεια σπόγγου = σύνορο συστήματος
    - Η δύναμη (μέσω του χεριού) και η τριβή είναι μια ενεργειακή επιρροή στο σύστημα από το περιβάλλον του, και οι οποίες ασκούνται επάνω στο σύνορο (επιφάνεια) του συστήματος

- **Παράδειγμα 2:**
  - Σύστημα {σπόγγος, τραπέζι} : **πολυμελές**
  - **Μη απομονωμένο** (ασκείται **εξωτερική** δύναμη που το κινεί – μεταβάλλει την κινητική του ενέργεια, αλλά πλέον η **τριβή** αποτελεί **εσωτερική** δύναμη του συστήματος)
    - Ασκείται από ένα μέλος του συστήματος σε ένα άλλο

Ενέργεια Συστήματος

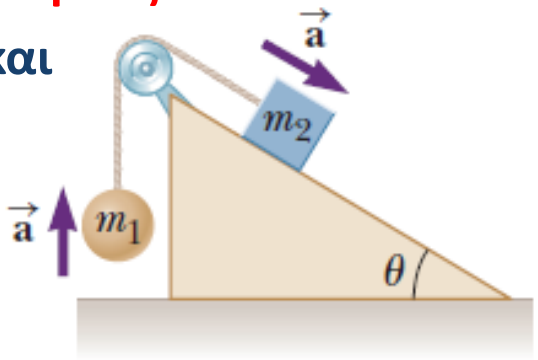
- **Παράδειγμα 3:**
  - Σύστημα {σώματα, σχοινί} : **πολυμελές και μη απομονωμένο**!
    - Οι δυνάμεις από το σχοινί επιταχύνουν τα σώματα (άρα αλλάζουν την **κινητική** τους ενέργεια) και είναι **εσωτερικές**, **δεν** ανήκουν στο περιβάλλον του
    - Αντίθετα, οι **δυνάμεις του βάρους** τους είναι **εξωτερικές**! Θα δούμε αργότερα πως αυτές αλλάζουν κάτι «ενεργειακό» στο σύστημα...
    - Το ίδιο και η **δύναμη τριβής** από το κεκλιμένο...



- **Παράδειγμα 4:**
  - Σύστημα {σώματα, σχοινί, Γη} : **πολυμελές και μη απομονωμένο**!
    - Όλες οι δυνάμεις που πιθανόν μεταβάλλουν την ενέργειά του είναι **εσωτερικές, πλην της δύναμης τριβής!**
    - **Μόνο αυτή** ανήκει στο περιβάλλον του

Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα 5:**
  - Σύστημα {σώματα, σχοινί, κεκλιμένο} : **πολυμελές και μη απομονωμένο**!
    - Όλες οι δυνάμεις που πιθανόν μεταβάλλουν την ενέργειά του είναι **εσωτερικές, πλην της δύναμης του βάρους**
    - **Μόνο αυτή ανήκει στο περιβάλλον (Γη) και θα δούμε αργότερα ότι πράγματι μεταβάλλει ενεργειακά το σύστημα**

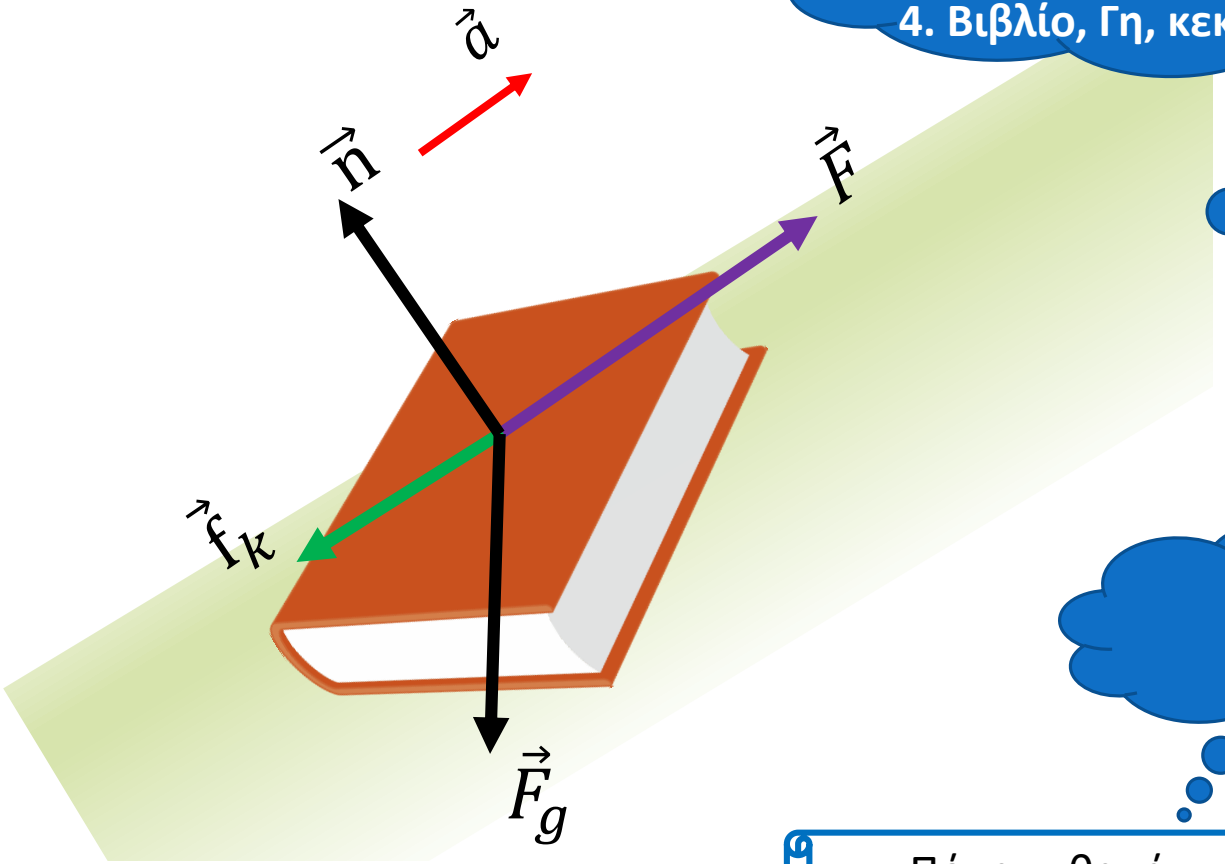


- **Παράδειγμα 6:**
  - Σύστημα {σώματα, σχοινί, Γη, κεκλιμένο} : **πολυμελές κι απομονωμένο**!
  - Όλες οι δυνάμεις που πιθανόν μεταβάλλουν την ενέργειά του είναι **εσωτερικές : καμιά** δεν ανήκει στο περιβάλλον του

Ενέργεια Συστήματος

- **Quiz:**

1.Βιβλίο
2. Βιβλίο, Γη
3. Βιβλίο, κεκλιμένο
4. Βιβλίο, Γη, κεκλιμένο



4

Πόσα πιθανά συστήματα μπορείτε να διαλέξετε?

Ενέργεια Συστήματος

Ταξινόμηση Δυνάμεων και Συστημάτων

Ένα σύστημα μπορεί να ανήκει σε μια από δυο κατηγορίες:

- **Απομονωμένο**: όταν το σύστημα **δεν** "επικοινωνεί" ενεργειακά με το περιβάλλον του.
- **Μη απομονωμένο**: όταν το σύστημα "επικοινωνεί" ενεργειακά με το περιβάλλον του.

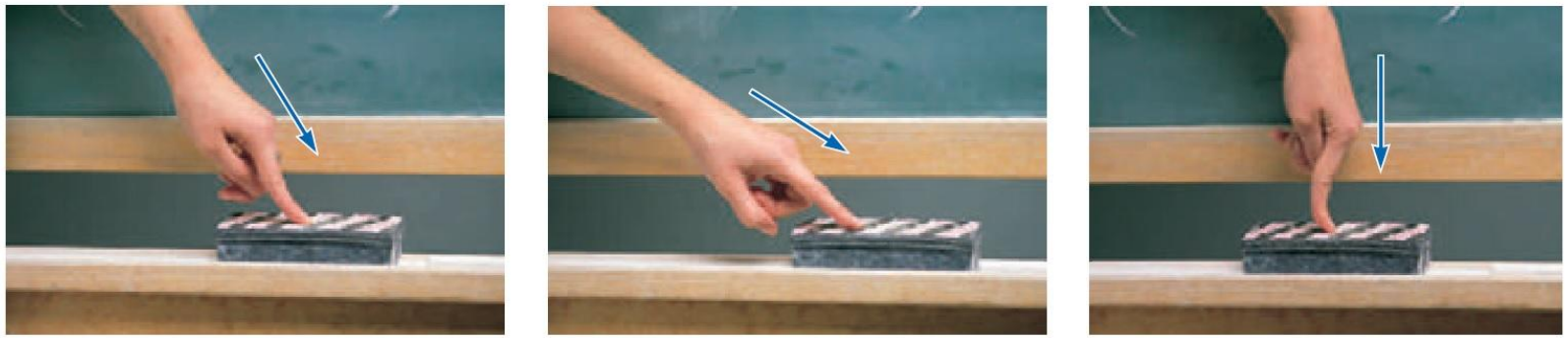
Οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σύστημα διακρίνονται σε μια από δυο κατηγορίες:

- **Εξωτερικές**: όταν δρουν πάνω σε ένα ή περισσότερα μέλη ενός συστήματος και η προέλευση της δύναμης ανήκει στο περιβάλλον του συστήματος.
- **Εσωτερικές**: όταν δρουν μεταξύ των μελών του συστήματος, δηλ. από ένα μέλος του σε ένα άλλο.

Επίσης, τα συστήματα μπορεί να είναι **μονομελή** ή **πολυμελή**, αν στο σύστημα υπάρχει ένα ή περισσότερα μέλη, αντίστοιχα.

Με ποιο μηχανισμό άραγε γίνεται η «επικοινωνία» ενός συστήματος με το περιβάλλον του?

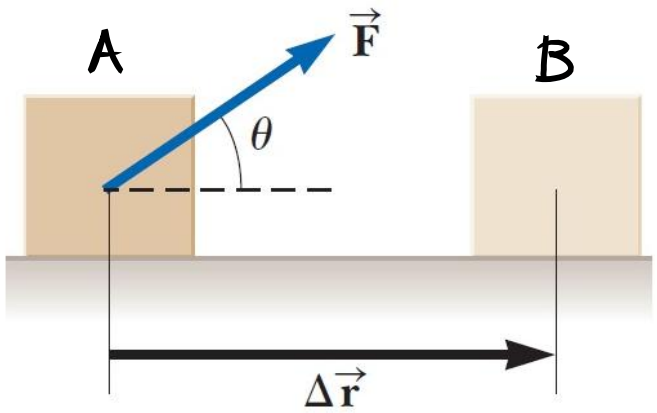
Ενέργεια Συστήματος



- Ας ξεκινήσουμε από **μονομελή** συστήματα
- Αναγνωρίζουμε το σύστημα: {σπόγγος}, μη απομονωμένο
  - Η εξωτερική δυναμη που ασκείται από το χέρι επιταχύνει το σύστημα, δηλ. του **μεταβάλλει την κινητική του ενέργεια**
- Ερώτημα: **πόσο αποτελεσματικοί είμαστε με την εξωτερική δύναμη που βάζουμε (όμοια σε μέτρο σε όλες τις περιπτώσεις) στο να κινήσουμε το σπόγγο (χωρίς τριβές);**
  - **Δηλ. να του αλλάξουμε την κινητική του κατάσταση!**
- Σε ποια περίπτωση τα καταφέρνουμε καλύτερα;
  - Μέτρο δύναμης – Κατεύθυνση – Μετατόπιση

Ενέργεια Συστήματος

- Ας μείνουμε σε ένα τέτοιο απλό παράδειγμα
  - Ένα σύστημα ενός σώματος μετατοπίζεται σε ευθεία γραμμή από μια **σταθερή** δύναμη $\vec{F}$ που του ασκείται υπό γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο



- Το **έργο (Work) W** που **παράγεται στο σύστημα από τη δύναμη** που ασκείται εξωτερικά στο σύστημα ορίζεται ως
  - το γινόμενο του μέτρου της σταθερής **δύναμης** $\vec{F}$, του μέτρου της **μετατόπισης** $\Delta\vec{r}$ του σημείου εφαρμογής της δύναμης, και του **συνημιτόνου** της **γωνίας** θ ανάμεσα στα δυο προηγούμενα:

$$W \equiv |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos(\theta) = F\,\Delta r\cos(\theta)$$

Ενέργεια Συστήματος

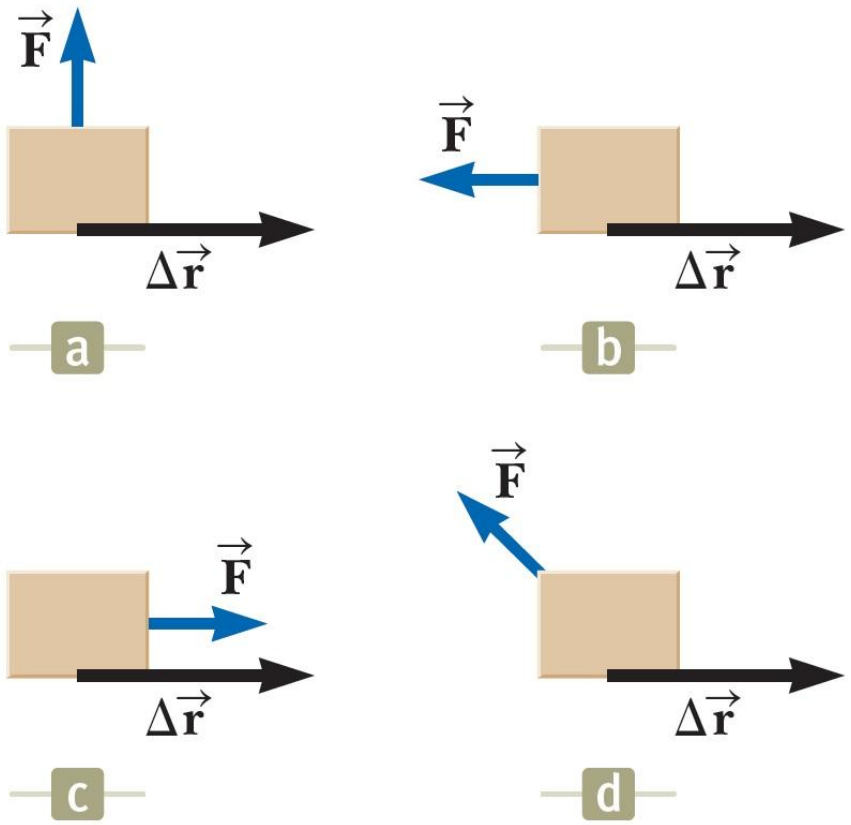
$$W \equiv F\,\Delta r\cos(\theta)$$

- **Quiz:** Κατατάξτε τις παρακάτω περιπτώσεις σε αύξουσα τιμή έργου

$W = 0$ $W > 0$

b, d, a, c

$W < 0$



Ενέργεια Συστήματος

- Διακρίνετε μια διαφορά με την καθημερινή σας εμπειρία για το έργο;
  - Κρατήστε μια βαριά μπάλα στο ύψος των ώμων σας για 2’
  - Στο τέλος, θα έχετε κουραστεί και θα θεωρείτε ότι «παράξατε αρκετό έργο» επάνω στην μπάλα
  - Η αλήθεια είναι ότι ο ορισμός που μόλις είδαμε θα σας πει ότι $W = 0$
    - Γιατί απλά υποστηρίζατε την μπάλα, δεν τη μετακινήσατε
- Επίσης, δείτε ξανά την (c) εικόνα με το σπόγγο.

Ενέργεια Συστήματος

- Η μαθηματική έκφραση

$$\boldsymbol{W \equiv F\,\Delta r\cos(\theta)}$$

μοιάζει γνωστή…

- Προκύπτει από το μαθηματικό εργαλείο που λέγεται

εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

- Έστω δυο διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}$. Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μια βαθμωτή ποσότητα (= αριθμός) που ισούται με

$$\boldsymbol{\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos(\theta)}$$

- Άρα το έργο $\boldsymbol{W}$ που παράγεται σε ένα σώμα από μια δύναμη $\boldsymbol{\vec{F}}$ για μετατόπιση $\boldsymbol{\Delta\vec{r}}$ μπορεί να γραφεί ως $\boldsymbol{\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}}$ **!**

Ενέργεια Συστήματος

- Θυμηθείτε από τις **ιδιότητες** του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων ότι:
  - $\vec{F} \perp \Delta\vec{r} \Rightarrow \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \mathrm{W} = 0$
  - $\vec{F} \uparrow\uparrow \Delta\vec{r} \Rightarrow \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \left|\vec{F}\right||\Delta\vec{r}| = F\Delta r \Rightarrow \mathrm{W} = F\Delta r$
  - $\vec{F} \uparrow\downarrow \Delta\vec{r} \Rightarrow \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = -\left|\vec{F}\right||\Delta\vec{r}| = -F\Delta r \Rightarrow \mathrm{W} = -F\Delta r$
- Αυτές οι ιδιότητες θα φανούν πολύ χρήσιμες, καθώς αναλύουμε δυνάμεις σε $x-$ και $y-$ συνιστώσες!
  - Με αυτόν τον τρόπο, όλες οι συνιστώσες θα είναι παράλληλες ή κάθετες στη μετατόπιση $\Delta\vec{r}$

Ενέργεια Συστήματος

- Μονάδα μέτρησης έργου

$$N \cdot m = J \text{ (Joule)}$$

- Μπορούμε να πούμε ότι «**το έργο W αποτελεί ενέργεια που μεταφέρεται προς ή από ένα σύστημα μέσω μιας δύναμης που δρα στο σύστημα**»

$$\textbf{\textit{έργο} = \textit{ενέργεια}}$$

$$\textbf{\textit{παραγωγή έργου} = \textit{μεταφορά ενέργειας}}$$

- Αν W είναι το έργο που παράγεται σε ένα σύστημα, τότε
  - $\boldsymbol{W > 0}$**: Έργο θετικό** → Μεταφορά ενέργειας προς το σύστημα
  - $\boldsymbol{W < 0}$**: Έργο αρνητικό** → Μεταφορά ενέργειας από το σύστημα

Ενέργεια Συστήματος

- **Έργο θετικό** → Μεταφορά ενέργειας προς το σύστημα
  - Σπρώχνουμε και επιταχύνουμε οριζόντια ένα κιβώτιο
  - Σηκώνουμε ένα βιβλίο από το τραπέζι σε ένα ράφι
  - Το έργο που παράγουμε πάνω στο (κιβώτιο/βιβλίο) είναι θετικό
  - Δύναμη στο (κιβώτιο/βιβλίο) παράλληλη με τη μετατόπιση
- **Έργο αρνητικό** → Μεταφορά ενέργειας από το σύστημα
  - Προσπαθούμε να συγκρατήσουμε ένα άλογο με το λάσο
  - Επιστρέφουμε ένα βιβλίο από το ράφι στο τραπέζι
  - Το έργο που παράγουμε πάνω στο (κιβώτιο/βιβλίο) είναι αρνητικό
  - Δύναμη στο (άλογο/βιβλίο) αντίθετη στη μετατόπιση



Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα**
- Ένα σωματίδιο στο xy επίπεδο υπόκειται σε μετατόπιση $\Delta\vec{r} = (2.0\ m)\ \vec{\boldsymbol{\imath}} + (3.0\ m)\ \vec{\boldsymbol{\jmath}}$ m λόγω μιας **σταθερής** δύναμης $\vec{F} = (5.0\ N)\ \vec{\boldsymbol{\imath}} + (2.0\ N)\ \vec{\boldsymbol{\jmath}}$ που ασκείται στο σωματίδιο. Βρείτε το έργο που παράγεται από τη δύναμη στο σωματίδιο.

Είναι $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = (5\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j})$

$= 10\vec{i}\cdot\vec{i} + 15\vec{i}\cdot\vec{j} + 4\vec{i}\cdot\vec{j} + 6\vec{j}\cdot\vec{j}$

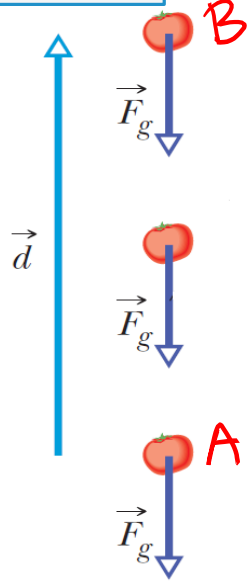
$= 10 \cdot 1 + 15 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1$

$= 16\ \text{J}$

Ενέργεια Συστήματος

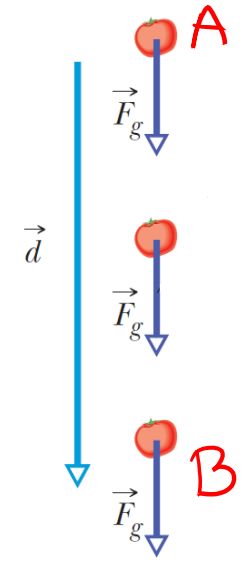
- **Έργο δύναμης βάρους**
  - Όταν ένα σώμα ανέρχεται **κατακόρυφα** (α):

$$W_{F_g} = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = F_g d \cos(\pi)$$
$$= -F_g d = -mgd$$



  - Όταν ένα σώμα κατέρχεται **κατακόρυφα** (b):

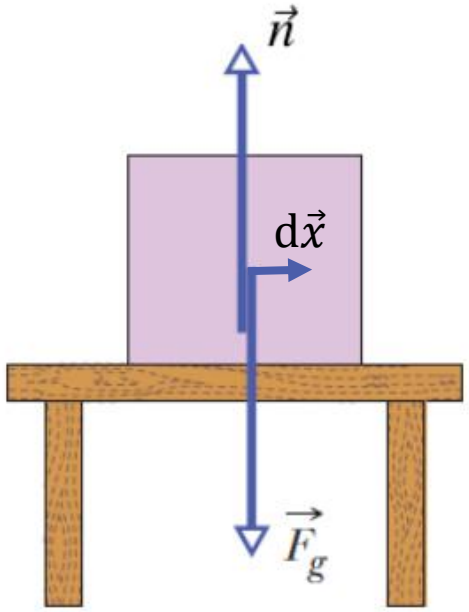
$$W_{F_g} = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = F_g d \cos(0)$$
$$= F_g d = mgd$$



  - Παρατηρήστε τα πρόσημα. «Βγάζουν» νόημα?

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Έργο κάθετης δύναμης** από επιφάνεια
  - Για μια οποιαδήποτε μετατόπιση $d\vec{x}$ σε οποιαδήποτε επιφάνεια, το έργο της κάθετης δύναμης $\vec{n}$ θα ισούται με μηδέν!



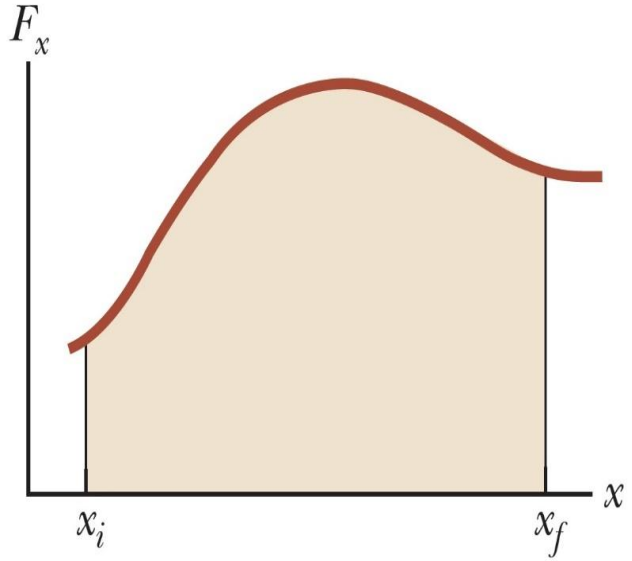
$$dW_n = \vec{n} \cdot d\vec{x} = n\, dx \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

  - Άρα το έργο της κάθετης δύναμης ισούται με μηδέν!
    - …όταν το σώμα κινείται σε ακίνητη, άκαμπτη επιφάνεια

Ενέργεια Συστήματος

- Η συζήτησή μας αφορούσε έργο υπό **σταθερή δύναμη**
  - Τι γίνεται όταν η δύναμη είναι **μεταβαλλόμενη** αλλά η κίνηση εξακολουθεί να είναι ευθύγραμμη;
  - Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις που είδαμε!
  - Ας πούμε ότι μεταβάλλεται μόνο το μέτρο της – τι συμβαίνει τότε?

- Παράδειγμα:
  - Η x-συνιστώσα της δύναμης μεταβάλλεται κατά την κίνηση σε νοητό άξονα $x'x$

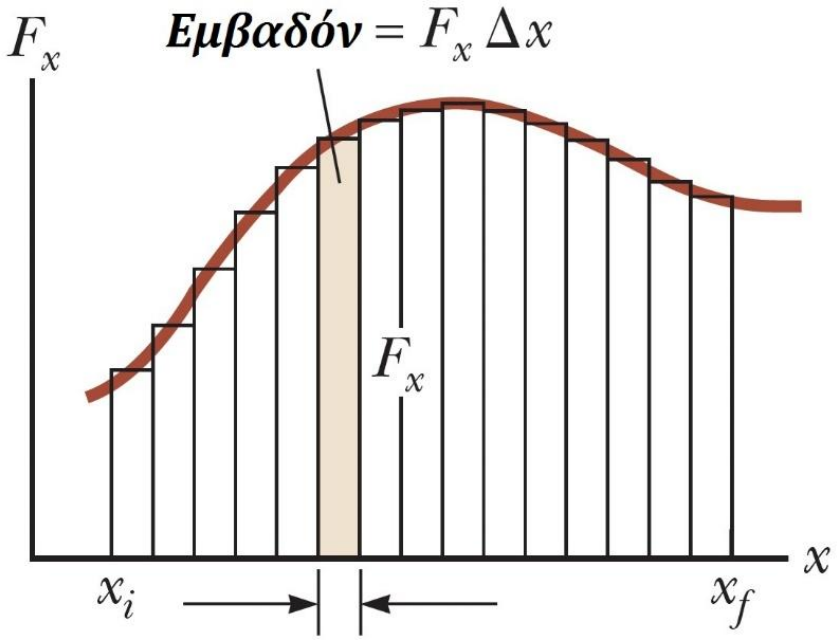


Ενέργεια Συστήματος

- Μπορούμε να θεωρήσουμε τη δύναμη ως **τμηματικά** (για πολύ μικρά διαστήματα Δx) **σταθερή**!

- Προσέγγιση:
  - Χωρίζουμε το διάστημα σε μικρά διαστήματα Δx
  - Σε κάθε τέτοιο διάστημα έχουμε έργο W_j, που ισούται με το εμβαδόν του αντίστοιχου παραλληλογράμμου

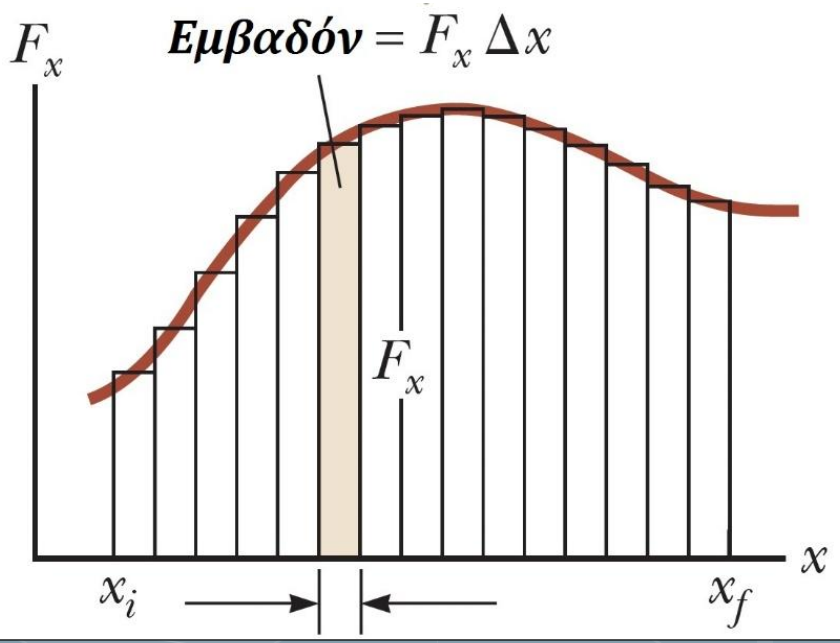
$$W_j = F_x \Delta x$$



Ενέργεια Συστήματος

- Μπορούμε να θεωρήσουμε τη δύναμη ως **τμηματικά** (για πολύ μικρά διαστήματα Δx) **σταθερή**!

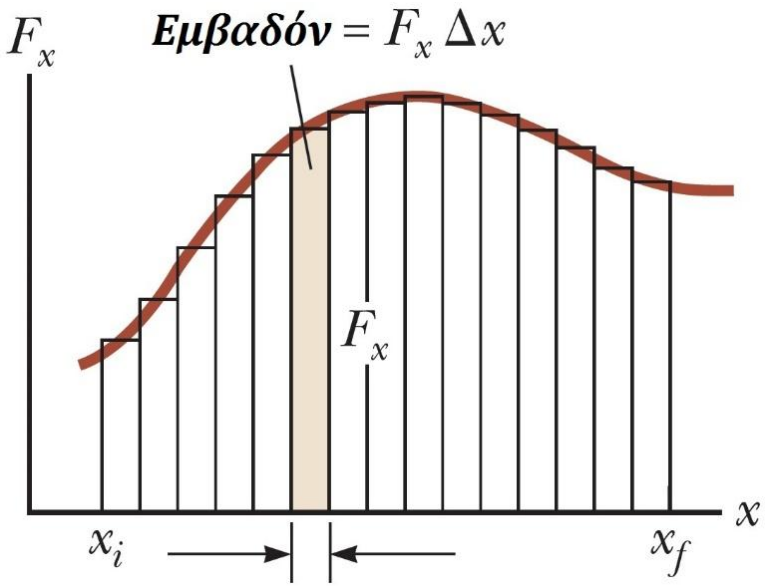
- Παράδειγμα:
  - Το συνολικό έργο είναι $\approx \sum_j W_j$
  - Όταν τα διαστήματα γίνονται απειροστά μικρά ($\Delta x \to 0$), τότε το συνολικό έργο ισούται με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη!

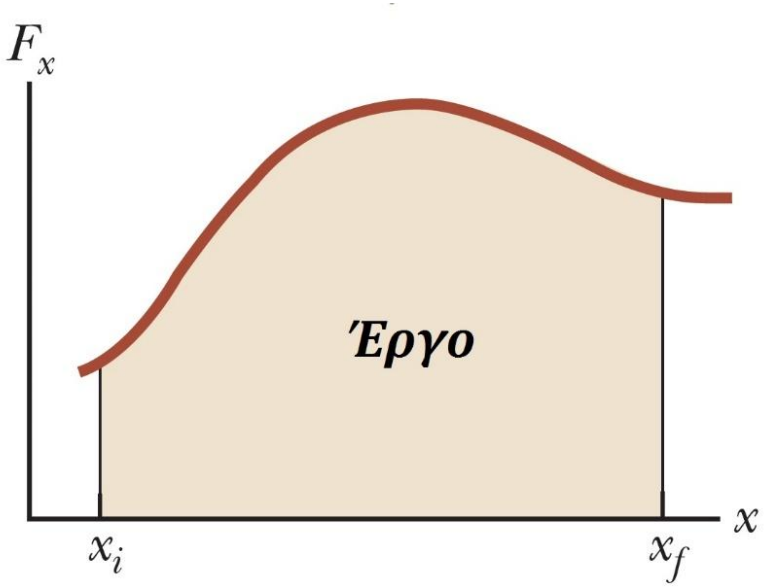


Ενέργεια Συστήματος

- Με μαθηματικά,

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} F_x \cos(0)\, dx = \int \vec{F}_x \cdot d\vec{x}$$





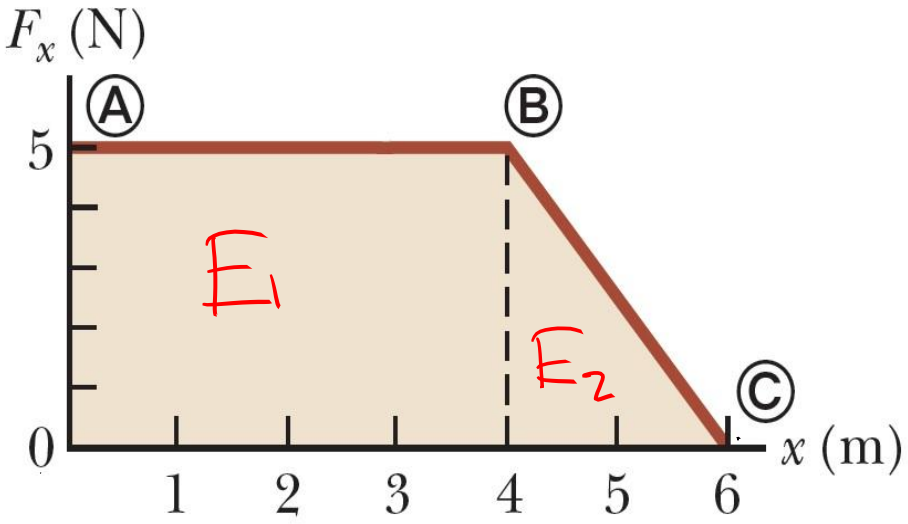
Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα:**
- Μια δύναμη ασκείται σε ένα σωματίδιο, η οποία μεταβάλλεται με την απόσταση, όπως στο Σχήμα. Υπολογίστε το έργο που παράγεται από τη δύναμη στο σωματίδιο όταν αυτό κινείται από $x = 0$ ως $x = 6$ m.

$E_1 = 20$ J

$E_2 = 5$ J

$W = E_1 + E_2 = 25$ J



Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**

Άλλη λύση: ("κακή")

$$W = \int_0^6 F_x\,dx = \int_0^4 5\,dx + \int_4^6 \left(-\frac{5}{2}x + 15\right)dx$$

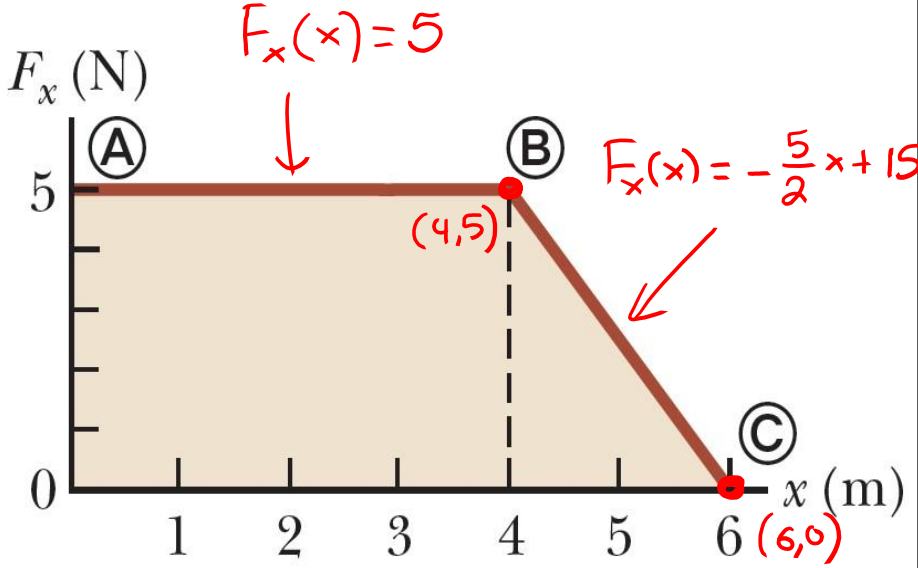
$$= 5x\Big|_0^4 + \left(-\frac{5}{4}x^2 + 15x\right)\Big|_4^6$$

$$= 20 - 0 + \left(-45 + 90 - \left(-20 + 60\right)\right)$$

$$= 20 + (45 - 40)$$

$$= 20 + 5$$

$$= 25\ \text{J}$$



Ενέργεια Συστήματος

- Ας μελετήσουμε μια πολύ… δημοφιλή δύναμη **μεταβαλλόμενου μέτρου**

- Θα κατανοήσουμε τη λειτουργία της και θα υπολογίσουμε το έργο που **παράγει** πάνω σε ένα σύστημα...
  - …που θα καθορίσουμε **εμείς** ποιο θα είναι

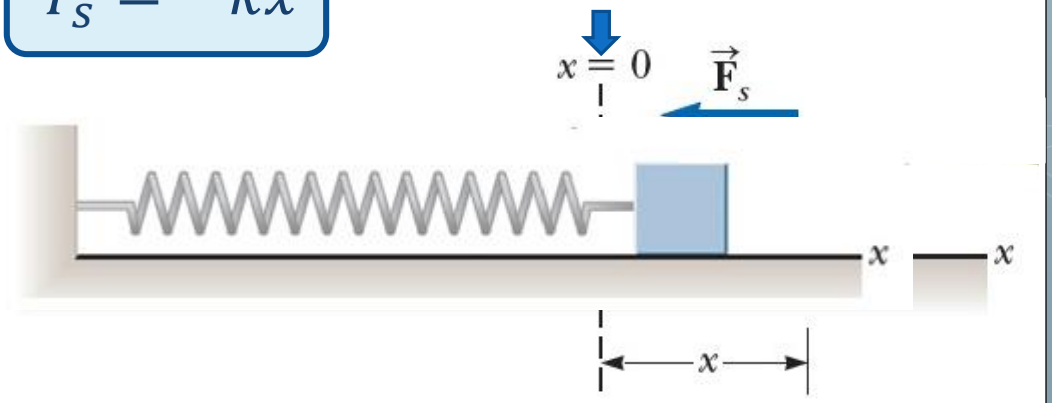
- Ταυτόχρονα, θα διατυπώσουμε κλειστούς τύπους για το έργο που σχετίζεται με αυτή τη δύναμη

- Τέλος, θα δούμε τη σχέση του έργου με τις αντίστοιχες ενέργειες που θα ορίσουμε

Ενέργεια Συστήματος

- **Δύναμη ελατηρίου**
  - Σύστημα = {σώμα} – δεμένο στο ελατήριο
  - Δύναμη $\vec{F}_s$ εγείρεται επάνω στο σώμα από το ελατήριο όταν το τελευταίο εκτείνεται ή συμπιέζεται
  - Η δύναμη μεταβάλλεται ανάλογα με τη απομάκρυνση από τη **θέση ισορροπίας (θέση φυσικού μήκους)**
  - Δύναμη ελατηρίου στο σώμα: ***Νόμος του Hooke***

$$F_s = -kx$$



  - Ελατήρια: **Αποθηκεύουν** ή **απορροφούν** ενέργεια!

Ενέργεια Συστήματος

$$F_s = -kx$$

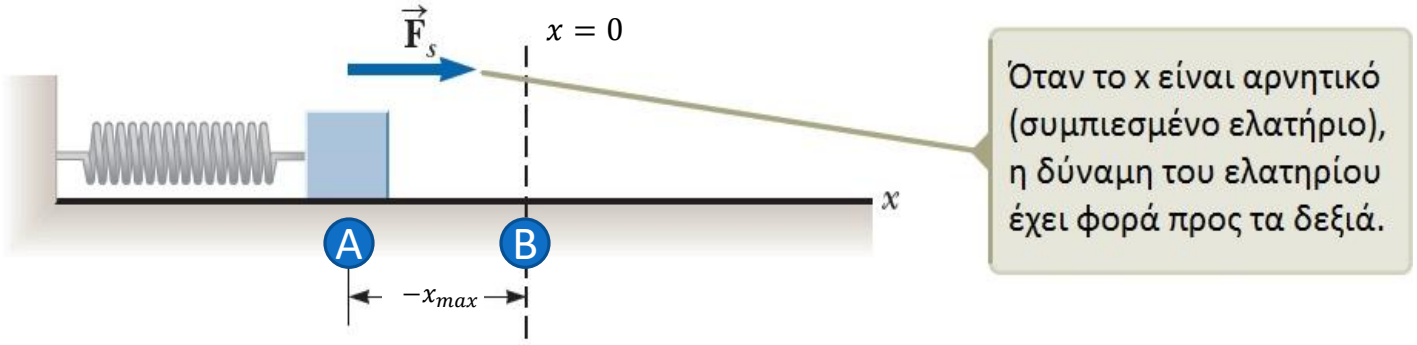
- **Δύναμη ελατηρίου**
  - Η τιμή της σταθεράς k είναι μια ένδειξη της σκληρότητας του ελατηρίου
    - Μεγάλο k → σκληρό ελατήριο
    - Μικρό k → μαλακό ελατήριο
  - Μονάδες της σταθεράς k είναι $\mathbf{N/m}$
  - Διανυσματική μορφή για οριζόντια κίνηση

$$\vec{F}_s = F_s\vec{\imath} = -kx\vec{\imath}$$

Ενέργεια Συστήματος

$$F_s = -kx$$

- Ας θεωρήσουμε ότι το ελατήριο συμπιέζεται στη μέγιστη τιμή (θέση $x_i = x_A = -x_{max}$) και αφήνεται ελεύθερο.



- Έστω η τελική θέση $x_f = x_B = 0$ (θέση ισορροπίας)

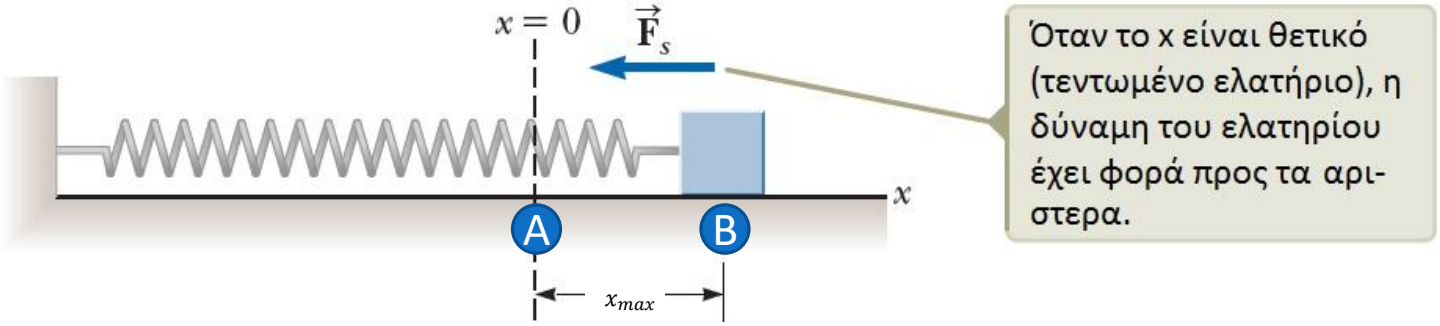
- Το έργο της δύναμης του ελατηρίου επάνω στο σώμα ισούται με

$$W_s = \int \vec{F}_s \cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\vec{\imath}) \cdot (dx\vec{\imath}) = \int_{-x_{max}}^{0} (-kx)dx = -\frac{kx^2}{2}\Big|_{-x_{max}}^{0} = \frac{1}{2}kx_{max}^2$$

Ενέργεια Συστήματος

$$F_s = -kx$$

- Ας θεωρήσουμε ότι το ελατήριο συνεχίζει την πορεία του, περνώντας από τη θέση ισορροπίας (θέση $x_i = x_A = 0$)



- Έστω η τελική θέση $x_f = x_B = x_{max}$

- Το έργο της δύναμης του ελατηρίου επάνω στο σώμα ισούται με

$$W_s = \int \vec{F}_s \cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\vec{\imath}) \cdot (dx\vec{\imath}) = \int_{0}^{x_{max}} (-kx)dx = -\frac{1}{2}kx_{max}^2$$

Ενέργεια Συστήματος

$$F_s = -kx$$

- Άρα το συνολικό έργο της δύναμης ελατηρίου επάνω στο σώμα **για μετατόπιση από $-x_{max}$ ως x_{max}** είναι μηδέν!!
  - Το ίδιο ισχύει για οποιεσδήποτε συμμετρικές ως προς το μηδέν θέσεις

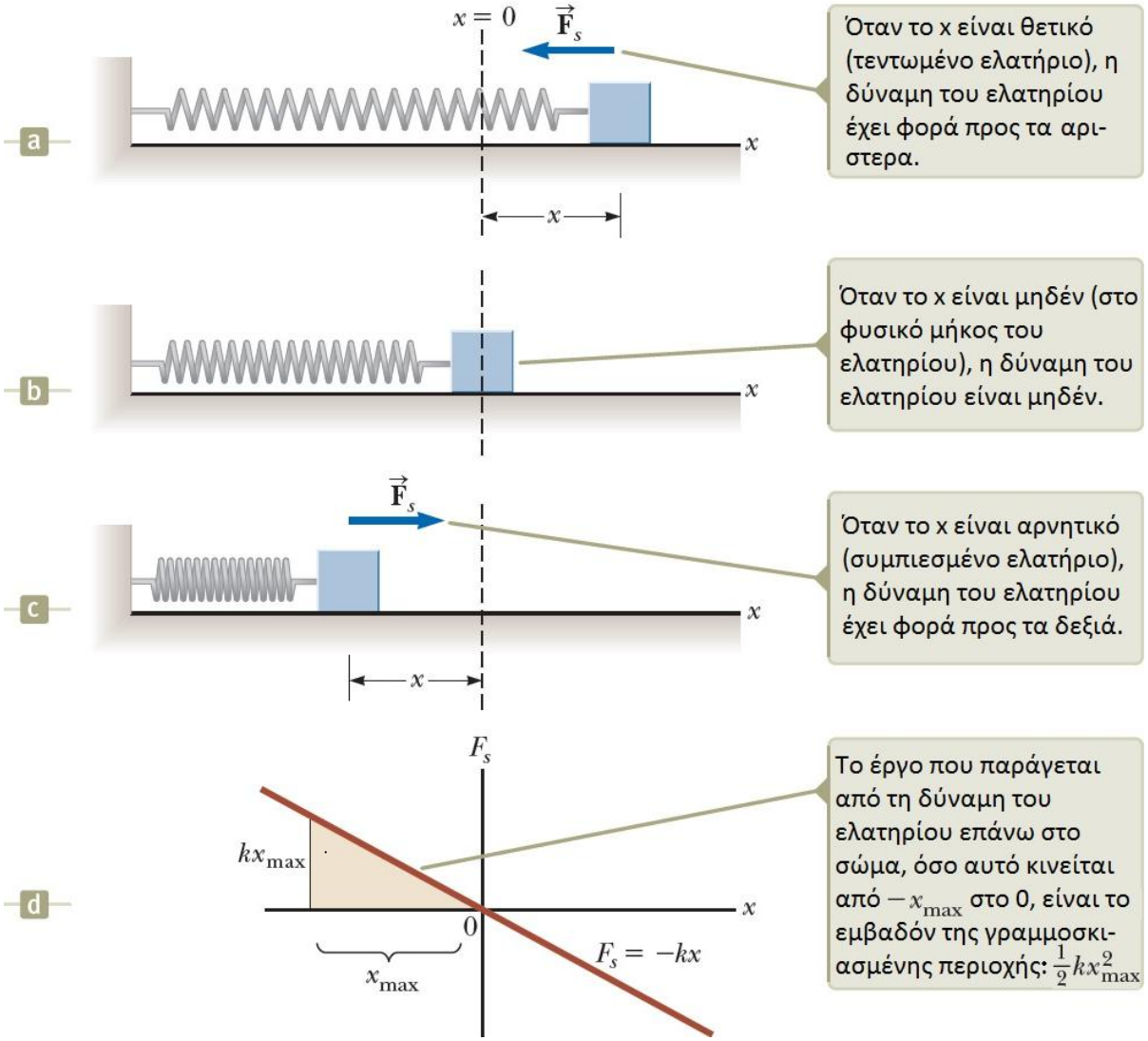
- Όμως για μια **οποιαδήποτε** μετατόπιση από μια θέση x_i σε μια θέση x_f, ισχύει:

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

που δεν είναι απαραίτητα ίσο με το μηδέν…

- Η παραπάνω σχέση δίνει το **έργο της δύναμης του ελατηρίου από μια οποιαδήποτε θέση ως μια οποιαδήποτε άλλη**

Ενέργεια Συστήματος



Όταν το x είναι θετικό (τεντωμένο ελατήριο), η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά προς τα αριστερα.

Όταν το x είναι μηδέν (στο φυσικό μήκος του ελατηρίου), η δύναμη του ελατηρίου είναι μηδέν.

Όταν το x είναι αρνητικό (συμπιεσμένο ελατήριο), η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά προς τα δεξιά.

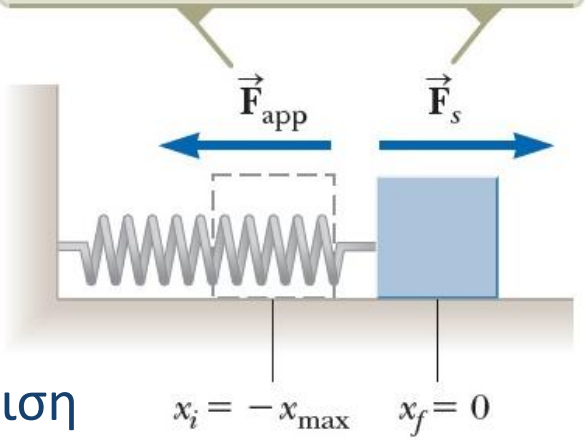
Το έργο που παράγεται από τη δύναμη του ελατηρίου επάνω στο σώμα, όσο αυτό κινείται από $-x_{max}$ στο 0, είναι το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής: $\frac{1}{2}kx_{max}^2$

Ενέργεια Συστήματος

$$\vec{F}_{app} = -\vec{F}_s$$

- Έστω μια <u>εξωτερική</u> δύναμη $\vec{F}_{app}$ που εφαρμόζεται στο σύστημα-σώμα, όπως στο σχήμα
  - Κίνηση από το $-x_{max}$ στο 0

Αν η διαδικασία της κίνησης του σώματος γίνεται ΠΟΛΥ αργά, τότε η $\vec{F}_{app}$ είναι ίση σε μέτρο και αντίθετης φοράς με την $\vec{F}_s$, για κάθε χρονική στιγμή.



- $W_{ext} = \int \vec{F}_{app} \cdot d\vec{x} = \int -\vec{F}_s \cdot d\vec{x}$

$$= \int_{x_i}^{x_f} -(-kx\vec{\imath}) \cdot (dx\,\vec{\imath})$$

$$= \int_{-x_{max}}^{0} kxdx = -\frac{1}{2}kx_{max}^2$$

- Όμοια με πριν, για οποιαδήποτε μετατόπιση

$$W_{ext} = \int_{x_i}^{x_f} kxdx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 = -W_s$$

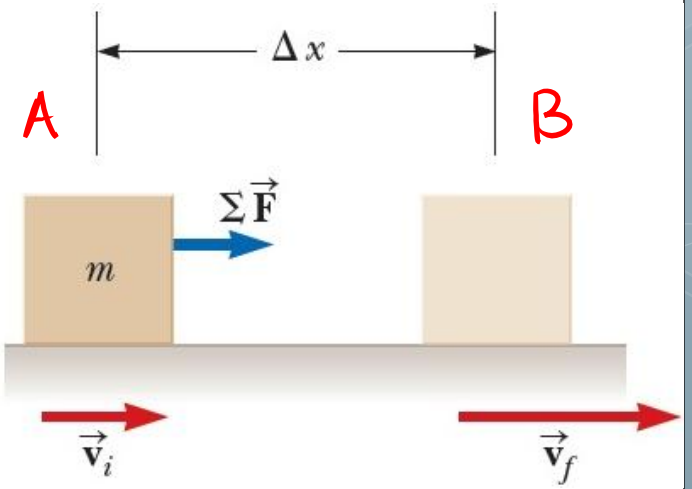
Ενέργεια Συστήματος

- **Παραγωγή έργου = Μηχανισμός μεταφοράς ενέργειας**
  - Τι γίνεται αυτή η ενέργεια;
  - ***Πιθανότατα*** αλλάζει την ταχύτητα ενός σώματος

- 1ος Τύπος Ενέργειας που μπορεί να έχει ένα σύστημα:

Κινητική Ενέργεια

- Έστω το διπλανό παράδειγμα:
  - Σύστημα = {σώμα μάζας m}
    - Σώμα επιταχύνει από $\vec{u}_i$ σε $\vec{u}_f$
    - Θεωρήστε την συνισταμένη των δυνάμεων σταθερή



Ενέργεια Συστήματος

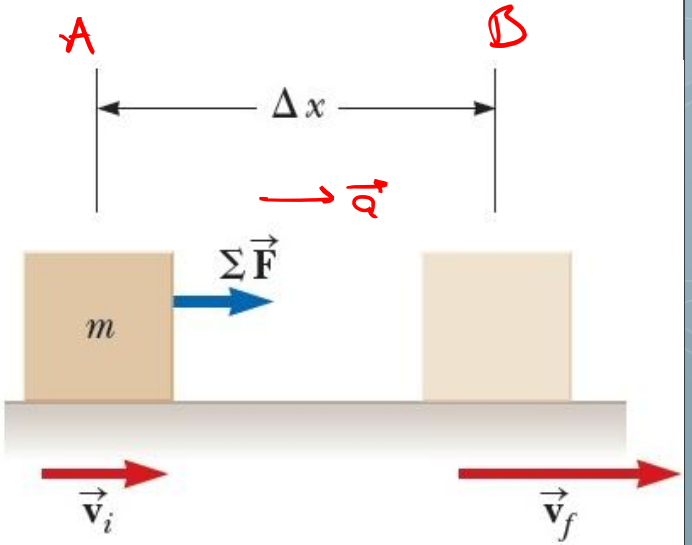
- Σώμα υπό επίδραση σταθερής δύναμης (**μοντέλο κίνησης Ι**)
- Η κίνηση είναι επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση (**μοντέλο κίνησης ΙΙ**)
- Άρα

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta x \Leftrightarrow a = \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x}$$

- Από 2ο νόμο Newton, είναι

$$\sum F = ma$$

και με αντικατάσταση έχουμε



Ενέργεια Συστήματος

$$\sum F = m\frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} \Leftrightarrow \overbrace{\Sigma F \Delta x}^{W_{\Sigma F}} = \frac{1}{2}mu_f^2 - \frac{1}{2}mu_i^2$$

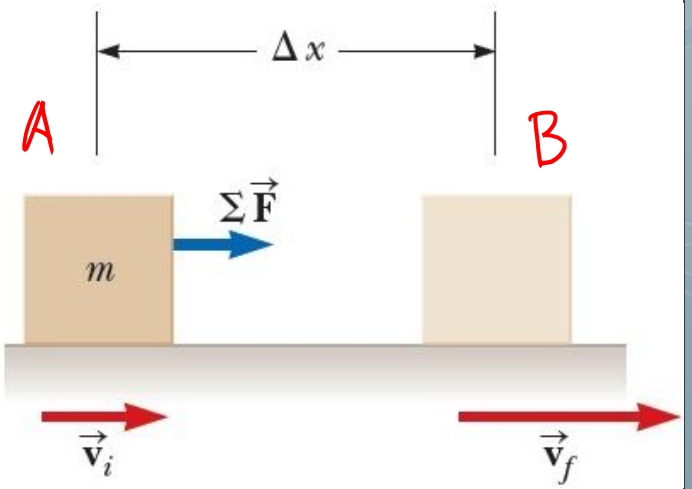
- Το 1ο μέλος είναι ο ορισμός του έργου σταθερών δυνάμεων
- Άρα

$$W_{\Sigma F} = \frac{1}{2}mu_f^2 - \frac{1}{2}mu_i^2 = K_f - K_i = \Delta K$$

όπου

$$K = \frac{1}{2}mu^2$$

η ***κινητική ενέργεια*** του σώματος



Ενέργεια Συστήματος

- Η κινητική ενέργεια αναπαριστά την ενέργεια που σχετίζεται με την **κίνηση** ενός σώματος
  - Μονάδα μέτρησης στο SI:

$$kg \cdot \left(\frac{m}{s}\right)^2 = kg \cdot \left(\frac{m}{s^2}\right) \cdot m = N \cdot m = 1\ Joule\ (J)$$

- Συνοψίζοντας:

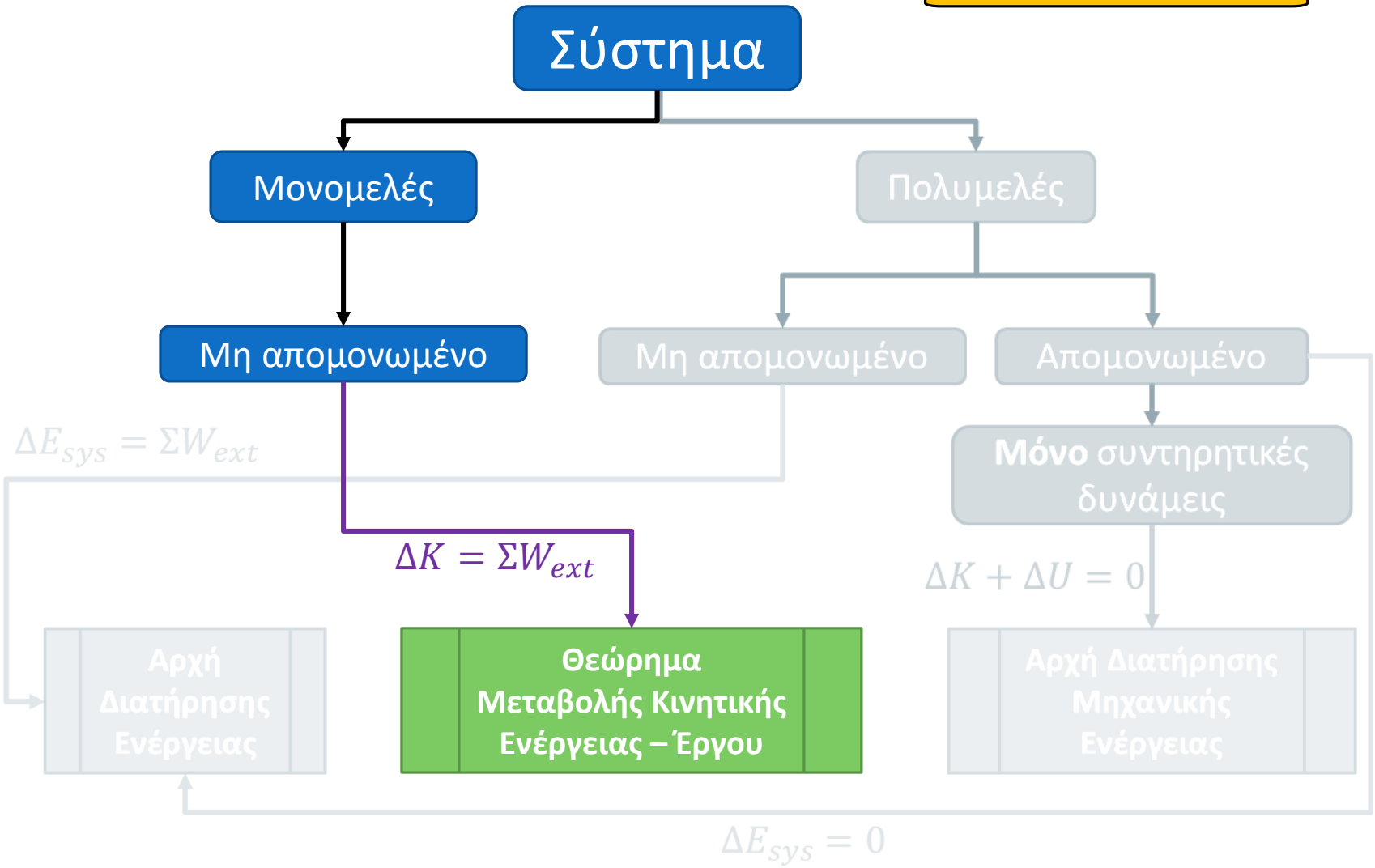
$$\sum W_{ext} = K_f - K_i = \Delta K$$

1ο Ενεργειακό Θεώρημα!

- **<u>Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου</u>**
  - **Όταν σε ένα σύστημα παράγεται έργο από μια συνισταμένη δυνάμεων, και η μόνη αλλαγή σε αυτό αφορά το μέτρο της ταχύτητας του, το συνολικό έργο ισούται με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος**

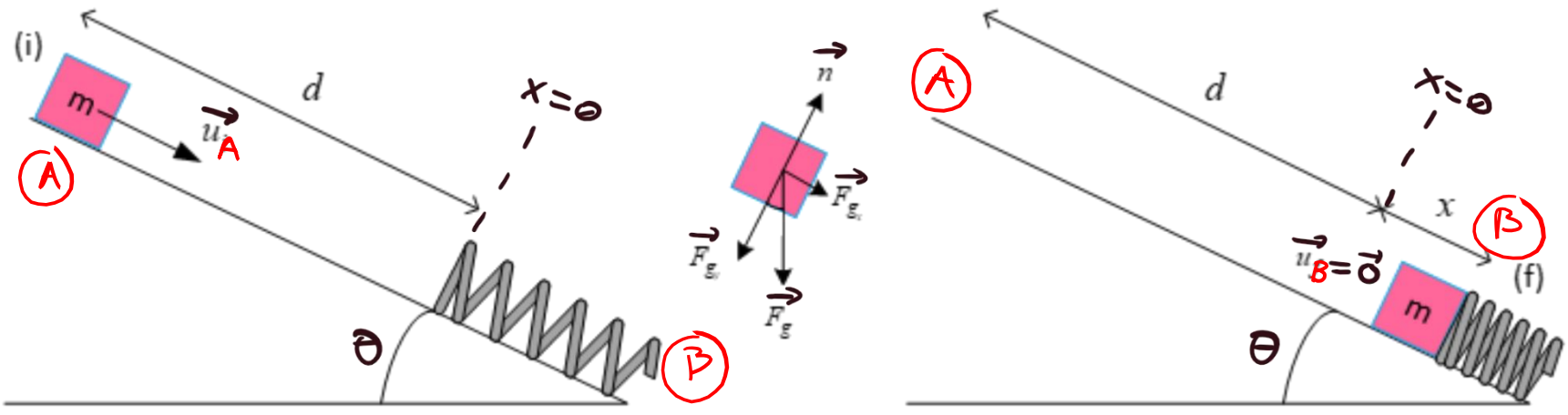
Ενέργεια Συστήματος

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων



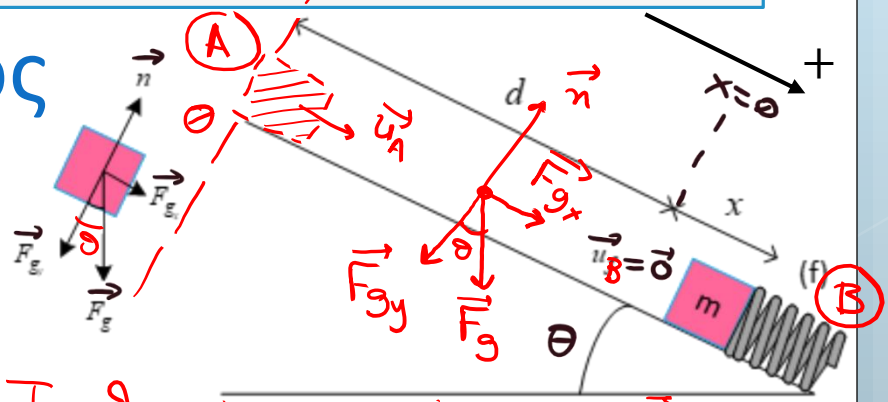
Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα:**
- *Λείο* κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ έχει ελατήριο σταθεράς k στερεωμένο στο κάτω μέρος του. Ένα κουτί μάζας m τοποθετείται πάνω στο κεκλιμένο σε απόσταση d από το ελατήριο. Από τη θέση αυτή, το κουτί βάλλεται προς το ελατήριο με ταχύτητα u_0. Μπορείτε να προβλέψετε πόσο θα έχει συμπιεστεί το ελατήριο όταν το κουτί φτάνει στιγμιαία σε ηρεμία?



Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Δουλεύουμε στη διαδρομή ΑΒ.

Θεωρούμε το σύστημα {σώμα}. Τοποθετούμε το σύστημα αξόνων όπως στο σχήμα (x'x ∥ κεκλιμένο, y'y ⊥ κεκλιμένο). Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕΕ στη διαδρομή Α→Β.

$$\Delta K_{A\to B} = \sum W_{ext} = \cancel{W_n}^{\,0} + W_{F_{g_x}} + \cancel{W_{F_{g_y}}}^{\,0} + W_s \quad \left| \vec{n}, \vec{F}_{g_y} \perp \Delta\vec{x} \right.$$

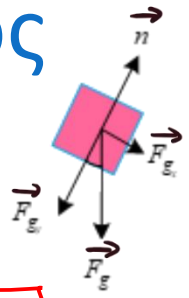
$$K_B - K_A = W_{F_{g_x}} + W_s \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2} m u_A^2 = W_{F_{g_x}} + W_s \quad (1)$$

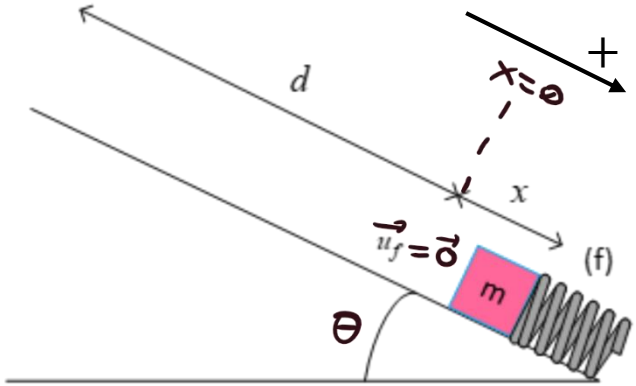
- $W_{F_{g_x}} = \vec{F}_{g_x} \cdot \Delta\vec{x} = mg\sin\theta\,(d+x)$ (2)
- $W_s = \frac{1}{2} k x_A^2 - \frac{1}{2} k x_B^2 = 0 - \frac{1}{2} k x^2$ (3)

$$(1) \overset{(2)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}} -\frac{1}{2} m u_A^2 = mg\sin\theta\,(d+x) - \frac{1}{2} k x^2$$ (πολυώνυμο του x)

Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**





Θυμήσαμε ότι

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$, αν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

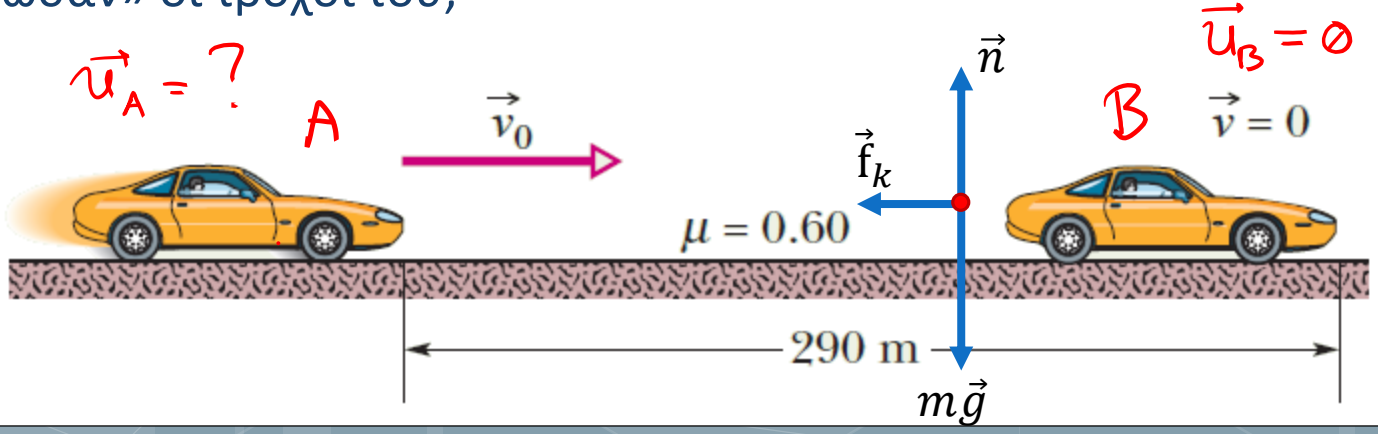
Το πρόβλημά μας είναι: $\underbrace{\left(\frac{1}{2}k\right)}_{\alpha} x^2 \underbrace{- mg\sin\vartheta}_{\beta} \cdot x \underbrace{- \frac{1}{2}mu_A^2 - mg\sin\vartheta \cdot d}_{\gamma}$.

$$x_{1,2} = \frac{mg\sin\vartheta \pm \sqrt{(mg\sin\vartheta)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}mu_A^2 + mg\sin\vartheta \cdot d\right)}}{2\frac{1}{2}k}$$

Από τις δυο ρίζες επιλέγω τη δεξιά γιατί η συμπίεση $\vec{x}$ του ελατηρίου είναι προς τη θετική φορά του $x'x$.

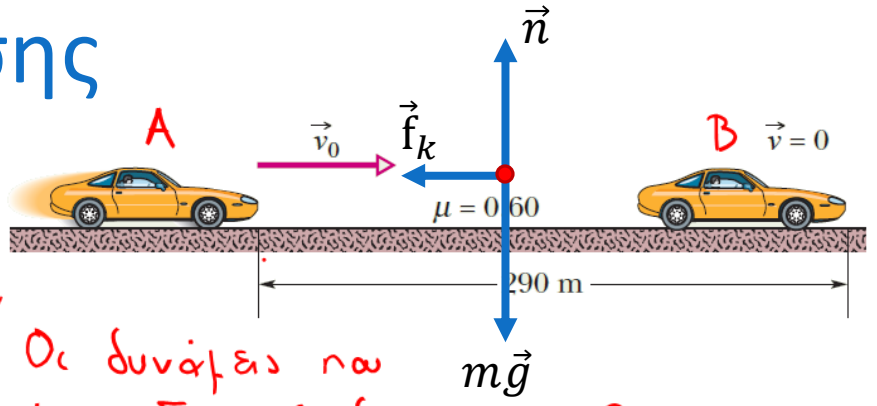
Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα:**
- Όταν οι τροχοί ενός αυτοκινήτου «κλειδώνουν» (σταματούν να γυρίζουν) εξ' αιτίας ενός απότομου φρεναρίσματος, το αυτοκίνητο ολισθαίνει στο δρόμο και «αποτυπώνει» στο οδόστρωμα ίχνη από τα ελαστικά του. Το ρεκόρ για τα μεγαλύτερα σε μήκος ίχνη ελαστικών σε δημόσιο δρόμο έγινε το 1960 στην Αγγλία – το μήκος του ίχνους ήταν 290 μέτρα! Υποθέτοντας ότι $\mu_k = 0.6$ μεταξύ οδοστρώματος και ελαστικών, και ότι το αυτοκίνητο επιταχυνόταν σταθερά κατά το φρενάρισμα, πόσο γρήγορα έτρεχε το αυτοκίνητο ακριβώς όταν «κλείδωσαν» οι τροχοί του;



Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Θεωρούμε το σύστημα {αμάξι}, μονοδιάστατο και μη αναφορικό. Οι δυνάμεις που του ασκούνται φαίνονται στο σχήμα. Στη διαδρομή $A \to B$ ισχύει το ΘΜΚΕ:

$$\Delta K_{A\to B} = \sum W_{ext} = W_n + W_{F_g} + W_{f_k}$$

$$= W_{f_k} = \vec{f}_k \cdot \Delta\vec{x} = -f_k \cdot \Delta x = -\mu_k n \Delta x$$

Το σώμα ισορροπεί στον $y'y$, άρα ισχύει ο 1ος νόμος Newton:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_g = 0 \Rightarrow n - F_g = 0 \Rightarrow n = F_g = mg$$

Άρα τελικά $\Delta K_{A\to B} = -\mu_k mg\Delta x \Leftrightarrow K_B - K_A = -\mu_k mg\Delta x \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}mu_A^2 = -\mu_k mg\Delta x \Rightarrow u_A = \sqrt{2\mu_k g \Delta x}.$$

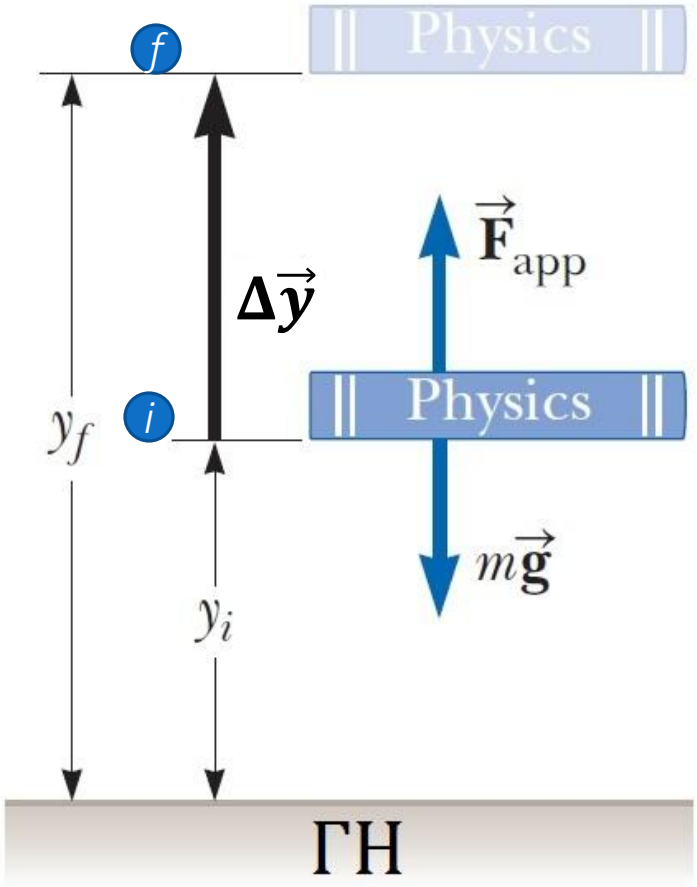
Ενέργεια Συστήματος

- Ως τώρα, είδαμε την επίδραση ***εξωτερικών*** δυνάμεων σε ένα σύστημα **ενός** μόνο σώματος
  - Κάποιες από αυτές ήταν ικανές να παράγουν έργο στο σύστημα
    - …και να του μεταβάλλουν την κινητική ενέργεια
- Ας δούμε συστήματα από **δυο ή περισσότερα** σώματα (**πολυμελή**) με δυνάμεις ***εσωτερικές*** & εξωτερικές στο σύστημα
  - Δηλ. δυνάμεις που δεν ασκούνται **μόνο** από το εξωτερικό περιβάλλον, αλλά και **μεταξύ των μελών του συστήματος**
- Τι «ενεργειακό» νέο έχουν να μας πουν τέτοια συστήματα?

Ενέργεια Συστήματος

Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- Μετατοπίζουμε <u>αργά</u> (με σταθερή ταχύτητα) ένα βιβλίο από τη θέση y_i στη θέση y_f μέσω **εξωτερικής** δύναμης $\vec{F}_{app}$
  - **Μη απομονωμένο σύστημα**
- **Αύξηση** ενέργειας συστήματος λόγω θετικού έργου της $\vec{F}_{app}$
  - Μεταφέρουμε ενέργεια **στο** σύστημα
  - Υπάρχει δύναμη & μετατόπιση προς τα πάνω, άρα υπάρχει **μη μηδενικό, θετικό έργο**!



Ενέργεια Συστήματος

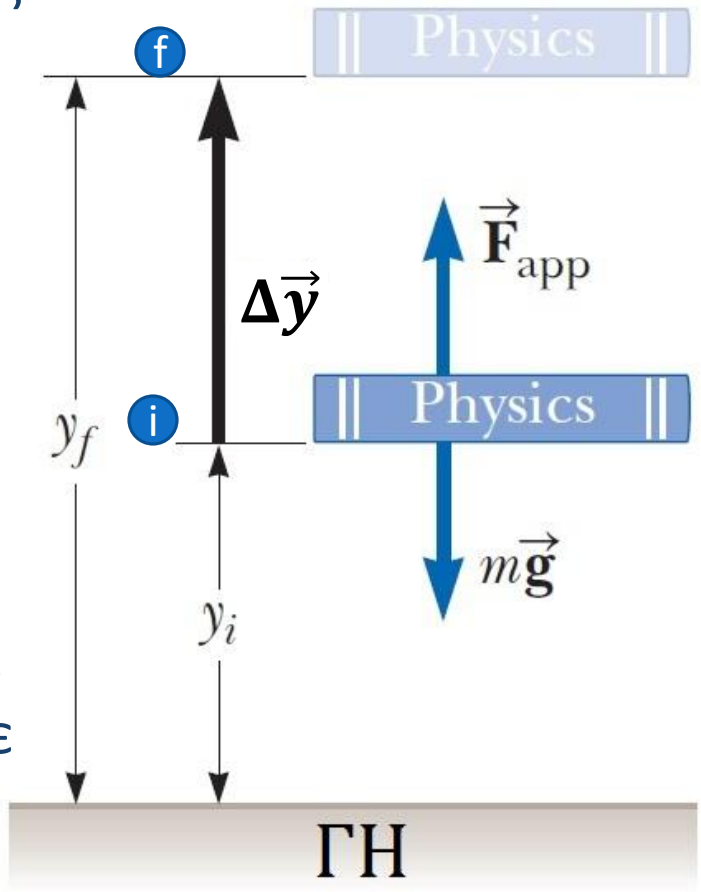
Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- **Καμιά αλλαγή/μεταβολή** στην κινητική ενέργεια του συστήματος μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσης! Γιατί; Υποθέσαμε

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0}$$

δηλ. η ταχύτητα ανόδου είναι σταθερή!

- Η ενέργεια που μεταφέρθηκε μέσω έργου στο βιβλίο πρέπει να έχει αποθηκευτεί στο σύστημα με **άλλη μορφή**!

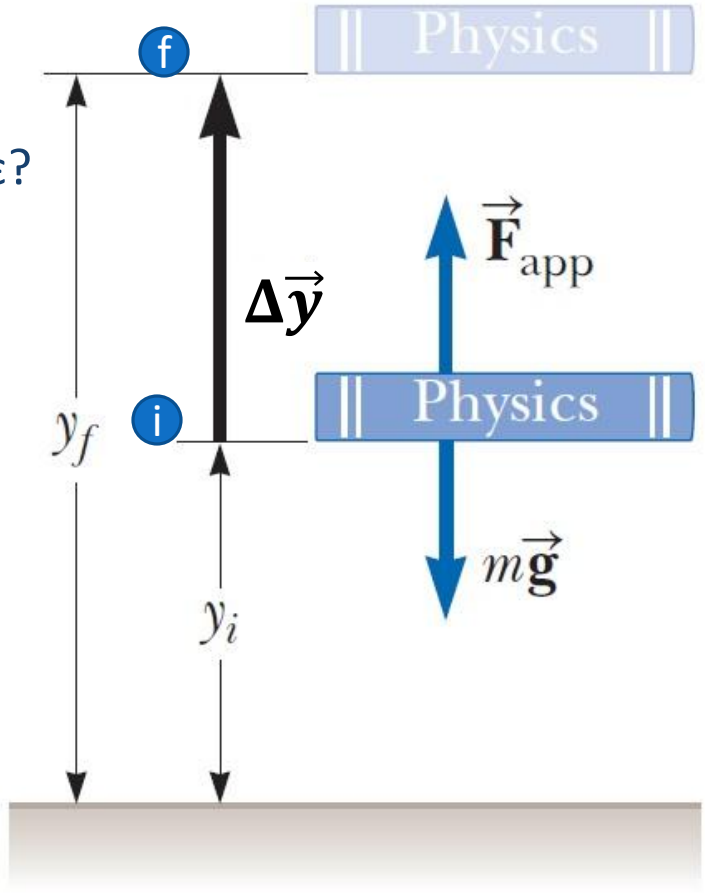


Ενέργεια Συστήματος

Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- Αν αφήσουμε όμως το βιβλίο, θα πέσει στο ύψος y_i
- Τώρα, το βιβλίο (και το σύστημα) έχει **κινητική ενέργεια**!
  - Πώς την απέκτησε; Από πού προήλθε?
  - Προέρχεται από το **έργο της δύναμης** $\vec{F}_{app}$ κατά την ανύψωση του βιβλίου νωρίτερα
  - Μέσω ποιου έργου εκφράστηκε?
  - Μέσω του **έργου του βάρους**
- Η ενέργεια που ήταν αποθηκευμένη στο σύστημα {βιβλίο, Γη} πριν το πρώτο αφεθεί να πέσει λέγεται

βαρυτική δυναμική ενέργεια

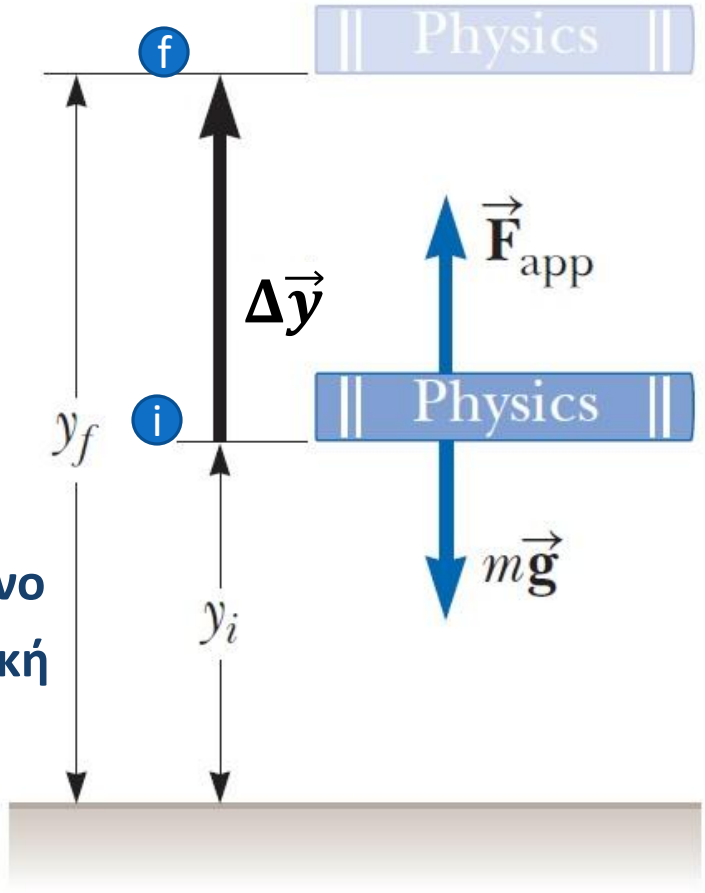


Ενέργεια Συστήματος

Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- Βλέπετε τις ενεργειακές μετατροπές?

- Μια **εξωτερική δύναμη** $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{app}}$ εισήγαγε ενέργεια μέσω έργου στο μη απομονωμένο σύστημα {Γη, βιβλίο}, ανυψώνοντας το ένα μέλος (βιβλίο)
- Το έργο αποθηκεύτηκε ως **βαρυτική δυναμική ενέργεια**
- Η εξωτερική δύναμη έπαψε να δρα
  - Το σύστημα είναι πλέον **απομονωμένο**
  - Η **δύναμη του βάρους** είναι **εσωτερική** στο σύστημα
- Η **βαρυτική δυναμική** ενέργεια μετατράπηκε όλη σε **κινητική**!



Ενέργεια Συστήματος

Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- Εφαρμόζουμε δύναμη για να **ανυψώσουμε** το βιβλίο με (σταθερή) πολύ αργή ταχύτητα (έτσι ώστε $\Sigma\vec{F}_y = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_{app} = -m\vec{g}$)

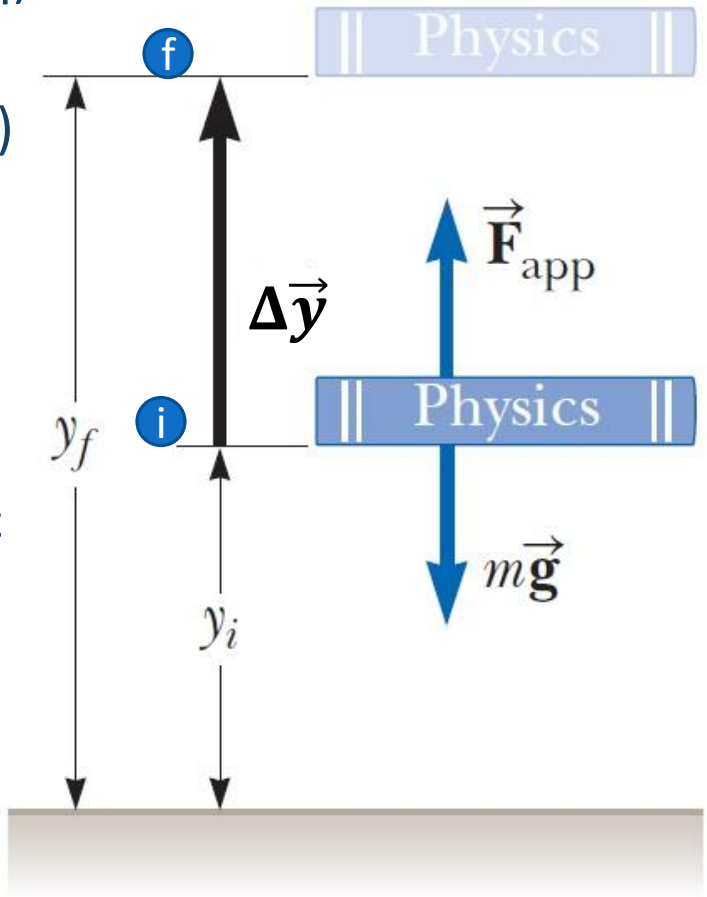
- $W_{ext} = \vec{\mathrm{F}}_{app} \cdot \Delta\vec{y} = -m\vec{g} \cdot \Delta\vec{y}$
  $= -m(-g\vec{\boldsymbol{j}}) \cdot (y_f - y_i)\vec{\boldsymbol{j}}$
  $= mgy_f - mgy_i$

- Αν συμβολίζουμε με $U = mgy$, τότε

$$W_{ext} = U_{g_f} - U_{g_i} = \Delta U_g$$

- **Βαρυτική Δυναμική ενέργεια**

$$U_g = mgy$$



Ενέργεια Συστήματος

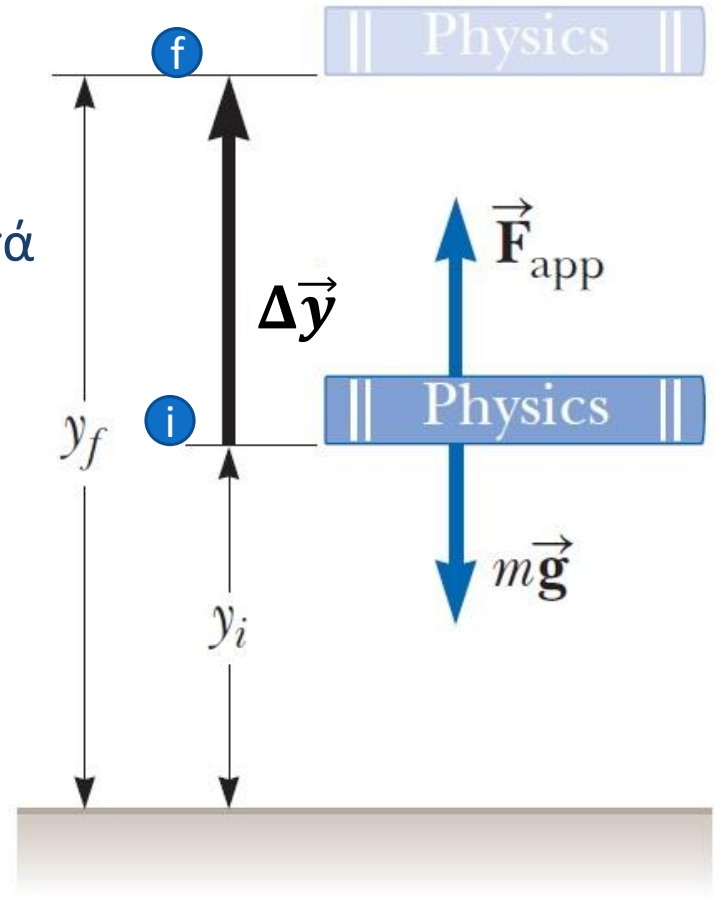
Σύστημα: Βιβλίο + Γη

$$W_{ext} = U_{g_f} - U_{g_i} = \Delta U_g$$

- Το **έργο της εξωτερικής δύναμης** κατά την **ανύψωση** ενός σώματος σε ένα σύστημα {σώμα, Γη} ισούται με τη **μεταβολή στη**

βαρυτική δυναμική ενέργεια

του **συστήματος**!



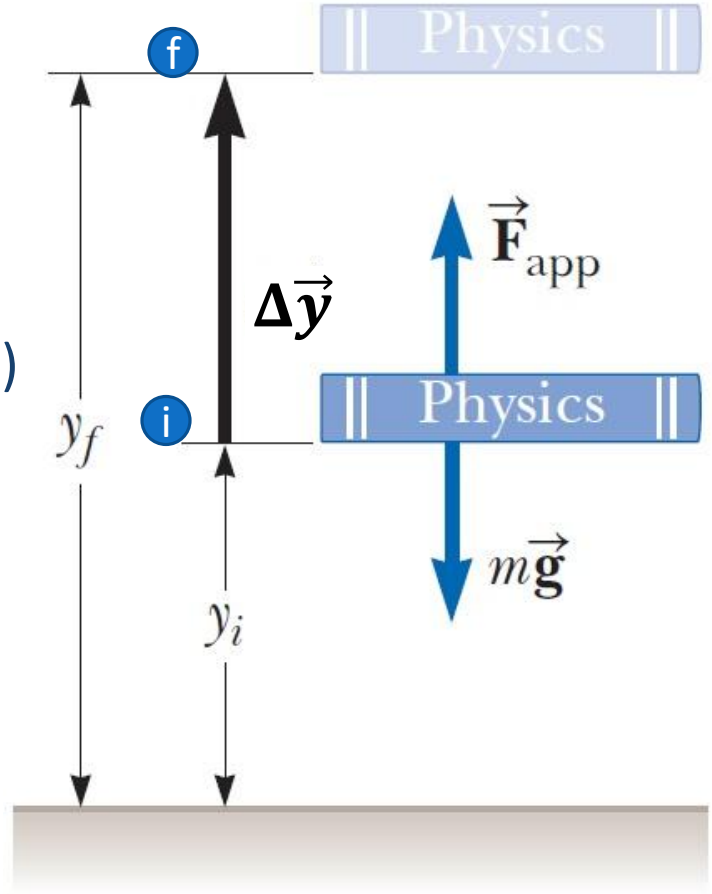
Ενέργεια Συστήματος

Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- Ας κάνουμε το ίδιο για το **έργο** της δύναμης του **βάρους**!

- Εφαρμόζουμε δύναμη για να **ανυψώσουμε** το βιβλίο με (σταθερή) πολύ αργή ταχύτητα (έτσι ώστε $\Sigma\vec{F}_y = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_{app} = -m\vec{g}$)

- $W_{F_g} = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{y} = m\vec{g} \cdot \Delta\vec{y}$
  $= m(-g\vec{\boldsymbol{j}}) \cdot (y_f - y_i)\vec{\boldsymbol{j}}$
  $= mgy_i - mgy_f$
  $= U_{g_i} - U_{g_f} = -\Delta U_g$



Ενέργεια Συστήματος

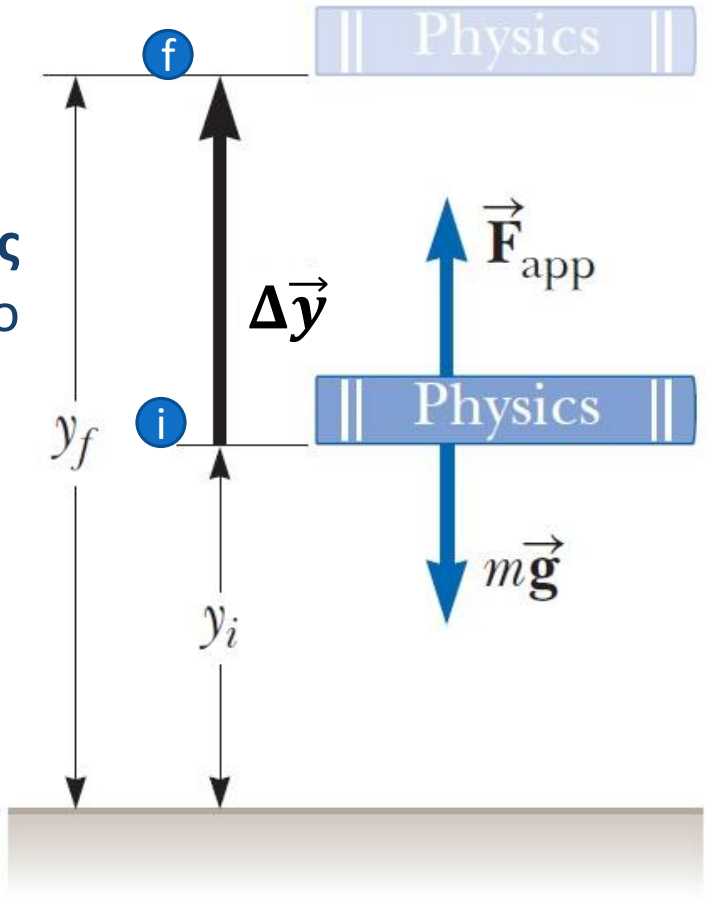
Σύστημα: Βιβλίο + Γη

$$W_{F_g} = U_{g_i} - U_{g_f} = -\Delta U_g$$

- Άρα το **έργο της δύναμης του βάρους** κατά την **ανύψωση** ενός σώματος στο σύστημα {σώμα, Γη} ισούται με την **αρνητική μεταβολή στη**

βαρυτική δυναμική ενέργεια

του **συστήματος {σώμα, Γη}**!



Ενέργεια Συστήματος

- **Θυμηθείτε:**
  - Έχουμε δει ότι το έργο που παράγεται από μια εξωτερική δύναμη σε ένα σύστημα ***μπορεί*** να ισοδυναμεί με **μεταβολή της κινητικής του ενέργειας**, που «μεταφράζεται» σε ***κίνηση*** των μελών του συστήματος

  - Στο παράδειγμα που ολοκληρώσαμε, είδαμε ότι το έργο μιας εσωτερικής δύναμης που παράγεται στο σύστημα εμφανίζεται ως **μεταβολή της (βαρυτικής) δυναμικής ενέργειας** του
    - …που «μεταφράζεται» ως αλλαγή στη

διάταξη / διαμόρφωση / σύνθεση

των **μελών** του συστήματος.

  - Εν προκειμένω, το βιβλίο ανυψώθηκε σε **σχέση με την επιφάνεια της Γης** (άλλαξε η μεταξύ τους «διάταξη»)

Ενέργεια Συστήματος

- Σε πρακτικά προβλήματα, πρέπει να επιλέγουμε μια **διάταξη των μελών** του συστήματος (διάταξη αναφοράς) όπου η **βαρυτική δυναμική ενέργεια** θεωρείται **μηδενική**
  - Για παράδειγμα, όταν τα σώματα βρίσκονται **ακριβώς πάνω** στην επιφάνεια της Γης.
    - Τότε θεωρούμε ότι η **βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος {Γη, σώματα} είναι μηδενική**
    - Οποιαδήποτε **μεταβολή** στο **ύψος** κάποιου σώματος σε σχέση με την επιφάνεια της Γης οδηγεί σε **μεταβολή** της **βαρυτικής δυναμικής ενέργειας** του συστήματος που αυτό ανήκει
  - Πολλές φορές, το πρόβλημα «οδηγεί» στην κατάλληλη επιλογή της διάταξης

Ενέργεια Συστήματος

- Ας δούμε μια **άλλης μορφής δυναμική ενέργεια** που μπορεί να έχει ένα σύστημα
- Πίσω στο ελατήριο! ☺ Σύστημα: **{ελατήριο, σώμα}**
  - **Διμελές** σύστημα!
  - Δύναμη ελατηρίου: **εσωτερική** στο σύστημα!
- Είδαμε αρκετές διαφάνειες πριν ότι

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 = -W_{ext}$$

- Το **έργο** της εσωτερικής δύναμης που παράγεται στο σύστημα **εξαρτάται από την αρχική και την τελική θέση του σώματος σε σχέση με τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου**
  - Είναι κι αυτό μια **διάταξη** των μελών του συστήματος ☺!

Ενέργεια Συστήματος

- Άρα αν θεωρήσουμε ότι

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2$$

τότε

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$
$$= U_s^i - U_s^f = -\Delta U_s$$

με U_s την

ελαστική δυναμική ενέργεια

που σχετίζεται με το **σύστημα {σώμα, ελατήριο}**

Ενέργεια Συστήματος

- **<u>Συνοψίζοντας</u>**:

- Σύστημα {σώμα, Γη}
  - Πολυμελές!
  - **Βαρυτική** δυναμική ενέργεια
  - «Θέση» αναφοράς: συνήθως επίπεδο επιφάνειας Γης ($y = 0$)

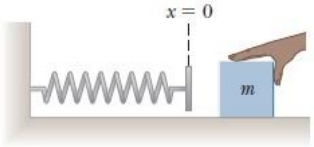
$$U_g = mgy$$

- Σύστημα {ελατήριο, σώμα}
  - Πολυμελές!
  - **Ελαστική** δυναμική ενέργεια
  - «Θέση» αναφοράς: θέση φυσικού μήκους ελατηρίου ($x = 0$)

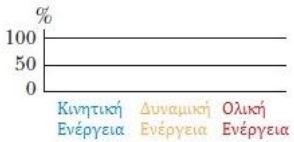
$$U_s = \frac{1}{2}kx^2$$

- Και στις δυο περιπτώσεις, οι **διαφορές** δυναμικής ενέργειας έχουν σημασία!

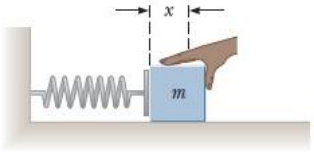
Ενέργεια Συστήματος



Πριν το ελατήριο συμπιεστεί, δεν υπάρχει ενέργεια στο σύστημα ελατηρίου-σώματος.



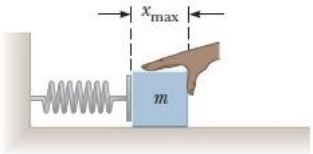
a



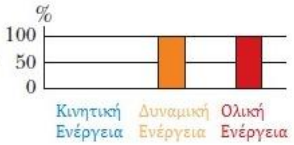
Όταν το ελατήριο συμπιέζεται μερικώς, η ολική ενέργεια του συστήματος είναι ελαστική δυναμική ενέργεια.



b

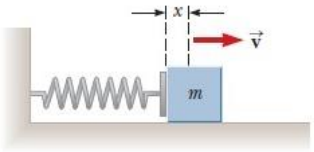


Το ελατήριο συμπιέζεται στο μέγιστο βαθμό, και το σώμα κρατείται σταθερό. Υπάρχει ελαστική δυναμική ενένεργεια στο σύστημα και καθόλου κινητική ενέργεια.



c

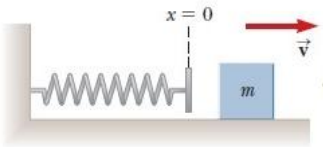
Παράγεται έργο από το χέρι επάνω στο σύστημα ελατηρίου-σώματος, κι έτσι η συνολική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται.



Αφού αφήνεται ελεύθερο το σώμα, η ελαστική δυναμική ενέργεια μειώνεται και η κινητική ενέργεια αυξάνεται.



d



Αφού το σώμα χάσει επαφή με το ελατήριο, η συνολική ενέργεια του συστήματος είναι κινητική ενέργεια.

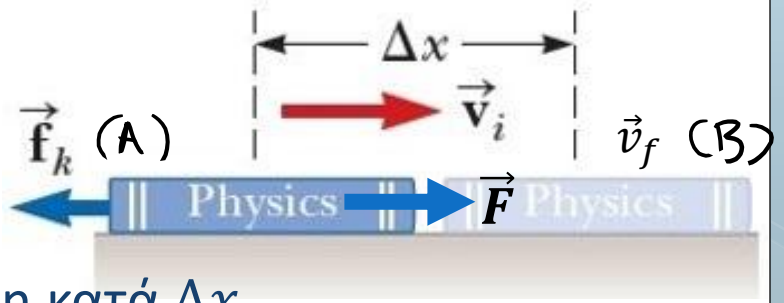


e

Δεν παράγεται κανένα έργο στο σύστημα ελατηρίου-σώματος από εξωτερική δύναμη, κι έτσι η συνολική ενέργεια του συστήματος είναι σταθερή

Ενέργεια Συστήματος

- Ας δούμε και μια ακόμη μορφή ενέργειας που μπορεί να έχει ένα σύστημα
- Σύστημα = **{βιβλίο}**
  - **Σταθερή** δύναμη $\vec{F}$
  - **Σταθερή** επιτάχυνση: μετατόπιση κατά Δx
  - Κίνηση υπό σταθερή δύναμη (**Μοντέλο Ι**) και κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση (**Μοντέλο ΙΙ**):

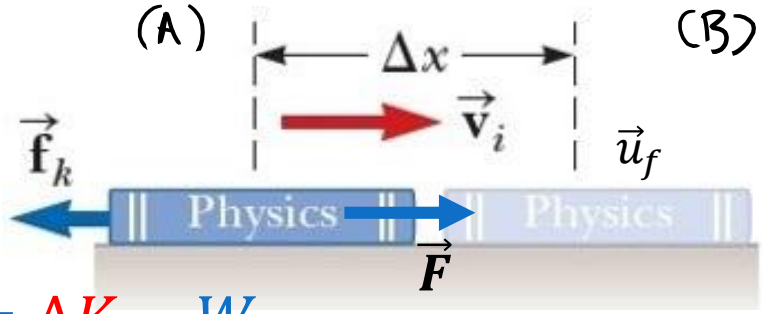


$$\sum F_x = ma \Leftrightarrow F - f_k = m\boldsymbol{a}$$

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta x \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \frac{1}{\Delta x}\frac{\left(u_f^2 - u_i^2\right)}{2}$$

$$F\Delta x - f_k\Delta x = W_F - f_k\Delta x = K_f - K_i \Rightarrow W_F = \Delta K + f_k\Delta x$$

Ενέργεια Συστήματος



- Σύστημα = {**βιβλίο**}

$$W_F = \Delta K + f_k \Delta x = \Delta K - W_{f_k}$$

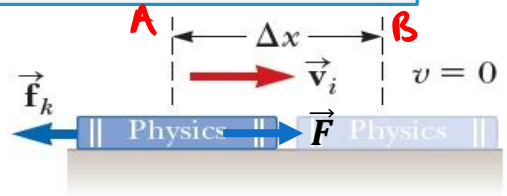
- Πού πήγε η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σύστημα μέσω του έργου της $\vec{F}$??
  - Μετατράπηκε τόσο σε αύξηση της **κινητικής ενέργειας** του σώματος όσο και σε **αύξηση της θερμοκρασίας της επιφάνειας και του βιβλίου** ➔ **μεταβολή στη θερμική ενέργεια**:

$$\Delta E_{th} = f_k \Delta x = -(-f_k \Delta x) = -W_{f_k}$$

  - Μεταβολή στη θερμοκρασία του συστήματος

{βιβλίο, επιφάνεια}

Ενέργεια Συστήματος



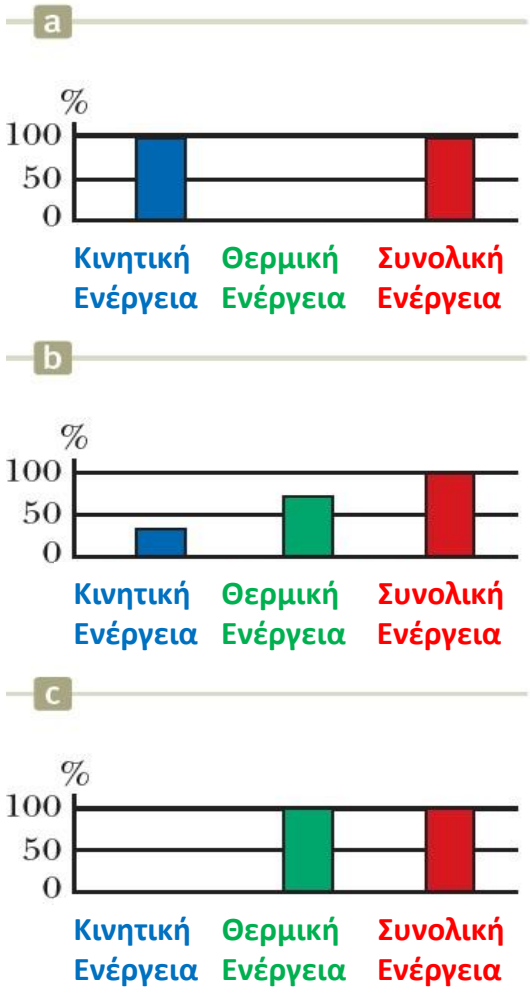
- Η ενέργεια που προσφέρθηκε στο σύστημα μετατράπηκε και σε ***θερμική ενέργεια*** του συστήματος {**βιβλίο, επιφάνεια**} (**όχι μόνο βιβλίο**!)
  - **Η επιφάνεια και το βιβλίο** θερμάνθηκαν!

- Θα ονομάζουμε την ενέργεια που σχετίζεται με τη θερμοκρασία ενός συστήματος ως ***θερμική ενέργεια***, και θα τη συμβολίζουμε με

$$E_{th}$$

- Στο προηγούμενο παράδειγμα (και γενικότερα)

$$\Delta E_{th} = -W_{\tau\rho\iota\beta\eta\varsigma} = f_k \Delta x$$



Ενέργεια Συστήματος

- **Συνολικές παρατηρήσεις**

- Για να μιλήσουμε για **δυναμικές** ενέργειες (κάθε μορφής) χρειαζόμαστε **πολυμελή** (**διμελή** τουλάχιστον) συστήματα
  - Η δύναμη που σχετίζεται με τη **δυναμική** ενέργεια πρέπει να είναι **εσωτερική** δύναμη στο σύστημα
    - Δύναμη **βάρους** στο σύστημα {σώμα, **Γη**}
      - Σχετίζεται με τη **βαρυτική** δυναμική ενέργεια
    - Δύναμη **ελατηρίου** στο σύστημα {**ελατήριο**, σώμα}:
      - Σχετίζεται με την **ελαστική** δυναμική ενέργεια

- Για να μιλήσουμε για **θερμική** ενέργεια χρειαζόμαστε ξανά **πολυμελή** συστήματα (**διμελή** τουλάχιστον), με το ένα μέλος να είναι κάποια **μη λεία επιφάνεια** όπου ολισθαίνει ένα άλλο μέλος του συστήματος
  - Η δύναμη που σχετίζεται με τη **θερμική** ενέργεια είναι **εσωτερική** του συστήματος
    - Δύναμη **τριβής ολισθήσεως** στο σύστημα {σώμα, **επιφάνεια**}

Ενέργεια Συστήματος

- **Συνολικές παρατηρήσεις**

- Χρειαζόμαστε ένα «**ενεργειακό πλαίσιο**» για να εφαρμόζουμε τις νέες αυτές ενεργειακές μεταβολές
- Το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου αφορά **μονομελή** συστήματα και οι ενεργειακές μεταβολές που είδαμε εκφράζονται μέσω των **έργων** των αντίστοιχων δυνάμεων
- Για παράδειγμα, σε ένα **μονομελές** σύστημα, το ΘΜΚΕΕ θα δίνει:

$$\Delta K = W_F + W_{f_k} + W_{F_g} + W_{F_s}$$

- Είδαμε πριν ότι (π.χ.)

$$W_{f_k} = -\Delta E_{th}$$
$$W_{F_g} = U_{g_i} - U_{g_f} = -\Delta U_g$$
$$W_{F_s} = U_{s_i} - U_{s_f} = -\Delta U_s$$

- **<u>ΔΕΝ</u>** μπορούμε να κάνουμε αυτές τις αντικαταστάσεις στην παραπάνω εξίσωση, καθώς δεν ορίζονται σε μονομελή συστήματα!

Ενέργεια Συστήματος

- **Συνολικές παρατηρήσεις**

$$\Delta K = W_F + W_{f_k} + W_{F_g} + W_{F_s}$$

- Φυσικά μπορούμε να γράψουμε ότι

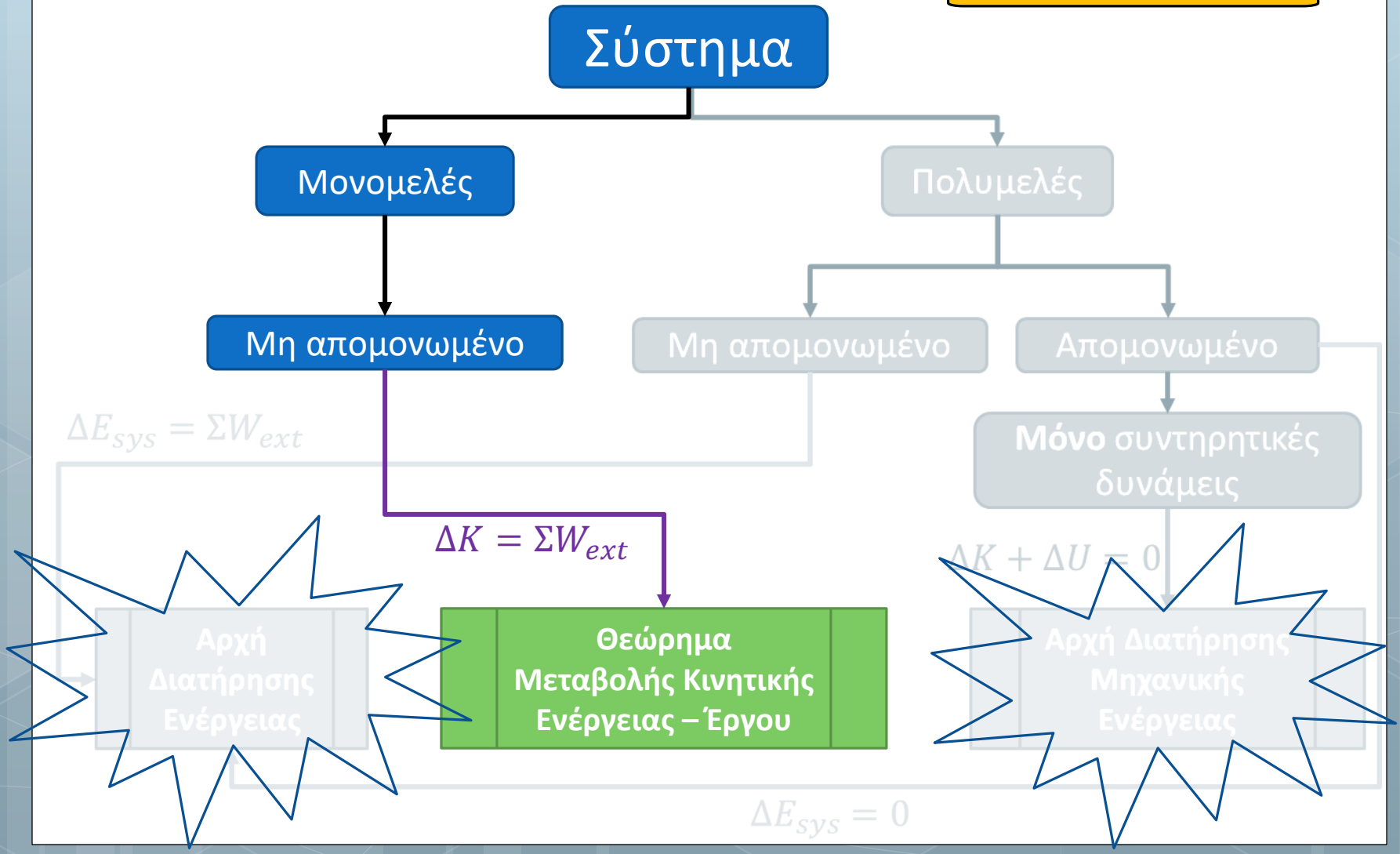
$$W_{f_k} = \vec{f}_k \cdot \Delta\vec{x} = f_k \Delta x \cos(\pi) = -f_k \Delta x$$
$$W_{F_g} = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{y} = -mg(y_f - y_i) = mgy_i - mgy_f$$
$$W_{F_s} = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

- ...και να λύσουμε το πρόβλημα, αλλά δεν μπορούμε να αναφερθούμε σε **μεταβολές ενέργειας πέραν της κινητικής στο ΘΜΚΕΕ!**

- **Άραγε ποιό/ά ενεργειακό/ά θεώρημα/τα μπορεί να μας επιτρέψει να χρησιμοποιούμε κατευθείαν τις δυναμικές, θερμικές ενέργειες??!!**

Ενέργεια Συστήματος

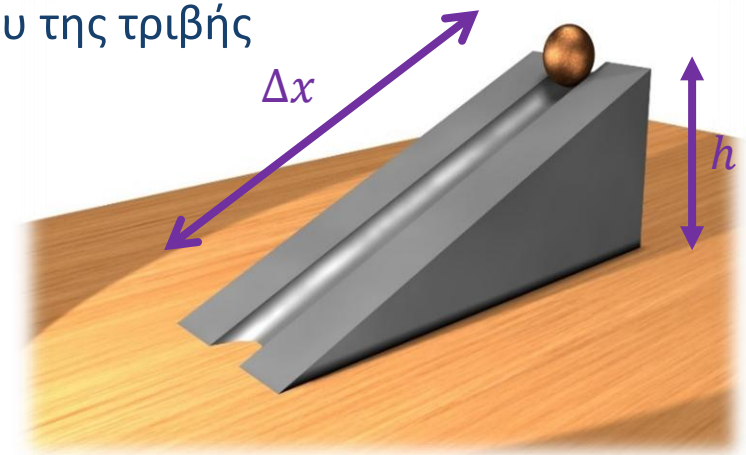
Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων



Ενέργεια Συστήματος

- Θεωρήστε το διπλανό σύστημα: **{μπάλα, επικλινές, επιφάνεια (Γη)}**
  Η **απόσταση** που καλύπτει μια μπάλα ολισθαίνοντας σε μια επικλινή επιφάνεια με τριβές έχει μεγάλη σημασία για το **πόση** *δυναμική* ενέργεια μετατρέπεται σε *θερμική* μέσω του έργου της τριβής

  - Μεγαλύτερη απόσταση → μεγαλύτερο ποσοστό **δυναμικής** ενέργειας μετατρέπεται σε **θερμική** λόγω του έργου της δύναμης τριβής
  - Υπάρχει εξάρτηση από το «μονοπάτι»



- Αντίθετα, το έργο της δύναμης του βάρους **δεν** εξαρτάται από το «μονοπάτι» που ακολουθεί το σώμα!

$$W_g = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{y} = -mg\vec{j} \cdot (y_f - y_i)\vec{j} = -mg\vec{j} \cdot (0 - h)\vec{j} = mg\boldsymbol{h}$$

ενώ

$$W_{τριβης} = -f_k \boldsymbol{\Delta x}$$

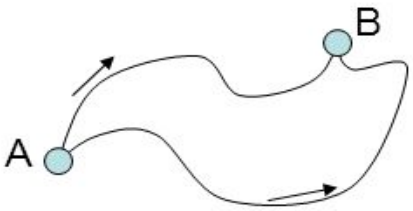
Ενέργεια Συστήματος

- Αυτή η **εξάρτηση από τη διαδρομή** (ή από το «μονοπάτι») που ακολουθεί το σώμα ορίζει δυο κατηγορίες δυνάμεων:
  - ***Συντηρητικές (conservative)***
    - Έργο **ανεξάρτητο** από τη διαδρομή, π.χ. δύναμη βαρύτητας
  - ***Μη συντηρητικές (nonconservative)***
    - Έργο **εξαρτημένο** από τη διαδρομή, π.χ. δύναμη τριβής ολίσθησης
- **Συντηρητικές δυνάμεις – Ιδιότητες:**
  1. Το **έργο** που παράγεται από μια τέτοια δύναμη σε ένα σώμα που κινείται ανάμεσα σε οποιαδήποτε δυο σημεία είναι **ανεξάρτητο της διαδρομής** ανάμεσα σε αυτά.
  2. Το **έργο** που παράγεται από μια τέτοια δύναμη σε ένα σώμα που κινείται **σε κλειστή διαδρομή είναι μηδέν**.

Ενέργεια Συστήματος

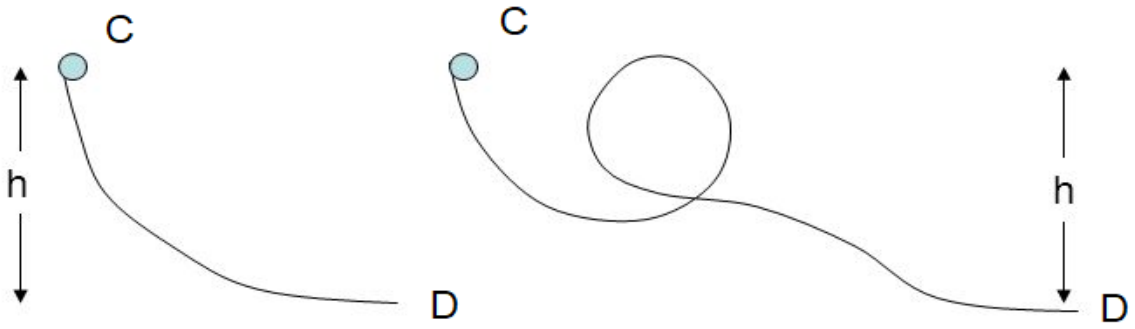
Έστω ότι οι κινήσεις μεταξύ των σημείων οφείλονται σε μια συντηρητική δύναμη

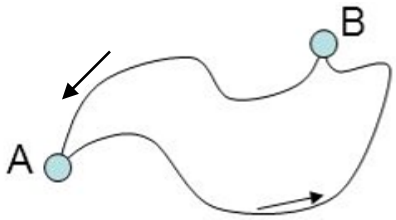
Συντηρητικές δυνάμεις - Ιδιότητες:



Το έργο που παράγεται στη διαδρομή από το Α στο Β είναι το ίδιο για κάθε μια από τις διαδρομές.

Όμοια και για τις διαδρομές από το C στο D.





Το έργο μιας συντηρητικής δύναμης από το Α στο Β και ξανά μετά στο Α είναι μηδέν (κλειστή διαδρομή)

Ενέργεια Συστήματος

- Μια δύναμη λέγεται ***μη συντηρητική*** αν δεν ικανοποιεί (τουλάχιστον μια από) τις ιδιότητες 1 και 2 που είδαμε πριν
  - Παράδειγμα: τριβή ολίσθησης

- Η δράση **αποκλειστικά συντηρητικών** δυνάμεων είναι μεγάλο πλεονέκτημα για ένα σύστημα, καθώς μπορεί να υποστηρίξει ένα **συγκεκριμένο ενεργειακό θεώρημα**

- Ας ορίσουμε το **άθροισμα της κινητικής K και της (μιας ή περισσότερων) δυναμικής ενέργειας U** ενός **πολυμελούς** συστήματος ως τη ***μηχανική ενέργεια*** του συστήματος:

$$E_{mech} = K + U$$

Ενέργεια Συστήματος

- Αποδεικνύεται πειραματικά ότι οι ***μη*** *συντηρητικές* δυνάμεις που δρουν σε ένα **πολυμελές** σύστημα **αλλάζουν** τη **μηχανική ενέργεια** του συστήματος! Αντίθετα, **οι *συντηρητικές* τη διατηρούν**!

Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας – ΑΔΜΕ

$$\Delta E_{mech} = \Delta K + \Delta U = 0$$

μόνο αν στο πολυμελές σύστημα παράγουν έργο **αποκλειστικά συντηρητικές** δυνάμεις!

- Προφανώς για τον ορισμό δυναμικής ενέργειας απαιτείται **πολυμελές** σύστημα
- Και **ποιες** δυνάμεις είναι συντηρητικές?...

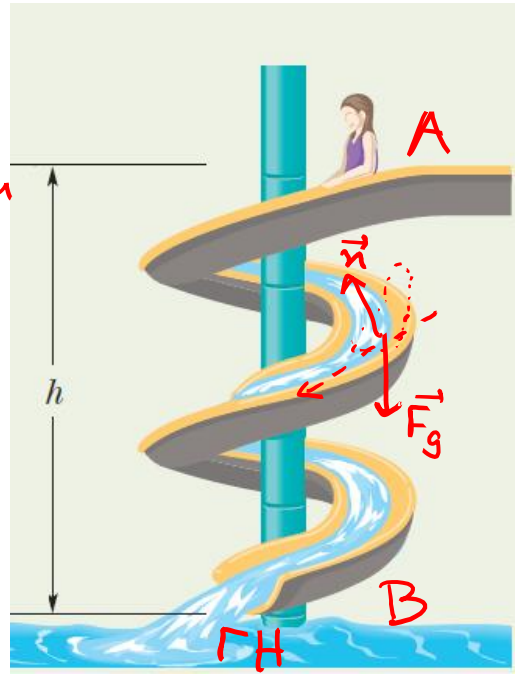
Ενέργεια Συστήματος

- **Παραδείγματα συντηρητικών δυνάμεων**
  - **Δύναμη βάρους $\vec{F}_g$**
    - $W_g = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{y} = -mg\vec{j} \cdot (y_f - y_i)\vec{j} = mgy_i - mgy_f$
    - Εξάρτηση μόνο από τα y_i, y_f, **όχι** από τη διαδρομή σε αυτά
    - $W_g = 0$, σε **κλειστή** διαδρομή $(y_i = y_f)$
  - **Δύναμη ελατηρίου $\vec{F}_s$**
    - $W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$
    - Εξάρτηση μόνο από τα x_i, x_f, **όχι** από τη διαδρομή σε αυτά
    - $W_s = 0$, σε **κλειστή** διαδρομή $(x_i = x_f)$

Ενέργεια Συστήματος

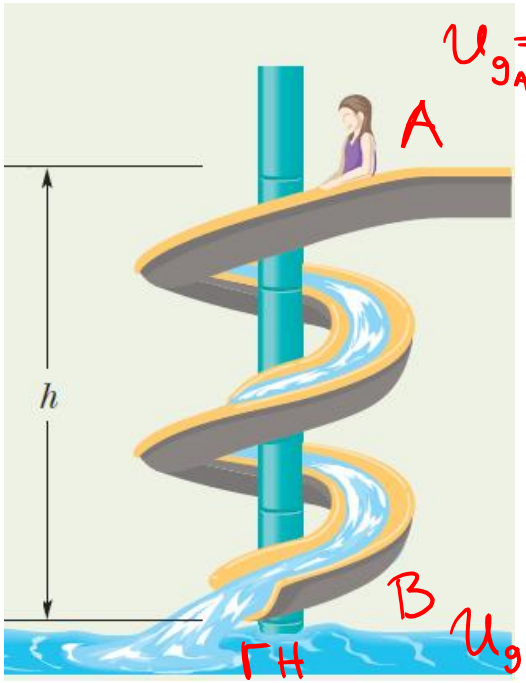
- **Παράδειγμα:**
- Ένα παιδί μάζας m ολισθαίνει από ακίνητη θέση σε μια νεροτσουλήθρα ύψους $h = 8.5\ m$. Υποθέστε ότι η νεροτσουλήθρα περιγράφει μια επιφάνεια χωρίς τριβές και βρείτε την ταχύτητα του παιδιού στο τέρμα της.

Το σύστημά μας θα είναι $\{\Gamma\eta, παιδί\}$.
Οι δυνάμεις που ασκούνται στο παιδί είναι η $\vec{n}$ και η $\vec{F}_g$. Το $W_n = 0$ γιατί η $\vec{n}$ είναι κάθετη σε οποιαδήποτε μικρή μετατόπιση dx επάνω στην τσουλήθρα. Η μόνη άλλη δύναμη είναι αυτή του βάρους, $\vec{F}_g$, η οποία είναι συντηρητική! Άρα έχουμε ένα απομονωμένο, διμελές σύστημα που παράγει έργο μόνο η $\vec{F}_g$.



Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**



$U_{g_A} = mgh$

$U_{g_B} = 0$

Θεωρούμε ότι στη θέση Β, $U_{g_B} = 0$.

Ισχύει η ΑΔΜΕ στη διαδρομή Α→Β.

$$\Delta E_{\text{ΜΗΧ}}^{A\to B} = 0$$

$$\Delta K_{A\to B} + \Delta U_{gA\to B} = 0$$

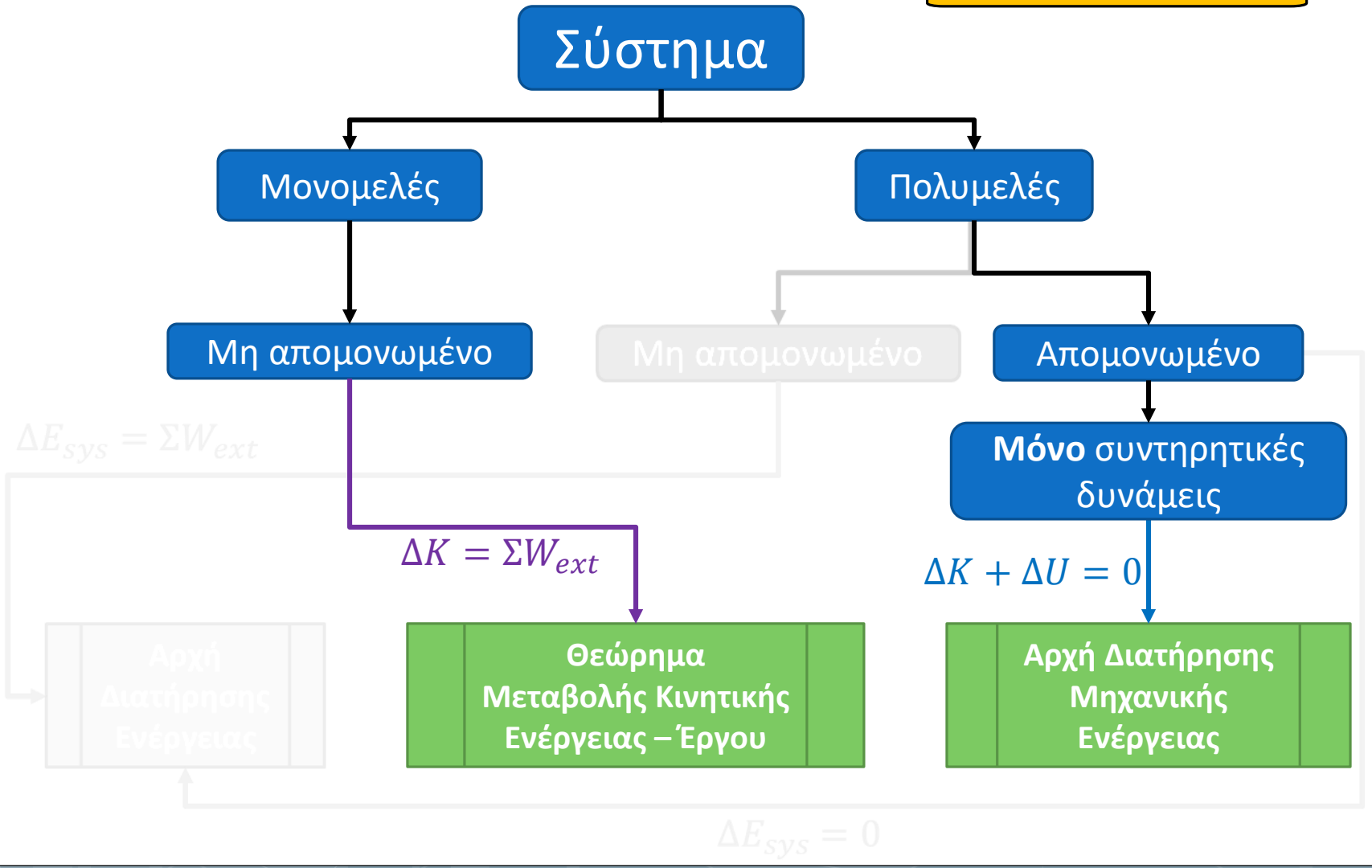
$$K_B - K_A + U_{g_B} - U_{g_A} = 0$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 - 0 + 0 - mgh = 0$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 = mgh \Rightarrow u_B^2 = 2gh \Rightarrow u_B = \sqrt{2gh}$$

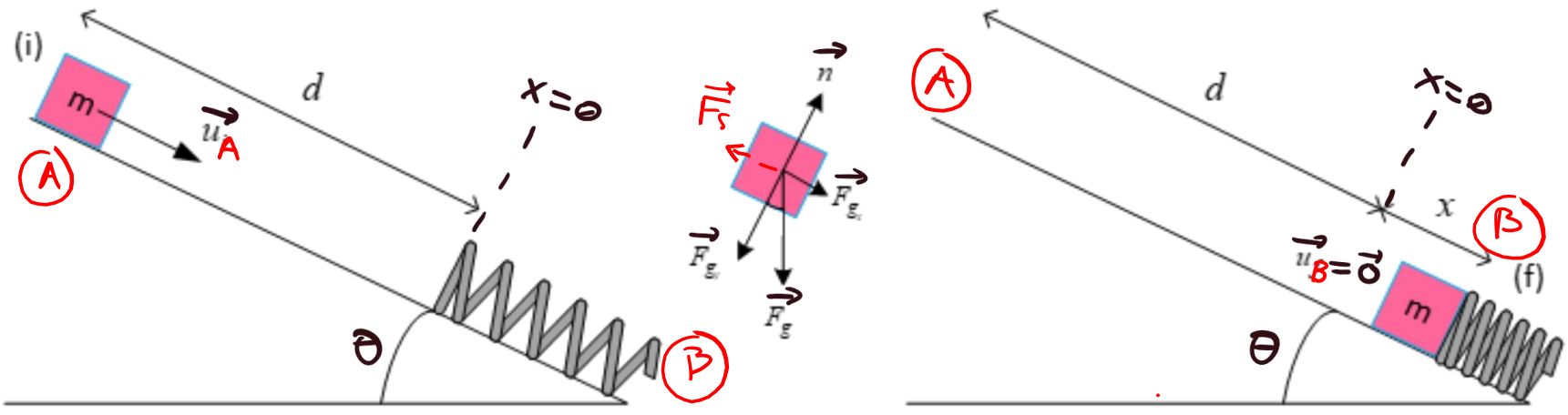
Ενέργεια Συστήματος

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων



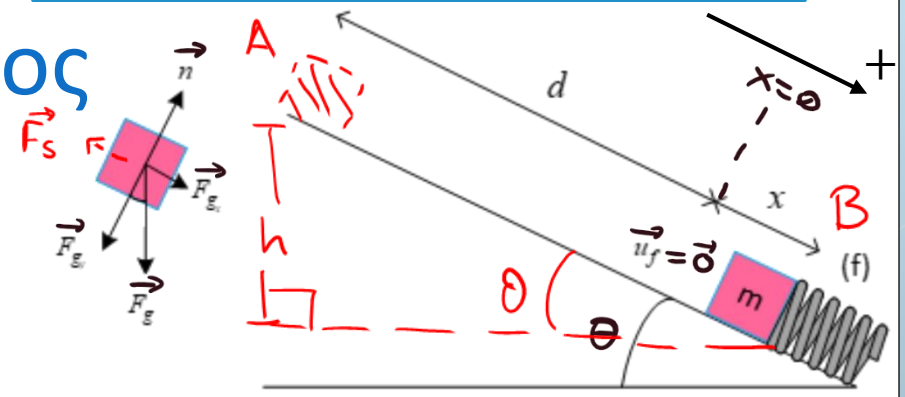
Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα:**
- Λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ έχει ελατήριο σταθεράς k στερεωμένο στο κάτω μέρος του. Ένα κουτί μάζας m τοποθετείται πάνω στο κεκλιμένο σε απόσταση d από το ελατήριο. Από τη θέση αυτή, το κουτί βάλλεται προς το ελατήριο με ταχύτητα u_0. Πόσο έχει συμπιεστεί το ελατήριο όταν το κουτί φτάνει στιγμιαία σε ηρεμία?



Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Θεωρούμε ως σύστημα το

{σώμα, Γη, ελατήριο}

πολυμελές και μονωμένο. Οι μόνες δυνάμεις να παράγουν έργο στο σύστημα είναι οι $\vec{F}_g$ και η $\vec{F}_s$, οι οποίες είναι συντηρητικές!

Στη διαδρομή $A \to B$: $\Delta E_{MHX}^{A\to B} = 0$

$$\Delta K_{A-B} + \Delta U_{g_{A-B}} + \Delta U_{s_{A-B}} = 0$$

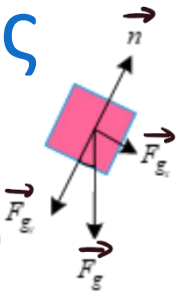
$$K_B - K_A + U_{g_B} - U_{g_A} + U_{s_B} - U_{s_A} = 0$$

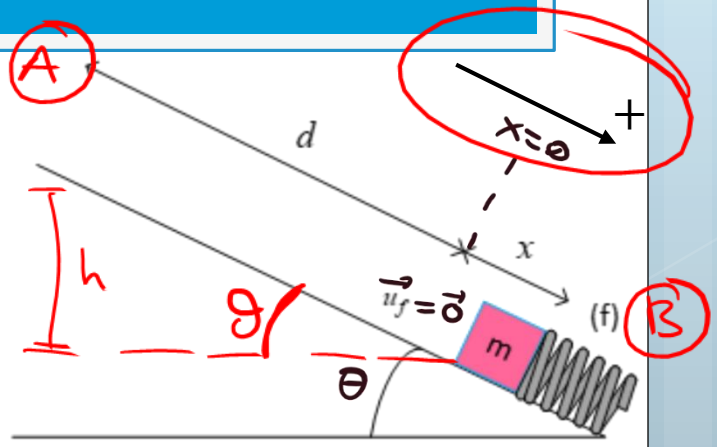
$$0 - \frac{1}{2}mu_A^2 + 0 - mgh + \frac{1}{2}kx^2 - 0 = 0$$

$$\frac{1}{2}kx^2 - mgh - \frac{1}{2}mu_A^2 = 0$$

$$\sin\theta = \frac{h}{d+x}$$

Ενέργεια Συστήματος





- **Παράδειγμα – Λύση:**

Άρα $h = (d+x)\sin\theta$

$$\frac{1}{2}kx^2 - mgh - \frac{1}{2}mu_A^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}kx^2 - mg(d+x)\sin\theta - \frac{1}{2}mu_A^2 = 0$$

Άρα

$$x_{1,2} = \frac{mg\sin\theta \pm \sqrt{(mg\sin\theta)^2 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot k\left(\frac{1}{2}mu_A^2 + mg\sin\theta\, d\right)}}{2\,\frac{1}{2}k}$$

Κρατάμε τη θετική ρίζα γιατί η θετική ζώνη "δείχνει" προς τη θετική φορά του κινητού (προς τη βάση του κεκλιμένου).

Ενέργεια Συστήματος

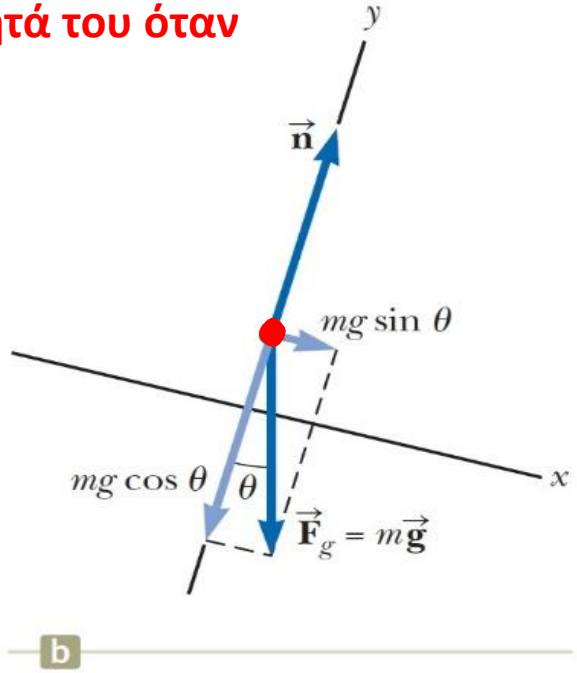
Παράδειγμα:

Αυτοκίνητο μάζας m κινείται χωρίς τριβές προς τη βάση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ. **Με ποια μοντέλα μπορείτε να περιγράψετε την κίνησή του?**

~~Α) Βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου.~~

Β) **Αν το αυτοκίνητο αφεθεί από την κορυφή του κεκλιμένου, που απέχει απόσταση d από το τέρμα του κεκλιμένου**~~, πόσο χρόνο χρειάζεται για να φτάσει στο τέρμα του κεκλιμένου, και~~ **ποια η ταχύτητά του όταν φτάνει εκεί;**



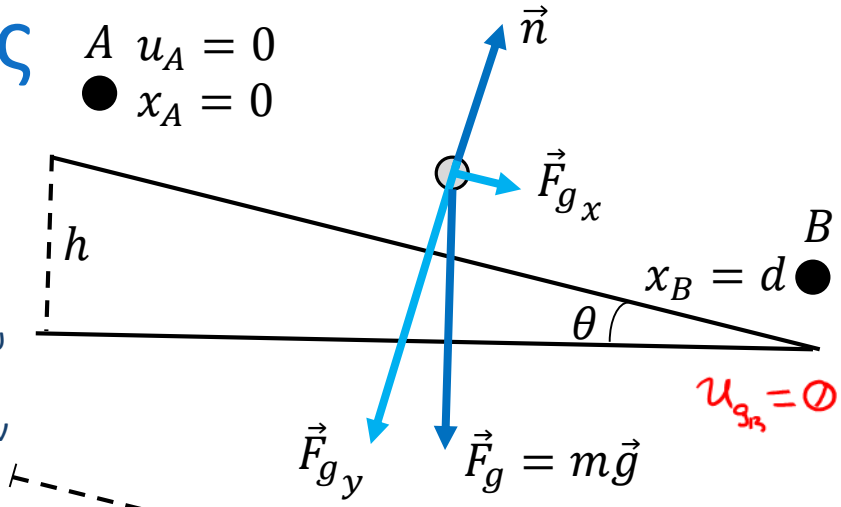


Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**

  Αυτοκίνητο μάζας m κινείται χωρίς τριβές σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ.

  Β) Αν το αυτοκίνητο αφεθεί από την κορυφή του κεκλιμένου, που απέχει απόσταση d από το τέρμα του κεκλιμένου, ποια η ταχύτητά του όταν φτάνει εκεί;



Θεωρούμε το σύστημα {Γη, σώμα}

Η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι η $\vec{F}_g$, συντηρητική!

Ισχύει η ΑΔΜΕ στη διαδρομή Α→Β:

$$\Delta E_{MHX}^{A\to B} = 0$$

$$\Delta K_{A\to B} + \Delta U_{gA\to B} = 0$$

$$K_B - K_A + U_{g_B} - U_{g_A} = 0$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 - 0 + 0 - mgh = 0 \quad (2)$$

$$\sin\theta = \frac{h}{d} \Rightarrow$$

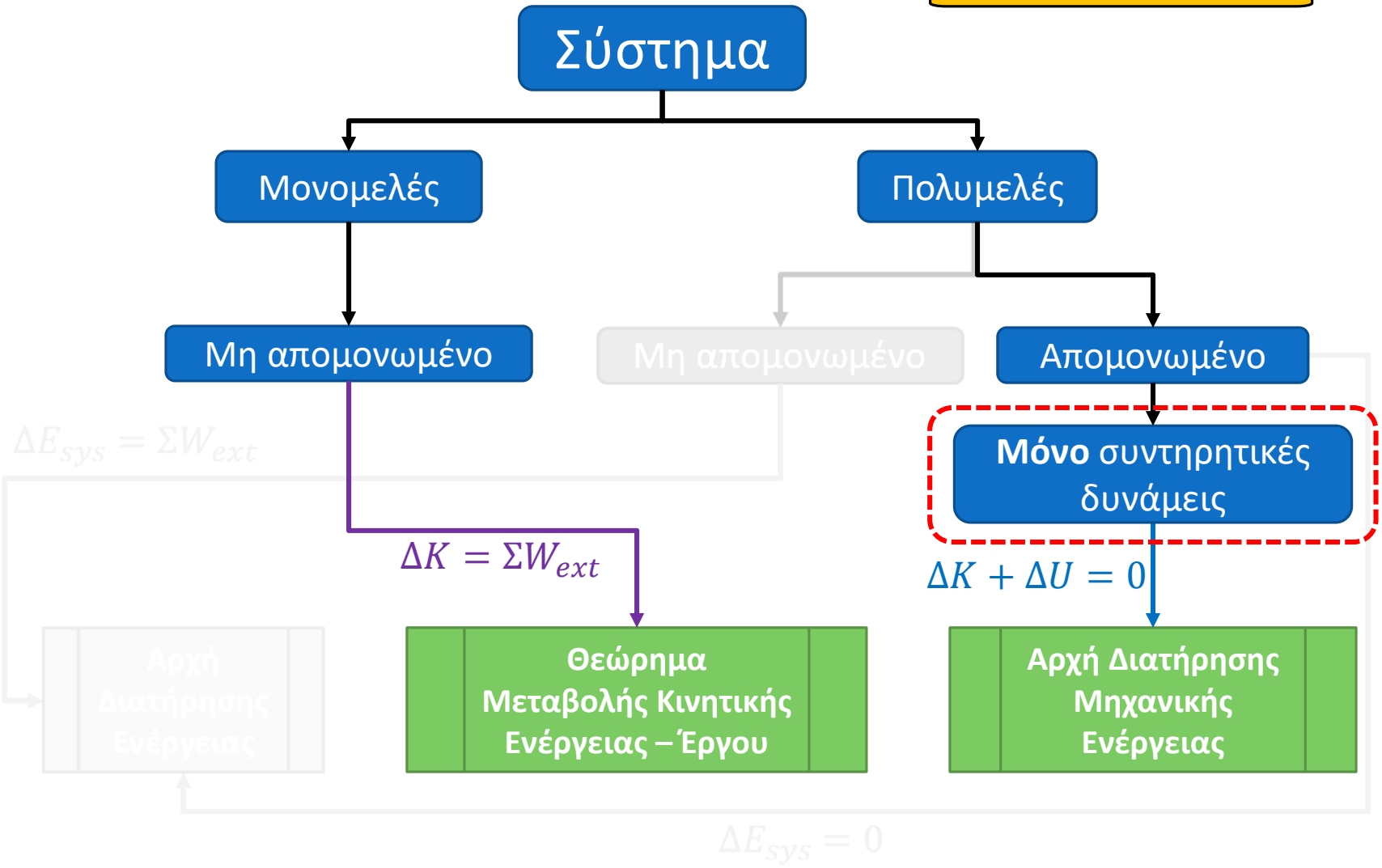
$$h = d\sin\theta \quad (1)$$

Η (2) $\overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$u_B = \sqrt{2gd\sin\theta}$$

Ενέργεια Συστήματος

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων



Ενέργεια Συστήματος

- Δύναμη **βάρους** → **συντηρητική** δύναμη →**βαρυτική δυναμική** ενέργεια

- Δύναμη **ελατηρίου** → **συντηρητική** δύναμη → **ελαστική δυναμική** ενέργεια

(peek into the future ☺)

- **Ηλεκτρική** δύναμη → **συντηρητική** δύναμη → **ηλεκτρική δυναμική** ενέργεια
  - ...που σχετίζεται με το ηλεκτρικό **δυναμικό**

- Παρατηρούμε κάποιο μοτίβο...
- Μια **συντηρητική** δύναμη σχετίζεται με τη **μεταβολή μιας δυναμικής ενέργειας**!

Ενέργεια Συστήματος

- Έστω ένα **πολυμελές** σύστημα που αλλάζει από μια διάταξη των μελών του σε μια άλλη λόγω έργου μιας ***εσωτερικής συντηρητικής δύναμης***, $W_{F,int}$
  - …χωρίς ενεργειακή επίδραση άλλων δυνάμεων (**απομονωμένο** σύστημα)

- Ένα **σώμα** από τα μέλη του **κινείται** από μια θέση i (αρχική) σε μια θέση f (τελική)
- **Μεταβλήθηκε** (έστω αυξήθηκε) η **κινητική του ενέργεια**
- Πρέπει **ισόποσα** να **μεταβληθεί «αντίστροφα»** (μειωθεί) **η δυναμική του ενέργεια**
  - …λόγω Α.Δ.Μ.Ε! $\Delta K + \Delta U = 0$

$$W_{F,int} = \Delta K = -\Delta U$$

Ενέργεια Συστήματος

- Το έργο $W_{F,int}$ που παράγεται από μια ***εσωτερική συντηρητική δύναμη σε ένα άλλο σώμα που είναι μέλος του απομονωμένου συστήματος*** ισούται με την αρνητική μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος

  - Π.χ. έργο **βάρους** κατά την ανύψωση βιβλίου στο σύστημα {Γη, βιβλίο}

$$W_{F_g} = -\Delta U_g$$

  - Π.χ. έργο **δύναμης του ελατηρίου** κατά τη μετατόπιση του από τη θέση ισορροπίας στο σύστημα {ελατήριο, σώμα}

$$W_s = -\Delta U_s$$

Ενέργεια Συστήματος

- Έστω ότι αυτή η ***εσωτερική συντηρητική δύναμη*** $\vec{F}_{int}$ προκαλεί **αλλαγή της διάταξης/σύνθεσης/διαμόρφωσης** του συστήματος λόγω της **κίνησης** ενός από τα σώματα επάνω **στο $x'x$ άξονα**
  - **Έστω ότι η δύναμη ασκείται υπό γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα**
    - Τα ίδια ακριβώς θα ισχύουν και για δύναμη υπό γωνία με τον άξονα $y'y$ ή τον $z'z$, αλλά χάριν απλότητας ας κρατήσουμε μόνο τον $x'x$

- Το έργο της (σταθερής) δύναμης αυτής θα είναι (ορισμός έργου):

2 slides πριν

$$W_{F,int} = \vec{F}_{int} \cdot \Delta\vec{x} = F_{int}\Delta x \cos\theta = F_{x,int}\Delta x \doteq -\Delta U$$

Ενέργεια Συστήματος

Για ευκολία, παραλείπουμε το δείκτη *int* για τη δύναμη αλλά συνεχίζουμε να εννοούμε την εσωτερική συντηρητική δύναμη του συστήματος

- Αν $\boldsymbol{\Delta x \to dx}$, μπορούμε να πούμε ότι $\boldsymbol{\Delta U \to dU}$

$$-dU = F_x dx \Rightarrow \boxed{F_x = -\frac{dU}{dx}}$$

- Έτσι

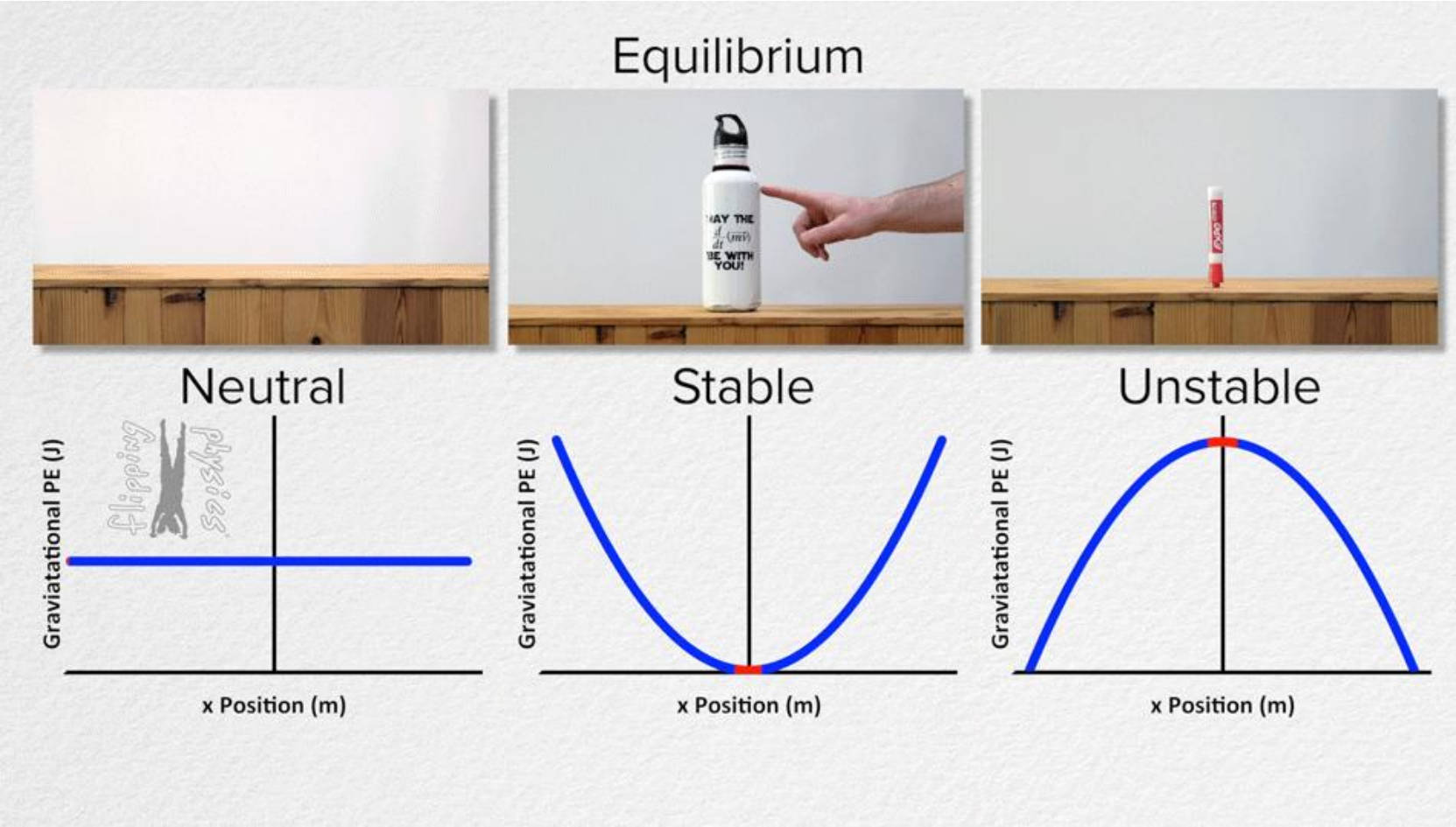
$$F_x = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow U(x) = -\int F_x dx + U_i$$

- Η συνάρτηση $U(x)$ λέγεται **συνάρτηση δυναμικής ενέργειας**
- Η θέση x όπου $F_x = 0$ λέγεται **θέση ισορροπίας του συστήματος**
- Προφανώς ισχύει και

$$F_y = -\frac{dU}{dy}, \qquad F_z = -\frac{dU}{dz}$$

Ενέργεια Συστήματος

Συστήματα {σώμα, Γη}



Ενέργεια Συστήματος

- **Ευσταθής ισορροπία (stable equilibrium)**
  - Ένα σύστημα λέγεται ευσταθούς ισορροπίας όταν οποιαδήποτε μεταβολή μακριά από τη θέση ισορροπίας του έχει ως συνέπεια την έγερση μιας δύναμης που επαναφέρει το σύστημα στη θέση ισορροπίας του
    - Παραδείγματα: σύστημα σώματος-ελατηρίου, σύστημα μπίλιας-κυρτού μπώλ-Γης
- **Ασταθής ισορροπία (unstable equilibrium)**
  - Ένα σύστημα λέγεται ασταθούς ισορροπίας όταν οποιαδήποτε μεταβολή μακριά από τη θέση ισορροπίας του έχει ως συνέπεια την έγερση μιας δύναμης που απομακρύνει περισσότερο το σύστημα από τη θέση ισορροπίας του
    - Παραδείγματα: σύστημα μολυβιού-Γης που ισορροπεί στη μύτη του επάνω σε μια επιφάνεια, σύστημα μπάλας-Γης στην κορυφή ενός λόφου
- **Ουδέτερη ισορροπία (neutral equilibrium)**
  - Ένα σύστημα λέγεται ουδέτερης ισορροπίας αν η θέση ισορροπίας του δεν εξαρτάται από μετατοπίσεις από την αρχική του θέση, δηλ. όταν παραμένει στη νέα του θέση μετά από κάποια μετατόπιση χωρίς να επιστρέφει πίσω στην αρχική του θέση
    - Παράδειγμα: σύστημα μπάλας-οριζόντιου εδάφους, σύστημα βιβλίου πλευρικά τοποθετημένου-οριζόντιου εδάφους

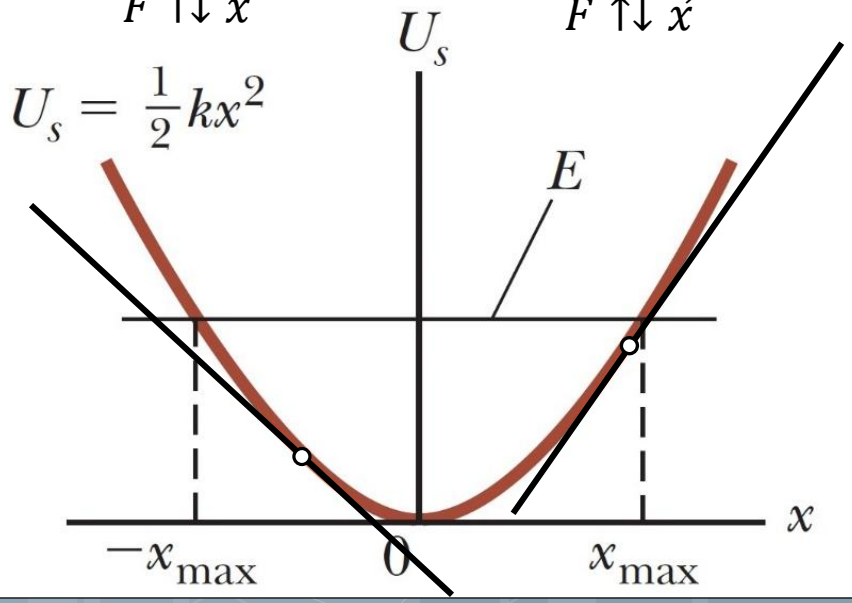
Ενέργεια Συστήματος

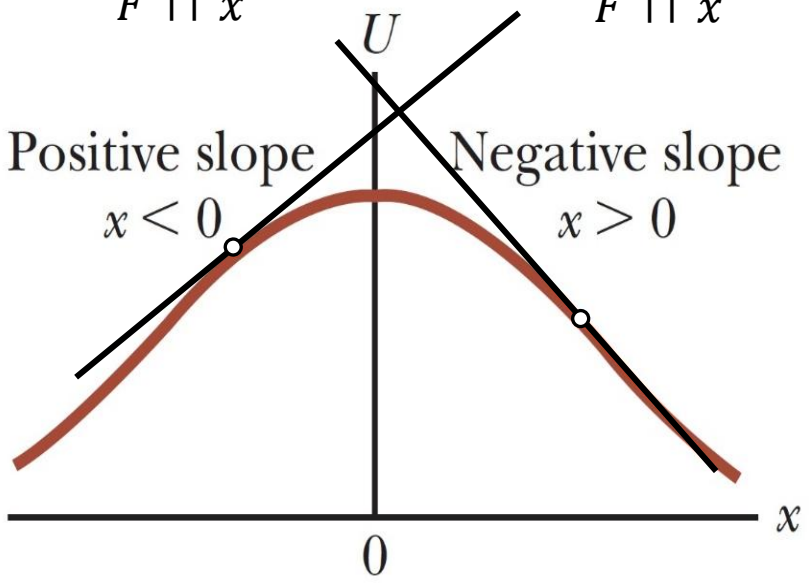
$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Η κλίση $\frac{dU}{dx}$ μας πληροφορεί για την ευστάθεια ή αστάθεια ενός συστήματος
- **Παραδείγματα:**

$\frac{dU}{dx} < 0 \Rightarrow F_x > 0$ $\quad$ $\frac{dU}{dx} > 0 \Rightarrow F_x < 0$ $\quad$ $\frac{dU}{dx} > 0 \Rightarrow F_x < 0$ $\quad$ $\frac{dU}{dx} < 0 \Rightarrow F_x > 0$

$\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{x}$ $\quad$ $\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{x}$ $\quad$ $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{x}$ $\quad$ $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{x}$





Ενέργεια Συστήματος

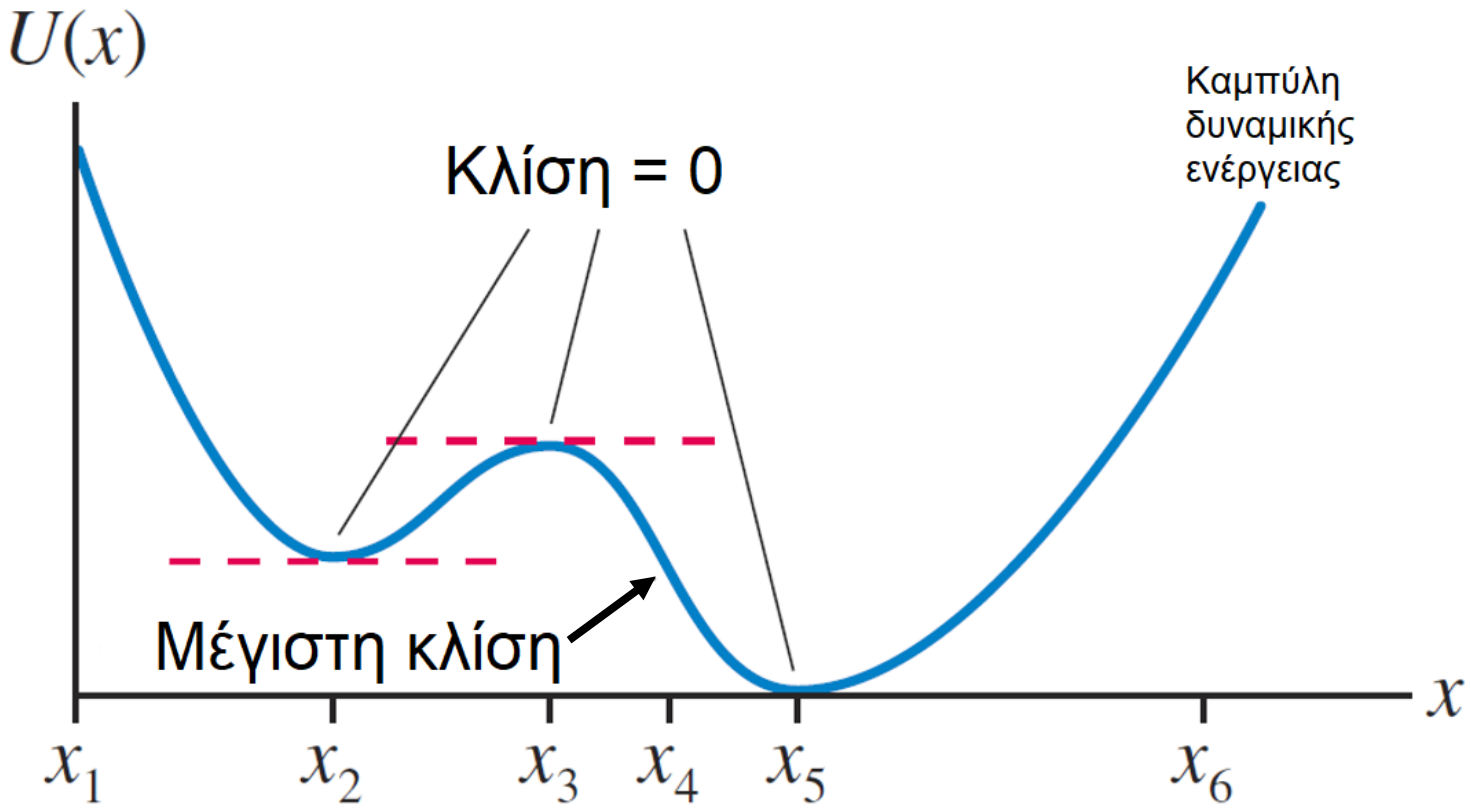
$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Όταν $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{x}$: η **δύναμη** που εγείρεται είναι **ομόρροπη** με τα **μετατόπιση**
  - Το σύστημα **μετατοπίζεται περαιτέρω μακριά** από τη θέση ισορροπίας του!
    - **Αστάθεια**!

- Όταν $\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{x}$: η **δύναμη** που εγείρεται είναι **αντίρροπη** με τα **μετατόπιση**
  - Το σύστημα **επιστρέφει** στη θέση ισορροπίας του!
    - **Ευστάθεια**!

Ενέργεια Συστήματος

- Ένα πραγματικό σύστημα μπορεί να έχει **περιοχές ευσταθούς, ασταθούς, και ουδέτερης** ισορροπίας



Ενέργεια Συστήματος

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$



Διατήρηση της Ενέργειας

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων

Σύστημα

Μονομελές

Πολυμελές

Μη απομονωμένο

Μη απομονωμένο

Απομονωμένο

Μόνο συντηρητικές δυνάμεις

$\Delta K = \Sigma W_{ext}$

$\Delta K + \Delta U = 0$

Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου

Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας



Διατήρηση της Ενέργειας

- Γνωρίσαμε δυο ενεργειακά θεωρήματα
  - ΘΜΚΕΕ
  - ΑΔΜΕ
  - **Υπάρχει άλλο?**
- Διαφορετικές υποθέσεις για καθένα από αυτά
- Οι υποθέσεις σχετίζονταν με το **σύστημα** και τις **δυνάμεις** που **παράγουν έργο** στο σύστημα
  - Μονομελές ή πολυμελές
  - Εσωτερικές ή εξωτερικές, συντηρητικές ή μη
- Ας κάνουμε μια τελευταία, **ομαδική θεώρηση** σε αυτά

Διατήρηση της Ενέργειας

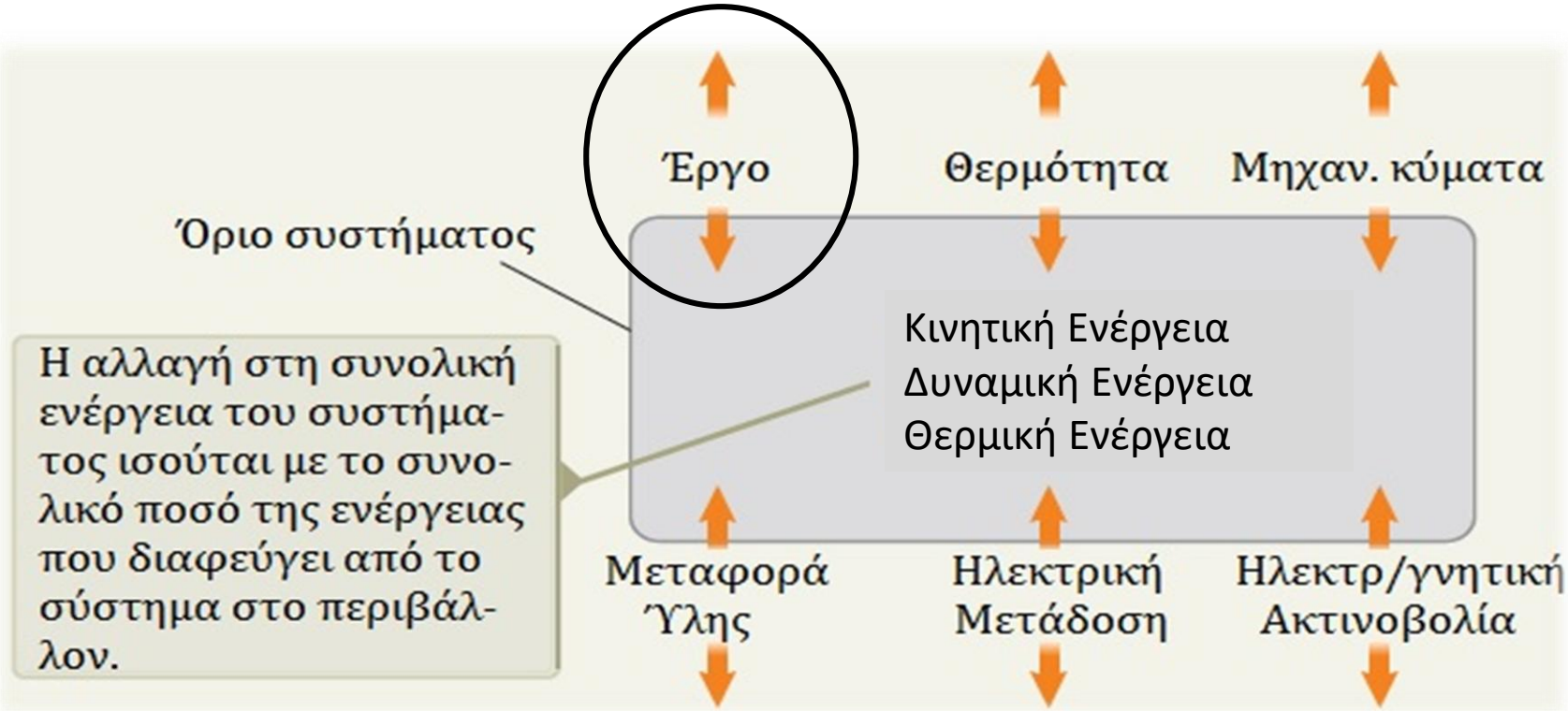
- **Μη απομονωμένα συστήματα**
  - Σύστημα βρίσκεται σε «επικοινωνία» με το περιβάλλον του μέσω μεταφοράς ενέργειας
    - Υπάρχει ενεργειακό «πάρε-δώσε» με το περιβάλλον
  - **Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου**
    - **Εξωτερική** δύναμη αλλάζει **μέσω έργου** την κινητική ενέργεια ενός **μονομελούς** συστήματος ({σώματος})
  - Έχουμε δει μόνο το **έργο** ως μέσο μεταφοράς ενέργειας σε ένα σύστημα
  - Υπάρχουν κι άλλοι τρόποι… (ακολουθεί μικρή παρένθεση)

Διατήρηση της Ενέργειας



Διατήρηση της Ενέργειας

Μη απομονωμένα συστήματα



(κλείνει η παρένθεση)

Διατήρηση της Ενέργειας

- **Μη απομονωμένα συστήματα**
- **Αν η συνολική ενέργεια σε ένα μη απομονωμένο σύστημα αλλάζει, αυτό συμβαίνει ΜΟΝΟΝ αν ενέργεια έχει μεταφερθεί από ή προς το περιβάλλον του συστήματος, με κάποιον μηχανισμό**

- **Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας – ΑΔΕ**

$$\Delta E_{system} = \sum T = \sum W_{ext}$$

όπου E_{system} είναι η συνολική ενέργεια του συστήματος (κάθε μορφής), και T είναι το ποσό της ενέργειας που μεταφέρεται εκτός ή εντός συστήματος με κάποιο μηχανισμό **(εμείς θα μείνουμε μόνο στο μηχανισμό μέσω έργου)**

Διατήρηση της Ενέργειας

Ενεργειακή αλληλεπίδραση με το περιβάλλον!!

- **Μη απομονωμένα συστήματα**
- Αν το σύστημα είναι **πολυμελές**, με παρουσία όλων των δυνατών ενεργειών, τότε

$$\Delta E_{system} \quad \mathbf{\Delta K + \Delta U_{g,s} + \Delta E_{th}} = \sum \boldsymbol{W_{ext.forces}}$$

ΑΔΕ

- Αν το σύστημα είναι **πολυμελές** με παρουσία μόνο κινητικών και δυναμικών ενεργειών, τότε

$$\Delta E_{system} \quad \mathbf{\Delta K + \Delta U_{g,s}} = \sum \boldsymbol{W_{ext.forces}}$$

ΑΔΕ

- Αν το σύστημα είναι πολυμελές με παρουσία μόνο θερμικής και κινητικής ενέργειας, τότε

$$\Delta E_{system} \quad \mathbf{\Delta K + \Delta E_{th}} = \sum \boldsymbol{W_{ext.forces}}$$

ΑΔΕ

- Αν το σύστημα είναι **μονομελές**, τότε

$$\Delta E_{system} \quad \mathbf{\Delta K} = \sum \boldsymbol{W_{ext.forces}}$$

ΘΜΚΕΕ

Διατήρηση της Ενέργειας

- **Απομονωμένα (κλειστά) συστήματα**
- **Δεν** υπάρχει «εισαγωγή/διαφυγή» ενέργειας με κανένα τρόπο
- Η **συνολική ενέργεια** του συστήματος είναι **σταθερή**
- **Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας – ΑΔΕ**

$$\Delta E_{system} = 0$$

Διατήρηση της Ενέργειας

Μηδενική ενεργειακή αλληλεπίδραση με το περιβάλλον!!

- **Απομονωμένα (κλειστά) συστήματα**
  - Αναγκαστικά **πολυμελές** σύστημα
  - **Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας – ΑΔΕ**

$$\Delta E_{system} \boxed{\boxed{\Delta \mathbf{K} + \Delta \mathbf{U}_{g,s} + \Delta E_{th}} = \mathbf{0}}$$

ΑΔΕ

αν παράγουν έργο **συντηρητικές και μη** δυνάμεις, δηλ**. σε κάθε περίπτωση!**

  - **Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας – ΑΔΜΕ**

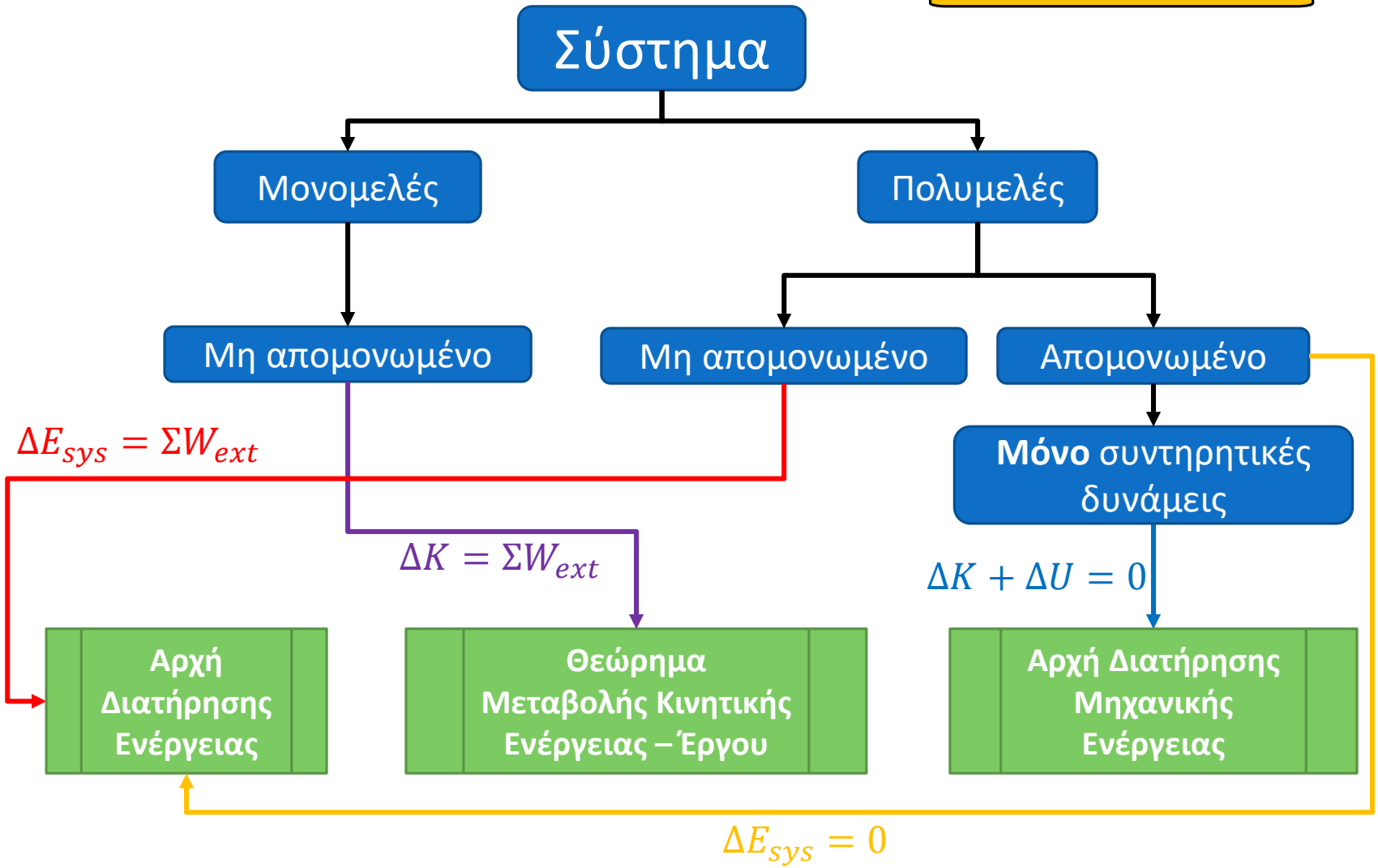
$$\Delta E_{system} \boxed{\boxed{\Delta E_{mech} = \Delta \mathbf{K} + \Delta \mathbf{U}_{g,s}} = \mathbf{0}}$$

ΑΔΜΕ

μόνον όταν παράγουν έργο **αποκλειστικά συντηρητικές** δυνάμεις!

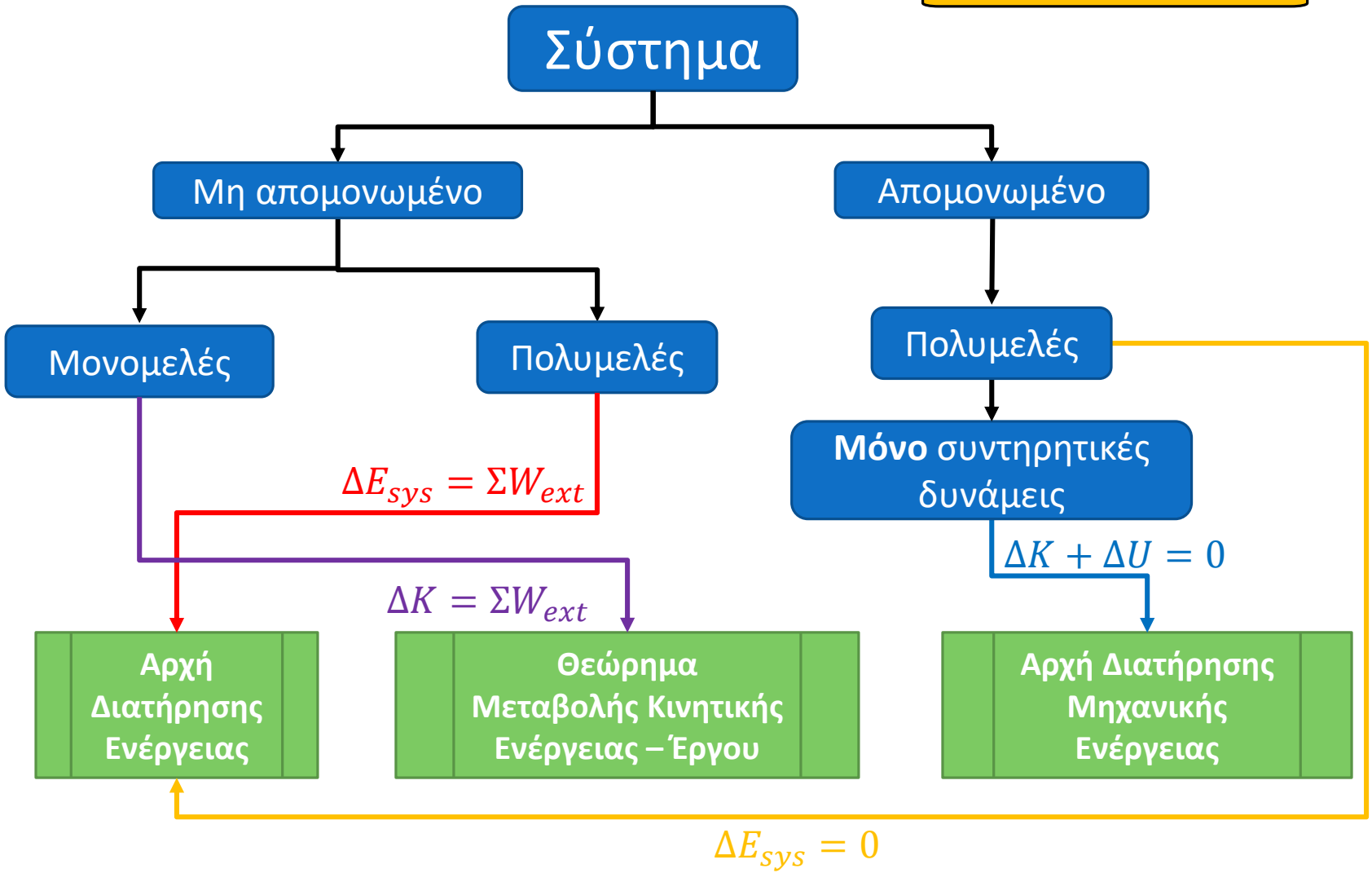
Διατήρηση της Ενέργειας

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων



Διατήρηση της Ενέργειας

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων

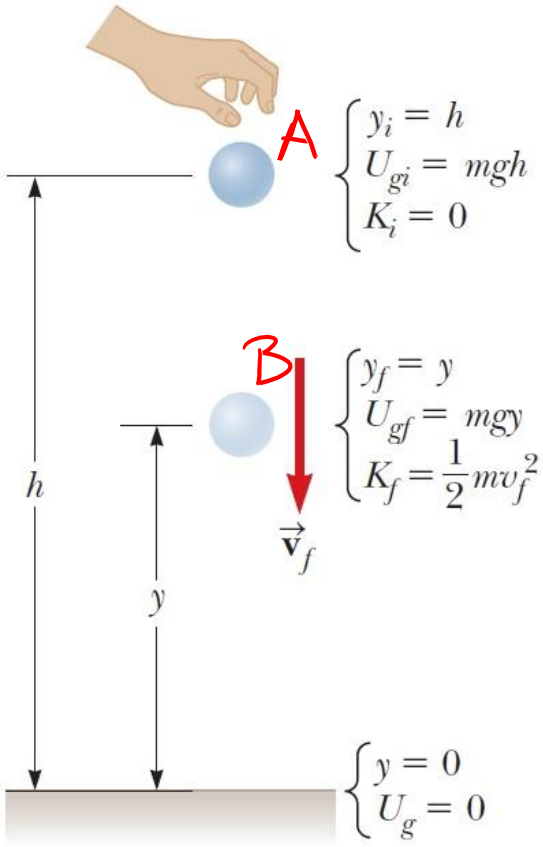


Διατήρηση της Ενέργειας

- Προσέξτε!!
- Παρ’ όλο που το προηγούμενο slide εμφανίζει τα διάφορα ενεργειακά θεωρήματα ως διαφορετικά μεταξύ τους, στην πραγματικότητα όλα είναι «παιδιά» της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας (Α.Δ.Ε)!
- Η Α.Δ.Ε είναι **καθολικό** ενεργειακό θεώρημα, ισχύει από το μικρόκοσμο (άτομα) μέχρι το μακρόκοσμο (πλανητικά συστήματα)
- Το Θ.Μ.Κ.Ε-Ε και η Α.Δ.Μ.Ε είναι «**υποπεριπτώσεις»** της Α.Δ.Ε

Διατήρηση της Ενέργειας

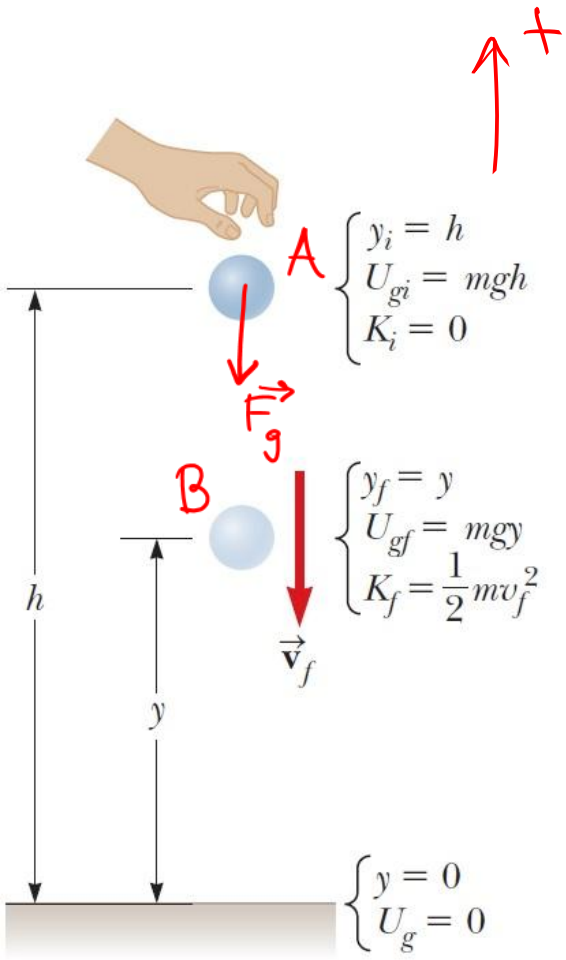
- **<u>Παράδειγμα:</u>**
  - Μπάλα μάζας m αφήνεται από ύψος h.
    - Α) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας σε ύψος y. **Το σύστημα θα είναι η μπάλα και η Γη**.
    - Β) Υπολογίστε ξανά το Α) ερώτημα θεωρώντας ως **σύστημα την μπάλα, δηλ. θεωρήστε ότι η Γη ανήκει στο περιβάλλον του συστήματος!**



Διατήρηση της Ενέργειας

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Μπάλα μάζας m αφήνεται από ύψος h.
    - Α) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας σε ύψος y. Το σύστημα θα είναι η μπάλα και η Γη.

Το σύστημα μας {Γη, μπάλα} είναι πολυμελές και απομονωμένο. Η μόνη δύναμη που παράγει έργο στο σύστημα είναι η δύναμη του βάρους, εσωτερική και συντηρητική. Άρα ισχύει η ΑΔΜΕ στη διαδρομή $A \rightarrow B$.



Διατήρηση της Ενέργειας

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Μπάλα μάζας m αφήνεται από ύψος h.
    - Α) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας σε ύψος y. Το σύστημα θα είναι η μπάλα και η Γη.

$$\Delta E_{\mu\eta\chi}^{A\to B} = 0$$

$$E_{\mu\eta\chi}^{A} = E_{\mu\eta\chi}^{B}$$

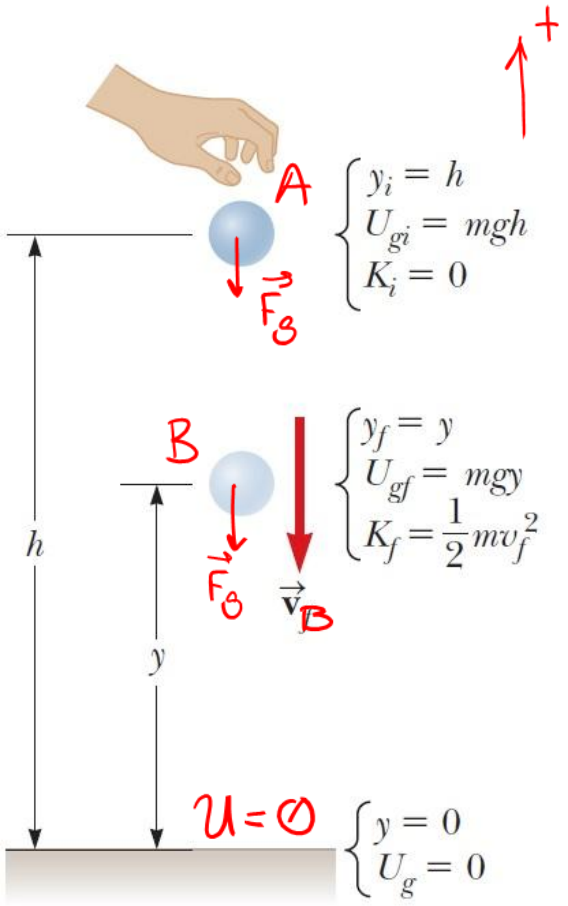
$$K_A + U_{g_A} = K_B + U_{g_B}$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mu_B^2 + mgy$$

$$u_B^2 = 2g(h-y)$$

$$u_B = \sqrt{2g(h-y)}$$

Άρα $$\vec{u}_B = \left(-\sqrt{2g(h-y)}\right)\vec{j}$$



Διατήρηση της Ενέργειας

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Μπάλα μάζας m αφήνεται από ύψος h.
    - Β) Υπολογίστε ξανά το Α) ερώτημα θεωρώντας ως σύστημα την μπάλα.

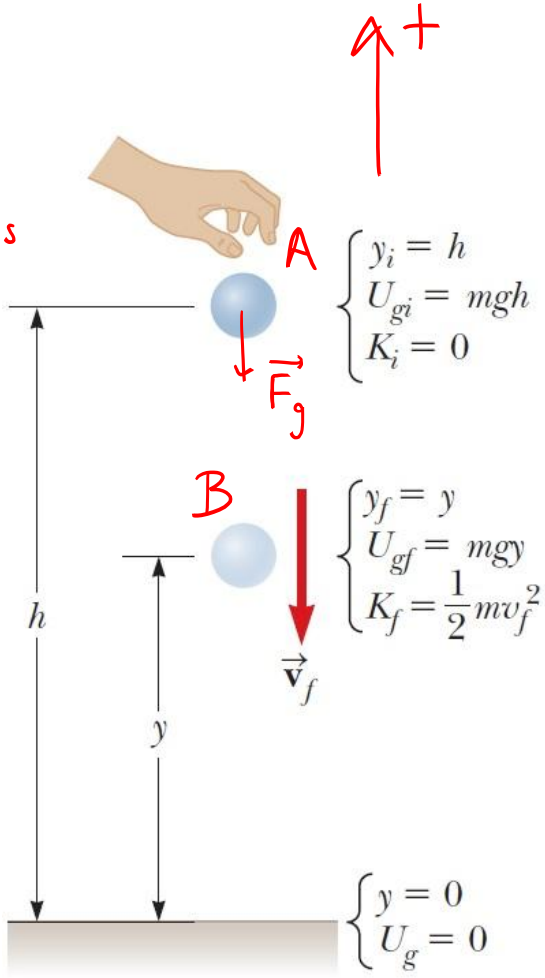
Θεωράμε ως σύστημα την {μπάλα}, μονωμένη και μη απομονωμένο (η δύναμη του βάρους παράγει έργο στο σύστημα). Στη διαδρομή Α→Β ισχύει το ΘΜΚΕΕ:

$$\Delta K_{A\to B} = \sum W_{ext}$$

$$K_B - K_A = W_{F_g}$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - 0 = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{y}$$

$$= (-mg)\vec{j} \cdot (y-h)\vec{j}$$



Διατήρηση της Ενέργειας

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Μπάλα μάζας m αφήνεται από ύψος h.
    - Β) Υπολογίστε ξανά το Α) ερώτημα θεωρώντας ως σύστημα την μπάλα.

$$\frac{1}{2}mu_B^2 = -mg(y-h)$$

$$= mg(h-y)$$

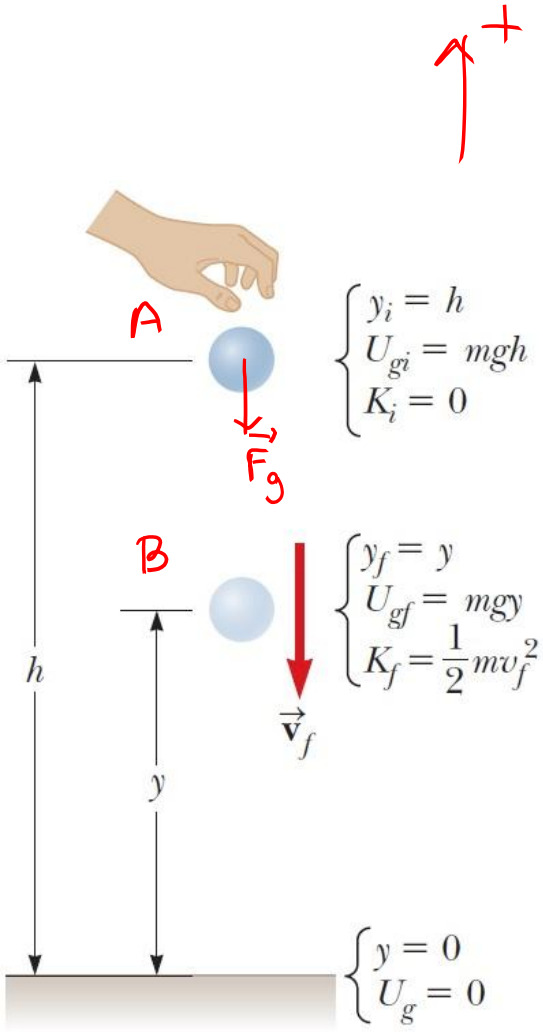
Άρα

$$u_B^2 = 2g(h-y)$$

$$u_B = \sqrt{2g(h-y)}$$

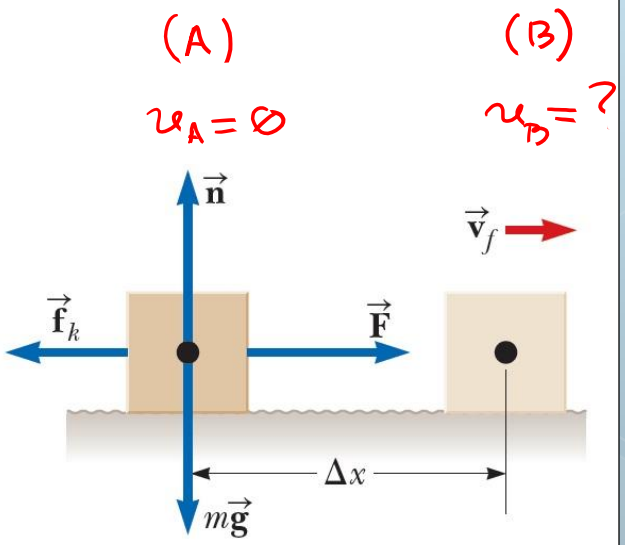
ή

$$\vec{u_B} = \left(-\sqrt{2g(h-y)}\right)\vec{j}$$



Διατήρηση της Ενέργειας

- **Παράδειγμα:**
  - Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N. Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15

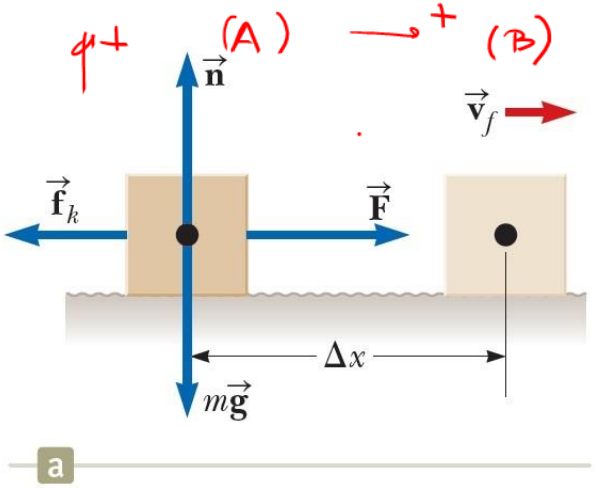


Σύστημα = { σώμα }

Διατήρηση της Ενέργειας

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.

    Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15



Το σύστημα είναι μονωμένο και μη αποσυμπιεσμένο. Ισχύει το ΘΜΚΕΕ$_{A\to B}$:

$$\Delta K_{A\to B} = \sum W_{ext}$$

$$K_B - K_A = W_{f_k} + \cancel{W_n}^{\,0} + \cancel{W_{F_g}}^{\,0} + W_F$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 - 0 = -f_k \Delta x + F\,\Delta x \quad (1)$$

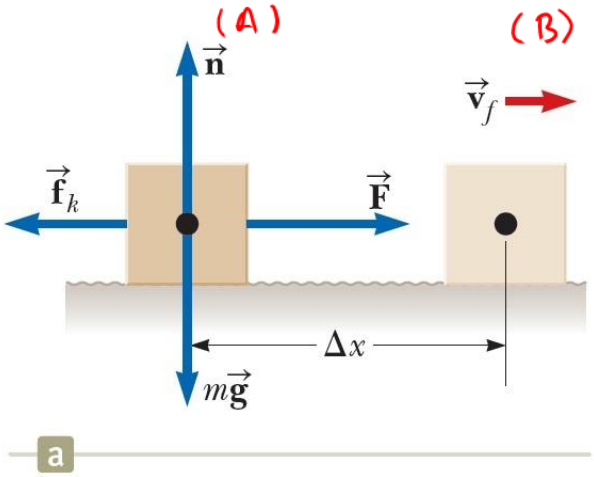
Είναι $f_k = \mu_k n$ (2). Το σώμα ισορροπεί στον $y'y$ άξονα

άρα $\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_g + \vec{n} = \vec{0} \Rightarrow mg = n$ (3)

Διατήρηση της Ενέργειας

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.

    Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15



Η (2) $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $f_k = -\mu_k m g$ (4)

Αρα η (1) λόγω της (4) δίνει $\frac{1}{2} m u_B^2 = -\mu_k m g \Delta x + F \cdot \Delta x$,

δηλ

$$u_B^2 = \frac{2F\,\Delta x - 2\mu_k m g \Delta x}{m}$$

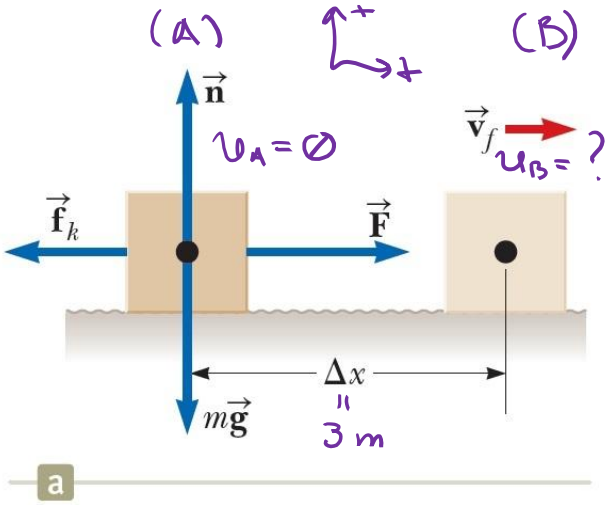
$$u_B = \sqrt{\frac{2F\,\Delta x - 2\mu_k m g \Delta x}{m}}$$

Δείτε την επόμενη λύση αν θεωρήσουμε ως σύστημα το **{σώμα, οριζόντια επιφάνεια}**!

Διατήρηση της Ενέργειας

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.

    Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15



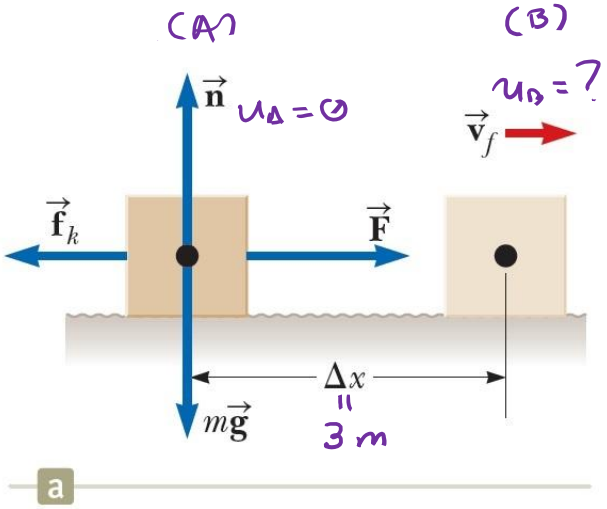
Θεωρούμε ως σύστημα το {σώμα, επίπεδο} Είναι πολυμελές αλλά όχι απομονωμένο, καθώς "πιάνει" ενεργειακά με την εξωτερική δύναμη $\vec{F}$ (οι δυνάμεις $\vec{n}$, $m\vec{g}$ δεν παράγουν έργο ως κάθετες στη μετατόπιση) Η δύναμη τριβής ολίσθησης $\vec{f}_k$ είναι εσωτερική του συστήματος αλλά έχει συντηρητική. Μπορούμε να εφαρμόσουμε Α.Δ.Ε στη διαδρομή Α→Β:

$$\Delta E_{sys} = \sum W_{ext} = \cancel{W_{\vec{n}}}^{\,0} + \cancel{W_{m\vec{g}}}^{\,0} + W_{\vec{F}} \quad (\perp \Delta\vec{x})$$

Διατήρηση της Ενέργειας

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.

    Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15



$$\Delta E_{sys} = W_{\vec{F}}$$

$$\Delta K_{A\to B} + \Delta E_{th}^{A\to B} = W_{\vec{F}}$$

$$K_B - K_A + f_k \cdot \Delta x = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$$

$$\frac{1}{2} m u_B^2 - 0 + \mu_k n \Delta x = F \cdot \Delta x \cdot \cos(0)$$

$$\frac{1}{2} m u_B^2 = F \Delta x - \mu_k n \Delta x \quad (1)$$

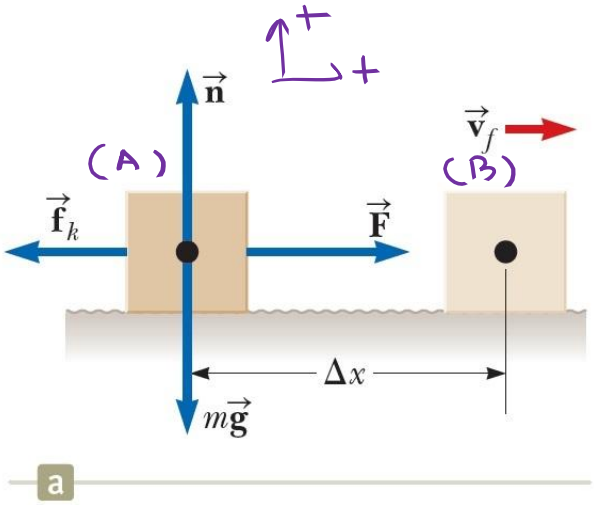
Reminder:

$$\Delta E_{th} = -W_{f_k} = f_k \Delta x$$

Διατήρηση της Ενέργειας

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.

    Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15



Όμως λόγω ισορροπίας στον άξονα y'y, ισχύει ο 1ος Νόμος του Newton:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{n} + m\vec{g} = \vec{0}$$

Θετική φορά προς τα πάνω, άρα $n - mg = 0 \Leftrightarrow n = mg$ (2)

Η (1) $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $\frac{1}{2} m u_B^2 = F \cdot \Delta x - \mu_k mg \Delta x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow u_B^2 = \frac{2F \cdot \Delta x - 2\mu_k mg \Delta x}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_B = \sqrt{\frac{2F \cdot \Delta x - 2\mu_k mg \Delta x}{m}} \simeq 1{,}8 \frac{m}{s}$$, όπως και πριν.

Τέλος Διάλεξης