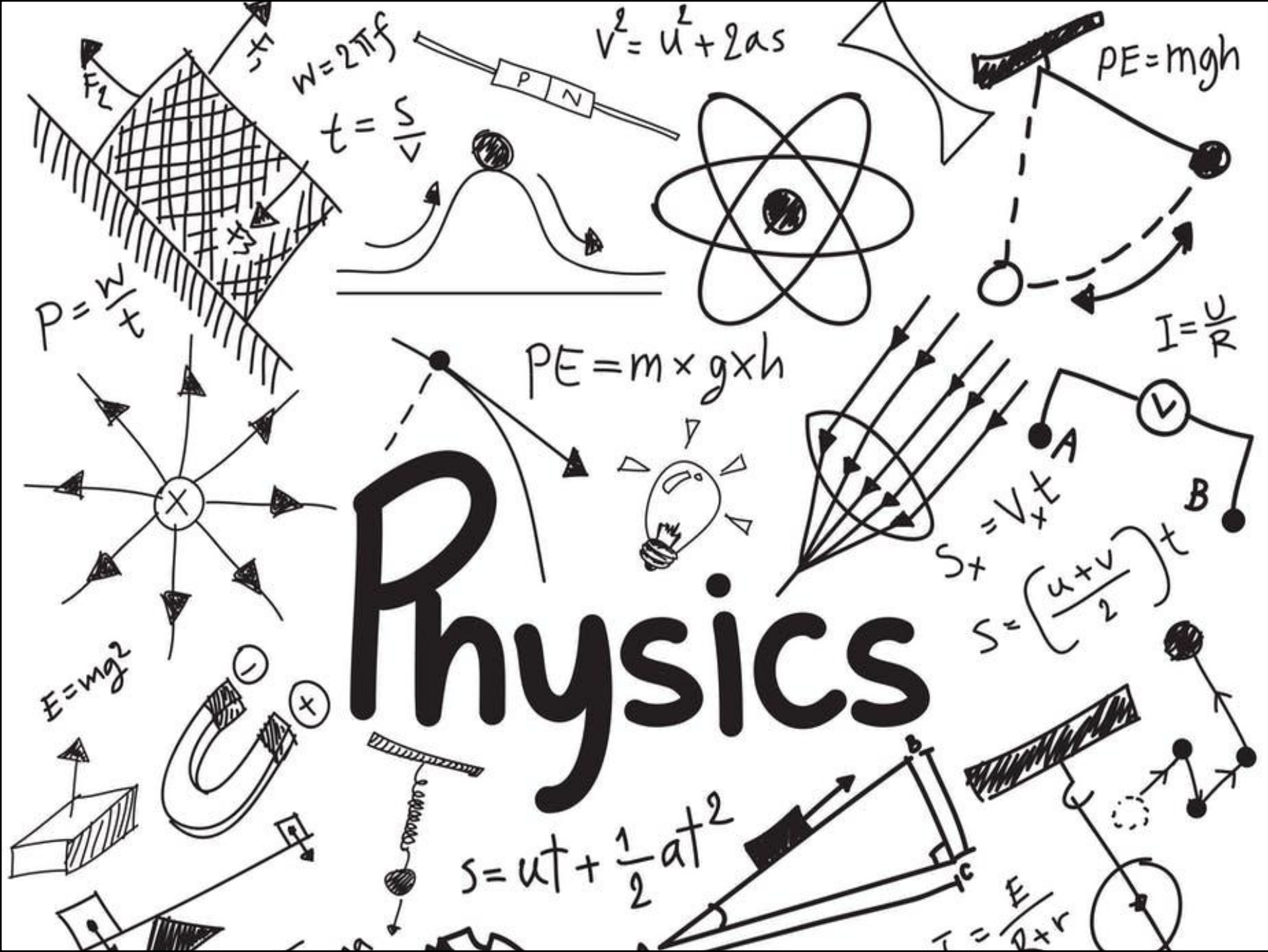


Physics





Εικόνα: Ο πίνακας ελέγχου σε ένα πιλοτήριο βοηθά τον πιλότο να κρατά το αεροσκάφος υπό έλεγχο – δηλ. να ελέγχει πόσο γρήγορα ταξιδεύει και σε ποια κατεύθυνση – επιτρέποντάς του να το προσγειώσει με ασφάλεια. Ποσότητες που ορίζονται τόσο από το μέτρο τους όσο και από την κατεύθυνσή τους (όπως η ταχύτητα) λέγονται διανυσματικές ποσότητες. (Mark Wagner/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Μαθηματικό Υπόβαθρο:
Διανύσματα



Εικόνα: Ο πίνακας ελέγχου σε ένα πιλοτήριο βοηθά τον πιλότο να κρατά το αεροσκάφος υπό έλεγχο – δηλ. να ελέγχει πόσο γρήγορα ταξιδεύει και σε ποια κατεύθυνση – επιτρέποντάς του να το προσγειώσει με ασφάλεια. Ποσότητες που ορίζονται τόσο από το μέτρο τους όσο και από την κατεύθυνσή τους (όπως η ταχύτητα) λέγονται διανυσματικές ποσότητες. (Mark Wagner/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Μαθηματικό Υπόβαθρο:
Διανύσματα

Διανύσματα

- Στην μελέτη της κίνησης είναι απαραίτητη η χρήση της έννοιας του διανύσματος

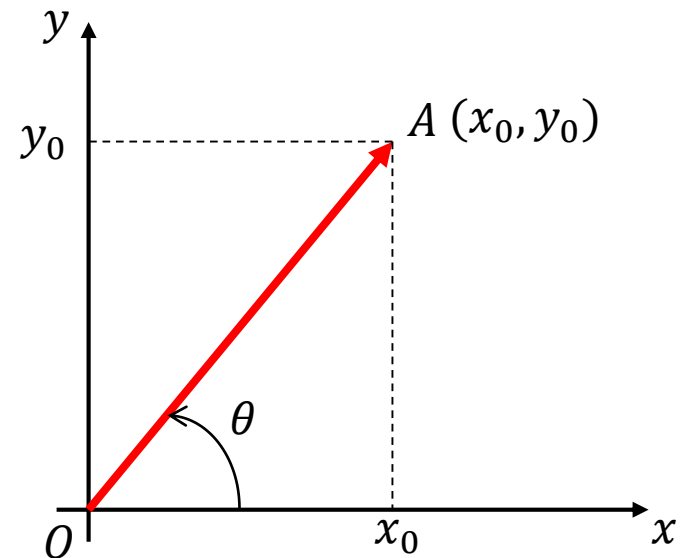
- Διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$: προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα

- Μέτρο (συμβολίζεται με $|\overrightarrow{OA}|$)

- Διεύθυνση
 - Φορά
- } κατεύθυνση

- Καρτεσιανές συντεταγμένες

- x_0 — τετμημένη
- y_0 — τεταγμένη

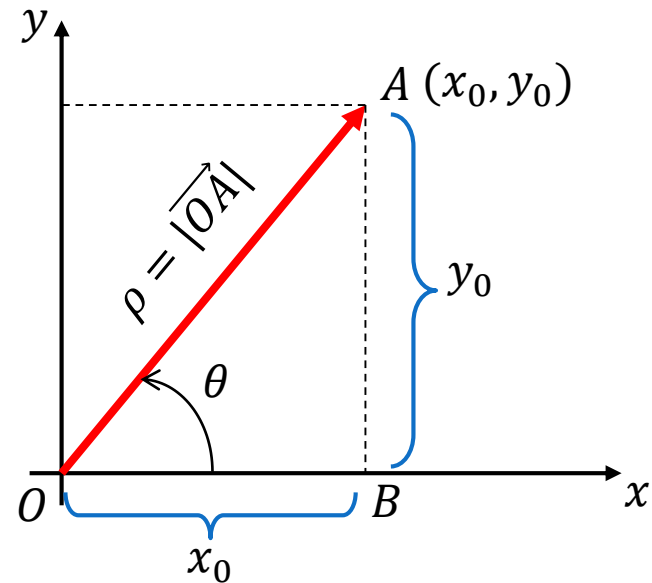


Διανύσματα

- Πολικές συντεταγμένες
- Στο τρίγωνο OAB:
 - $x_0 = \rho \cos(\theta) = \rho \cos(\theta)$
 - $y_0 = \rho \sin(\theta) = \rho \sin(\theta)$

όπου

$$\rho = |\vec{OA}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y_0}{x_0} \right)$$



Διανύσματα

- Πολικές συντεταγμένες

- Στο τρίγωνο OAB:

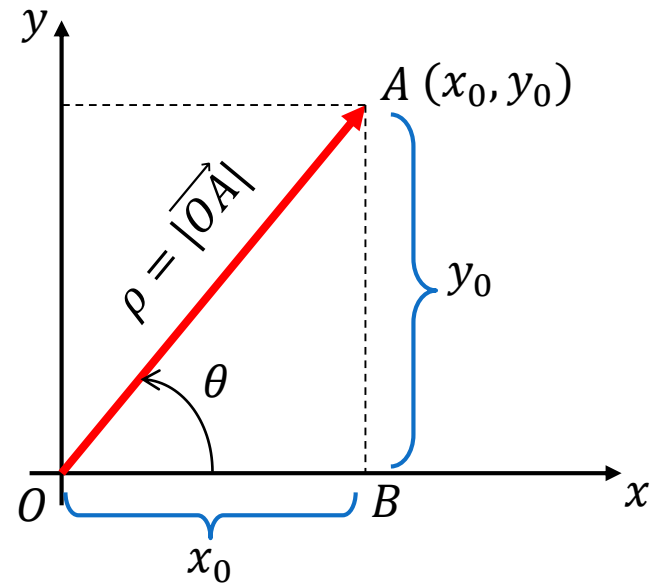
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y_0}{x_0} \right)$$

- Πώς προκύπτει η γωνία θ ?
- Από το ορθογώνιο τρίγωνο OAB

$$\varepsilon\varphi(\theta) = \tan(\theta) = \frac{y_0}{x_0}$$

$$\tan^{-1}(\tan(\theta)) = \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y_0}{x_0} \right)$$

- Γραφή πολικής μορφής: (ρ, θ)



$$f^{-1}f(x) = x$$

Διανύσματα

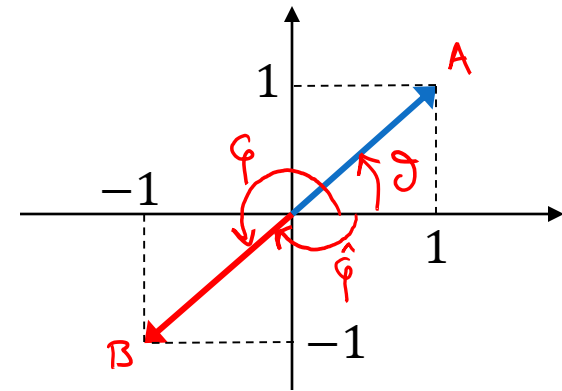
- Πολικές συντεταγμένες

- Παράδειγμα:

- Βρείτε την πολική μορφή του διανύσματος με συντεταγμένες $(x_0, y_0) = (1, 1)$ και ύστερα αυτού με συντεταγμένες $(x_0, y_0) = (-1, -1)$.

$$\rho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \theta = \tan^{-1} \frac{y_0}{x_0}$$

- $\rho = |\vec{OA}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
 $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{1} \right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \text{ (ή } 45^\circ)$
- $\rho = |\vec{OB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
 $\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{-1}{-1} \right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \text{ (!!)}$



≡ εκάθαρα, $\varphi > \frac{\pi}{4}$, οπότε χρειαζόμαστε διόρθωση κατά π για να βρούμε την σωστή $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, ή κατά $-\pi$, ώστε να βρούμε την $\hat{\varphi} = -\frac{3\pi}{4}$. Και οι δύο είναι σωστές, αλλά διαβάστε παρακάτω :)

Διανύσματα

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y_0}{x_0} \right)$$

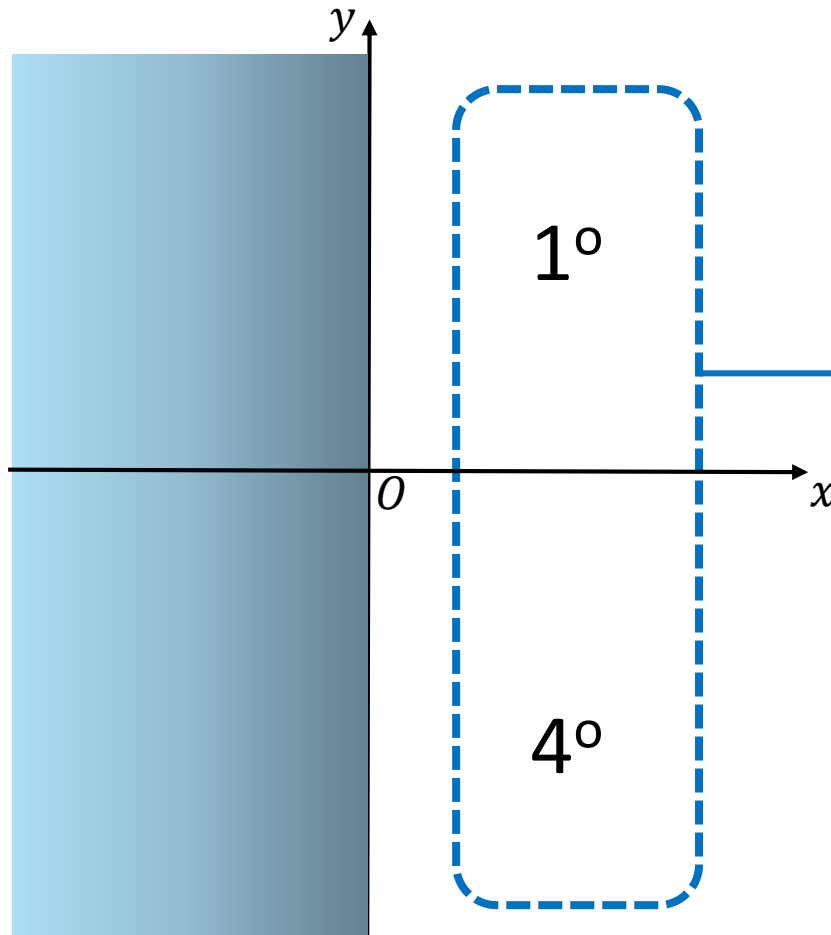
- Πολικές συντεταγμένες
- Η συνάρτηση εφαπτομένης $\tan(\theta)$ δεν είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$, π.χ.
 $\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$
- Για να ορίσουμε την αντίστροφή της, πρέπει να την «περιορίσουμε» στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- Τότε

$$\tan^{-1}(x) : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

- Η “είσοδος” της $\tan^{-1}(\cdot)$ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, αλλά η “έξοδός” της είναι πάντοτε μία γωνία αυστηρά μεταξύ $-\frac{\pi}{2}$ και $+\frac{\pi}{2}$ (ή -90° και $+90^\circ$)

Διανύσματα

• Μέτρηση γωνίας

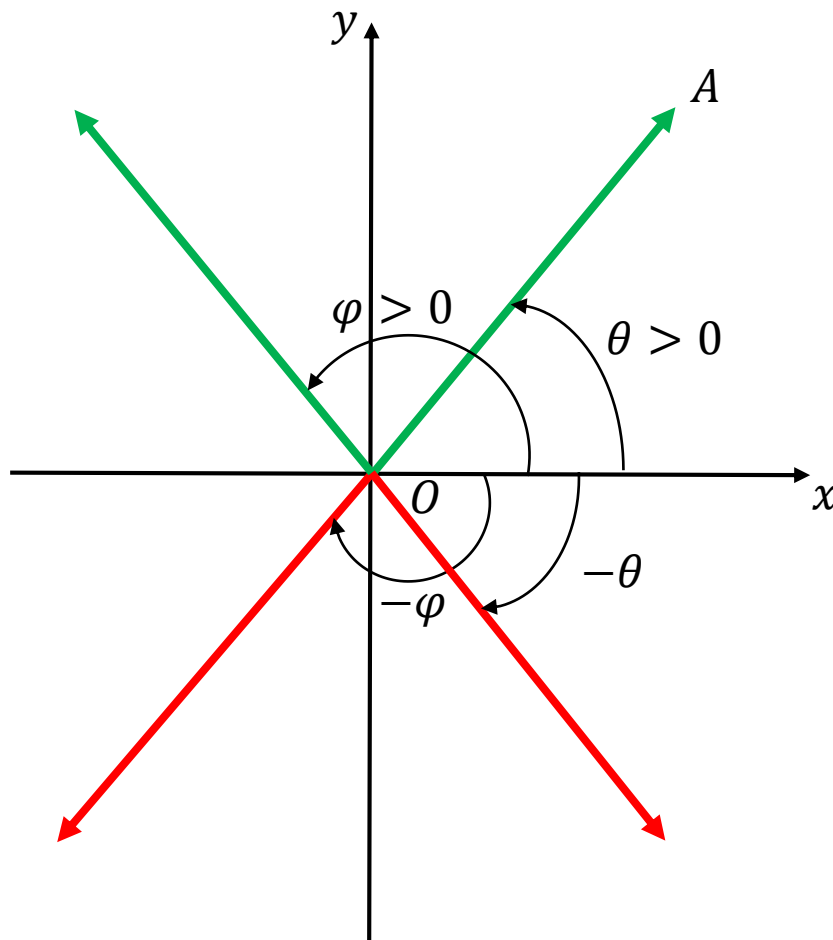


Η αντίστρ. εφαπτομένη «βγάζει γωνίες» μόνο στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Προτιμούμε να εκφράζουμε τις γωνίες μας στο **διάστημα** $(-\pi, \pi]$, καθώς και η συνάρτηση αντίστροφης εφαπτομένης επιστρέφει γωνίες με αρνητικό πρόσημο.

Διανύσματα

Μέτρηση γωνίας



Γωνίες στο $(-\pi, \pi]$ αντί του $[0, 2\pi)$

Αρνητικό πρόσημο γωνίας $\Rightarrow$
μετράται με τη φορά του ρολογιού

Πώς όμως θα «βγούμε» από το
 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ της αντίστροφης
εφαπτομένης στο $(-\pi, \pi)$?

Διανύσματα

- Πολικές συντεταγμένες
- Διόρθωση γωνίας
- Για ένα διάνυσμα με συντεταγμένες (x, y) , η γωνία που θα σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ θα είναι

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{if } x > 0, \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y \geq 0, \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y < 0, \\ +\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y < 0, \\ \text{undefined} & \text{if } x = 0 \text{ and } y = 0. \end{cases}$$

και θα ανήκει πάντα στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.

Χρησιμοποιούμε την παρακάτω παράσταση όταν θέλουμε να υπολογίσουμε γωνίες στο χαρτί μας (υπολογίζουμε μόνο την $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ στην αριθμομηχανή).

Διανύσματα

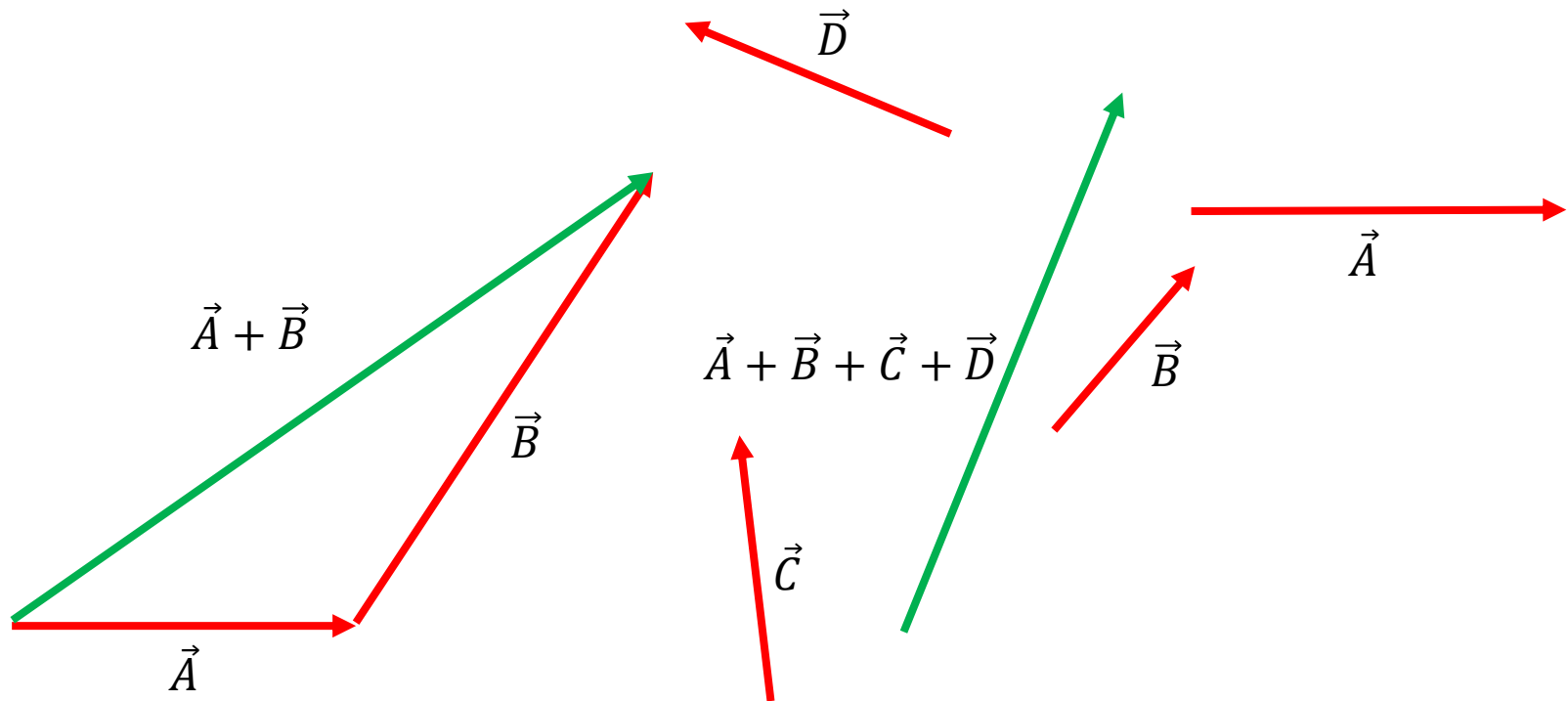
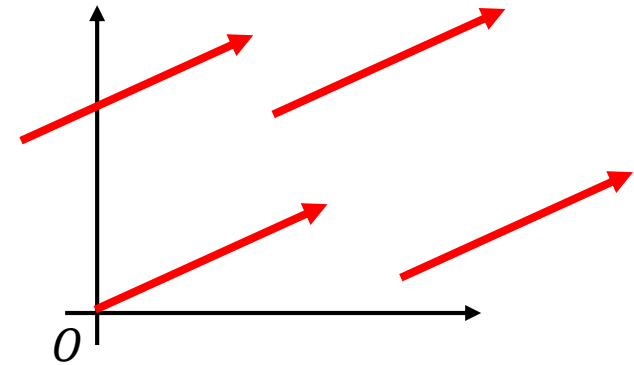
- Γωνία (σημείωση)



- Τα προγραμματιστικά περιβάλλοντα που έχουν μαθηματικές βιβλιοθήκες (όλα δηλαδή ☺) έχουν συνήθως δυο συναρτήσεις για τον υπολογισμό της γωνίας ενός διανύσματος:
 - Την $\text{atan}(c)$, με $c = y/x$, το λόγο δηλαδή της τεταγμένης προς την τετμημένη
 - Την $\text{atan2}(y, x)$, που παίρνει δυο ορίσματα, τόσο την τετμημένη x όσο και την τεταγμένη y
- Προφανώς η 2^η υπολογίζει πάντα το σωστό αποτέλεσμα γιατί λαμβάνει υπόψη τα πρόσημα των x, y

Διανύσματα

- Ιδιότητες διανυσμάτων
 - **Ισότητα** διανυσμάτων
 - Ίδιο μέτρο και κατεύθυνση
 - **Πρόσθεση** διανυσμάτων



Διανύσματα

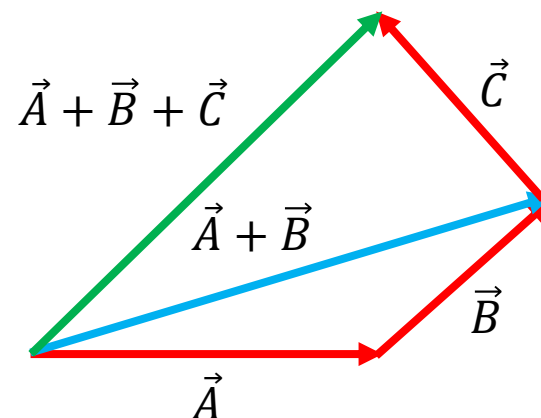
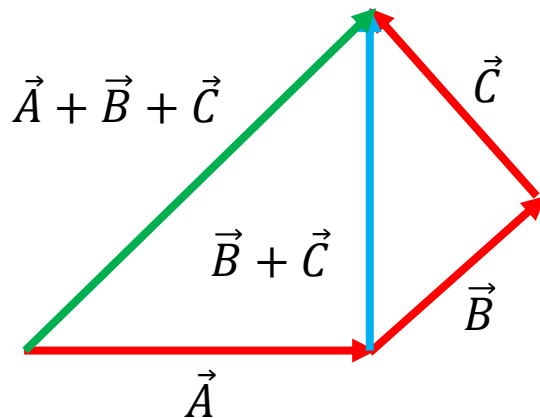
- Ιδιότητες

- Αντιμεταθετικότητα

- $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

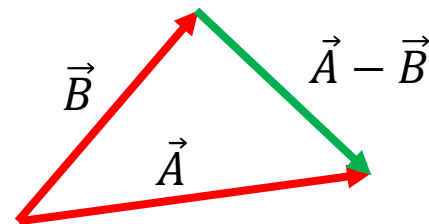
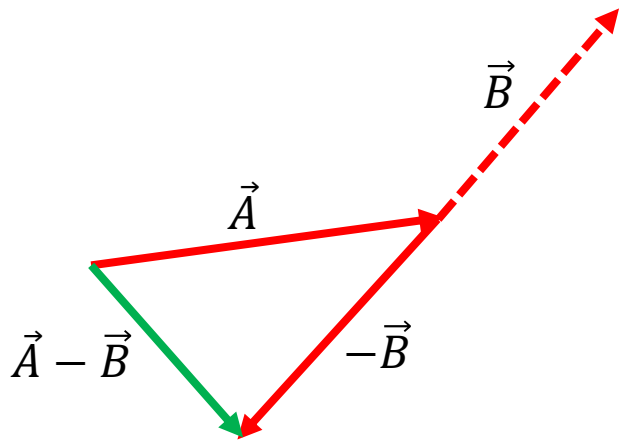
- Προσεταιριστικότητα

- $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$



Διανύσματα

- **Αρνητικό διάνυσμα** ενός διανύσματος $\vec{A}$
 - Ορίζεται ως το διάνυσμα εκείνο που όταν προστεθεί στο $\vec{A}$, μας δίνει το μηδενικό διάνυσμα, δηλ. $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$
- Παράδειγμα:
 - Πράξη $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$



Διανύσματα

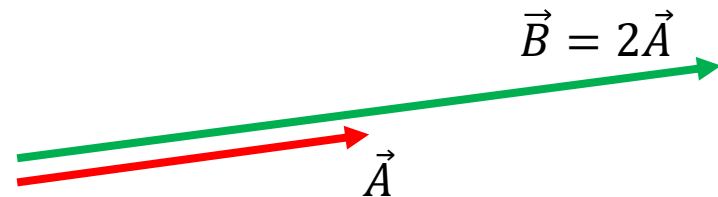
- Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό

- Το διάνυσμα διατηρεί τη διεύθυνση, αλλά αλλάζει (πιθανώς) η φορά και το μέτρο του

- $\vec{B} = m\vec{A}, m \in \mathbb{R} \Rightarrow |\vec{B}| = |m||\vec{A}|$

- $\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{A}, \text{ αν } m > 0$

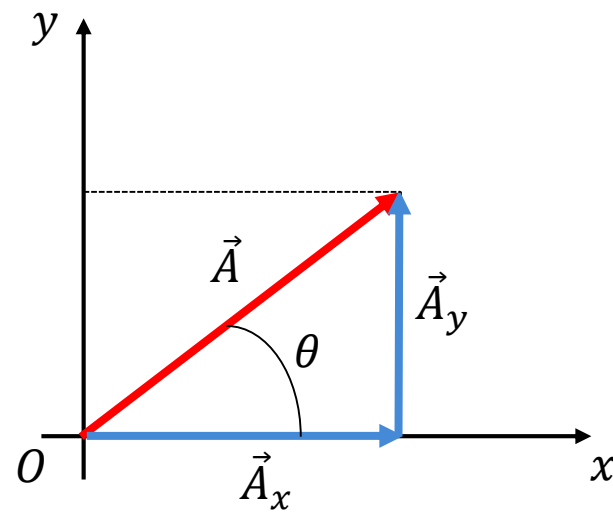
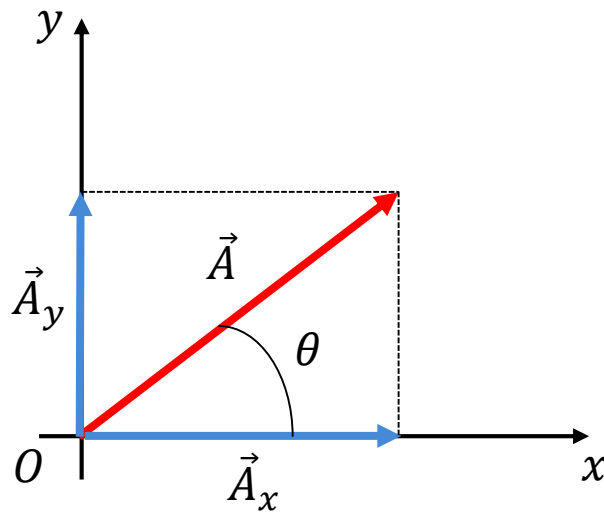
- $\vec{B} \uparrow\downarrow \vec{A}, \text{ αν } m < 0$



Διανύσματα

- Η γραφική μέθοδος είναι βολική για απλά ή διαισθητικά προβλήματα ή ως πρώτο βήμα πριν κάποια άλγεβρα
- Για μεγαλύτερη ακρίβεια και ευχρηστία, προτιμούμε την ανάλυση σε **συνιστώσες** (μια κάθετη και μια παράλληλη στον x-άξονα)

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$



Διανύσματα

- Πολλές φορές εκφράζουμε σύνθετα διανύσματα με όρους **μοναδιαίων διανυσμάτων**

- Μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

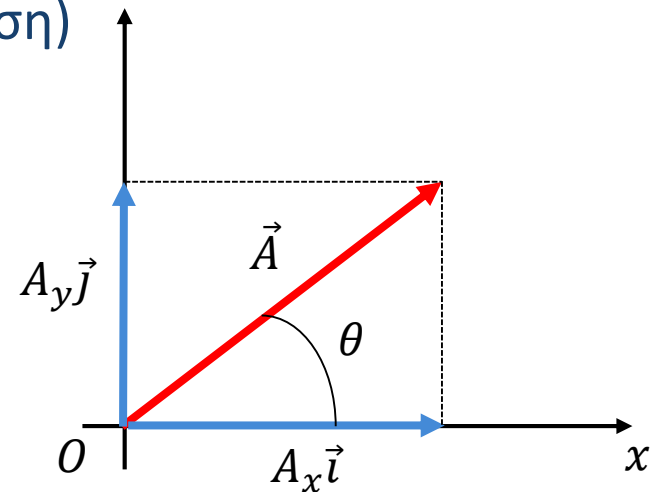
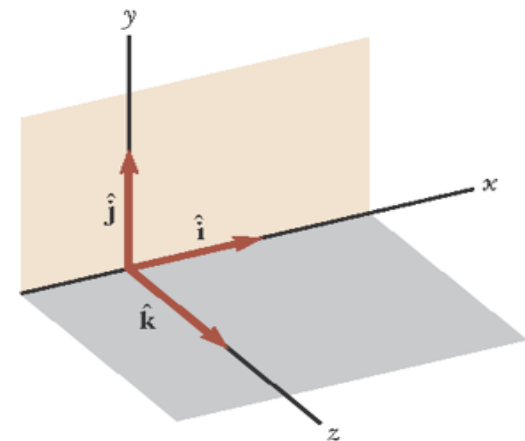
- Έχουν μέτρο 1 (μονάδα)

- Περιγράφουν έναν άξονα (διεύθυνση)

- $\vec{i} \rightarrow x, \vec{j} \rightarrow y, \vec{k} \rightarrow z$

- Κάθετα μεταξύ τους

- $\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{j} \perp \vec{k}, \vec{i} \perp \vec{k}$



Διανύσματα

- Το διάνυσμα $\vec{A}$ σε ένα επίπεδο μπορεί να γραφεί ως

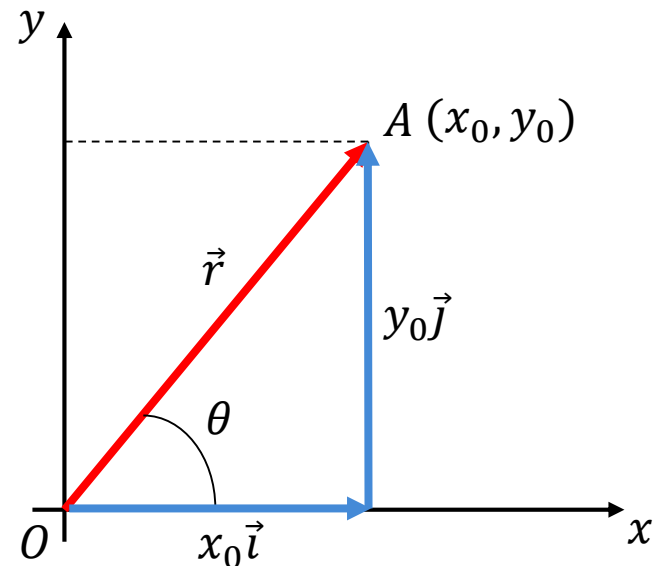
$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}, \quad A_x, A_y \in \mathbb{R}$$

με χρήση των μοναδιαίων διανυσμάτων

- **Διάνυσμα θέσης**

- Σημείο $A(x_0, y_0)$
- $\vec{r} = \overrightarrow{OA} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$
- Οι συνιστώσες του $\vec{r}$ είναι οι

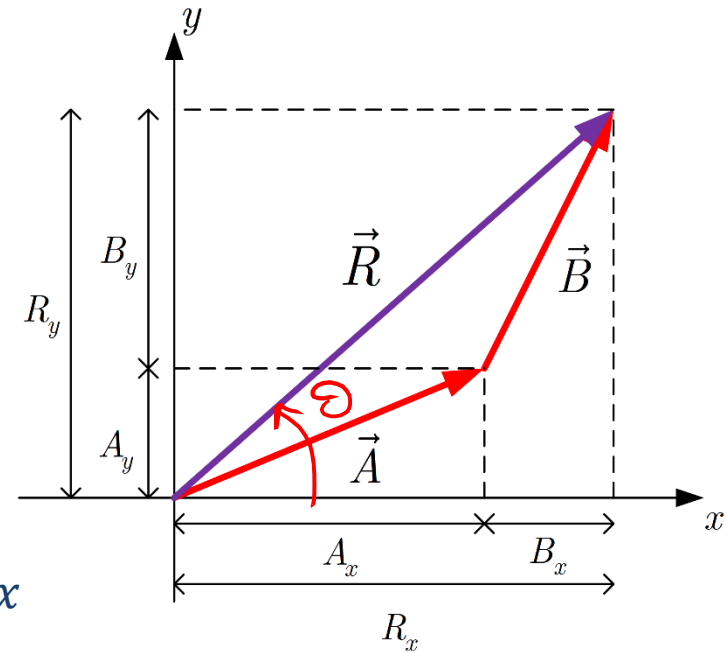
$$x_0 \vec{i}, y_0 \vec{j}$$



Διανύσματα

- $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$
- $\vec{R} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j}) + (B_x\vec{i} + B_y\vec{j})$
- $\vec{R} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j}$
- με

$$R_x = A_x + B_x$$
$$R_y = A_y + B_y$$



- Πρόσθεση όλων των x -συνιστωσών και όλων των y -συνιστωσών

- $|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2}$

- $\tan(\theta) = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x}$

$\pm\pi$, αν
χρειάζεται, όπως
είδαμε σε προηγ.
διαφάνεια

Διανύσματα

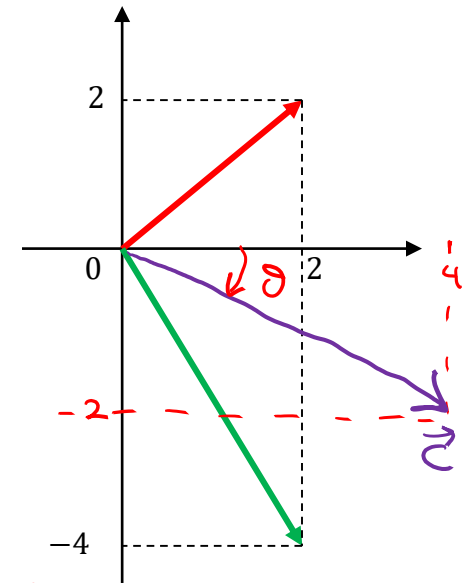
◉ Παράδειγμα:

- ◉ Βρείτε το άθροισμα των διανυσμάτων

$$\vec{A} = (2\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$\vec{B} = (2\vec{i} - 4\vec{j})$$

τόσο σε καρτεσιανή όσο και σε πολική μορφή



Είναι

$$\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{A} + \vec{B} = (2\vec{i} + 2\vec{j}) + (2\vec{i} - 4\vec{j}) \\ &= (2+2)\vec{i} + (2-4)\vec{j} = 4\vec{i} - 2\vec{j}\end{aligned}$$

Επίσης,

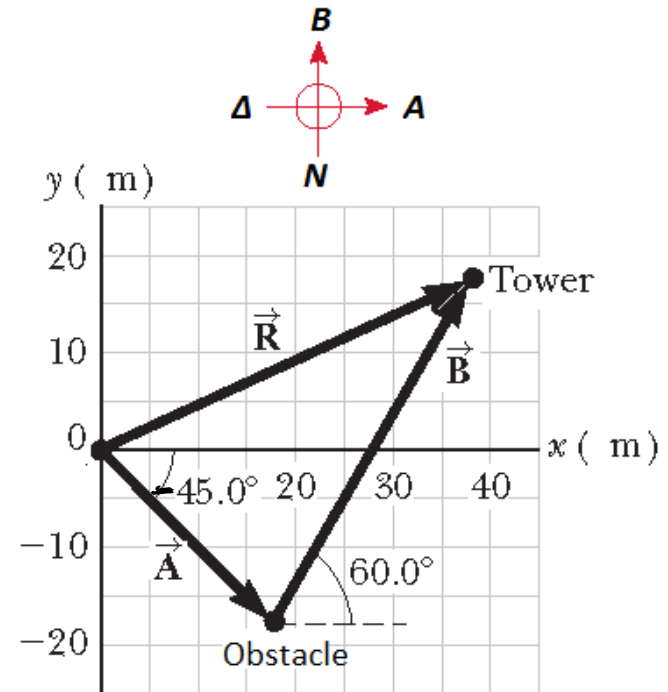
$$\begin{aligned}|\vec{C}| &= \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{-2}{4} = \tan^{-1} \left(-\frac{1}{2}\right) \simeq -26^\circ\end{aligned} \quad \left\{ \Rightarrow (2\sqrt{5}, -26^\circ) \right.$$

Διανύσματα

◉ Παράδειγμα:

◉ Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει το σημείο ελέγχου του (Δείτε το σχήμα).

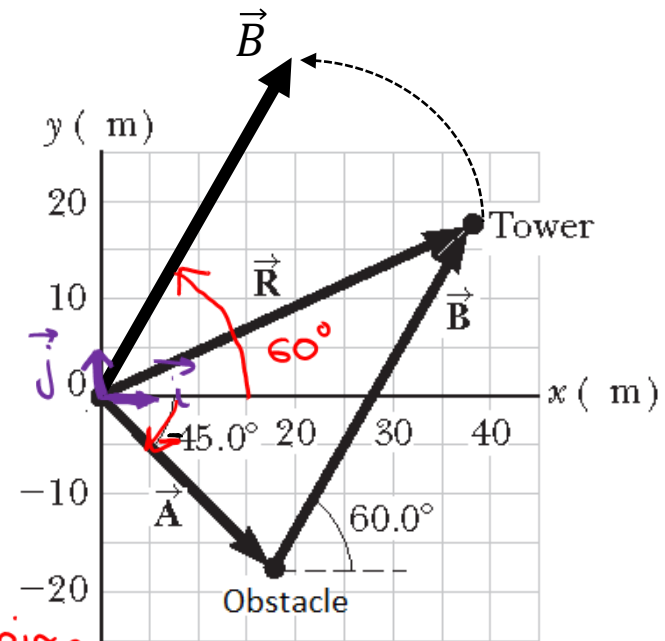
- A. Βρείτε τις συνιστώσες του ρομπότ για κάθε κίνησή του.
- B. Ορίστε τις συνιστώσες της συνολικής μετατόπισης $\vec{R}$ του ρομπότ. Βρείτε μια έκφραση για το $\vec{R}$ με όρους μοναδιαίων διανυσμάτων.
- C. Τι θα συνέβαινε αν το ρομπότ έπρεπε να επιστρέψει στο σημείο αφετηρίας του, μετά την επαφή του με το σημείο ελέγχου του; Ποιες συνιστώσες θα περιέγραφαν την πορεία του; Ποια θα ήταν η κατεύθυνση του ρομπότ;



Διανύσματα

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει το σημείο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)
- A. Βρείτε τις συνιστώσες του ρομπότ για κάθε κίνησή του.



Μεταφέραμε παράλληλα το $\vec{B}$ έτσι
ώστε να ξεκινά από το σημείο αφετηρίας
δηλ. το (0,0).

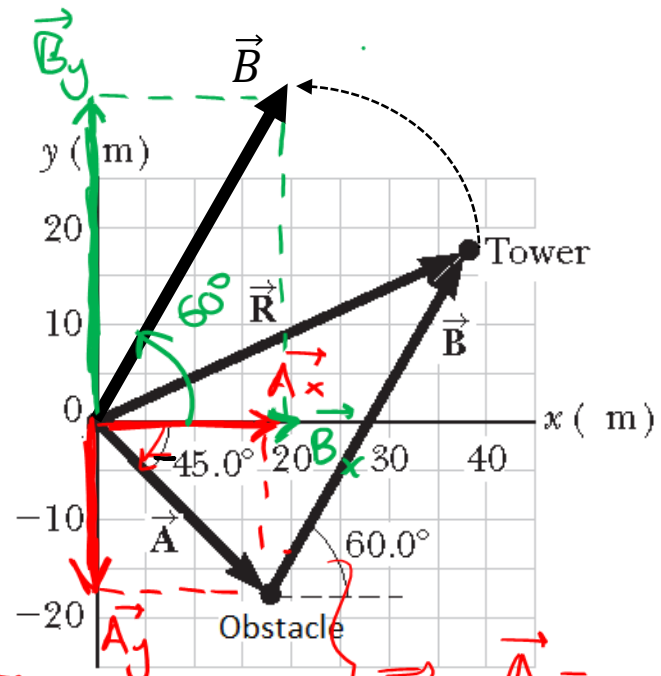
Με ταυτόχρονα βλέπαμε τα μοναδιαία διανύσματα.
Οι γωνίες είναι 60° για το διάνυσμα $\vec{B}$ και -45° για το
διάνυσμα $\vec{A}$.

Διανύσματα

• Παράδειγμα – Λύση:

• Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει το σημείο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)

Α. Βρείτε τις συνιστώσες του ρομπότ για κάθε κίνησή του.



$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} = A_x \cdot \vec{i} + A_y \cdot \vec{j}$$

$$A_x = |\vec{A}| \cdot \cos(-45^\circ) = 25 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m} \approx 17.7 \text{ m}$$

$$A_y = |\vec{A}| \cdot \sin(-45^\circ) = 25 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -25 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m}$$

$$B_x = |\vec{B}| \cdot \cos(60^\circ) = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20 \text{ m}$$

$$B_y = |\vec{B}| \cdot \sin(60^\circ) = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} \approx 34.7 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = (20\text{m})\vec{i} + (34.7\text{m})\vec{j}, \quad \vec{A} = (17.7\text{m})\vec{i} + (-17.7\text{m})\vec{j}$$

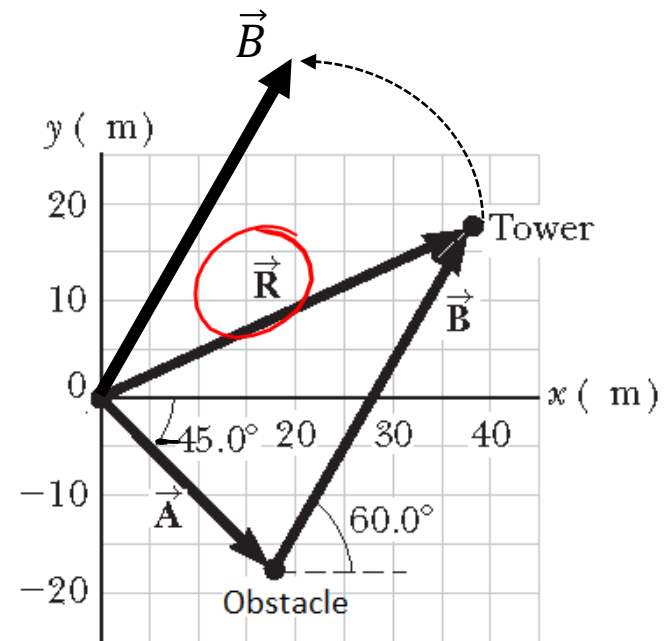
$$\Rightarrow \vec{A} = \approx 17.7\vec{i} - 17.7\vec{j}$$

Διανύσματα

◉ Παράδειγμα – Λύση:

◉ Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει το σημείο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)

Β. Ορίστε τις συνιστώσες της συνολικής μετατόπισης $\vec{R}$ του ρομπότ. Βρείτε μια έκφραση για το $\vec{R}$ με όρους μοναδιαίων διανυσμάτων.



Είναι

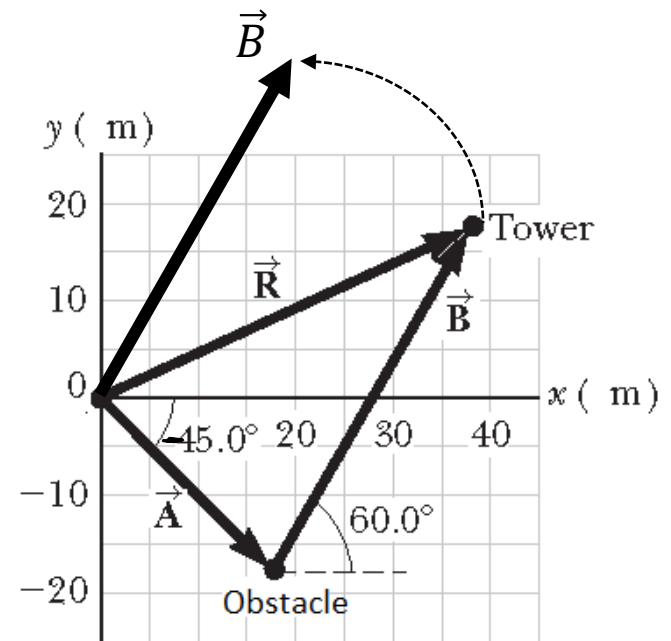
$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{A} + \vec{B} \\ &= (17.7\text{ m})\vec{i} - (17.7\text{ m})\vec{j} + (20\text{ m})\vec{i} + (34.7\text{ m})\vec{j} \\ &= (37.7\text{ m})\vec{i} + (17\text{ m})\vec{j}\end{aligned}$$

$$\vec{R} = (37.7, 17)$$

Διανύσματα

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Ένα ρομπότ αεροδρομίου προχωρά 25m ΝΑ από το σημείο αφετηρίας του. Ο αλγόριθμος αναγνώρισης εμποδίων του το σταματά και το «στέλνει» 40m σε διεύθυνση 60° ΒΑ, όπου και βρίσκει το σημείο ελέγχου του. (Δείτε το σχήμα)
- c. Τι θα συνέβαινε αν το ρομπότ έπρεπε να επιστρέψει στο σημείο αφετηρίας του, μετά την επαφή του με το σημείο ελέγχου του; Ποιες συνιστώσες θα περιέγραφαν την πορεία του; Ποια θα ήταν η κατεύθυνση του ρομπότ;



Το διάνυσμα $-\vec{R}$ περιγράφει την Ιπταίφειν πορεία

$$\begin{aligned}\text{Άρα } -\vec{R} &= -[(37.7 \text{ m})\vec{i} + (17 \text{ m})\vec{j}] \\ &= (-37.7 \text{ m})\vec{i} + (-17 \text{ m})\vec{j}\end{aligned}$$

Η κατεύθυνση του $-\vec{R}$ είναι η αντίθετη του $\vec{R}$.

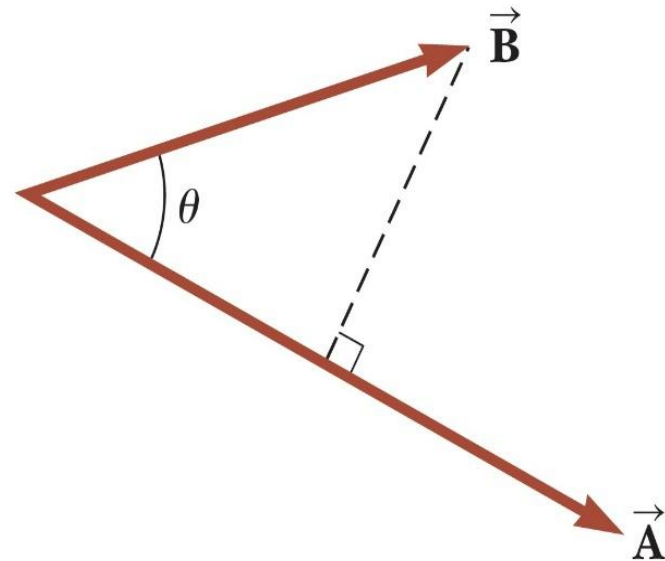
Διανύσματα

- Έστω δυο διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}$
- Το **εσωτερικό τους γινόμενο** είναι μια βαθμωτή ποσότητα (= αριθμός) που ορίζεται ως

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta)$$

με θ τη μεταξύ τους γωνία

Το εσωτερικό γινόμενο σχετίζεται με τη έννοια της προβολής του ενός διανύσματος στο άλλο και μας πληροφορεί «πόσο» από το ένα διάνυσμα «δείχνει» στην ίδια κατεύθυνση με το άλλο.



Διανύσματα

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta)$$

• Αντιμεταθετικότητα

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

• Επιμεριστικότητα

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

• Ειδικές περιπτώσεις

- $\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

- $\vec{A} \uparrow\uparrow \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}|$

- $\vec{A} \uparrow\downarrow \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = -|\vec{A}| |\vec{B}|$

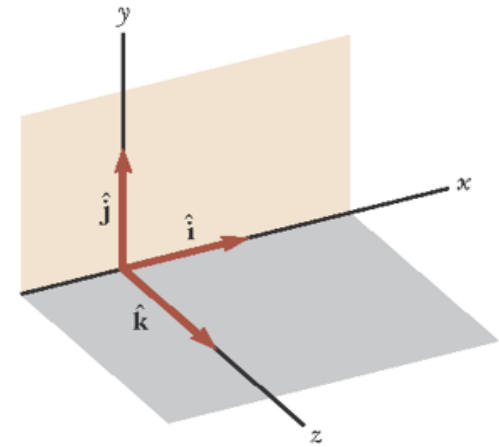
Διανύσματα

- Μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
 - Ορίζουν ένα 3Δ χώρο
- Εύκολα αποδεικνύεται (κάντε το! 😊) ότι

$$\begin{aligned}\vec{i} \cdot \vec{i} &= \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0\end{aligned}$$

- Για $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$, $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$,
έχουμε

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

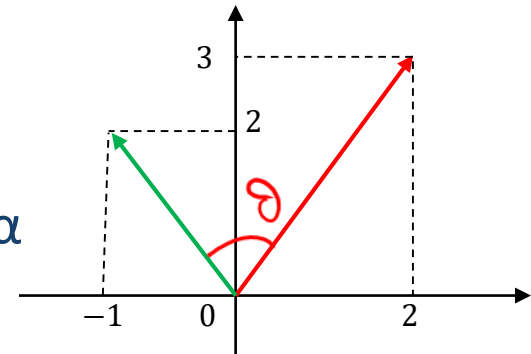


$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta)$$

Διανύσματα

• Παράδειγμα:

- Βρείτε το εσωτερικό γινόμενο και τη γωνία μεταξύ των δυο διανυσμάτων



$$\vec{A} = (2\vec{i} + 3\vec{j})$$

$$\vec{B} = (-\vec{i} + 2\vec{j})$$

≡ έραφ.ε ότι $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$, άρα

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j}) = 2 \cdot (-1) + (3 \cdot 2) = -2 + 6 = 4$$

≡ έραφ.ε ότι $\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$ ①

$$|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

②

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{①} \\ \text{②} \end{array} \right. \cos \theta = \frac{4}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

Άρα $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right) \approx 60^\circ$



Τέλος Διάλεξης
