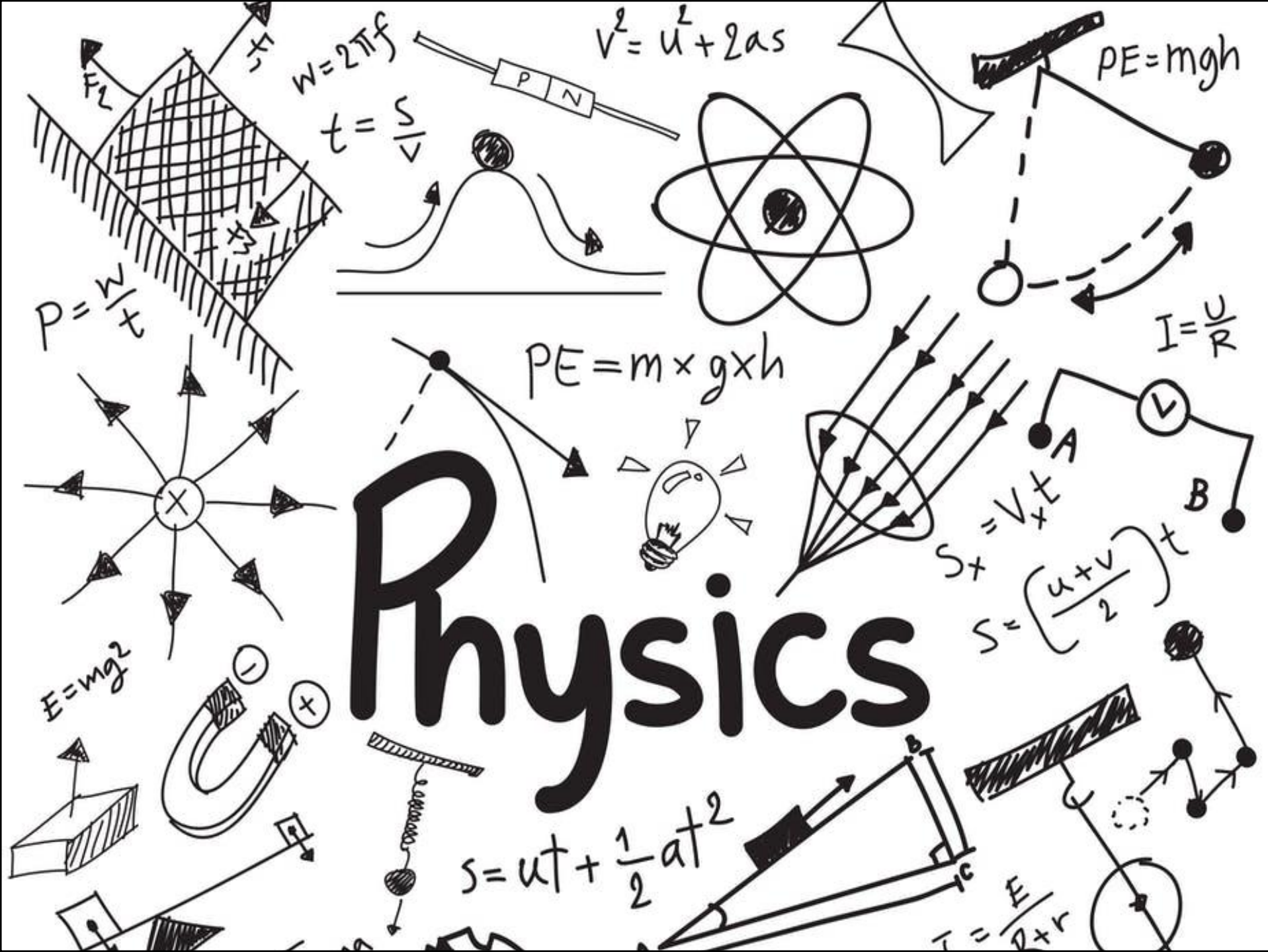


Physics





Εικόνα: Η κίνηση μπορεί να είναι αναζωογονητική και όμορφη. Αυτά τα σκάφη ανταποκρίνονται σε δυνάμεις αέρα, νερού, και του βάρους του πληρώματος όσο προσπαθούν να ισορροπήσουν στην άκρη του.

1^η Ενότητα

Κλασική Μηχανική



Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση



Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση

Κίνηση σε μια Διάσταση

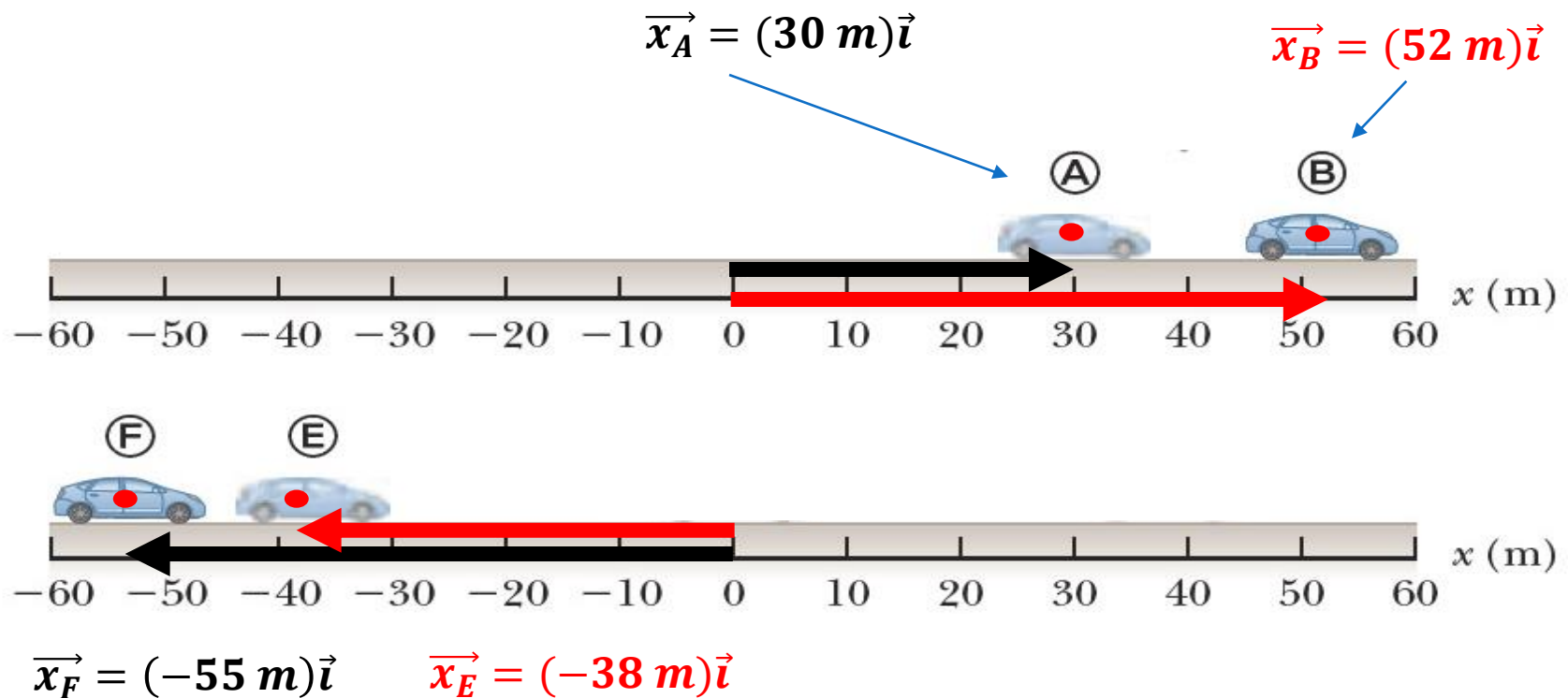
- Κίνηση σε έναν οριζόντιο/κατακόρυφο άξονα
 - Σώμα == σωματίδιο
 - Θεωρούμε απειροστά μικρό το μέγεθός του
 - Αδιαφορούμε **πλήρως** για τις διαστάσεις του
 - Θα γνωρίσουμε τους βασικούς ορισμούς της κινητικής...
 - ...αρχικά σε μια διάσταση και αργότερα σε δυο διαστάσεις
 - Αυτοί είναι:
 - Η Θέση
 - Η Ταχύτητα
 - Η Επιτάχυνση
- ενός σώματος

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Θέση $\vec{x}$** : διάνυσμα που ορίζει την τοποθεσία του σώματος σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς (όπως το 0)
- **Διανυσματικό μέγεθος**
 - Θα θεωρήσουμε έναν βαθμονομημένο άξονα στον οποίο γίνεται η κίνηση – το μοναδιαίο του διάνυσμα είναι το $\vec{i}$ (οριζόντια κίνηση) ή το $\vec{j}$ (κατακόρυφη κίνηση)
 - Το **πρόσημο** μας δηλώνει τη φορά του διανύσματος
 - $\vec{x}_1 = +3\vec{i}$, $\vec{x}_2 = -12\vec{i}$
- Το πρόσημο μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό – ως πρόσημο τιμής στο βαθμονομημένο άξονα
 - **Θετικό πρόσημο** : το διάνυσμα ξεκινά από ένα σημείο αναφοράς (το 0) και καταλήγει σε κάποια θετική τιμή του άξονα
 - Αντίθετα για αρνητική τιμή

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Παράδειγμα:



Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ (displacement):** η μεταβολή στη θέση ενός σωματιδίου
- Ορισμός:

$$\Delta\vec{x} \equiv \vec{x}_{\text{τελ}} - \vec{x}_{\text{αρχ}}$$

- με $\vec{x}_{\text{τελ}}$, $\vec{x}_{\text{αρχ}}$ την τελική και την αρχική θέση του σωματιδίου
- Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό: $\vec{x}_{\text{τελ}} \rightarrow \vec{x}_f$, $\vec{x}_{\text{αρχ}} \rightarrow \vec{x}_i$
- Προσοχή: **απόσταση $d \neq$ μέτρο μετατόπισης $|\Delta\vec{x}|$!**
- Παράδειγμα:

Η απόσταση που διανύει ένας αθλητής μπάσκετ, αν απλουστευμένα υποθέσουμε ότι κινείται σε ευθεία γραμμή, είναι μερικά χιλιόμετρα, αλλά η μετατόπιση από την αρχική θέση του (κέντρο γηπέδου) ως την τελική (ξανά στην ίδια περίπου θέση) είναι πολύ μικρότερη (ως μέτρο)!



Κίνηση σε μια Διάσταση

- Μετατόπιση $\Delta \vec{x}$:

- Διανυσματικό μέγεθος!
- Έχει μέτρο, διεύθυνση, φορά

- Αν $\Delta \vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i = (x_f - x_i)\vec{l} = \Delta x \vec{l}$:

- $\Delta x = x_f - x_i > 0 \iff$ κίνηση προς τα δεξιά

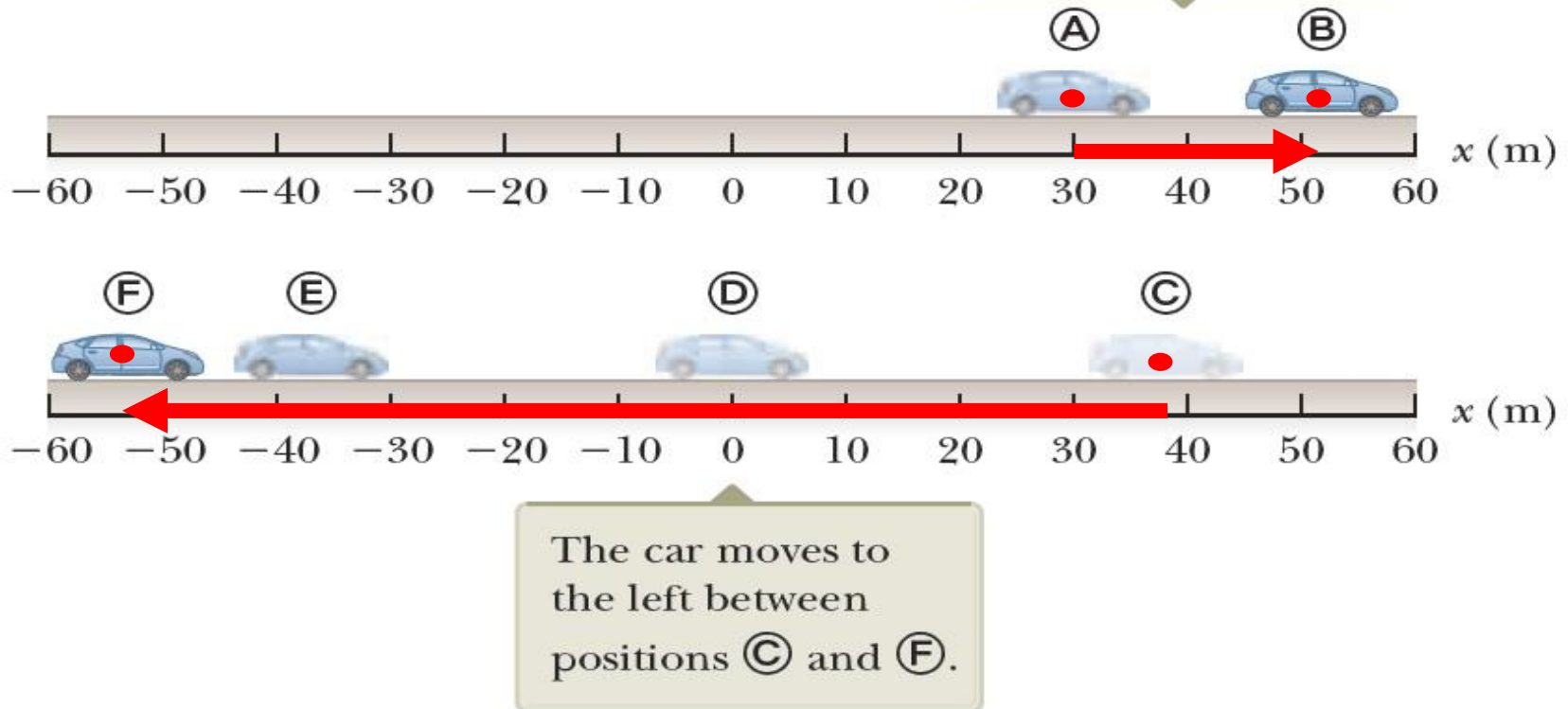
- $\Delta x = x_f - x_i < 0 \iff$ κίνηση προς τα αριστερά

- Στο Διεθνές Σύστημα, μονάδα μέτρησης της μετατόπισης (όπως και της θέσης) είναι το

1 μέτρο (m)

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Παράδειγμα:



$$\Delta \vec{x}_{A \rightarrow B} = \vec{x}_B - \vec{x}_A = 52\vec{i} - 30\vec{i} = (22 \text{ m}) \vec{i}$$

$$\Delta \vec{x}_{C \rightarrow F} = \vec{x}_F - \vec{x}_C = -55\vec{i} - 38\vec{i} = (-93 \text{ m}) \vec{i}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- ◉ Hint:

- ◉ Μπορούμε να κάνουμε **αλγεβρικές** πράξεις με τις ποσότητες των θέσεων και μετατοπίσεων
- ◉ Στο τέλος μπορούμε να προσθέσουμε την πληροφορία της κατεύθυνσης...
 - ◉ ...με χρήση του διανύσματος $\vec{i}$ (ή του $\vec{j}$ στην περίπτωση της κατακόρυφης κίνησης)

- ◉ **Παράδειγμα:**

- ◉ Για ένα σώμα που κινείται από τη θέση $\vec{x}_A = 3\vec{i}$ στη θέση $\vec{x}_B = -8\vec{i}$, βρείτε τη μετατόπισή του.

$$\begin{aligned}\Delta\vec{x} &= \vec{x}_B - \vec{x}_A = (x_B - x_A)\vec{i} \\ \Delta x &= x_B - x_A = -8 - 3 = -11 \text{ m}\end{aligned}$$

- ◉ Άρα

$$\Delta\vec{x} = (-11 \text{ m})\vec{i}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

• Μέση ταχύτητα (average velocity):

$$\vec{u}_{avg} \equiv \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

- Διάνυσμα: έχει επίσης μέτρο, διεύθυνση και φορά!
- Απαιτούνται δυο σημεία (αρχικό & τελικό)
- Ίδιο πρόσημο με $\Delta \vec{x}$ – γιατί?

• Μέση αριθμητική ταχύτητα (average speed):

- $s_{avg} \equiv \frac{d}{\Delta t}$, όπου d η απόσταση
- Βαθμωτό μέγεθος – όχι διάνυσμα !

- Προσοχή στη διαφορά τους!

Μονάδα
μέτρησης:

$$\frac{m}{s}$$

(μέτρο
ανά
δευτ/το)

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Στιγμιαία Ταχύτητα (instantaneous velocity)**

- Διάνυσμα: έχει μέτρο, διεύθυνση και φορά
- Το διάνυσμα της ταχύτητας για κάθε χρονική στιγμή t !
- Αλλιώς: η μέση ταχύτητα όταν μετριέται σε $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{u}_{avg} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

- Όμως

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{u}_x(t)$$

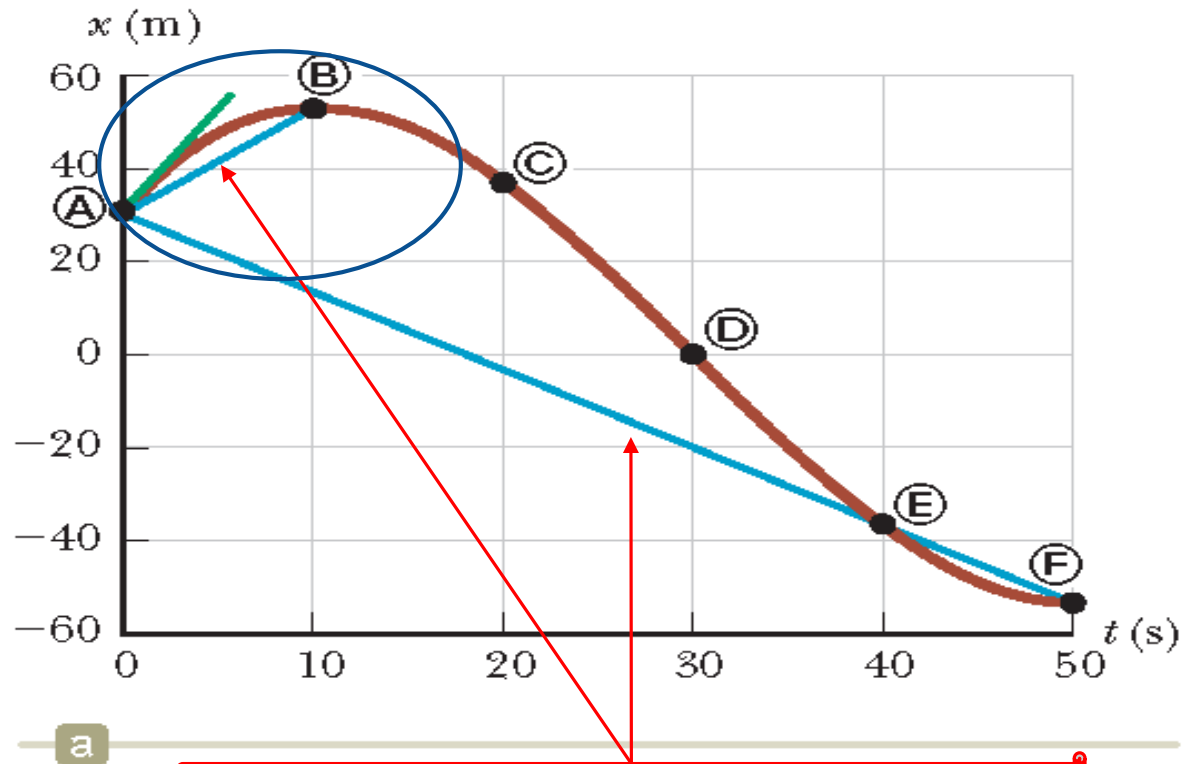
- Άρα: η στιγμιαία ταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης θέσης ως προς το χρόνο

Κίνηση σε μια Διάσταση

• Στιγμιαία Ταχύτητα

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{u}_{avg} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{u}_x(t)$$

• Παράδειγμα:



Κλίση ευθείας AF (ή AB) = μέση ταχύτητα

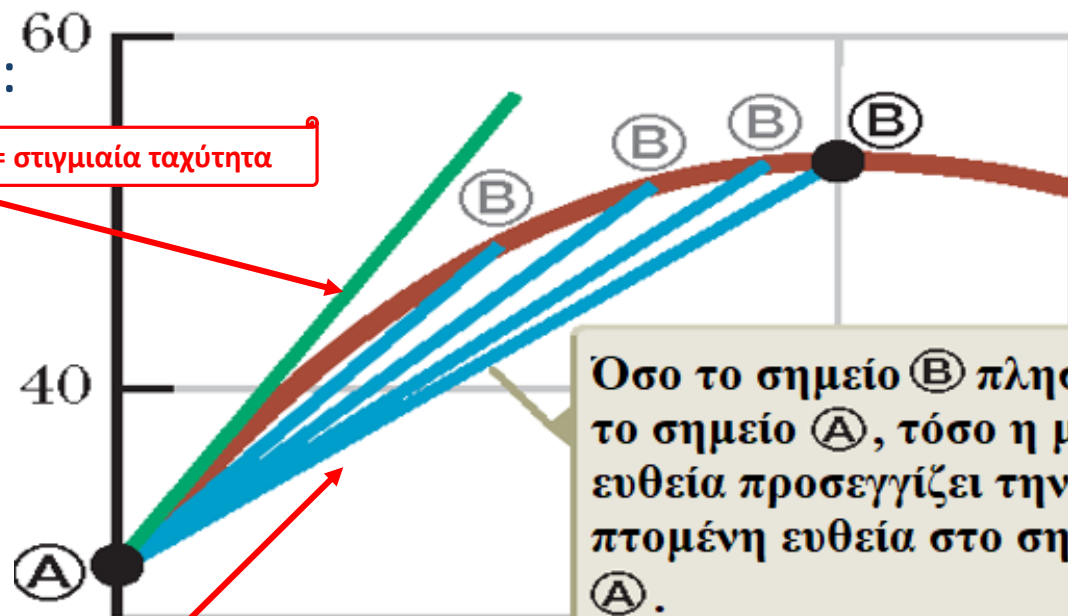
Κίνηση σε μια Διάσταση

• Στιγμιαία Ταχύτητα

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{u}_{avg} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{u}_x(t)$$

• Παράδειγμα:

Κλίση εφαπτομένης σε σημείο = στιγμιαία ταχύτητα



Κλίση ευθείας μεταξύ δυο σημείων = μέση ταχύτητα

Κίνηση σε μια Διάσταση

- ◉ Hint:

- ◉ Μπορούμε να κάνουμε **αλγεβρικές** πράξεις με τις ποσότητες των ταχυτήτων, όπως ακριβώς κάναμε με τις θέσεις και μετατοπίσεις
- ◉ Στο τέλος μπορούμε να προσθέσουμε την πληροφορία της κατεύθυνσης...
 - ◉ ...με χρήση του διανύσματος $\vec{i}$ (ή του $\vec{j}$ στην περίπτωση της κατακόρυφης κίνησης)

- ◉ **Παράδειγμα:**

- ◉ Για ένα σώμα που κινείται από τη θέση $\vec{x}_A = 3\vec{i}$ στη θέση $\vec{x}_B = -8\vec{i}$, σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 5.5$ δευτερόλεπτα, βρείτε τη μέση ταχύτητά του.

$$\Delta x = x_B - x_A = -8 - 3 = -11 \text{ m}$$

$$u_{\text{avg}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-11}{5.5} = -2 \text{ m/s}$$

- ◉ Άρα

$$\vec{u}_{\text{avg}} = (-2 \text{ m/s})\vec{i}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

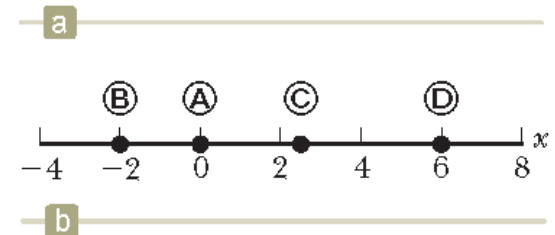
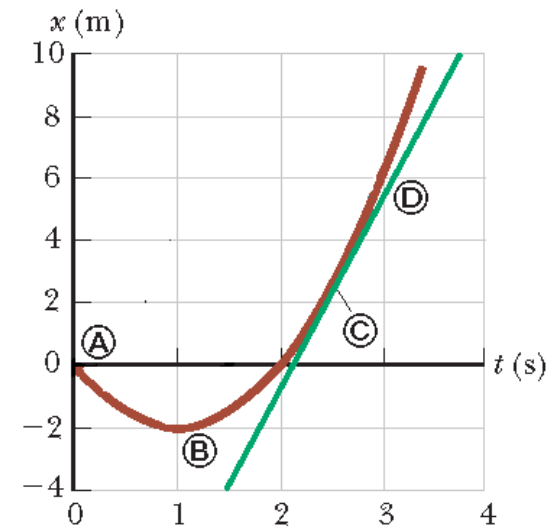
• Παράδειγμα:

- Σωματίδιο κινείται στον οριζόντιο άξονα, με τη θέση του να ορίζεται από τη σχέση

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

όπου x είναι η θέση σε m , και t είναι ο χρόνος σε s , όπως στο Σχήμα (α).

- Α. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.
- Β. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα.
- Γ. Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.



Κίνηση σε μια Διάσταση

◉ Παράδειγμα – Λύση:

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

- ◉ Α. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.

Η διαδρομή $t=0 \rightarrow t=1$ είναι η $A \rightarrow B$.

$$\text{Άρα } \Delta \vec{x}_{A \rightarrow B} = \vec{x}_B - \vec{x}_A = \Delta x_{A \rightarrow B} \cdot \vec{i}$$

$$\Delta x_{A \rightarrow B} = x(t=1) - x(t=0) = -2 - 0 = -2 \text{ m}$$

$$\text{δηλ. } \Delta \vec{x}_{A \rightarrow B} = (-2 \text{ m}) \vec{i}$$

Η διαδρομή $t=1 \rightarrow t=3$ είναι η $B \rightarrow D$.

$$\text{Άρα } \Delta \vec{x}_{B \rightarrow D} = \vec{x}_D - \vec{x}_B = \Delta x_{B \rightarrow D} \cdot \vec{i}$$

$$\Delta x_{B \rightarrow D} = x(t=3) - x(t=1) = 6 - (-2) = 8 \text{ m}, \text{ δηλ. } \Delta \vec{x}_{B \rightarrow D} = (8 \text{ m}) \vec{i}$$

◉ Παράδειγμα – Λύση:

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

- ◉ Α. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.

Κίνηση σε μια Διάσταση

• Παράδειγμα – Λύση:

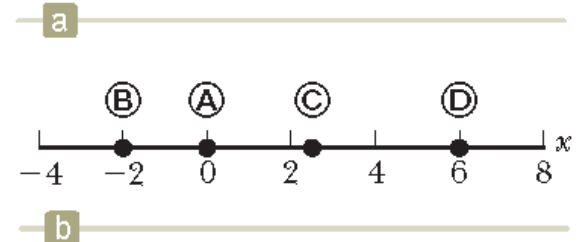
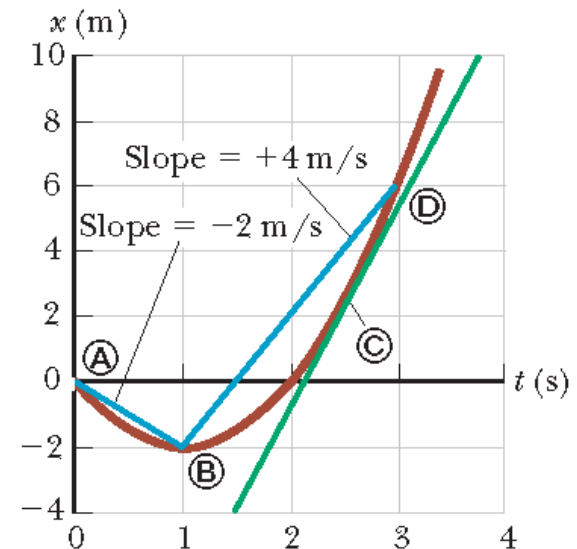
$$x(t) = -4t + 2t^2$$

- Β. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα.

Απο προηγ. ερώτηση,

$$\begin{aligned}\Delta \vec{x}_{A \rightarrow B} &= (-2 \text{ m}) \vec{i} \Rightarrow v_{\text{avg}}^{A \rightarrow B} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \\ &= \frac{(-2 \text{ m}) \vec{i}}{1 - 0} = \left(-2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \vec{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta \vec{x}_{B \rightarrow D} &= (8 \text{ m}) \vec{i} \Rightarrow v_{\text{avg}}^{B \rightarrow D} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \\ &= \frac{(8 \text{ m}) \vec{i}}{3 - 1} = \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \vec{i}\end{aligned}$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

• Παράδειγμα – Λύση:

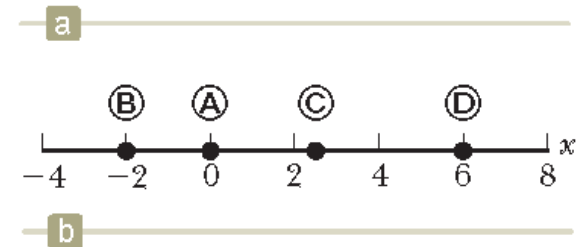
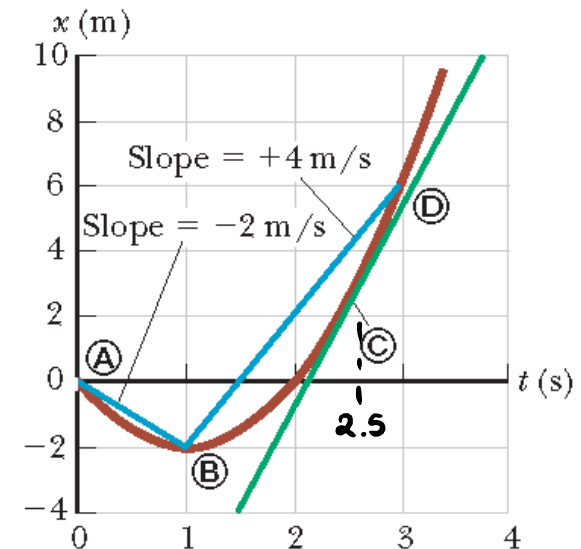
$$x(t) = -4t + 2t^2$$

- C. Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.

Ξέρουμε ότι $\vec{v}(t) = x'(t)$

$$= -4 + 4t$$

Για $t = \frac{5}{2}$ s, $\vec{v}\left(\frac{5}{2}\right) = \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \vec{i}$



Κίνηση σε μια Διάσταση

- Μοντέλο κίνησης: υπό **σταθερή ταχύτητα**

$$u_{avg} = u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta x = u_x \Delta t \Leftrightarrow (x_f - x_i) = u_x \Delta t$$

- Άρα

$$x_f = x_i + u_x \Delta t$$

- Αν θεωρήσουμε ότι $t_i = 0$:

$$\Delta t = t_f - t_i = t_f = t$$

και τότε

$$x_f = x_i + u_x t$$

- Επίσης, το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό και ίσο με

$$u = \frac{d}{\Delta t}$$

όπου d η απόσταση που διανύθηκε

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Επιτάχυνση (acceleration)**

- Η μεταβολή της ταχύτητας προϊόντος του χρόνου

- **Μέση επιτάχυνση (average acceleration)**

$$\vec{a}_{x,avg} \equiv \frac{\Delta \vec{u}_x}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_{xf} - \vec{u}_{xi}}{t_f - t_i}$$

- **Στιγμαία επιτάχυνση (inst. acceleration)**

$$\vec{a}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}_x}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}_x}{dt}$$

- Αφού όμως

$$\frac{d}{dt} \vec{u}_x = \frac{d}{dt} \frac{d\vec{x}}{dt}$$

είναι

$$\vec{a}_x = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$$

Μονάδα μέτρησης:

$$\frac{m}{s^2}$$

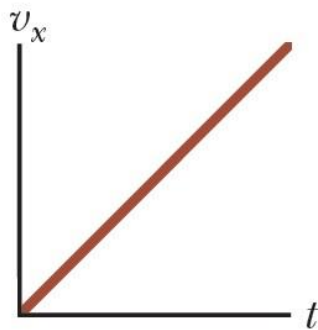
(μέτρο ανά
δευτερόλεπτο στο
τετράγωνο)

Κίνηση σε μια Διάσταση

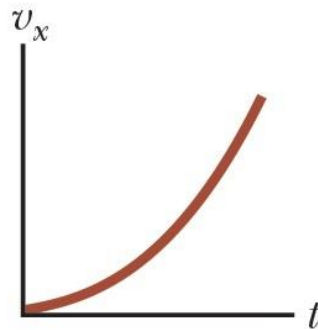
Quiz 1:

Βρείτε τα ζεύγη ταχύτητας-επιτάχυνσης

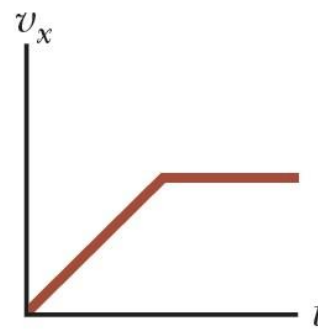
Hint: Η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν σχέση παραγώγου-παράγουσας



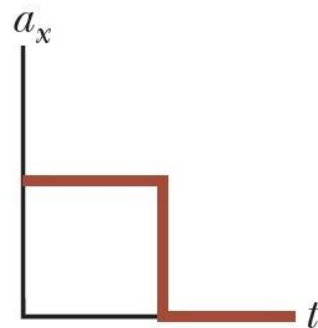
a



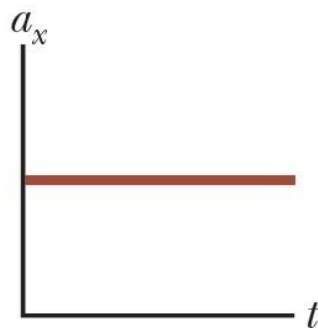
b



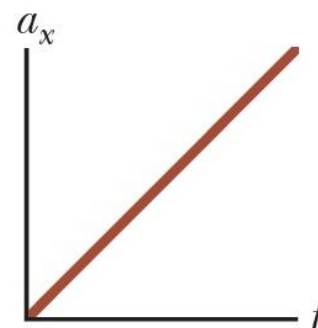
c



d



e



f

a → e

b → f

c → d

Κίνηση σε μια Διάσταση

Quiz 2:

- Η θέση ενός σωματιδίου δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = 4 - 27t + t^3$$

- Α) Βρείτε τη συνάρτηση ταχύτητας ως προς το χρόνο
- Β) Βρείτε τη συνάρτηση επιτάχυνσης ως προς το χρόνο
- Γ) Υπάρχει κάποια χρονική στιγμή t_0 που το σωματίδιο είχε $u(t_0) = 0$?

Α) Είναι $u(t) = x'(t) = -27 + 3t^2 \frac{m}{s}$

Β) — " — $a(t) = x''(t) = u'(t) = 6t \frac{m}{s^2}$

Γ) Είναι $u(t) = 0 \Leftrightarrow -27 + 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t_0 = \pm 3 \text{ sec.}$ Επιλέγουμε ως λύση την $t_0 = 3 \text{ s.}$

Συνεχίζεται... 😊