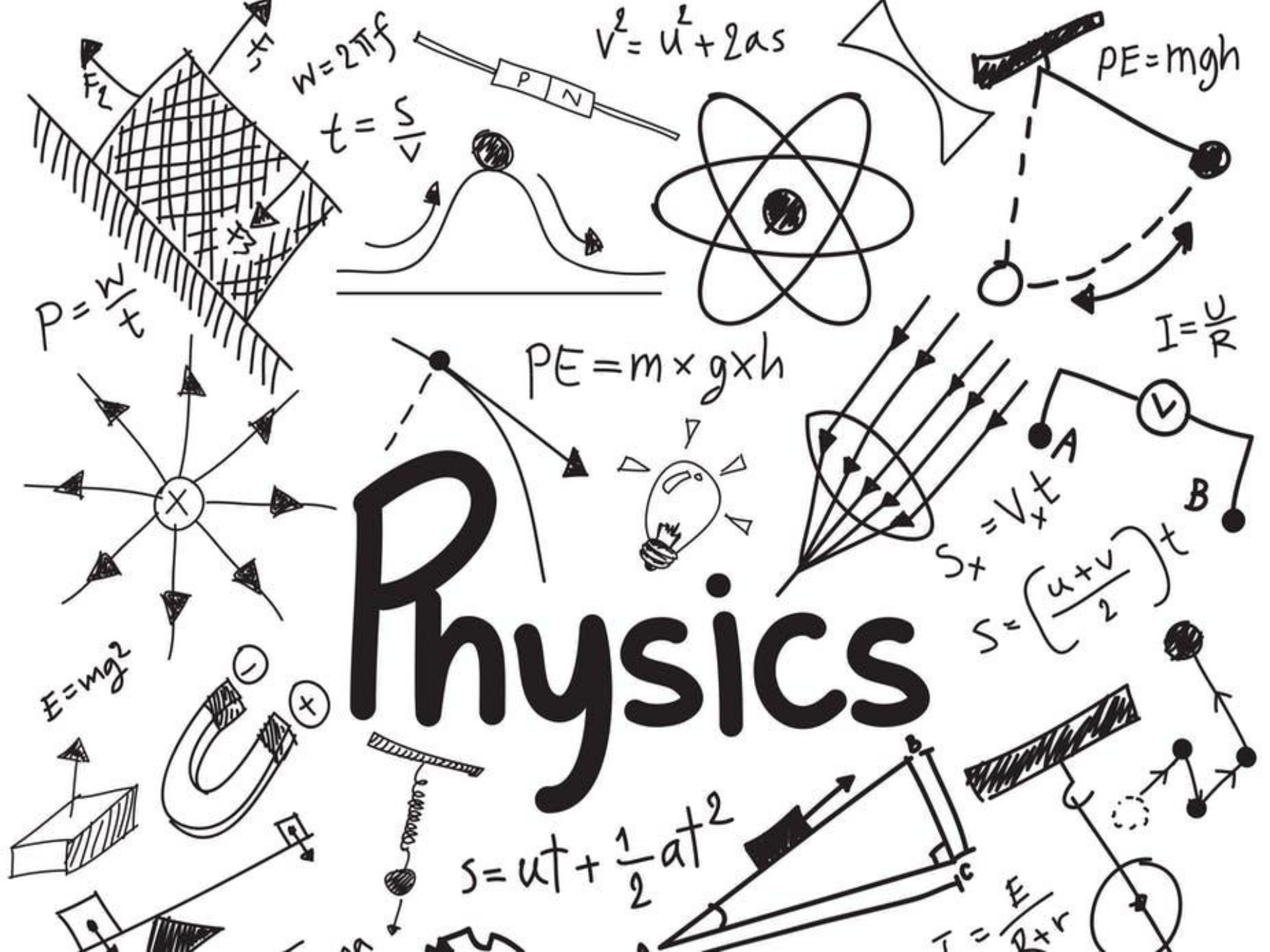

Physics
$w = 2\pi f$
$v^2 = u^2 + 2as$
$PE = mgh$
$t = \frac{s}{v}$
P N
F_2
F_1
F_3
$P = \frac{W}{t}$
$PE = m \times g \times h$
$I = \frac{U}{R}$
A
B
V
$S_x = V_x t$
$S = \left(\frac{u+v}{2}\right) t$
$E = mg^2$
$s = ut + \frac{1}{2}at^2$
$I = \frac{E}{R+r}$

Εικόνα: Η κίνηση μπορεί να είναι αναζωογονητική και όμορφη. Αυτά τα σκάφη ανταποκρίνονται σε δυνάμεις αέρα, νερού, και του βάρους του πληρώματος όσο προσπαθούν να ισορροπήσουν στην άκρη του.

1η Ενότητα
Κλασική Μηχανική

Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση

Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Κίνηση σε έναν οριζόντιο/κατακόρυφο άξονα
  - Σώμα == σωματίδιο
    - Θεωρούμε απειροστά μικρό το μέγεθός του
    - Αδιαφορούμε **πλήρως** για τις διαστάσεις του
- Θα γνωρίσουμε τους βασικούς ορισμούς της κινητικής…
  - …αρχικά σε μια διάσταση και αργότερα σε δυο διαστάσεις
- Αυτοί είναι:
  - **Η Θέση**
  - **Η Ταχύτητα**
  - **Η Επιτάχυνση**

ενός σώματος

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Θέση $\vec{x}$** : διάνυσμα που ορίζει την τοποθεσία του σώματος σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς (όπως το 0)
  - Διανυσματικό μέγεθος
    - Θα θεωρήσουμε έναν βαθμονομημένο άξονα στον οποίο γίνεται η κίνηση – το μοναδιαίο του διάνυσμα είναι το $\vec{\imath}$ (οριζόντια κίνηση) ή το $\vec{\jmath}$ (κατακόρυφη κίνηση)
    - Το **πρόσημο** μας δηλώνει τη φορά του διανύσματος
      - $\vec{x}_1 = +3\vec{\imath}, \quad \vec{x}_2 = -12\vec{\imath}$

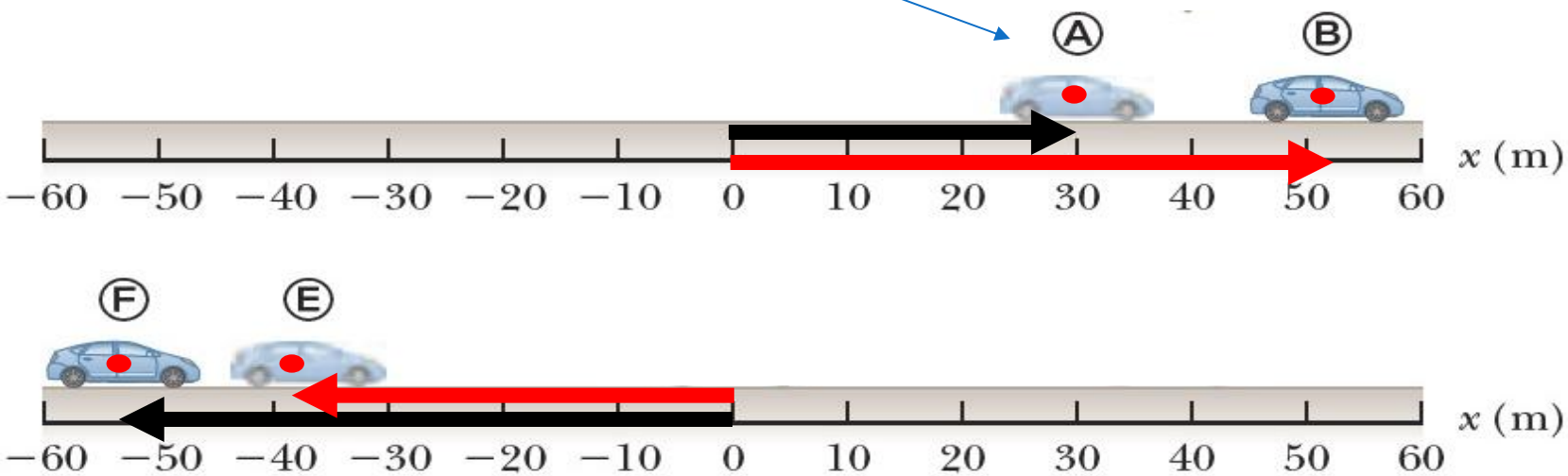
- Το πρόσημο μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό – ως πρόσημο τιμής στο βαθμονομημένο άξονα
  - Θετικό πρόσημο : το διάνυσμα ξεκινά από ένα σημείο αναφοράς (το 0) και καταλήγει σε κάποια θετική τιμή του άξονα
  - Αντίθετα για αρνητική τιμή

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Παράδειγμα:

$\vec{x_A} = (30\ m)\vec{\imath}$

$\vec{x_B} = (52\ m)\vec{\imath}$



$\vec{x_F} = (-55\ m)\vec{\imath}$ $\vec{x_E} = (-38\ m)\vec{\imath}$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ (displacement)**: η μεταβολή στη θέση ενός σωματιδίου
- <u>Ορισμός</u>:

$$\Delta\vec{x} \equiv \vec{x}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{x}_{\alpha\rho\chi}$$

  - με $\vec{x}_{\tau\varepsilon\lambda}, \vec{x}_{\alpha\rho\chi}$ την τελική και την αρχική θέση του σωματιδίου
  - Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό: $\vec{x}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow \vec{x}_f$, $\vec{x}_{\alpha\rho\chi} \rightarrow \vec{x}_i$
- Προσοχή: **απόσταση d ≠ μέτρο μετατόπισης** $|\Delta\vec{x}|$!
- Παράδειγμα:

Η απόσταση που διανύει ένας αθλητής μπάσκετ, αν απλουστευμένα υποθέσουμε ότι κινείται σε ευθεία γραμμή, είναι μερικά χιλιόμετρα, αλλά η μετατόπιση από την αρχική θέση του (κέντρο γηπέδου) ως την τελική (ξανά στην ίδια περίπου θέση) είναι πολύ μικρότερη (ως μέτρο)!

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μετατόπιση $\Delta\vec{x}$** : διανυσματικό μέγεθος!
  - Έχει μέτρο, διεύθυνση, φορά

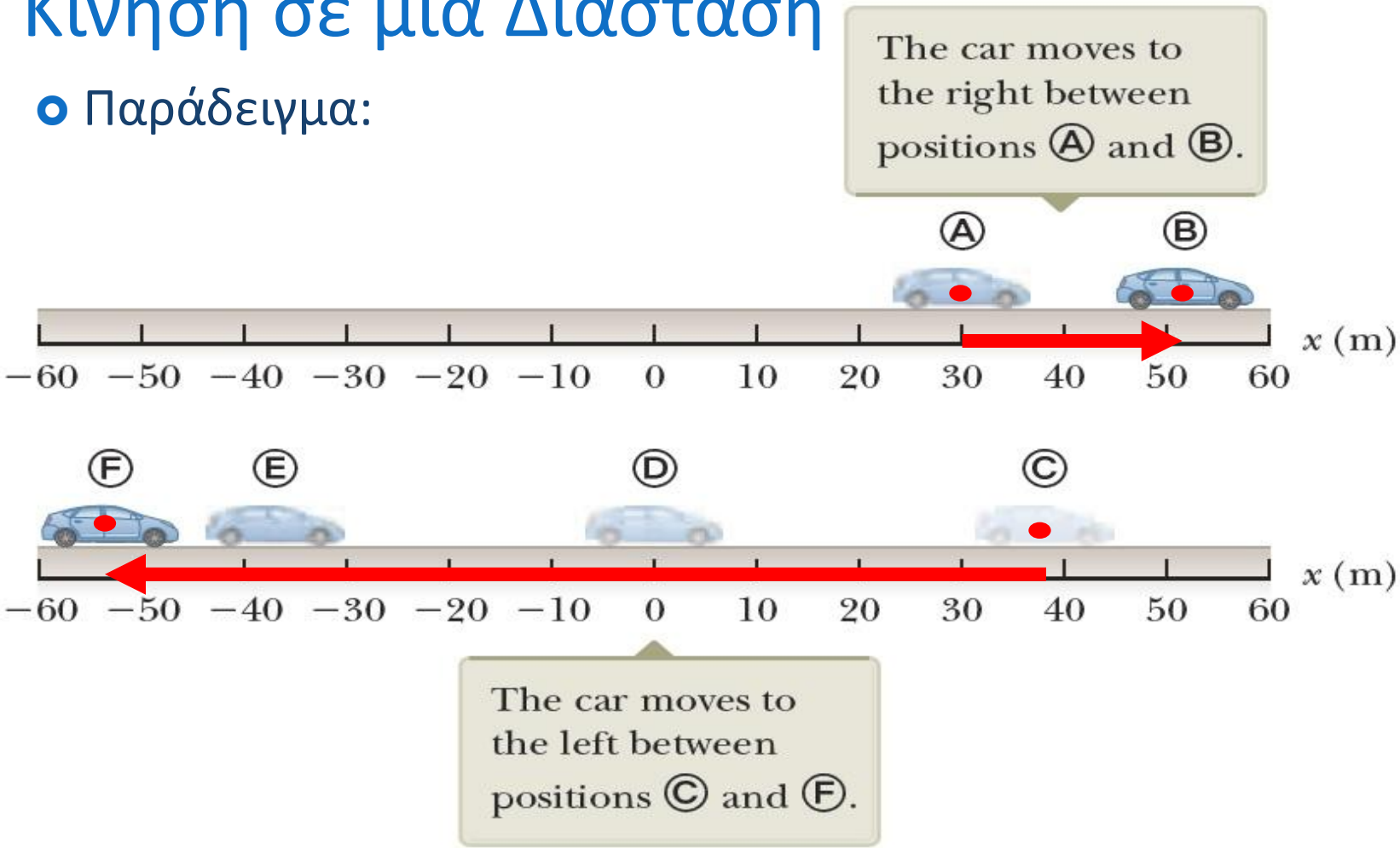
- Αν $\Delta\vec{\mathrm{x}} = \vec{x}_f - \vec{x}_i = \left(x_f - x_i\right)\vec{\imath} = \Delta\mathrm{x}\,\vec{\imath}$:
- $\Delta\mathrm{x} = x_f - x_i > 0 \Longleftrightarrow$ κίνηση προς τα δεξιά
- $\Delta x = x_f - x_i < 0 \Longleftrightarrow$ κίνηση προς τα αριστερά

- Στο Διεθνές Σύστημα, μονάδα μέτρησης της μετατόπισης (όπως και της θέσης) είναι το

1 μέτρο (m)

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Παράδειγμα:



$$\Delta\vec{x}_{A\to B} = \vec{x}_{\mathrm{B}} - \vec{x}_A = 52\vec{\imath} - 30\vec{\imath} = (22\ m)\ \vec{\imath}$$
$$\Delta\vec{x}_{C\to F} = \vec{x}_{\mathrm{F}} - \vec{\mathrm{x}}_{\mathrm{C}} = -55\vec{\imath} - 38\vec{\imath} = (-93\ m)\ \vec{\imath}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **<u>Hint:</u>**
- Μπορούμε να κάνουμε **αλγεβρικές** πράξεις με τις ποσότητες των θέσεων και μετατοπίσεων
- Στο τέλος μπορούμε να προσθέσουμε την πληροφορία της κατεύθυνσης…
  - …με χρήση του διανύσματος $\vec{\imath}$ (ή του $\vec{\jmath}$ στην περίπτωση της κατακόρυφης κίνησης)

- **Παράδειγμα**:
- Για ένα σώμα που κινείται από τη θέση $\vec{x}_A = 3\vec{\imath}$ στη θέση $\vec{x}_B = -8\vec{\jmath}$, βρείτε τη μετατόπισή του.

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}_B - \vec{x}_A$$
$$\Delta x = x_B - x_A = -8 - 3 = -11 \text{ m}$$

- Άρα

$$\Delta\vec{x} = (-11 \text{ m})\vec{\imath}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μέση ταχύτητα (average velocity)**:

$$\vec{u}_{avg} \equiv \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta \mathrm{t}}$$

  - Διάνυσμα: έχει επίσης μέτρο, διεύθυνση και φορά!
  - Απαιτούνται δυο σημεία (αρχικό & τελικό)
  - Ίδιο πρόσημο με $\Delta\vec{x}$ – γιατί?

- **Μέση αριθμητική ταχύτητα (average speed):**
  - $s_{avg} \equiv \frac{d}{\Delta \mathrm{t}}$, όπου d η απόσταση
  - Βαθμωτό μέγεθος – όχι διάνυσμα !

Μονάδα μέτρησης:

$$\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}$$

(μέτρο ανά δευτ/το)

- Προσοχή στη διαφορά τους!

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Στιγμιαία Ταχύτητα (instantaneous velocity)**
  - Διάνυσμα: έχει μέτρο, διεύθυνση και φορά
  - Το διάνυσμα της ταχύτητας για κάθε χρονική στιγμή t !
  - Αλλιώς: η μέση ταχύτητα όταν μετριέται σε $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{u}_{avg} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

  - Όμως

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{u}_x(t)$$

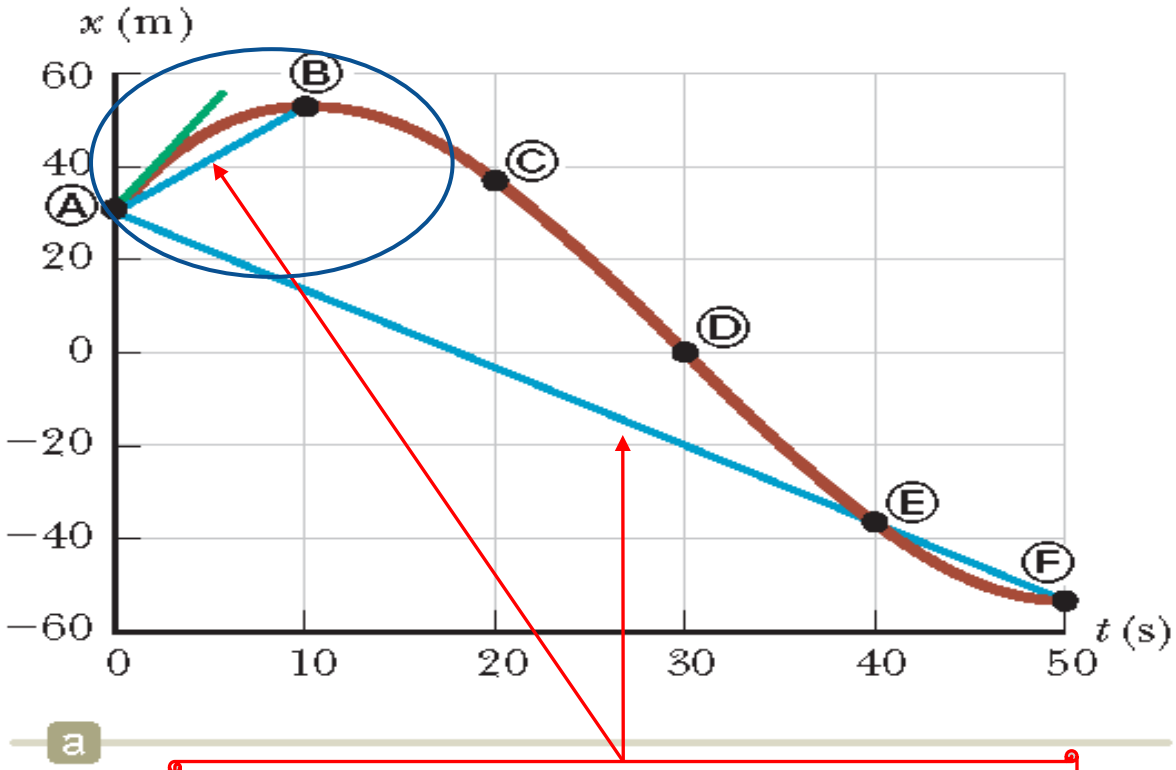
- Άρα: **η στιγμιαία ταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης θέσης ως προς το χρόνο**

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Στιγμιαία Ταχύτητα**

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{u}_{avg} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{u}_x(t)$$

- Παράδειγμα:



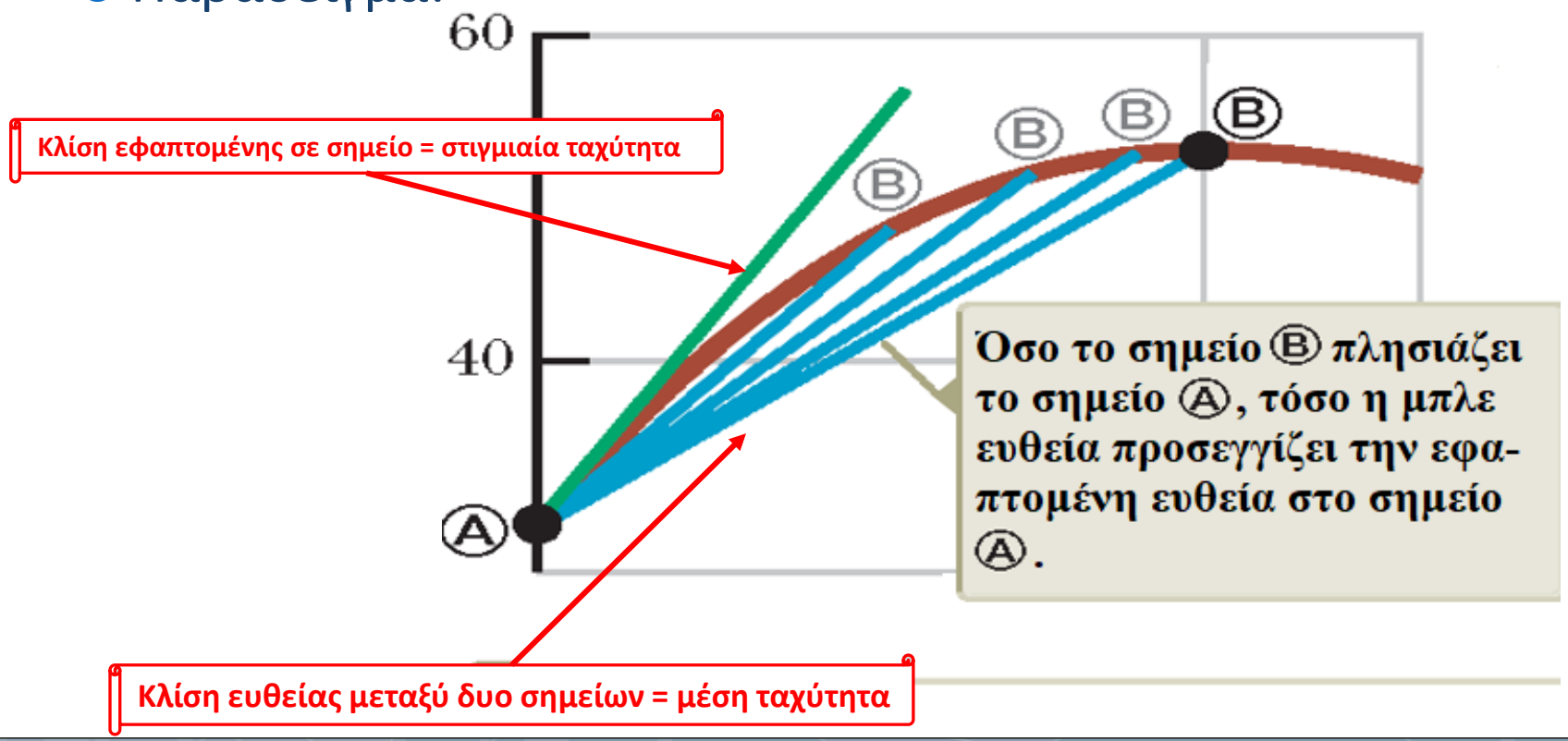
Κλίση ευθείας AF (ή AB) = μέση ταχύτητα

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Στιγμιαία Ταχύτητα**

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{u}_{avg} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{u}_x(t)$$

- Παράδειγμα:



Κίνηση σε μια Διάσταση

- **<u>Hint:</u>**
- Μπορούμε να κάνουμε **αλγεβρικές** πράξεις με τις ποσότητες των ταχυτήτων, όπως ακριβώς κάναμε με τις θέσεις και μετατοπίσεις
- Στο τέλος μπορούμε να προσθέσουμε την πληροφορία της κατεύθυνσης…
  - …με χρήση του διανύσματος $\vec{\imath}$ (ή του $\vec{\jmath}$ στην περίπτωση της κατακόρυφης κίνησης)

- **Παράδειγμα**:
- Για ένα σώμα που κινείται από τη θέση $\vec{x}_A = 3\vec{\imath}$ στη θέση $\vec{x}_B = -8\vec{\jmath}$, σε χρονικό διάστημα $\Delta\mathrm{t} = 5.5$ δευτερόλεπτα, βρείτε τη μέση ταχύτητά του.

$$\Delta x = x_B - x_A = -8 - 3 = -11 \text{ m}$$

$$u_{\mathrm{avg}} = \frac{\Delta \mathrm{x}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{-11}{5.5} = -2 \text{ m/s}$$

- Άρα

$$\vec{u}_{\mathrm{avg}} = (-2 \text{ m/s})\vec{\imath}$$

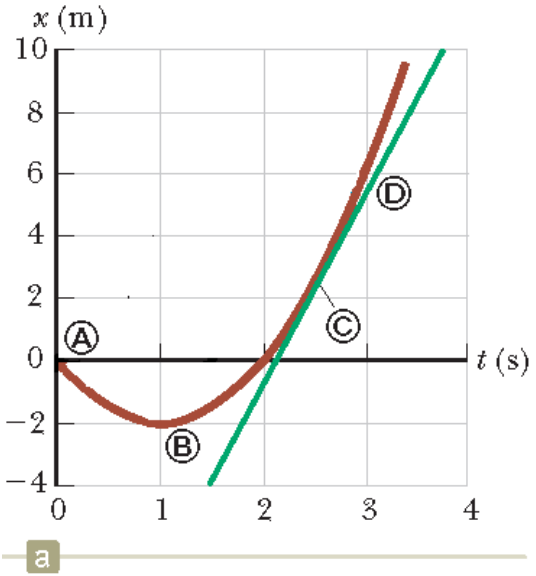
Κίνηση σε μια Διάσταση

- **<u>Παράδειγμα</u>:**
- Σωματίδιο κινείται στον οριζόντιο άξονα, με τη θέση του να ορίζεται από τη σχέση

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

όπου x είναι η θέση σε m, και t είναι ο χρόνος σε s, όπως στο Σχήμα (α).

- Α. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.
- Β. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα.
- C. Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.

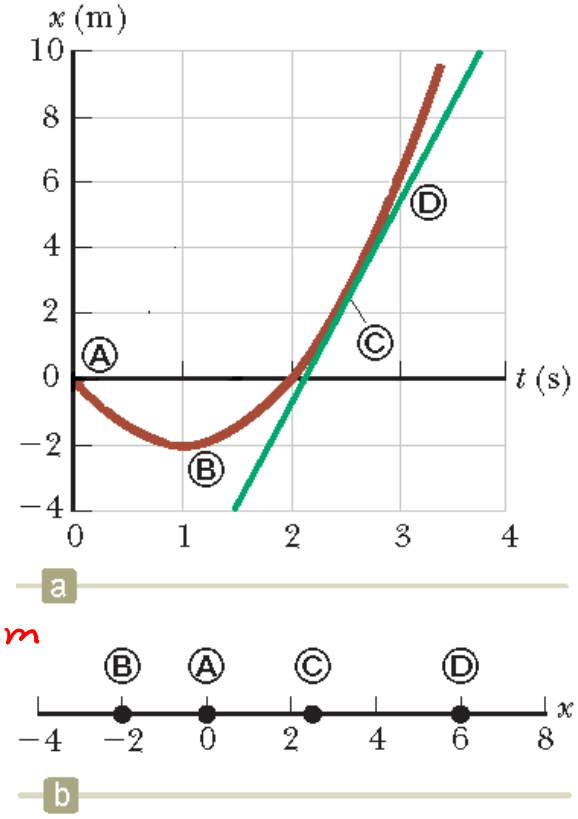


Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Παράδειγμα – Λύση:**

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

- Α. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.



Η διαδρομή $t=0 \to t=1$ είναι η $A \to B$.

Άρα $\Delta\vec{x}_{A\to B} = \vec{x}_B - \vec{x}_A = \Delta x_{A\to B} \cdot \vec{i}$

$\Delta x_{A\to B} = x(t=1) - x(t=0) = -2 - 0 = -2\ m$

δηλ. $\Delta\vec{x}_{A\to B} = (-2\ m)\,\vec{i}$

Η διαδρομή $t=1 \to t=3$ είναι η $B \to D$

Άρα $\Delta\vec{x}_{B\to D} = \vec{x}_D - \vec{x}_B = \Delta x_{B\to D} \cdot \vec{i}$

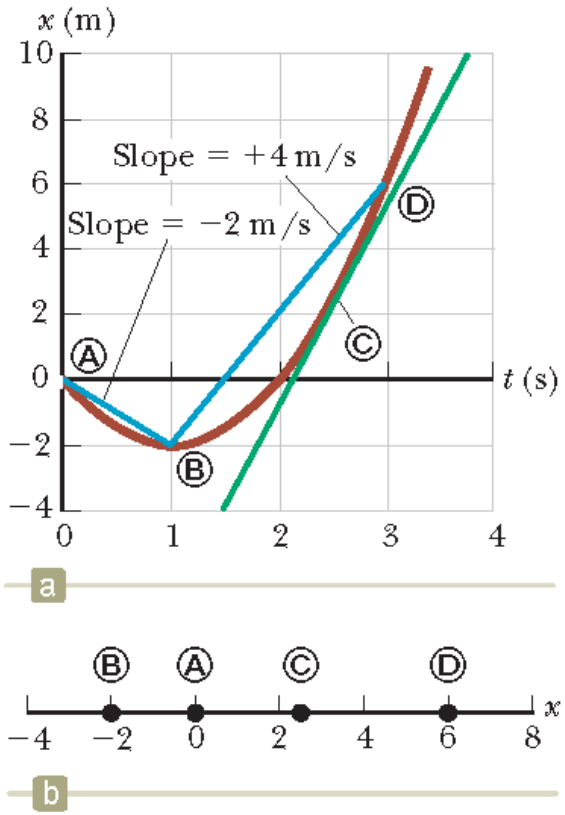
$\Delta x_{B\to D} = x(t=3) - x(t=1) = 6 - (-2) = 8\ m$, δηλ. $\Delta\vec{x}_{B\to D} = (8\ m)\,\vec{i}$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Παράδειγμα – Λύση:**

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

- Β. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα.



Από προηγ. ερώτημα,

$$\Delta\vec{x}_{A\to B} = (-2\,m)\,\vec{i} \Rightarrow u_{avg}^{A\to B} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{(-2\,m)\,\vec{i}}{1-0} = \left(-2\,\frac{m}{s}\right)\vec{i}$$

$$\Delta\vec{x}_{B\to D} = (8\,m)\,\vec{i} \Rightarrow u_{avg}^{B\to D} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{(8\,m)\,\vec{i}}{3-1} = \left(4\,\frac{m}{s}\right)\vec{i}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **<u>Παράδειγμα – Λύση</u>:**

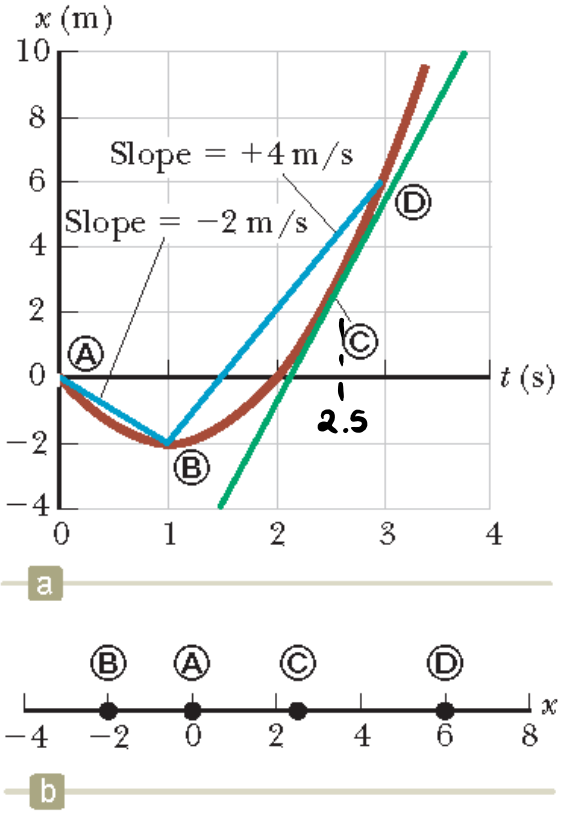
$$x(t) = -4t + 2t^2$$

- C. Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.

Ξέραμε ότι $\vec{u}(t) = x'(t)$

$= -4 + 4t$

Για $t = \frac{5}{2}$ s, $\vec{u}\left(\frac{5}{2}\right) = \left(6\ \frac{m}{s}\right)\vec{i}$



Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μοντέλο κίνησης:** υπό ***σταθερή ταχύτητα***

$$u_{avg} = u_x = \frac{\Delta \mathrm{x}}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta x = u_x \Delta \mathrm{t} \Leftrightarrow \left(x_f - x_i\right) = u_x \Delta \mathrm{t}$$

- Άρα

$$x_f = x_i + u_x \Delta \mathrm{t}$$

- Αν θεωρήσουμε ότι $t_i = 0$:

$$\Delta t = t_f - t_i = t_f = t$$

και τότε

$$\boxed{x_f = x_i + u_x t}$$

- Επίσης, το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό και ίσο με

$$u = \frac{d}{\Delta \mathrm{t}}$$

όπου d η απόσταση που διανύθηκε

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Επιτάχυνση (acceleration)**
  - Η μεταβολή της ταχύτητας προϊόντος του χρόνου

- **Μέση επιτάχυνση (average acceleration)**

$$\vec{a}_{x,avg} \equiv \frac{\Delta\vec{u}_x}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_{xf} - \vec{u}_{xi}}{t_f - t_i}$$

- **Στιγμιαία επιτάχυνση (inst. acceleration)**

$$\vec{a}_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{u}_x}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}_x}{dt}$$

- Αφού όμως

$$\frac{d}{dt}\vec{u}_x = \frac{d}{dt}\frac{d\vec{x}}{dt}$$

είναι

$$\vec{a}_x = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

Μονάδα μέτρησης:

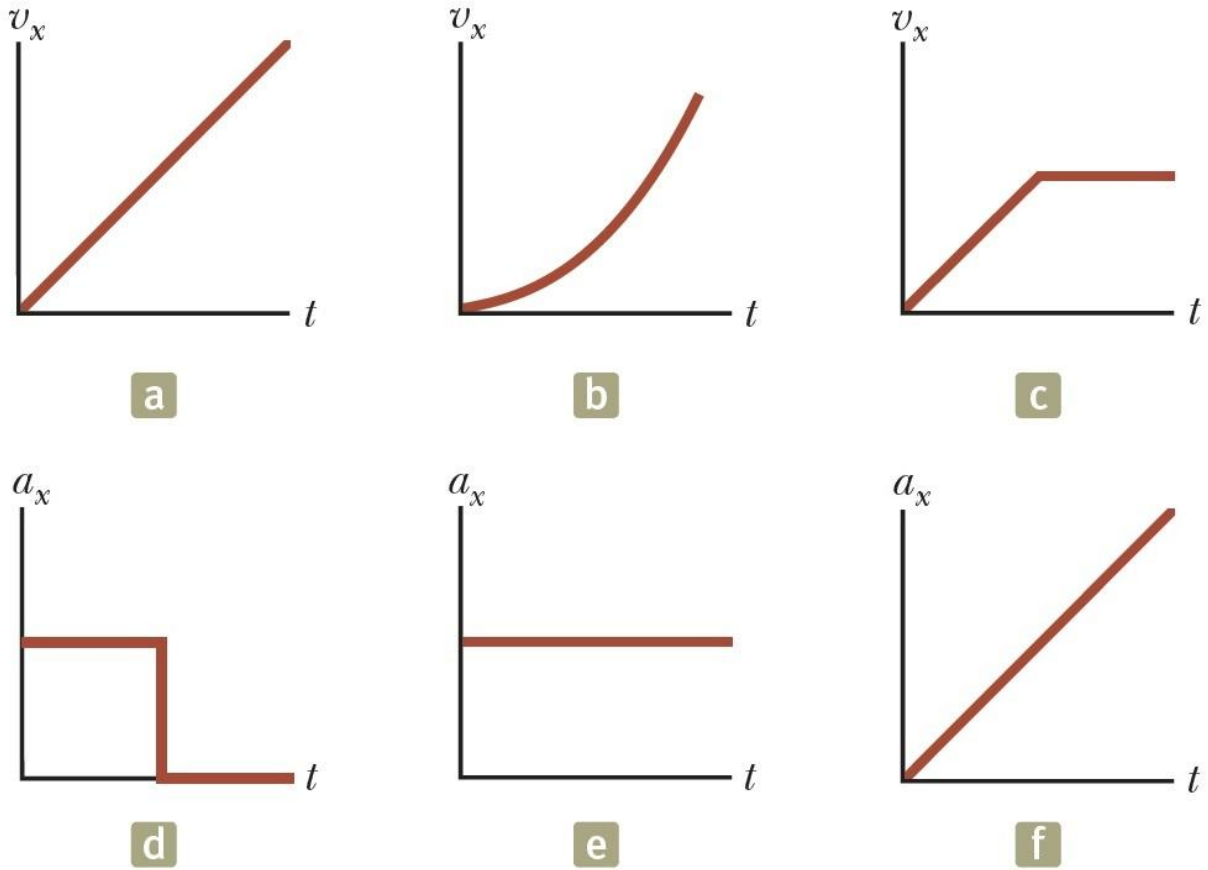
$$\boldsymbol{\frac{m}{s^2}}$$

(μέτρο ανά δευτερόλεπτο στο τετράγωνο)

Κίνηση σε μια Διάσταση

Hint: Η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν σχέση παραγώγου-παράγουσας

- **Quiz 1:**
  - Βρείτε τα ζεύγη ταχύτητας-επιτάχυνσης



a → e

b → f

c → d

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Quiz 2:**
  - Η θέση ενός σωματιδίου δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = 4 - 27t + t^3$$

    - Α) Βρείτε τη συνάρτηση ταχύτητας ως προς το χρόνο
    - Β) Βρείτε τη συνάρτηση επιτάχυνσης ως προς το χρόνο
    - Γ) Υπάρχει κάποια χρονική στιγμή t_0 που το σωματίδιο είχε $u(t_0) = 0$?

Α) Είναι $u(t) = x'(t) = -27 + 3t^2 \ \frac{m}{s}$

Β) —"— $a(t) = x''(t) = u'(t) = 6t \ \frac{m}{s^2}$

Γ) Είναι $u(t) = 0 \Leftrightarrow -27 + 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t_0 = \pm 3$ sec. Επιλέγαμε ως λύση την $t_0 = 3$ s.

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μοντέλο κίνησης:** υπό ***σταθερή επιτάχυνση***
  - **Ορίζουμε θετική φορά κίνησης προς τα δεξιά**
  - **Στις παρακάτω εξισώσεις, όλες οι διανυσματικές ποσότητες «δείχνουν» προς τα δεξιά, δηλ. γράφονται ως** $\vec{b} = c\vec{\imath}, c \in \mathbb{R}_+$

- **<u>Εξισώσεις Μονοδιάστατης Κίνησης υπό σταθερή επιτάχυνση:</u>**

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \dfrac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right)t$ ή $x_f = x_i + u_{x,avg}t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Οι δείκτες i και f δηλώνουν αρχική και τελική μέτρηση, ενώ ο δείκτης x δηλώνει μονοδιάστατη κίνηση σε έναν οριζόντιο άξονα $x'x$ (κάποιες φορές μπορούμε να παραλείπουμε το δείκτη x για απλοποίηση)

Κίνηση σε μια Διάσταση

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

- **Απόδειξη:**

Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή, τότε

$$a_{x,avg} = a_x$$

Από τον ορισμό έχουμε

$$a_x = \frac{\Delta u_x}{\Delta t} = \frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{t_f - t_i} \xRightarrow{t_i=0, t_f=t} u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

Άρα

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

$$u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$$

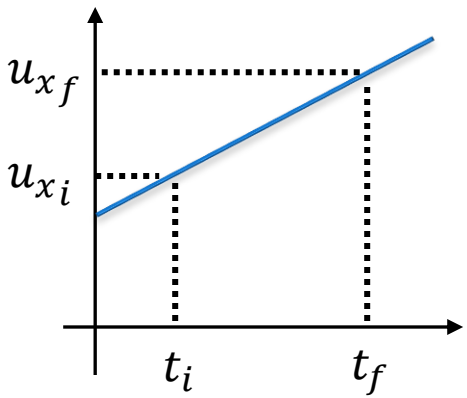
- **Απόδειξη:**

Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή, τότε η ταχύτητα (δηλ. το ολοκλήρωμά της) θα είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου

Έτσι η μέση ταχύτητα μπορεί να εκφραστεί ως ο αριθμητικός μέσος της αρχικής ταχύτητας u_{x_i} και της τελικής ταχύτητας u_{x_f}

Δηλ.

$$u_{x_{avg}} = \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Απόδειξη:**

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right)t \quad \text{ή} \quad x_f = x_i + u_{x,avg}t$$

Από την προηγούμενη σχέση, πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με t:

$$u_{x_{avg}}t = \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}t$$

Όμως

$$u_{x_{avg}}t = \Delta x = x_f - x_i$$

οπότε

$$\left(x_f - x_i\right) = \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}t$$

Λύνοντας ως προς x_f:

$$x_f = x_i + \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}t$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

$$x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

- **Απόδειξη:**

Έχουμε ήδη

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

και

$$x_f = x_i + \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2} t$$

Αντικαθιστώντας

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + a_x t + u_{x_i}\right) t$$

$$= x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Άρα

$$x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

$$u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$$

- **Απόδειξη:**

Έχουμε

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t \Rightarrow t = \frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{a_x}$$

και

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_f} + u_{x_i}\right) t$$

Αντικαθιστώντας

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_f} + u_{x_i}\right)\left(\frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{a_x}\right)$$

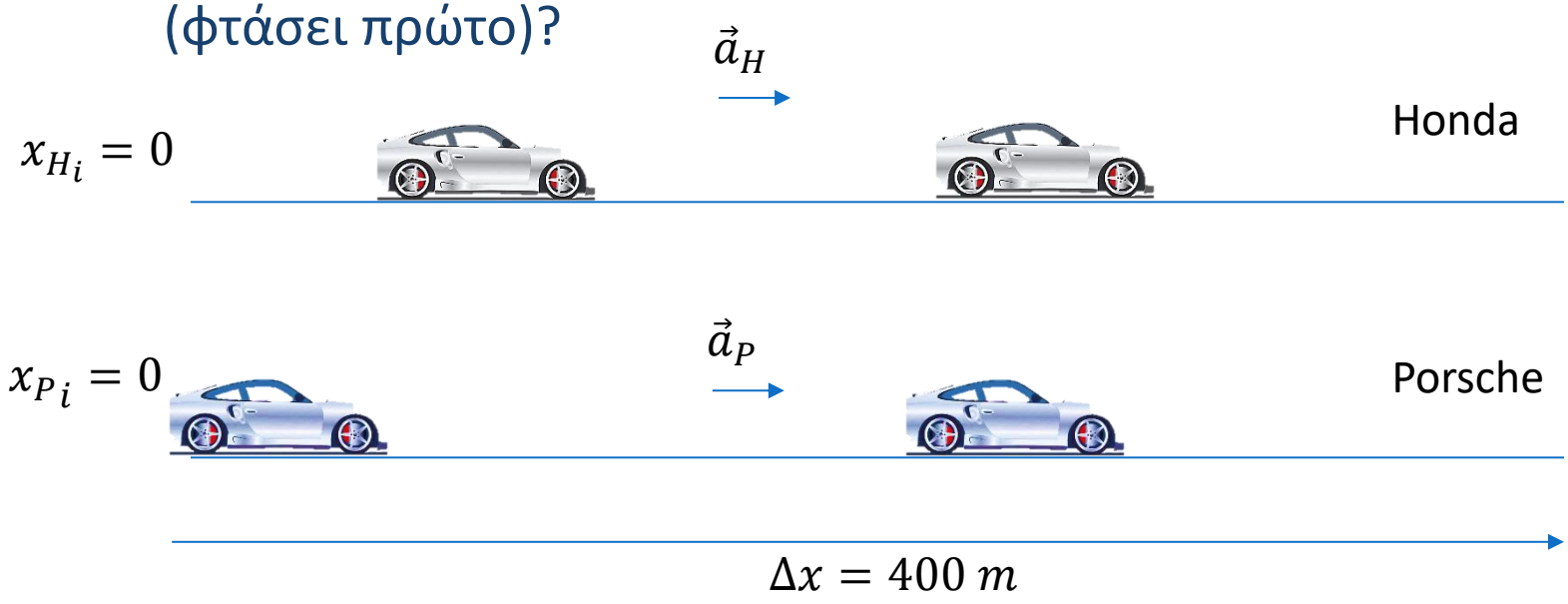
$$= x_i + \frac{u_{x_f}^2 - u_{x_i}^2}{2a_x}$$

και λύνοντας ως προς $u_{x_f}^2$

$$u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x\left(x_f - x_i\right)$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **<u>Παράδειγμα:</u>**
  - Μια Porsche (P) προκαλεί ένα Honda (H) σε έναν αγώνα ταχύτητας 400 μέτρων. Επειδή $a_P = 3.5\ \mathrm{m/s^2}$ και $a_H = 3.0\ \mathrm{m/s^2}$, το Honda παίρνει προβάδισμα στην αφετηρία κατά $1.0\ s$. Τα δυο οχήματα ξεκινούν από ακινησία. Περιγράψτε το μοντέλο κίνησης των οχημάτων. Ποιο αυτοκίνητο θα κερδίσει (φτάσει πρώτο)?



1. $u_{x_f} = u_{x_i} + at$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right)t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a(x_f - x_i)$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Παράδειγμα – Λύση:**

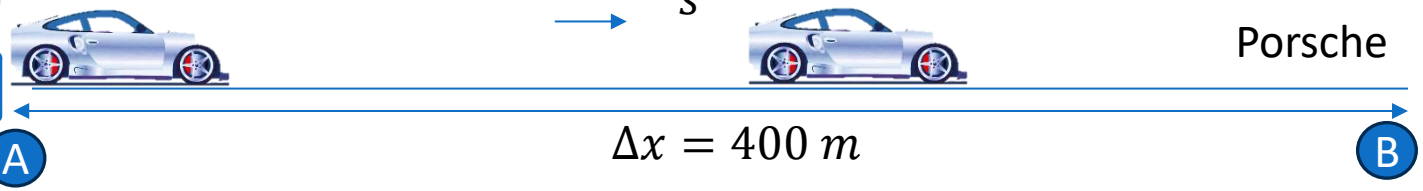
$\vec{a}_H = 3.0\frac{m}{s^2}\vec{i}$

$x_{H_i} = 0$

$\vec{a}_P = 3.5\frac{m}{s^2}\vec{i}$

$x_{P_i} = 0$

$t = 0$



$\Delta x = 400\ m$

Το μοντέλο που περιγράφει την κίνηση είναι αυτό της κίνησης υπό σταθερή επιτάχυνση. Θεωρώ $x_A = 0$ τη θέση εκκίνησης του δυο οχημάτων. Θεωρώ $t = 0$, όταν ξεκινά η Porsche. Τότε τα δυο οχήματα περιγράφουν την κίνησή τους με το μοντέλο της ευθύγραμμης επιταχυνόμενης κίνησης με σταθερή ταχύτητα. Δουλεύουμε στη $A \rightarrow B$.

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + at$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right)t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a(x_f - x_i)$

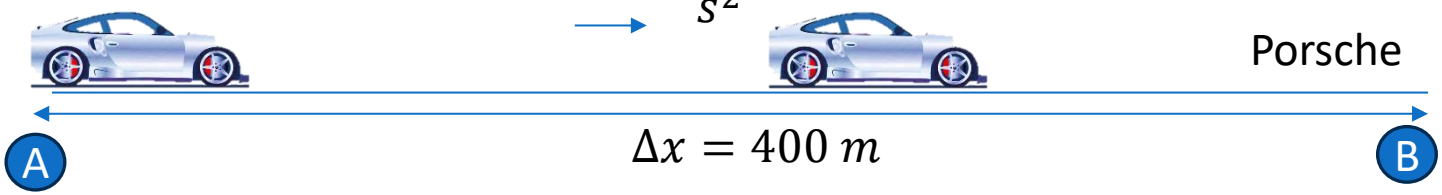
Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Παράδειγμα – Λύση:** $\vec{a}_H = 3.0\frac{m}{s^2}\vec{i}$

$x_{H_i} = 0$

$x_{P_i} = 0$ $\vec{a}_P = 3.5\frac{m}{s^2}\vec{i}$

$t = 0$



$\Delta x = 400\ m$

Για να βρούμε το χρόνο που απαιτείται για να καλύψει την απόσταση η Porsche, χρησιμοποιούμε την εξ. 4. στη διαδρομή A→B.

$$x_B = x_A + u_{x_A}t + \frac{1}{2}a_P t^2$$

$$400 = 0 + 0\cdot t + \frac{1}{2}3.5t^2$$

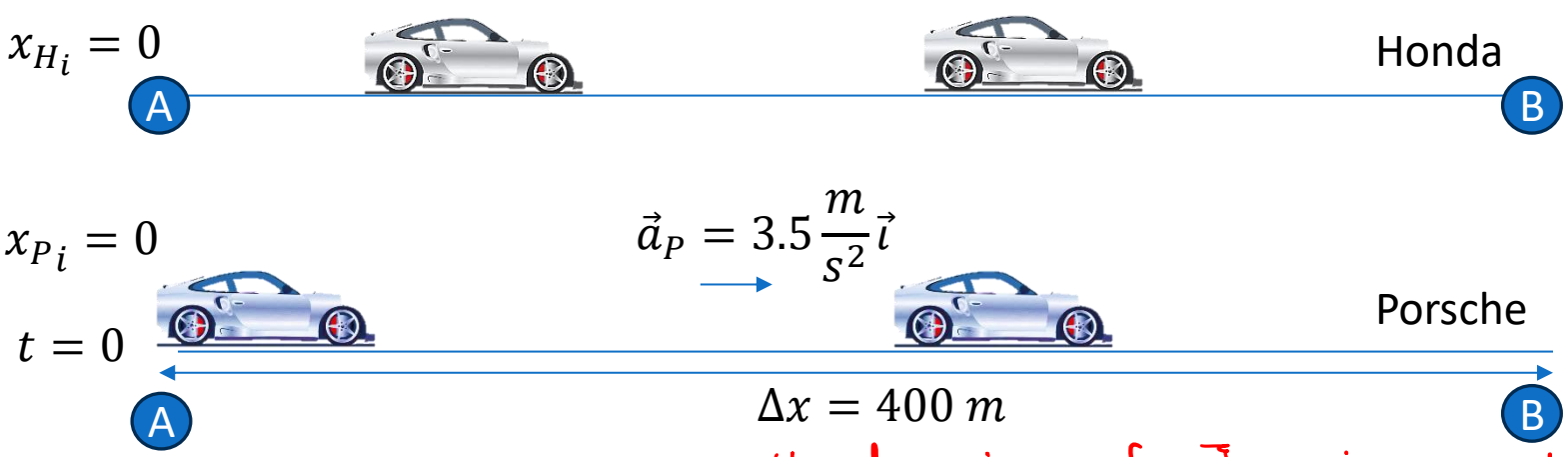
$$800 = 3.5t^2 \Rightarrow t^2 = 228.57 \Rightarrow t = 15.118\ s$$

Άρα η Porsche χρειάζεται 15.118 δευτερόλεπτα για τα 400 m.

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + at$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right)t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a(x_f - x_i)$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Παράδειγμα – Λύση:** $\vec{a}_H = 3.0\frac{m}{s^2}\vec{i}$



Όταν πατήσαμε το χρονόμετρο, η Honda είχε ήδη ξεκινήσει κατά 1 second, οπότε ο χρόνος της θα είναι $t+1$! Ξανά από την εξ. 4 στη διαδρομή $A \to B$ θα έχαμε:

$$x_B = x_A + u_{x_A}\cdot(t+1) + \frac{1}{2}a_H(t+1)^2$$

$$400 = 0 + 0\cdot(t+1) + \frac{1}{2}\cdot 3.0(t+1)^2$$

$$800 = 3(t+1)^2 \Rightarrow (t+1)^2 = 266.667 \Rightarrow t+1 = 16.329$$

δηλ. $t = 15.329\ s$

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + at$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right)t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a(x_f - x_i)$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Παράδειγμα – Λύση:**

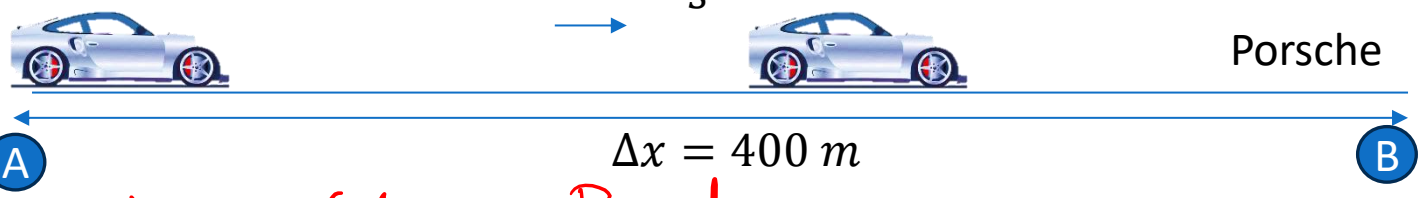
$\vec{a}_H = 3.0\frac{m}{s^2}\vec{i}$

$x_{H_i} = 0$

$\vec{a}_P = 3.5\frac{m}{s^2}\vec{i}$

$x_{P_i} = 0$

$t = 0$



$\Delta x = 400\ m$

Άρα τελικά κερδίζει η Porsche.

Παρατηρήστε ότι:

I) Επιλέξαμε τη διαδρομή A→B και για τα δυο οχήματα.

II) Πατήσαμε το χρονόμετρο (t=0) όταν ξεκίνησε η Porsche. Με τον τρόπο αυτό, και οι δυο κινήσεις περιγράφονται από τις εξισώσεις της ευθύγραμμης κίνησης με σταθερή επιτάχυνση (απλά ο χρόνος της Honda είναι t+1).

III) Υπάρχουν κι άλλες λύσεις, πιο περίπλοκες.

$$x_f = x_i + u_x t$$

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right) t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Δεν είναι απαραίτητη η χρήση διανυσμάτων στην 1D κίνηση
  - Είδατε ότι το τυπολόγιο της κίνησης ήταν αλγεβρικές εξισώσεις
  - Όμως τα αποτελέσματά σας πρέπει να γράφονται διανυσματικά
  - Προσοχή στην ερμηνεία των αρνητικών μεγεθών!

- Υπενθυμίζεται η σύμβαση ότι : ορίζουμε ως **θετική φορά αυτή προς τα δεξιά**
  - Αντίστοιχα, αρνητική προς τα αριστερά
  - Ορίζετε πάντα θέση και χρόνο αναφοράς σας ($x_i = 0, t_i = 0$)!

- **Κατακόρυφη κίνηση** (κίνηση σε μια διάσταση)
  - Συνήθως ορίζουμε **θετική φορά κίνησης προς τα επάνω**
  - Επιτάχυνση βαρύτητας $\vec{g} = (-9.8\ \mathrm{m/s^2})\vec{j}$ (φορά προς τα κάτω)
  - Ίδια μεθοδολογία και εξισώσεις ($x \rightarrow y$)

Κίνηση σε μια Διάσταση

ΌΧΙ $g = 10\ m/s^2$!!!

- Ελεύθερη πτώση: $\vec{a}_y = \vec{g} = (-9.8\ \mathrm{m/s^2})\vec{j}$ **σταθερή**
  - …αν ορίσουμε **θετική φορά κίνησης προς τα επάνω**

- **Εξισώσεις Ελεύθερης Πτώσης:**

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \dfrac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$

   ή

   $y_f = y_i + u_{y,avg}t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

Οι δείκτες i και f δηλώνουν αρχική και τελική κατάσταση, ενώ ο δείκτης $\boldsymbol{y}$ δηλώνει μονοδιάστατη κίνηση σε έναν κατακόρυφο άξονα $\boldsymbol{y'y}$ (συχνά ο δείκτης παραλείπεται)

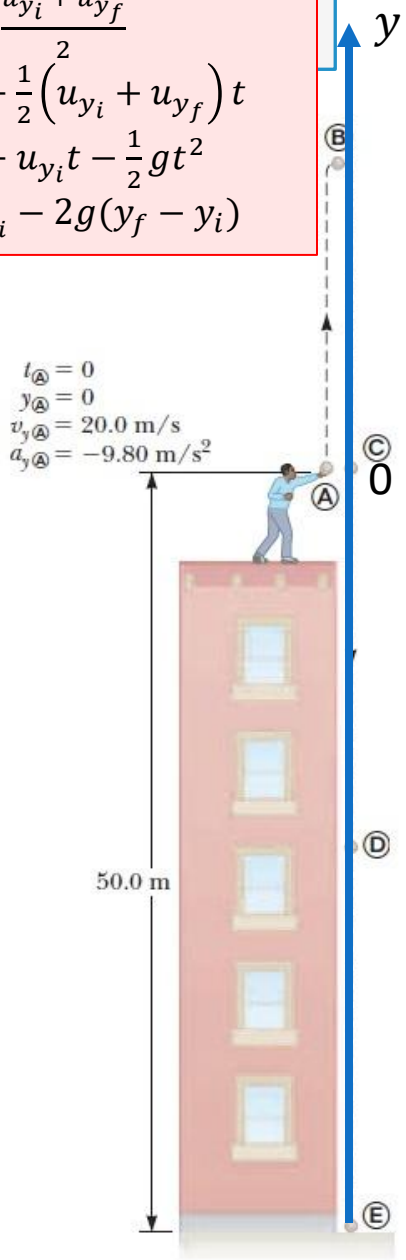
Στις διπλανές εξισώσεις, η επιτάχυνση της βαρύτητας χρησιμοποιείται ως $\boldsymbol{g = |\vec{g}| = 9.8\ \mathrm{m/s^2}}$

Αν ορίσετε θετική φορά κίνησης προς τα κάτω (δηλ. με ίδια φορά με το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας), τότε θέτουμε $g = -9.8\ \mathrm{m/s^2}$ στις διπλανές σχέσεις

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

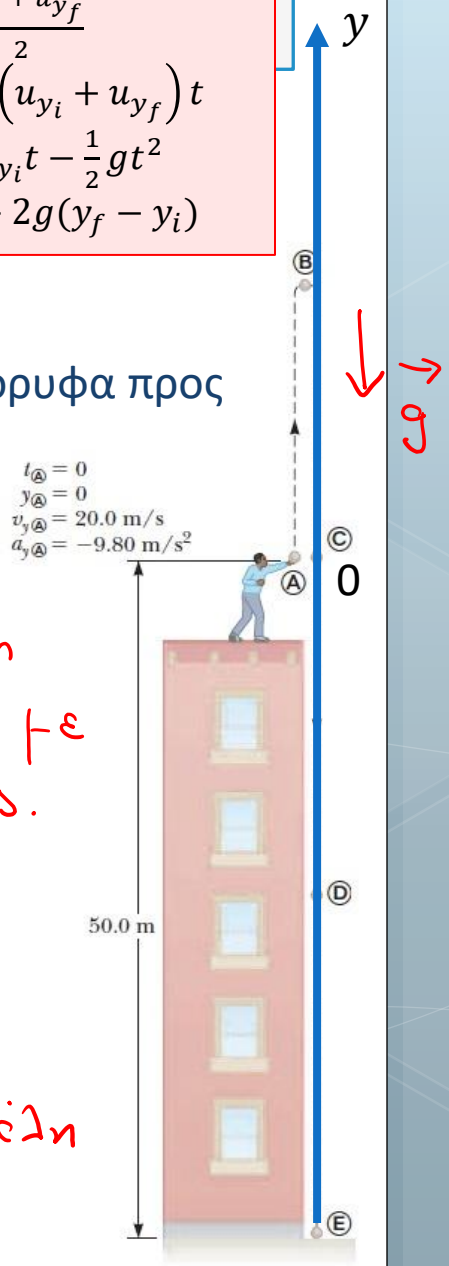
- **<u>Παράδειγμα:</u>**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m. Δεν υπάρχουν αντιστάσεις λόγω αέρα.
    - Α) Με ποιο μοντέλο μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση της μπάλας? Δώστε τις λεπτομέρειες.
    - Β) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.
    - Γ) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.
    - Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.
    - Ε) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν $t = 5$ s.



Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Α) Με ποιο μοντέλο μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση της μπάλας? Δώστε τις λεπτομέρειες.

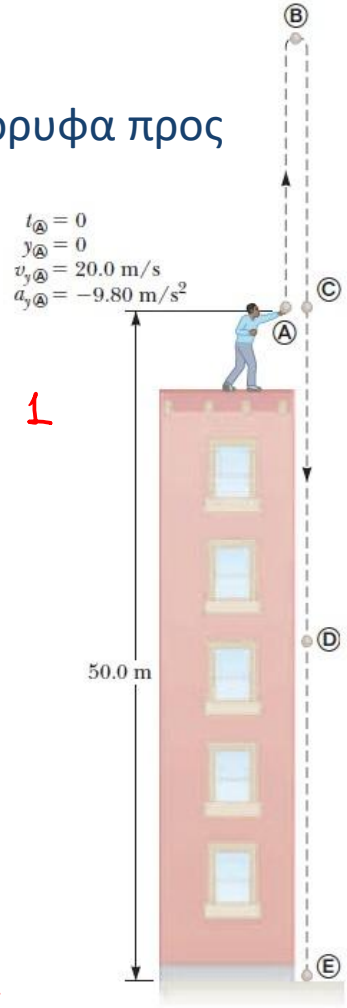


Θέταμε τον άξονα y'y παράλληλα με την κίνηση της μπάλας. Το "μηδέν" του άξονα ταυτίζεται με το σημείο Α, το σημείο εκτόξευσης της μπάλας. Ο χρόνος αρχίζει να μετρά τη στιγμή που η μπάλα αφήνει το χέρι. Η κίνηση της μπάλας είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση $\vec{g} = (-9.8\,\frac{m}{s^2})\,\vec{j}$, σε όλη της τη διαδρομή.

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Β) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.



Δουλεύαμε στη διαδρομή A→B. Από την εξ. 1 έχαμε

$$u_{y_f} = u_{y_i} - gt$$

$$u_B = u_A - gt$$

$$0 = 20 - 9.8t$$

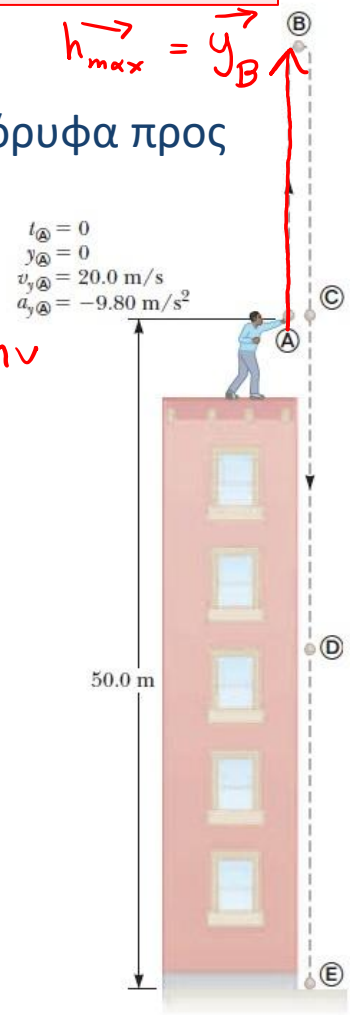
$$t = \frac{20}{9.8} = 2.04 \text{ s}$$

Άρα στο μέγιστο ύψος φθάνει σε χρόνο 2.04 s.

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Γ) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.



Δουλεύαμε ξανά στη διαδρομή A → B. Από την εξ. 3, έχαμε

$$y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$$

$$y_B = y_A + \frac{1}{2}\left(u_A + u_B\right)t$$

$$h_{max} = 0 + \frac{1}{2}(20 + 0)\cdot 2.04$$

$$= 10 \cdot 2.04 = 20.4 \text{ m}$$

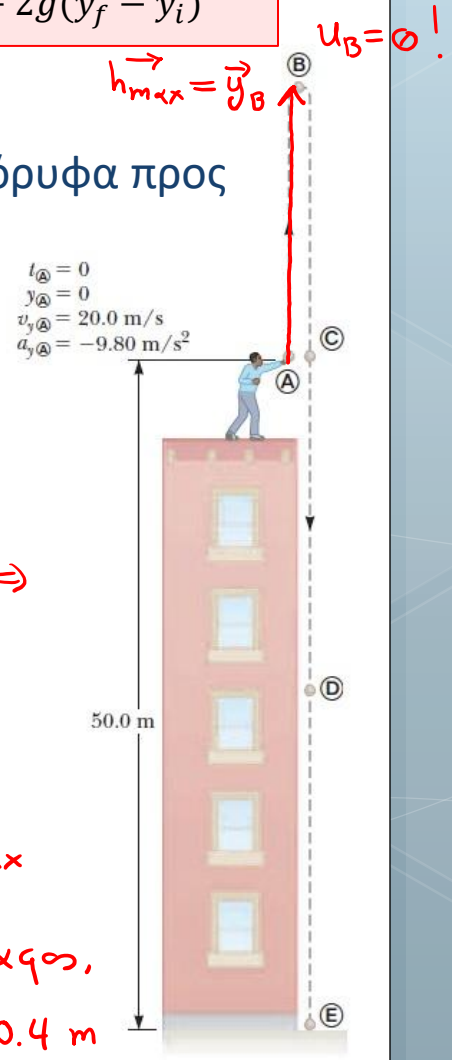
δηλ. $\vec{y}_B = (20.4 \text{ m})\vec{j}$

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

$\uparrow +$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Γ) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.



Εναλλακτικά :

Εξίσου καλά δουλεύουν και οι σχέσεις 4, 5 :

4 • $h_{max} = y_A + u_{y_A}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 + 20t - 4.9t^2 \Big\} \Rightarrow$ $t = \frac{20}{9.8}$ s

$\Rightarrow h_{max} = 20\left(\frac{20}{9.8}\right) - 4.9\left(\frac{20}{9.8}\right)^2 \cong 20.4$ m

5 • $u_B^2 = u_A^2 - 2g(h_{max} - 0) \Leftrightarrow 0^2 = 20^2 - 19.6\, h_{max}$

δηλ. $h_{max} = \frac{400}{19.6} = 20.4$ m

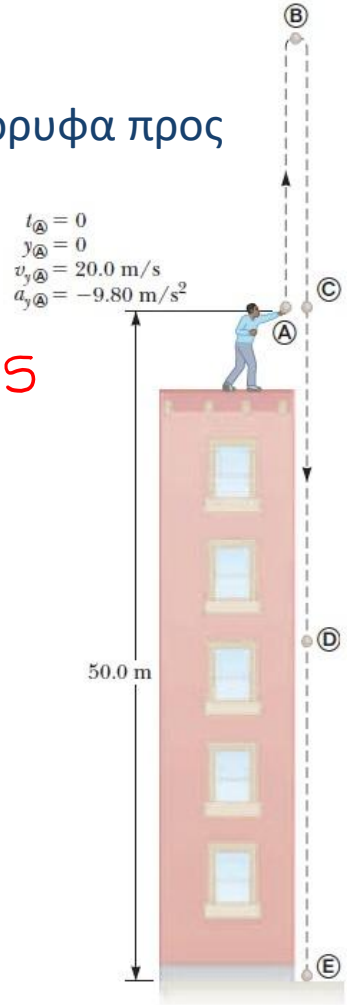
(ενώ από το έδαφος, το ύψος είναι 70.4 m

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

$+ \uparrow$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.



Δουλεύουμε στη διαδρομή A → C. Από την εξ. 5 έχουμε

$$u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$$

$$u_C^2 = u_A^2 - 2g(y_C - y_A)$$

$$u_C^2 = 20^2 - 19.6(0 - 0)$$

$$u_C^2 = 400 \Rightarrow u_C = \pm 20 \frac{m}{s}$$

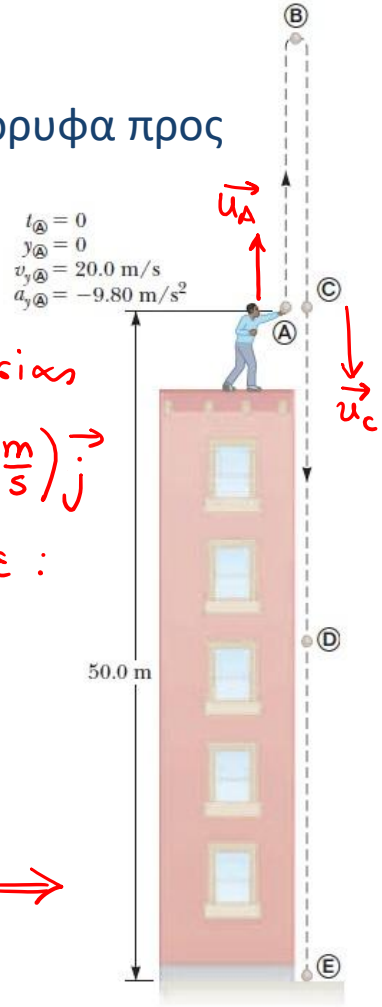
δηλ. $\vec{u}_C = \left(-20 \frac{m}{s}\right)\vec{j}$.

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

$+ \uparrow$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.



Θα μπορούσαμε να πούμε ότι $t_{A\to B} = t_{B\to C}$, λόγω απουσίας αντιστάσεων του αέρα, και άρα $\vec{u}_C = -\vec{u}_A = \left(-20\,\frac{m}{s}\right)\vec{j}$

Πώς ξέραμε όμως ότι $t_{A\to B} = t_{B\to C}$? Ας το δούμε:

Διαδρομή $A \to B$: δείξαμε ότι $t_{A\to B} = \frac{u_A}{g}$ (1)

Διαδρομή $B \to C$: $y_C = y_B + u_B t_{B\to C} - \frac{1}{2} g t_{B\to C}^2$

$$0 = h_{max} + 0 \cdot t_{B\to C} - \frac{1}{2} g t_{B\to C}^2$$

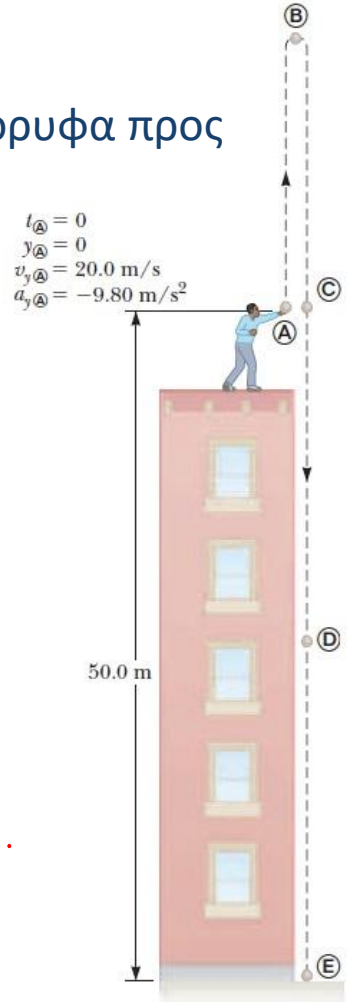
Όμως $h_{max} = \frac{u_A^2 - u_B^2}{2g}$, όπως δείξαμε πριν από 2 slides $\Rightarrow$

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

$+ \uparrow$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.



$$\Longrightarrow \quad 0 = \frac{u_A^2 - u_B^2}{2g} - \frac{1}{2}g\,t_{B\to C}^2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{u_A^2 - 0}{2g} = \frac{1}{2}g\,t_{B\to C}^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{u_A^2}{g} = g\,t_{B\to C}^2 \quad \Longleftrightarrow$$

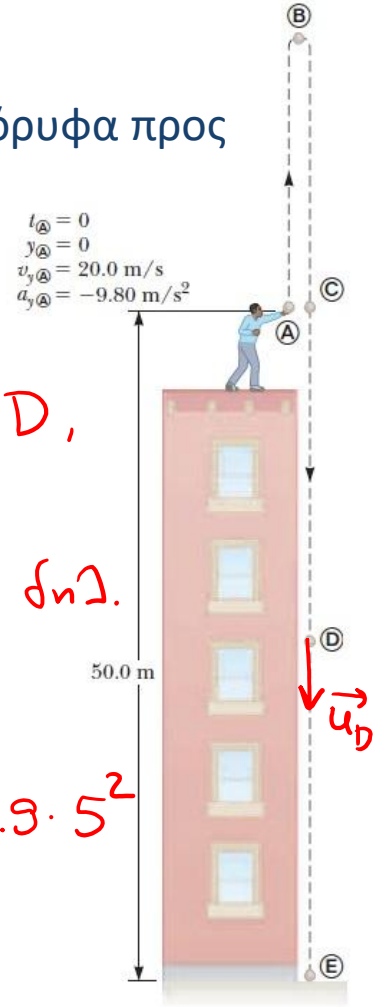
$$\Longleftrightarrow \quad \frac{u_A^2}{g^2} = t_{B\to C}^2 \quad \Longleftrightarrow \quad t_{B\to C} = \sqrt{\frac{u_A^2}{g^2}} = \frac{u_A}{g} \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1), (2) μας δίνουν ότι $t_{A\to B} = t_{B\to C}$.

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Ε) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν $t = 5\ s$.



Έστω D η θέση της μπάλας όταν t=5 από τη στιγμή της εκτόξευσης. Στη διαδρομή A→D, οι εξισώσεις 1 και 4 μας δίνουν

$u_D = u_A - gt \Leftrightarrow u_D = 20 - 9.8 \cdot 5 = -29\ \frac{m}{s}$, δηλ.

$\vec{u}_D = \left(-29\ \frac{m}{s}\right)\vec{j}$

$y_D = y_A + u_{y_A}t - \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow y_D = 0 + 20 \cdot 5 - 4.9 \cdot 5^2$

$\Leftrightarrow y_D = 100 - 122.5 \Leftrightarrow y_D = -22.5\ m$, άρα

$\vec{y}_D = (-22.5\ m)\vec{j}$

Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

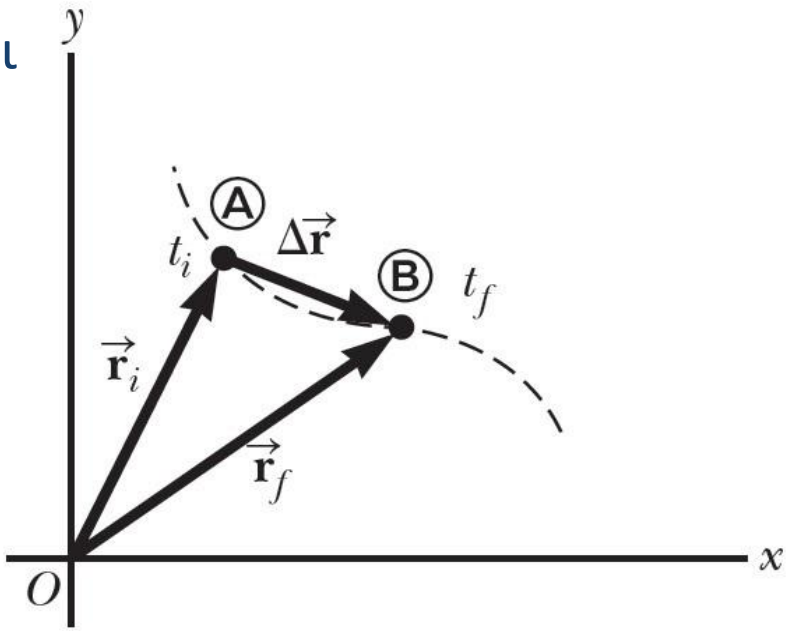
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας επεκτείνουμε τις ιδέες που ήδη ξέρουμε στο χώρο xy
  - Χώρος επιπέδου
- Θα κάνουμε εκτεταμένη χρήση διανυσμάτων
  - …αλλά και ανάλυσης σε συνιστώσες
  - Δηλ. θα δουλεύουμε κυρίως κατά **άξονες της κίνησης**
- Η γνώση της μονοδιάστατης κίνησης θα είναι πολύτιμη!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Στη μια διάσταση, μας αρκούσε ένα μονόμετρο μέγεθος (αριθμ. τιμή) για να ορίσουμε τη **θέση** ενός σωματιδίου
  - …λόγω της σύμβασης που κάναμε με τα πρόσημα

- Στις δυο διαστάσεις, χρειαζόμαστε το **διάνυσμα θέσης $\vec{r}$**
  - Ξεκινά από το (0,0) και φτάνει ως τη θέση του σωματιδίου στο επίπεδο xy



- **Μετατόπιση $\Delta\vec{\mathrm{r}}$**
  - Διαφορά μεταξύ τελικής και αρχικής θέσης
  - $\Delta\vec{\mathrm{r}} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ορίζουμε τη **Μέση Ταχύτητα** σε ένα χρονικό διάστημα Δt:

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta \mathrm{t}}$$

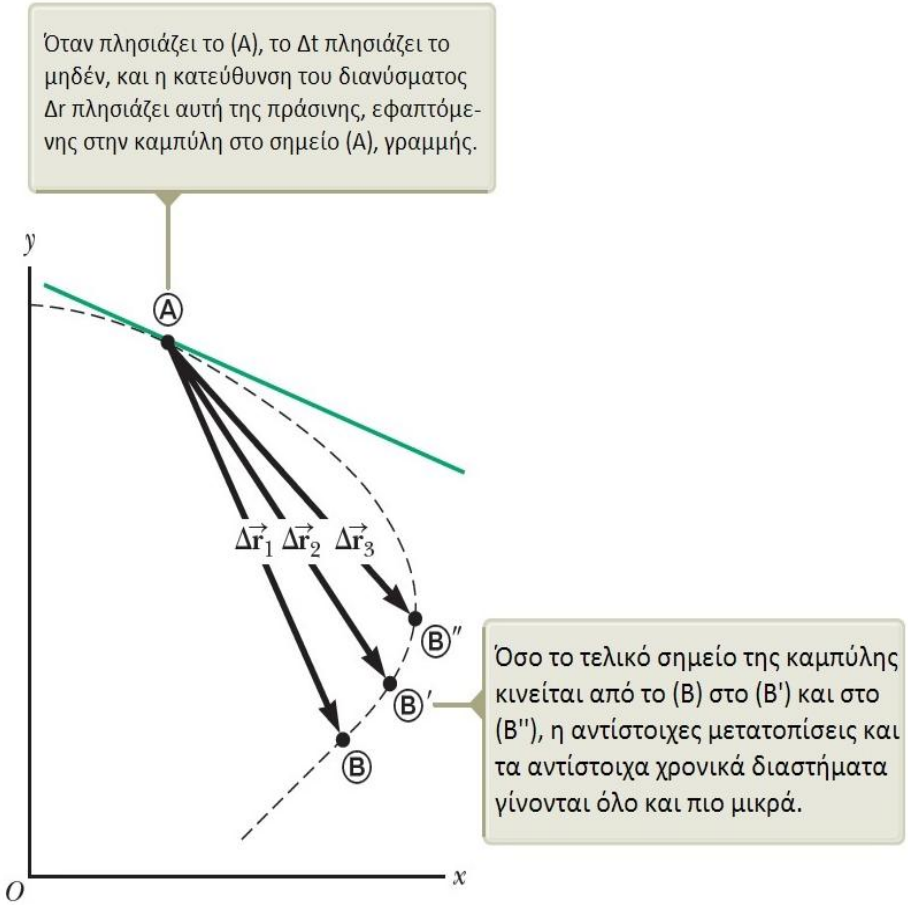
- Διάνυσμα με ίδια διεύθυνση και φορά με το $\Delta\vec{r}$
  - Θυμηθείτε από την κίνηση σε μια διάσταση:

$$\vec{u}_{avg} \equiv \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta \mathrm{t}}$$

- Διάνυσμα ανεξάρτητο της διαδρομής!
  - Γιατί; Εξαρτάται μόνο από το $\Delta\vec{r}$
    - Που εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση του σωματιδίου

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται ανάμεσα σε 2 σημεία, Α και Β.
- Παρατηρούμε το σωματίδιο σε όλο και μικρότερα χρονικά διαστήματα (Β, Β’, Β’’)
- Η κατεύθυνση του $\Delta\vec{r}$ πλησιάζει αυτήν της εφαπτομένης της διαδρομής στο σημείο Α.
- Όταν Β→Α, τότε η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο Α μας δίνει τη **στιγμιαία ταχύτητα**



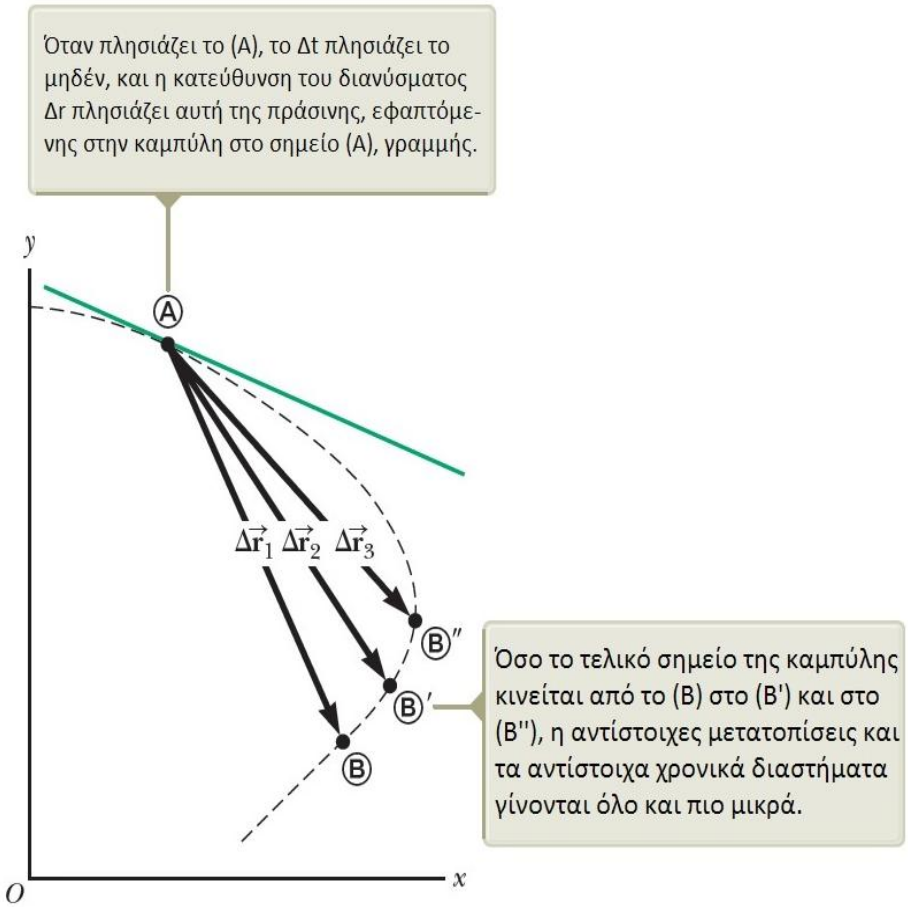
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Στιγμιαία Ταχύτητα**

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- Η κατεύθυνση της $\vec{v}$ βρίσκεται στην εφαπτομένη της καμπύλης στο εκάστοτε σημείο
- Μέτρο ταχύτητας $= |\vec{v}|$
- Θυμηθείτε:

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Μέση Επιτάχυνση**

$$\vec{a}_{avg} \equiv \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$

- Διάνυσμα: έχει την ίδια κατεύθυνση με την διανυσματική διαφορά ταχυτήτων $\Delta\vec{v}$

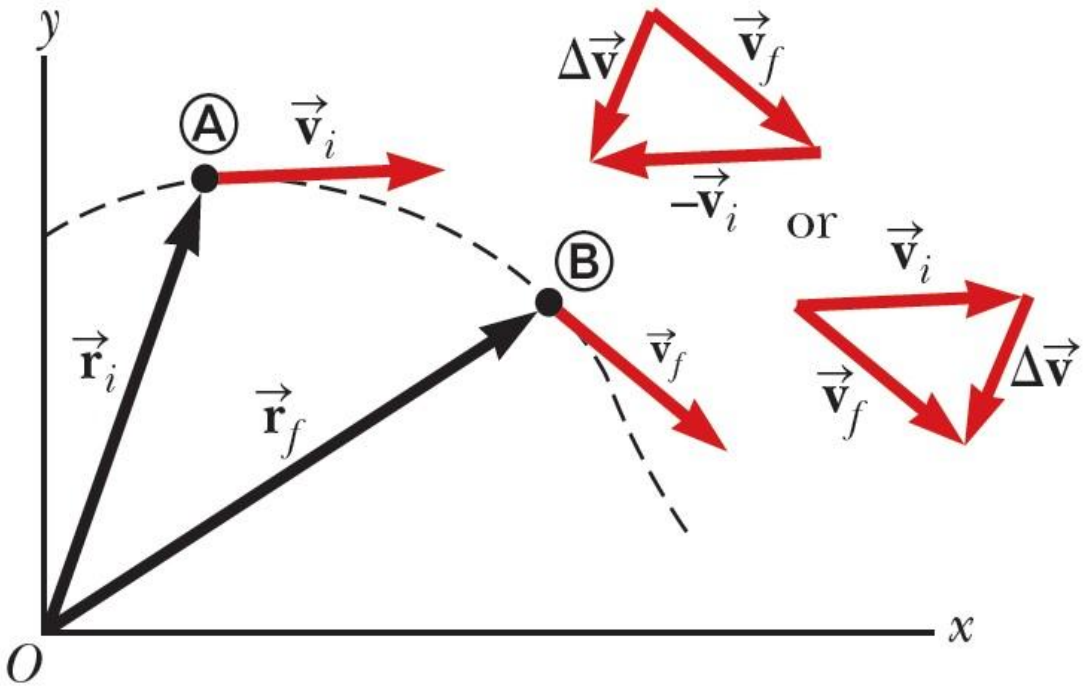
- Θυμηθείτε:

$$\vec{a}_{\mathrm{avg}} \equiv \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_f - \vec{u}_i}{t_f - t_i}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

$$\vec{a}_{avg} \equiv \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

- **Μέση Επιτάχυνση**
- Quiz:
  - Βρείτε το διάνυσμα $\vec{a}_{avg}$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Στιγμιαία Επιτάχυνση $\vec{a}$**

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t)$$

- Θυμηθείτε:

$$\vec{a}_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Μοντέλο κίνησης**: με **<u>σταθερή</u>** επιτάχυνση
  - …όμοια με την κίνηση στη μια διάσταση

- Θα σκεφτόμαστε με βάση την παρακάτω «αρχή»:
  - **Η κίνηση σε δυο διαστάσεις μπορεί να μοντελοποιηθεί ως δυο ανεξάρτητες ευθύγραμμες κινήσεις σε δυο κάθετους άξονες:**
    - **Τον άξονα x'x**
    - **Τον άξονα y'y**

- Έτσι, η κίνηση στον έναν άξονα δεν επηρεάζει την κίνηση στον άλλο (και αντίστροφα)

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Διάνυσμα θέσης**

$$\vec{\boldsymbol{r}} = x\vec{\boldsymbol{\imath}} + y\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

με $\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}$ τα μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου

- Αν ξέρουμε το $\vec{\boldsymbol{r}}$, μπορούμε να βρούμε τη στιγμιαία ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{v}}$, ως

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{\boldsymbol{\imath}} + y\vec{\boldsymbol{\jmath}}) = u_x\vec{\boldsymbol{\imath}} + u_y\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

- Επίσης,

$$u_x = u_{x_i} + a_x t \ , \qquad u_y = u_{y_i} + a_y t$$

- Αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned} u_x\vec{\boldsymbol{\imath}} + u_y\vec{\boldsymbol{\jmath}} &= \left(u_{x_i} + a_x t\right)\vec{\boldsymbol{\imath}} + \left(u_{y_i} + a_y t\right)\vec{\boldsymbol{\jmath}} \\ &= \left(u_{x_i}\vec{\boldsymbol{\imath}} + u_{y_i}\vec{\boldsymbol{\jmath}}\right) + \left(a_x\vec{\boldsymbol{\imath}} + a_y\vec{\boldsymbol{\jmath}}\right)t \end{aligned}$$

- Δηλ.

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{a}}t$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Διάνυσμα θέσης**

$$\vec{\boldsymbol{r}} = x\vec{\boldsymbol{\imath}} + y\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

με $\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}$ τα μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου

- Αναλύοντας

$$\vec{\boldsymbol{r}} = x\vec{\boldsymbol{\imath}} + y\vec{\boldsymbol{\jmath}} = \left(x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2\right)\vec{\boldsymbol{\imath}} + \left(y_i + u_{y_i}t + \frac{1}{2}a_y t^2\right)\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$= \underline{(x_i\vec{\boldsymbol{\imath}} + y_i\vec{\boldsymbol{\jmath}})} + \underline{\left(u_{x_i}\vec{\boldsymbol{\imath}} + u_{y_i}\vec{\boldsymbol{\jmath}}\right)}t + \frac{1}{2}\underline{\left(a_x\vec{\boldsymbol{\imath}} + a_y\vec{\boldsymbol{\jmath}}\right)}t^2$$

- Έτσι,

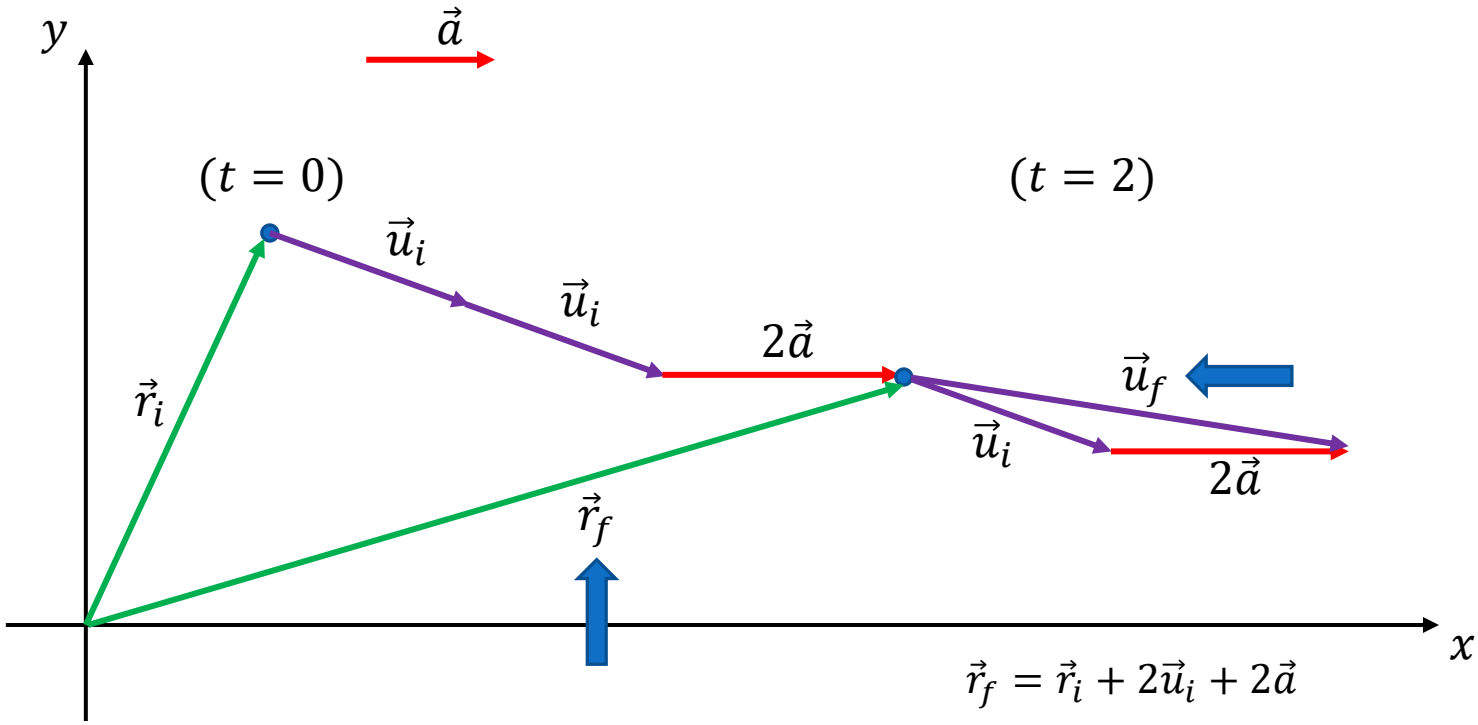
$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{f}} = \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}t + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{a}}t^2$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

- **Quiz:**
- Προβλέψτε τη θέση και την ταχύτητα του σώματος όταν $t = 2$



$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + 2\vec{u}_i + 2\vec{a}$$

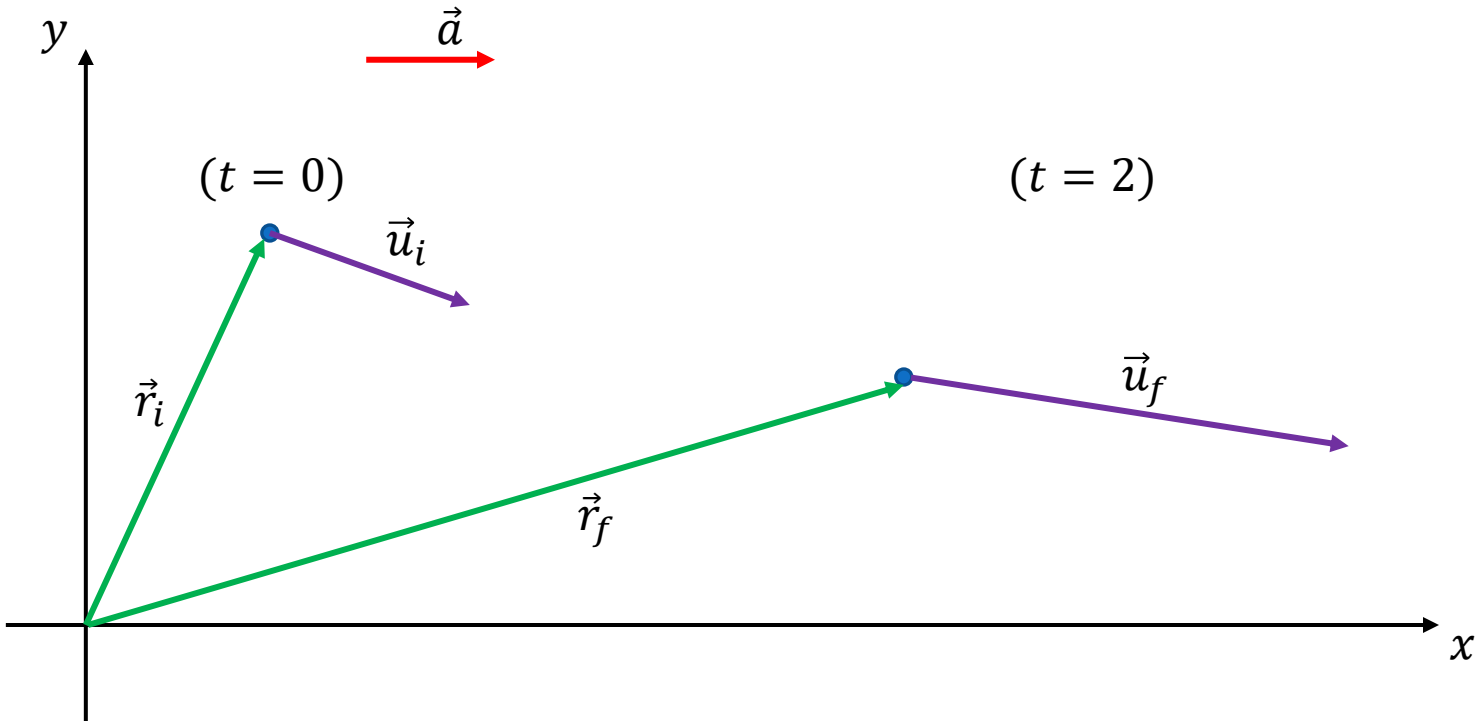
$$\vec{u}_f = \vec{u}_i + 2\vec{a}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

- **Quiz:**
- Προβλέψτε τη θέση και την ταχύτητα του σώματος όταν $t = 2$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Αυτές οι εξισώσεις κατασκευάστηκαν από ξεχωριστή μελέτη της κίνησης ΑΝΑ ΑΞΟΝΑ!

- Ας γράψουμε τις δυο *διανυσματικές* εξισώσεις κίνησης σε δυο διαστάσεις με <u>σταθερή επιτάχυνση</u>

- $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

$$u_{y_f} = u_{y_i} + a_y t$$

- $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

$$x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$y_f = y_i + u_{y_i} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

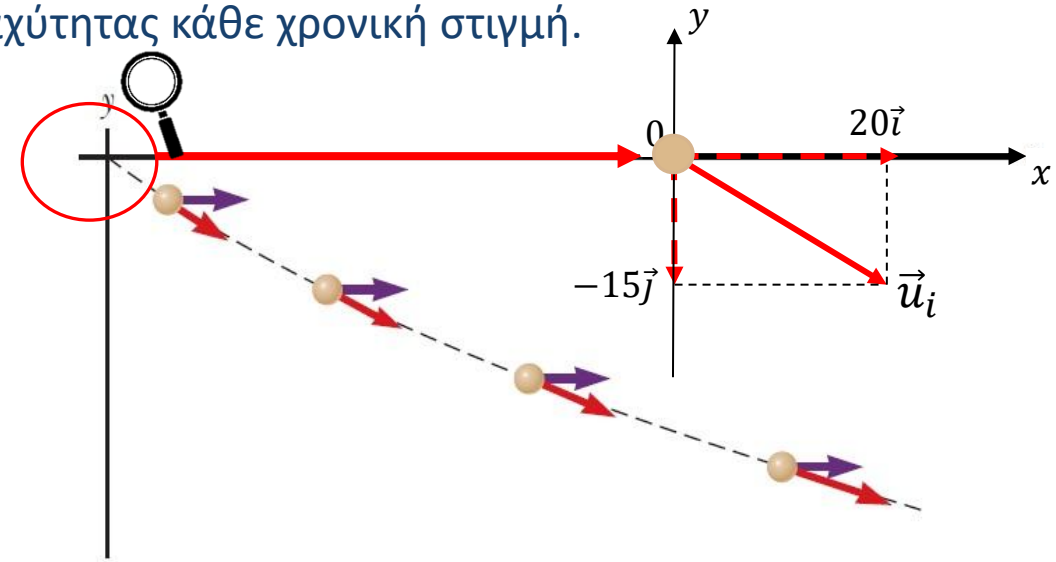
Ισχύουν και όλες οι υπόλοιπες εξισώσεις που περιγράφουν την μονοδιάστατη κίνηση υπό σταθερή ή μηδενική επιτάχυνση!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right) t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

- **Παράδειγμα:**
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\ \mathrm{m/s}$ στον x-άξονα, και $-15\ \mathrm{m/s}$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα ως $\vec{a}_x = (4\ \mathrm{m}/s^2)\vec{\imath}$. **Με ποια μοντέλα κίνησης μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση του σωματιδίου;**

Α) Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή.
Β) Βρείτε την ταχύτητα σε μέτρο και κατεύθυνση όταν $t = 5s$, δηλ. τη γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον άξονα των x.
Γ) Βρείτε τις x, y συντεταγμένες του σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή t, και το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$.



1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right) t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

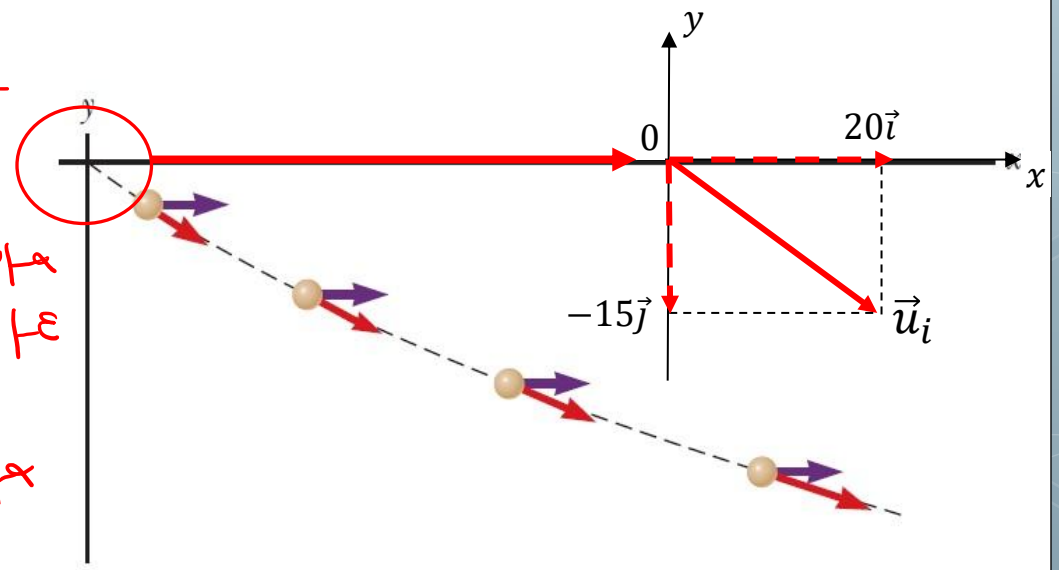
- **<u>Παράδειγμα – Λύση</u>:**
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\mathrm{m/s}$ στον x-άξονα, και $-15\mathrm{m/s}$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα ως $\vec{a}_x = (4\ \mathrm{m}/s^2)\vec{\imath}$. **Με ποια μοντέλα κίνησης μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση του σωματιδίου;**

Από την εκφώνηση, συμπεραίνουμε ότι:

→ Στον άξονα x'x, το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση.

→ Στον άξονα y'y, το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή ταχύτητα.

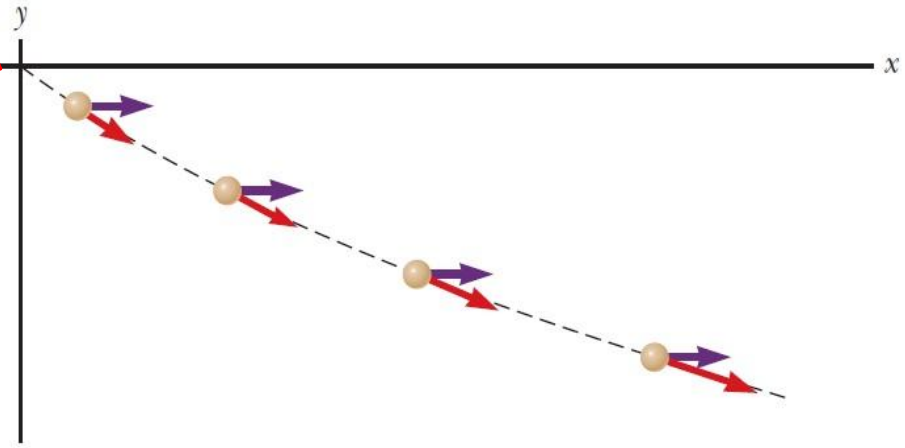
Θεωρούμε $t = 0$ στη συμβολή των αξόνων.



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right) t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

- **<u>Παράδειγμα – Λύση</u>**:
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\mathrm{m/s}$ στον x-άξονα, και $-15\mathrm{m/s}$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα ως $\vec{\boldsymbol{a}}_x = (4\ \mathrm{m}/s^2)\vec{\imath}$.
  Α) Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή.



→ Στον y'y, το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, άρα

$$u_y(t) = -15\ \frac{m}{s}$$

→ Στον x'x, το σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση, άρα

$$u_x(t) = 20 + 4t\ \frac{m}{s}$$

Άρα $\vec{u}(t) = u_x(t)\vec{i} + u_y(t)\vec{j} = \left(20 + 4t\ \frac{m}{s}\right)\vec{i} + \left(-15\ \frac{m}{s}\right)\vec{j}$

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right) t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **<u>Παράδειγμα - Λύση</u>**:
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\mathrm{m/s}$ στον x-άξονα, και $-15\mathrm{m/s}$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα ως $\vec{\boldsymbol{a}}_x = (4\ \mathrm{m}/s^2)\vec{\imath}$.
  Β) Βρείτε την ταχύτητα σε μέτρο και κατεύθυνση όταν $t = 5s$, δηλ. τη γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον άξονα των x.

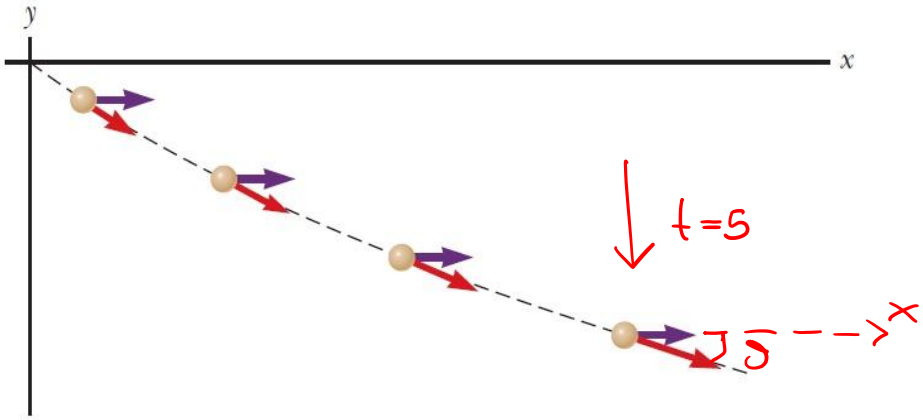
Για $t=5$,

$\vec{u}(5) = \left(40\ \frac{m}{s}\right)\vec{i} + \left(-15\ \frac{m}{s}\right)\vec{j}$

Άρα

$|\vec{u}(5)| = \sqrt{40^2 + (-15)^2} \simeq 43\ \frac{m}{s}$

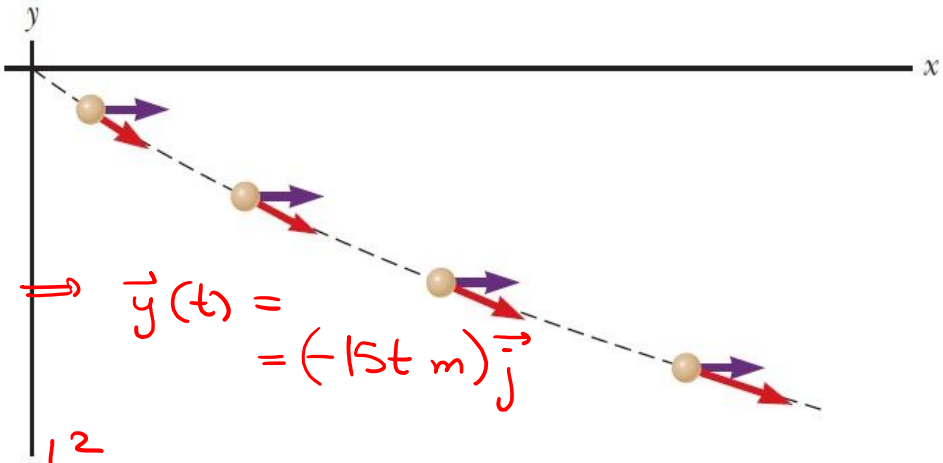
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-15}{40}\right) \cong -21^\circ$



1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right) t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **<u>Παράδειγμα - Λύση</u>**:
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\mathrm{m/s}$ στον x-άξονα, και $-15\mathrm{m/s}$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα ως $\vec{a}_x = (4\ \mathrm{m}/s^2)\vec{\imath}$.
  Γ) Βρείτε τις x, y συντεταγμένες του σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή t, και το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$.



Στον y'y, έχουμε

$y(t) = y_i + u_{y_i} t$

$= 0 - 15t = -15t \Rightarrow \vec{y}(t) = (-15t\ \mathrm{m})\vec{j}$

Στον x'x,

$x(t) = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x \cdot t^2$

$= 0 + 20t + 2t^2 \Rightarrow \vec{x}(t) = (20t + 2t^2\ \mathrm{m})\vec{i}$

Άρα $\vec{r}(t) = \vec{x}(t) + \vec{y}(t) = (20t + 2t^2\ \mathrm{m})\vec{i} + (-15t\ \mathrm{m})\vec{j}$

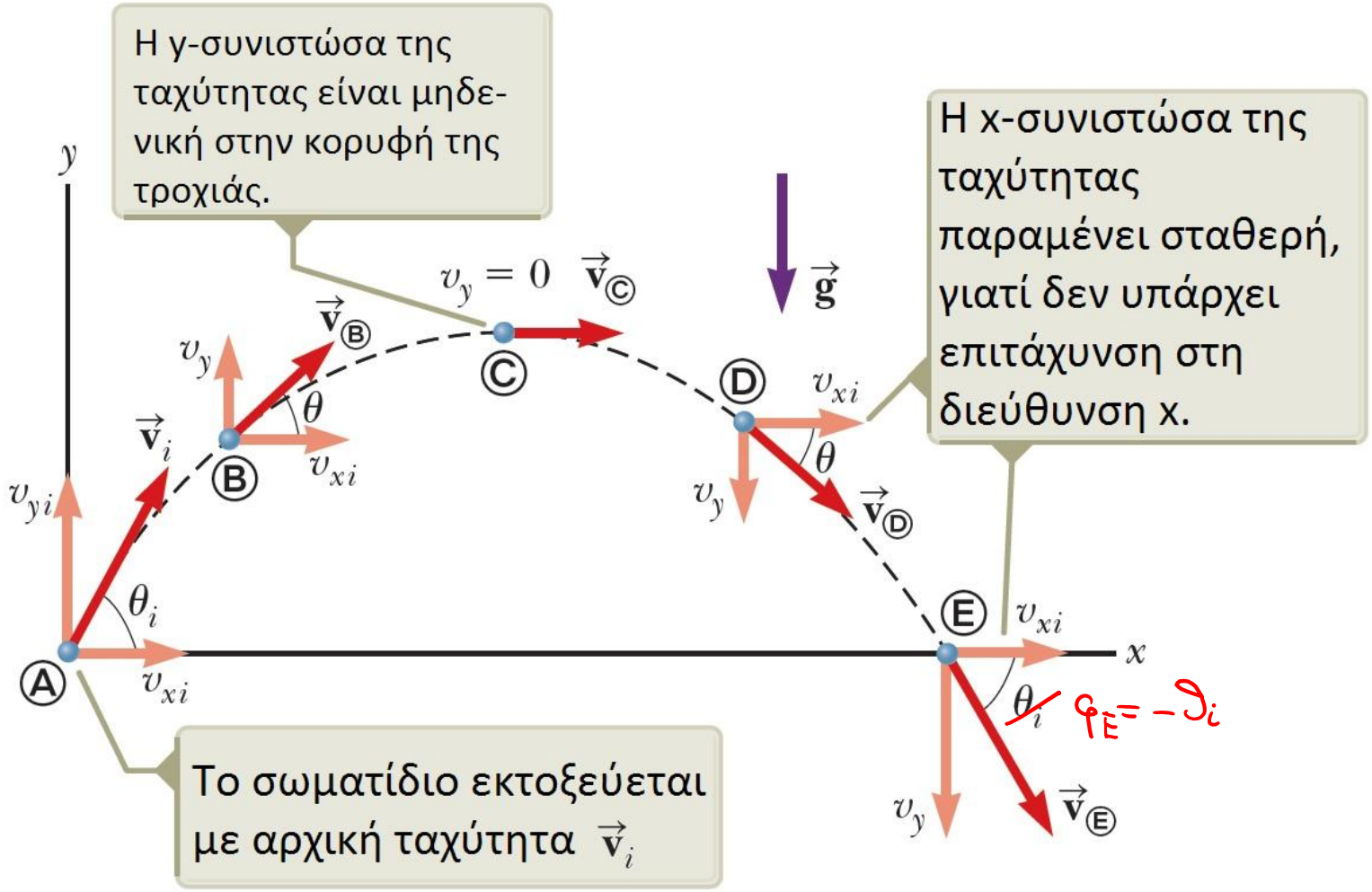
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Μια κλασική κίνηση σε δυο διαστάσεις είναι η **βολή.**

- Το μόνο που αλλάζει είναι
  A. Η **επιτάχυνση της βαρύτητας** $\vec{g}$, που θεωρείται σταθερή και κάθετη (με φορά προς τα κάτω) στον άξονα x.
  B. Επίσης, η **αντίσταση του αέρα** θεωρείται αμελητέα.

- Υπό αυτές τις συνθήκες, η ανάλυση τέτοιων προβλημάτων είναι απλή…

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

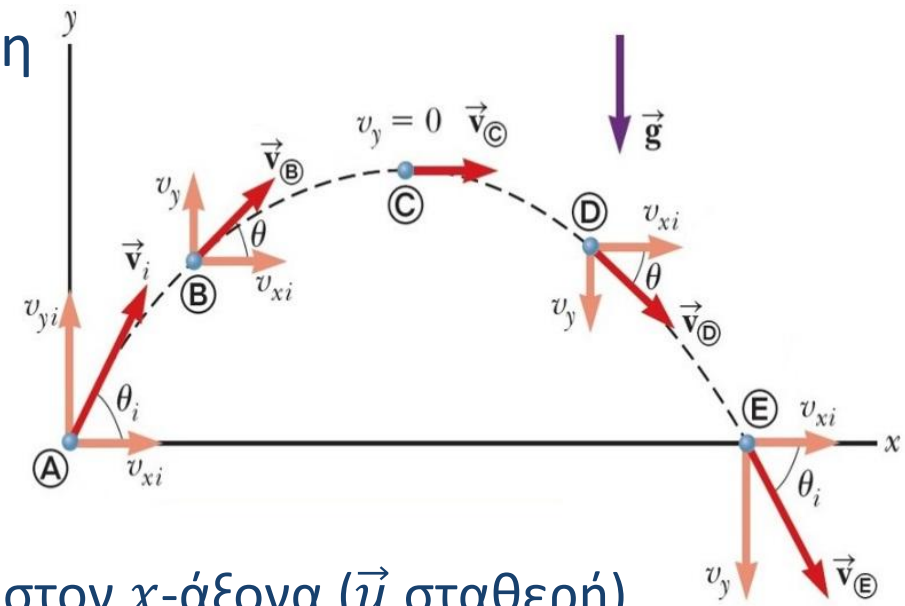


Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας γράψουμε τις δυο *διανυσματικές* εξισώσεις **βολής**
  - $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{g}t$
  - $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$
- Ίδιες με αυτές 8 slides πριν!
- Προσοχή! Είναι διανυσματικές εξισώσεις!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας αναλύσουμε την κίνηση



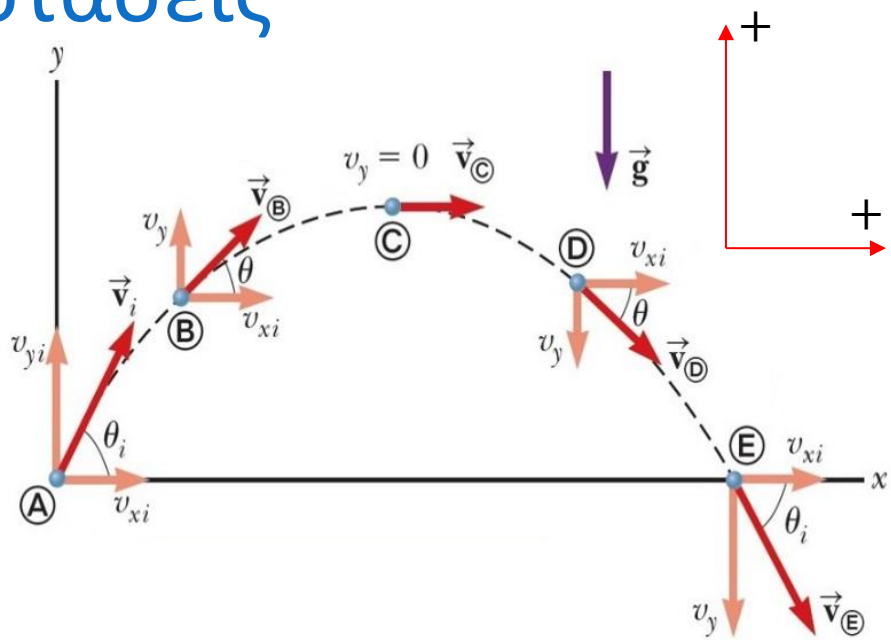
- Αρχική θέση

$$u_{xi} = u_i \cos(\theta_i)$$
$$u_{yi} = u_i \sin(\theta_i)$$

- Δυο συνιστώσες:
  - Α) <u>Μηδενική επιτάχυνση</u> στον x-άξονα ($\vec{u}$ <u>σταθερή</u>)
  - Β) <u>Σταθερή επιτάχυνση</u> στον y-άξονα ($\vec{g}$ – βαρυτική επιτάχυνση)

- Γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης όπως τις ξέρουμε, θεωρώντας μια βολική θετική φορά σε κάθε άξονα (πάνω και δεξιά)

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



- **Αλγεβρικές εξισώσεις**
- **1)** $x_f = x_i + u_{xi}t$
- **2)** $u_{yf} = u_{yi} - gt$

$$u_{y,avg} = \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})$$

$$y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$$

$$y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$$

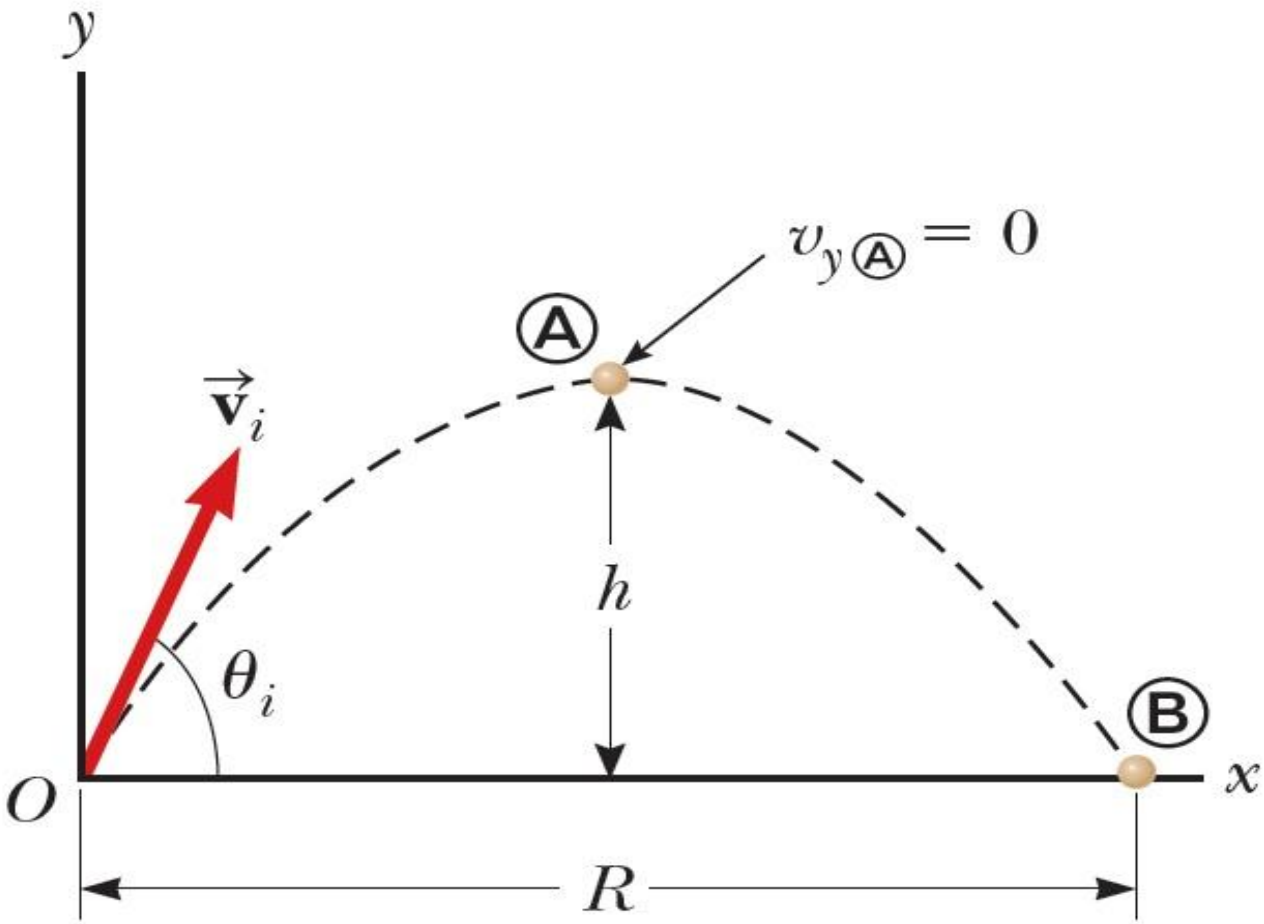
$$u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$$

με $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$

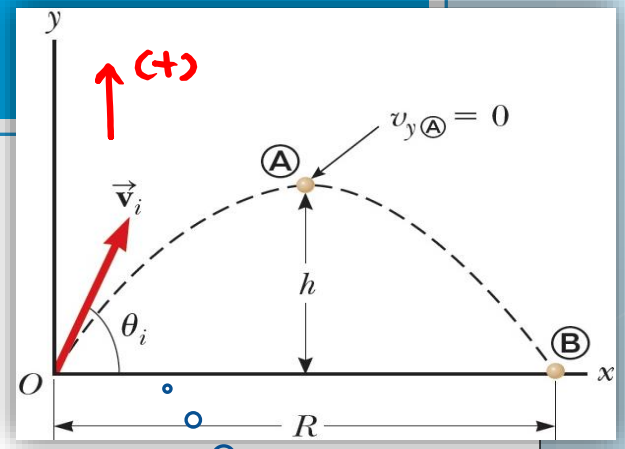
- **Εντελώς** ανεξάρτητες μεταξύ τους κινήσεις!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Εύρος (ή Βεληνεκές)** $\boldsymbol{R}$ και **Μέγιστο Ύψος** $\boldsymbol{h}$ βολής



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



- Ας βρούμε τα h, R συναρτήσει των δεδομένων:

Διαδρομή ΟΑ:

$$y_f = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 = h$$

$$h = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$= 0 + u_i \sin(\theta_i) t - \frac{1}{2} g t^2$$

$y_f = y_A, y_i = y_O$

Επίσης,

$$\cancel{u_{y_f}}^{\,0} = u_{y_i} - gt \Leftrightarrow t = \frac{u_{y_i}}{g}$$

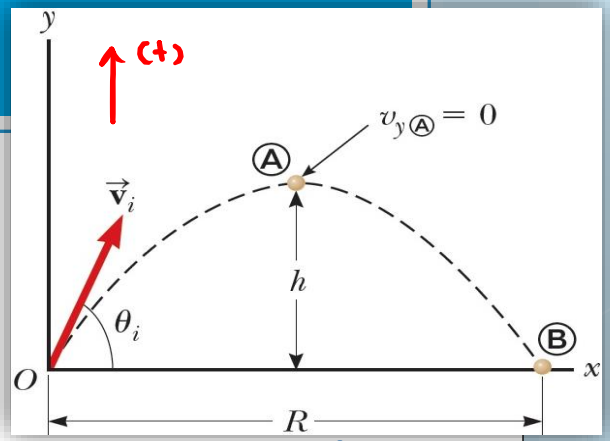
Από τις παραπάνω σχέσεις

$$h = u_i \sin(\theta_i) \left(\frac{u_{y_i}}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{u_{y_i}}{g}\right)^2$$

κι αφού $u_{y_i} = u_i \sin(\theta_i)$ έχουμε

$$\boxed{h = \frac{u_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g}}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



- Ας βρούμε τα h, R συναρτήσει των δεδομένων:

Διαδρομή ΟΒ:

Στον x-άξονα: $x_f = x_i + u_x t \Rightarrow R = x_i + u_x t = u_x t = u_i \cos\theta_i \, t$

Στον y-άξονα: $y_f = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 0 = 0 + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} g t^2 = u_{y_i} t \Rightarrow \frac{1}{2} g t = u_{y_i} = u_i \sin\theta_i \Rightarrow t = \frac{2u_i \sin\theta_i}{g}$$

$y_f = y_B, x_f = x_B,$
$y_i = y_O, x_i = x_O$

Από τις παραπάνω σχέσεις,

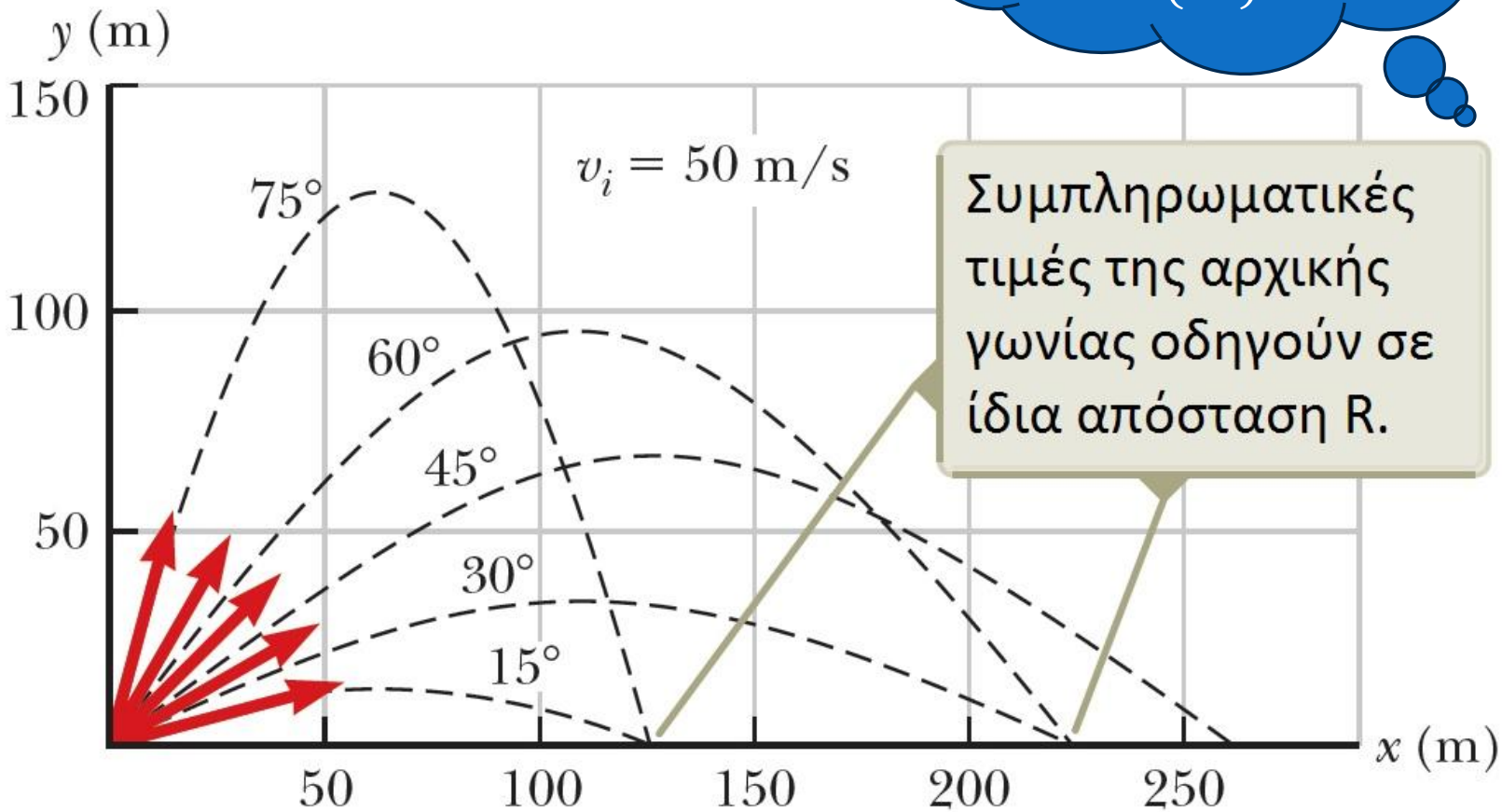
$$R = u_i \cos(\theta_i) \frac{2u_i \sin\theta_i}{g} = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g}$$

Έτσι

$$\boxed{R = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g}}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

$$\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$$
$$= \sin(\pi - 2x)$$
$$= \sin(2x)$$



Συμπληρωματικές τιμές της αρχικής γωνίας οδηγούν σε ίδια απόσταση R.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **<u>Παράδειγμα:</u>**
- Ο Γιάννης Αντετοκούνμπο σουτάρει την μπάλα υπό γωνία 40˚ με το οριζόντιο επίπεδο, σε απόσταση 10 m από το καλάθι (buzzer beater). Το ύψος του είναι 2.0 m ενώ το ύψος της μπασκέτας είναι 3.0 m.

Α) Ποια είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της;

Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;

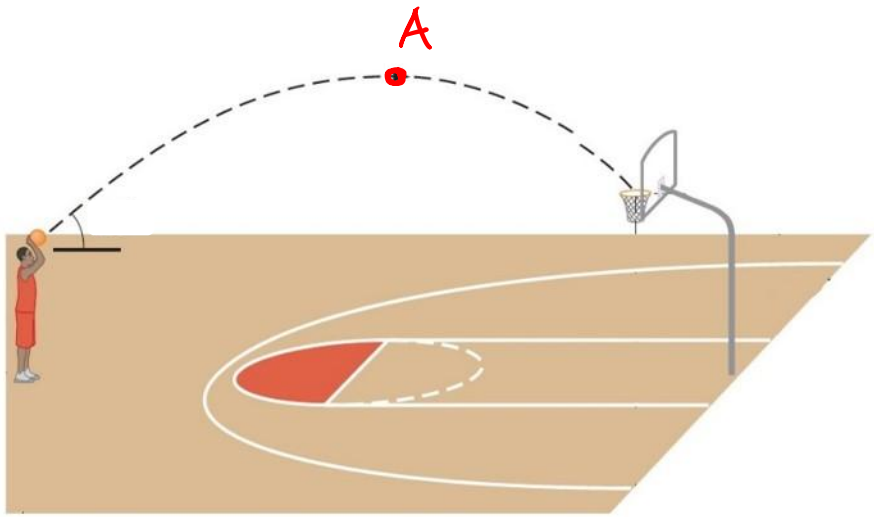
1. $u_{y_f} = u_{y_i} + gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t + \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 + 2g(y_f - y_i)$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Παράδειγμα – Λύση:
  - γωνία 40˚, απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.
    Α) Ποια είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της;

ΜΟΝΟ η επιτάχυνση της βαρύτητας "δρα" στο πρόβλημα.

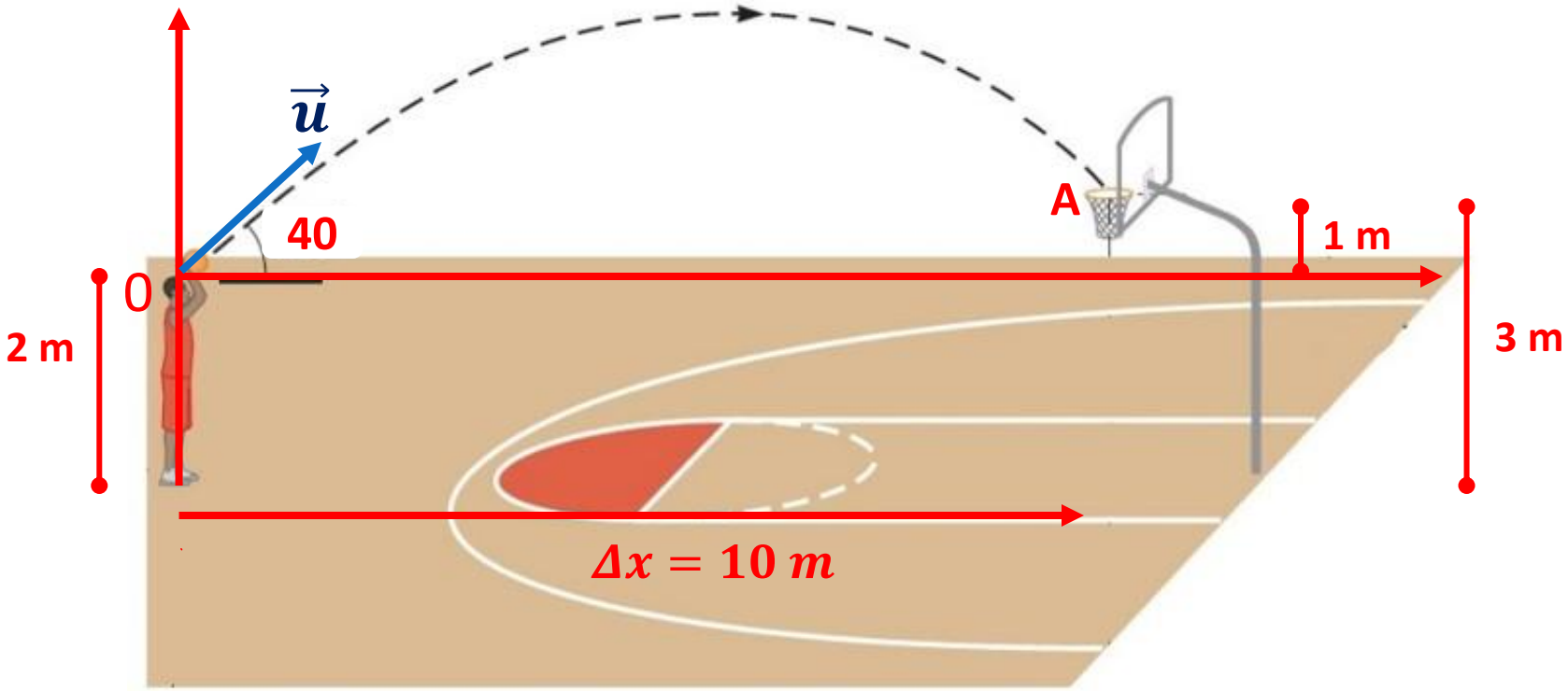
$$\vec{a} = \vec{a_x} + \vec{a_y}$$
$$= \vec{0} + \vec{g}$$
$$= 0 \cdot \vec{i} - g\vec{j}$$
$$= -g\vec{j}$$



1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

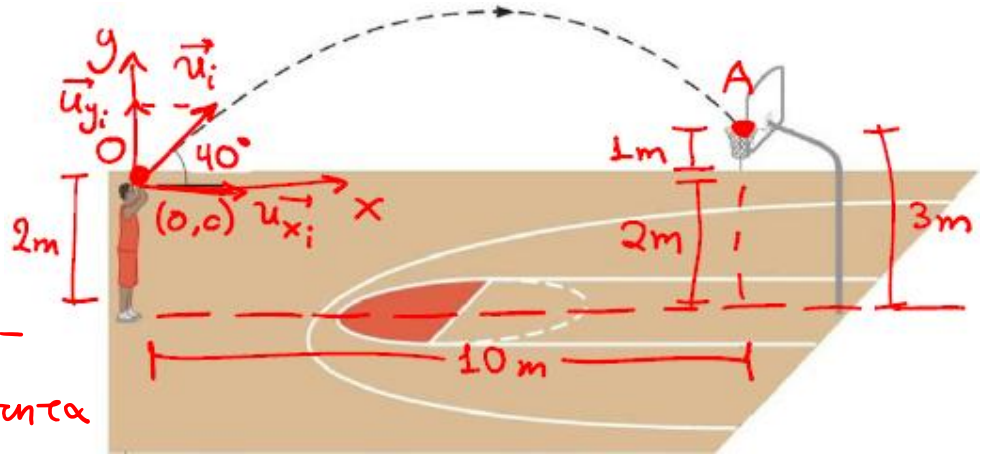
- Παράδειγμα – Λύση:
  - γωνία 40˚, απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.
    Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;



1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Παράδειγμα – Λύση:
  - γωνία 40˚, απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.
    Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;
    Δίνονται:
    $\tan(40^o) = 0.84$,
    $\cos(40^o) = 0.76$,
    $\cos^2(40^o) = 0.58$



Δαλείαμε στη διαδρομή ΟΑ. Η κίνηση είναι ευθύγραμμη με σταθερή ταχύτητα στον x'x και ευθύγραμμη με σταθερή επιτάχυνση στον y'y.

⇝ Στον x'x: $x_A = x_0 + u_{x_i}t \Leftrightarrow 10 = 0 + u_{x_i}t \Leftrightarrow$

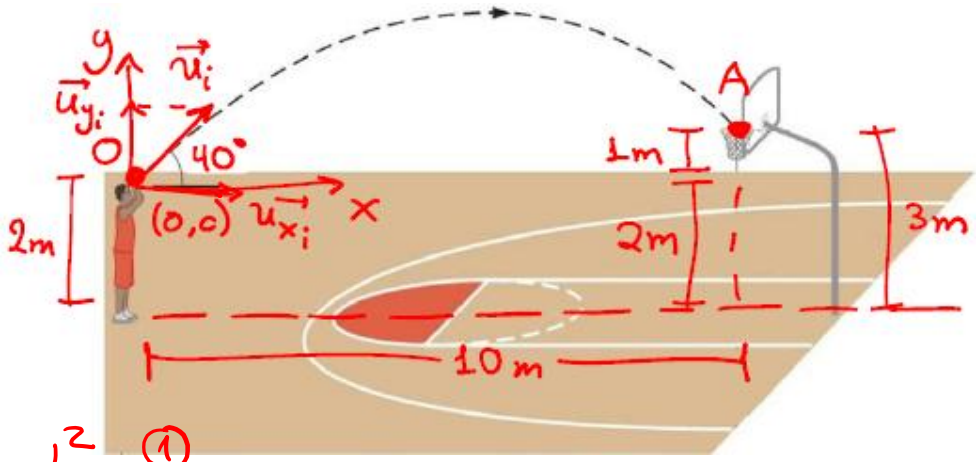
$\Leftrightarrow 10 = u_i \cos 40^\circ \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{10}{u_i \cdot \cos 40^\circ}$ (1)

Θα χρησιμοποιήσουμε την (1) σε μια άλλη εξίσωση.

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Παράδειγμα – Λύση:
  - γωνία 40˚, απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.
    Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;
    Δίνονται:
    $\tan(40^o) = 0.84$,
    $\cos(40^o) = 0.76$,
    $\cos^2(40^o) = 0.58$



Στον άξονα y'y:

$$y_A = y_0 + u_{y_0} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

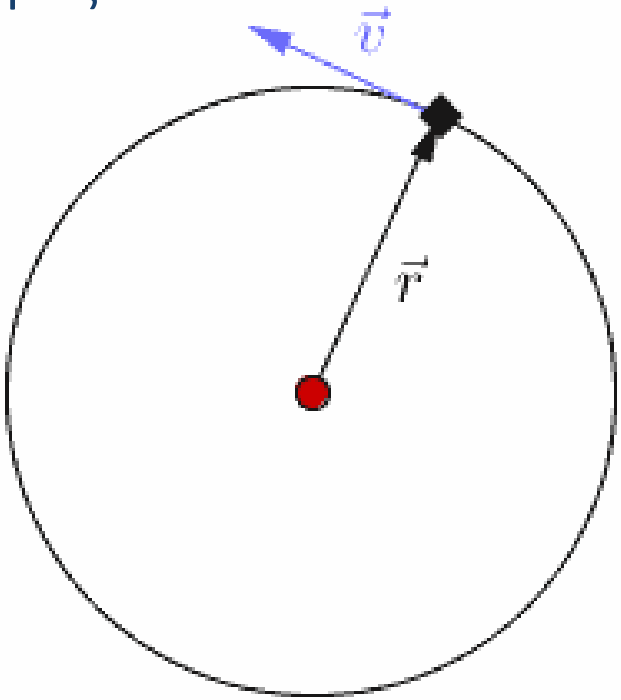
$$= y_0 + u_i \sin(\theta_i)t - \frac{1}{2}gt^2 \overset{①}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{①}{\Longrightarrow} 1 = 0 + \cancel{u_i} \sin(40^\circ)\left(\frac{10}{\cancel{u_i}\cos 40^\circ}\right) - \frac{1}{2}(9.8)\cdot\left(\frac{10}{u_i \cos 40^\circ}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 10\underbrace{\tan(40^\circ)}_{0.84} - 4.9\,\frac{100}{u_i^2\underbrace{\cos^2(40^\circ)}_{0.58}} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow u_i \cong 10.7\,\frac{m}{s}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Σωματίδιο κινείται σε κύκλο ή σε κυκλικό τόξο με σταθερό **μέτρο** ταχύτητας



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Το σωματίδιο διατρέχει την περιφέρεια του κύκλου μια φορά σε χρόνο

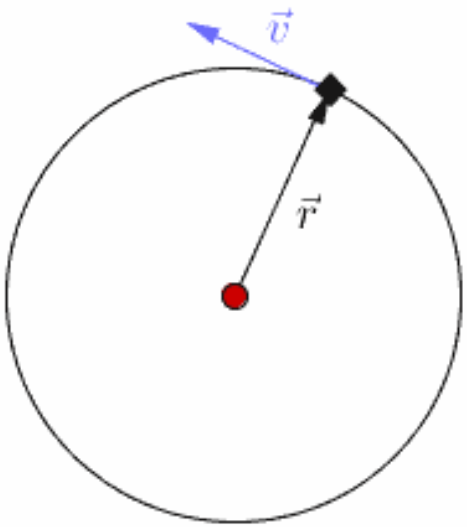
$$u = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{u}$$

  - Η χρονική ποσότητα αυτή ονομάζεται **περίοδος**
  - Άρα έχουμε δυο σχέσεις:

$$u = \frac{2\pi r}{T}$$

και

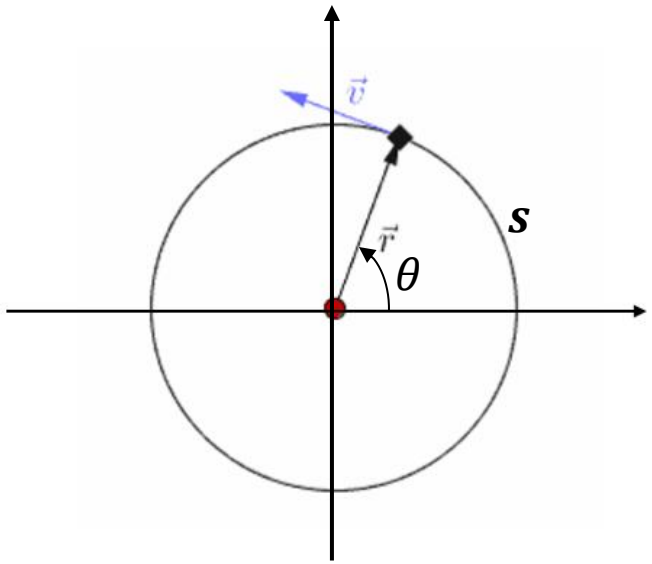
$$T = \frac{2\pi r}{u}$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - **Γωνιακή θέση**
    - Αντί για xy συντεταγμένες, εκφράζουμε καλύτερα τη θέση του σωματιδίου συναρτήσει της απόστασης r από το κέντρο της κίνησης, και της γωνίας θ που αυτή διαγράφει ως προς τον $x'x$
    - Από Γεωμετρία ξέρουμε ότι

$$\theta_{rad} = \frac{s}{r}$$



  - **Γωνιακή μετατόπιση**
    - Όπως φαντάζεστε…

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

    - Ο λόγος

$$\omega_{avg} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

ονομάζεται **μέση γωνιακή ταχύτητα ω_{avg}**

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Αν στο λόγο

$$\omega_{avg} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

στείλουμε το $\Delta t \to 0$, τότε παίρνουμε τη **στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα**

Στην **ομαλή** κυκλική κίνηση:

$$\omega_{avg} = \omega$$

και τότε

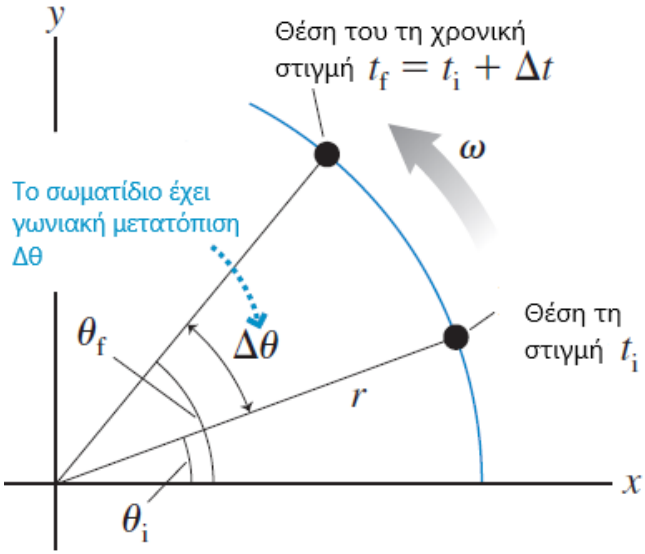
$$\theta_f = \theta_i + \omega t$$

$x_f = x_i + u_x t$

- **Στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα**:

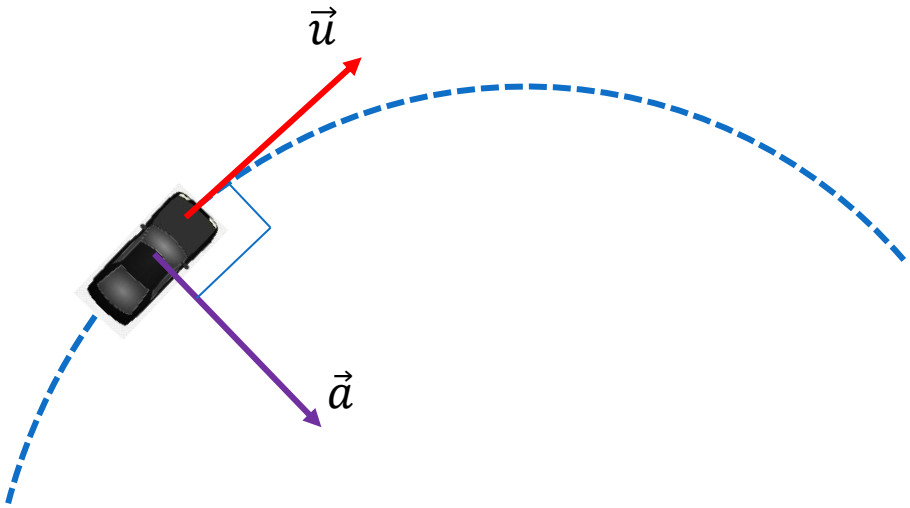
$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

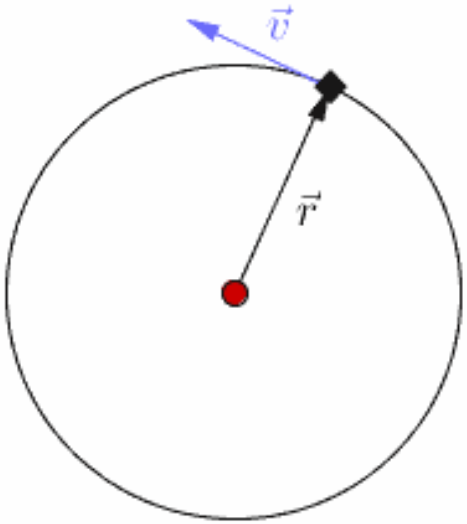
  - Ισούται με το ρυθμό μεταβολής της γωνιακής θέσης κατά την κίνηση



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Σωματίδιο κινείται σε κύκλο ή σε κυκλικό τόξο
  - Σταθερή <u>αριθμητική</u> ταχύτητα σε απόσταση r
    - …προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα ταχύτητας
      - Εφαπτόμενο σε διάφορα σημεία του κύκλου
      - Ως εκ τούτου, το σώμα επιταχύνεται!

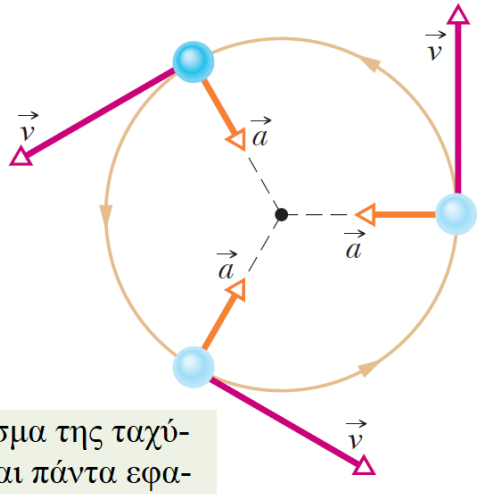




Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Σωματίδιο κινείται σε κύκλο ή σε κυκλικό τόξο
  - Σταθερή <u>αριθμητική</u> ταχύτητα σε απόσταση r
    - …προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα ταχύτητας
      - Εφαπτόμενο σε διάφορα σημεία του κύκλου
      - Ως εκ τούτου, το σώμα επιταχύνεται!
  - Σταθερή επιτάχυνση κατά μέτρο
    - …προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα επιτάχυνσης
    - Όμως κατευθύνεται πάντα ακτινικά προς τα «μέσα»!
      - **Κεντρομόλος επιτάχυνση**

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - **Κεντρομόλος επιτάχυνση**

$$a = \frac{u^2}{r}$$

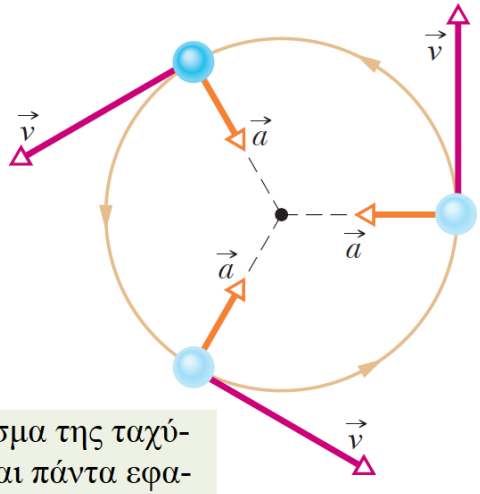
  - Ξέρουμε ότι

$$u = \frac{2\pi r}{T}$$

και από την πρώτη σχέση έχουμε

$$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi u}{T}$$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



  - Μπορείτε εύκολα να δείξετε ότι

$$u = r\omega \quad \text{και} \quad a = r\omega^2$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

1. $a = \frac{u^2}{r} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$
2. $u = \frac{2\pi r}{T} = r\omega$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Παράδειγμα:**
  - Η άκρη του λάστιχου του αυτοκινήτου σας, ακτίνας $r = 0.3$ m, περιστρέφεται με μια γωνιακή ταχύτητα ω. Πόση είναι αυτή όταν το αυτοκίνητο τρέχει με ταχύτητα 54 km/h?

Ξέραμε ότι $u = r\omega$

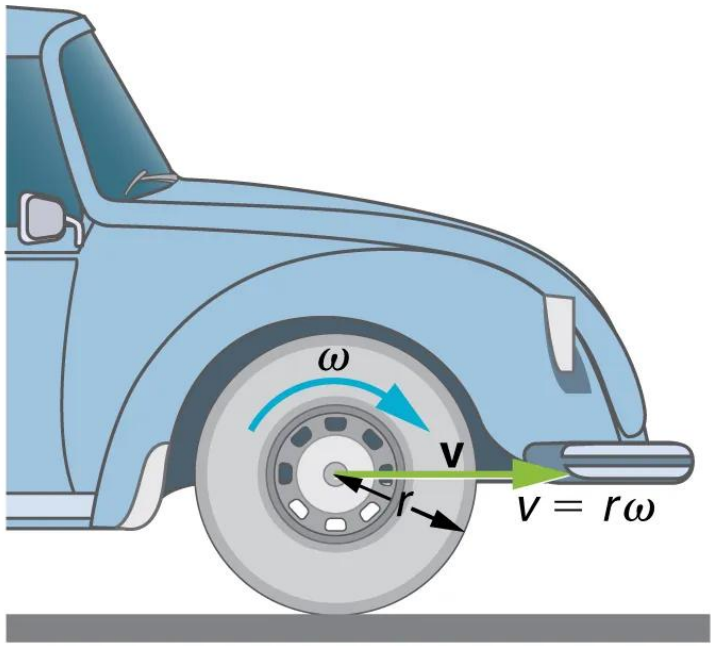
και ότι

$$u = 54 \frac{km}{h} = \frac{54.000}{3600} = 15 \frac{m}{s}$$

Άρα

$$\omega = \frac{u}{r} = \frac{15}{0.3} = \frac{150}{3}$$

$$= 50 \frac{rad}{s}$$

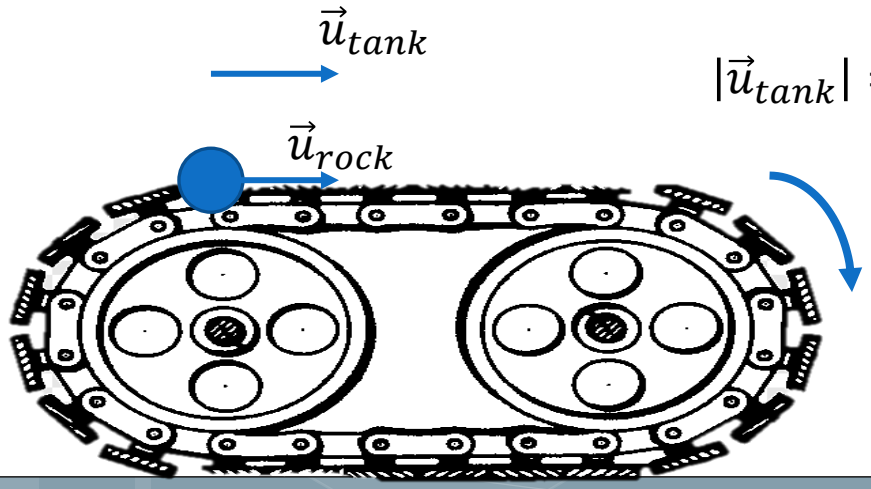


1. $a = \frac{u^2}{r} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$
2. $u = \frac{2\pi r}{T} = r\omega$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

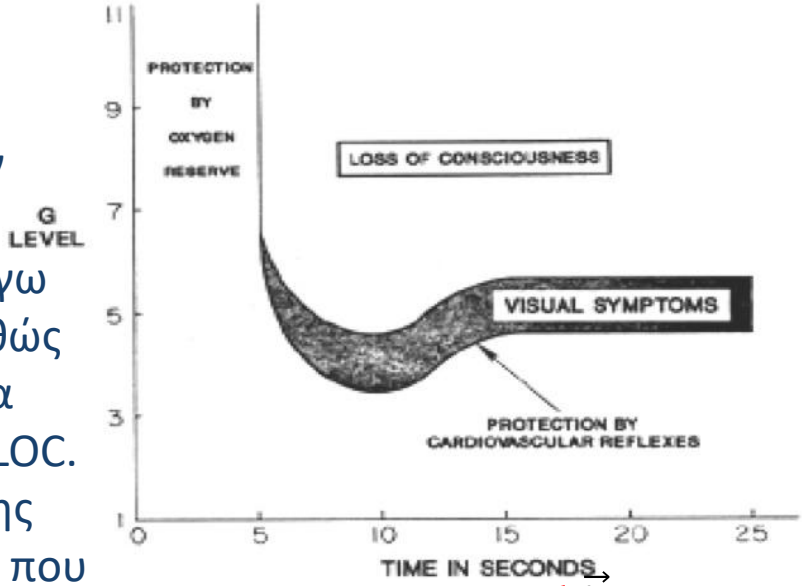
- **<u>Παράδειγμα:</u>**
- Σημείωση: γιατί υποθέσαμε νωρίτερα ότι η γραμμική ταχύτητα της άκρης της ρόδας είναι ίδια σε μέτρο με την ταχύτητα κινησης του οχήματος προς τα δεξιά? Σκεφτείτε ένα τανκ με αυτές της «πεπλατυσμένες» ρόδες (ερπύστριες). Θεωρείστε ένα «χαλίκι» επάνω τους και φανταστείτε τις να κινούν το όχημα προς τα δεξιά. Το χαλίκι και το όχημα δε θα έχουν την ίδια ταχύτητα ***<u>κατά μέτρο</u>***? ☺

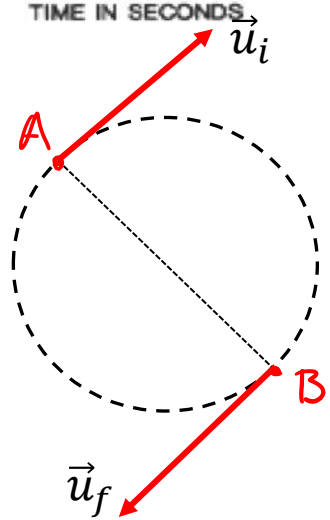
$|\vec{u}_{tank}| = |\vec{u}_{rock}|$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Παράδειγμα:**
  - Οι πιλότοι μαχητικών αεροσκαφών προβληματίζονται όταν έχουν να πάρουν πολύ κλειστές στροφές λόγω της κεντρομόλου επιτάχυνσης. Καθώς η επιτάχυνση αυξάνεται, μπορεί να συμβεί μια συνθήκη γνωστή ως g-LOC. Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης (σε μονάδες g) ενός αεροσκάφους που μπαίνει σε οριζόντια κυκλική στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_i = 400\vec{\imath} + 500\,\vec{\jmath}$ m/s για χρόνο $t = 24$ s και βγαίνει από τη στροφή (πριν «κλείσει» πλήρη κύκλο) με ταχύτητα $\vec{v}_f = -400\vec{\imath} - 500\,\vec{\jmath}$ m/s ?





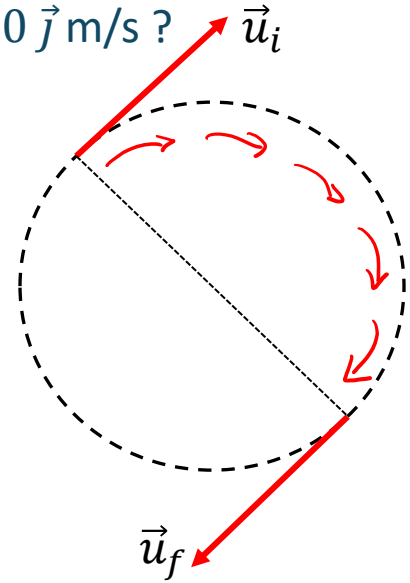
Θεωρούμε ότι το αεροσκάφος εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, δηλ. $|\vec{u}| = |\vec{u}_A| = |\vec{u}_B|$.

1. $a = \frac{u^2}{r} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{2\pi u}{T}$

2. $u = \frac{2\pi r}{T} = r\omega$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης (σε μονάδες g) ενός αεροσκάφους που μπαίνει σε οριζόντια κυκλική στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_i = 400\vec{\imath} + 500\,\vec{\jmath}$ m/s για χρόνο $t = 24$ s και βγαίνει από τη στροφή (πριν «κλείσει» πλήρη κύκλο) με ταχύτητα $\vec{v}_f = -400\vec{\imath} - 500\,\vec{\jmath}$ m/s ?



Έχουμε

$$a = \frac{2\pi u}{T}$$

Ξέρουμε ότι $T = 48$ sec. και βρίσκουμε το μέτρο $\vec{u} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{400^2 + 500^2} \simeq 640.3\ \frac{m}{s}$

Άρα

$$a = \frac{2\pi \cdot 640.3}{48} \simeq 83.8\ \frac{m}{s^2} \xrightarrow{:g} a \simeq 8.5g$$

https://www.youtube.com/watch?v=XqckN5OchAI

Εικόνα: Isaac Newton: Θεωρείται πατέρας της Κλασικής Φυσικής, καθώς ξεκινώντας από τις παρατηρήσεις του Γαλιλαίου αλλά και τους νόμους του Κέπλερ για την κίνηση των πλανητών διατύπωσε τους τρεις μνημειώδεις νόμους της κίνησης και τον περισπούδαστο «νόμο της βαρύτητας»

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Οι Νόμοι της Κίνησης

Εικόνα: Isaac Newton: Θεωρείται πατέρας της Κλασικής Φυσικής, καθώς ξεκινώντας από τις παρατηρήσεις του Γαλιλαίου αλλά και τους νόμους του Κέπλερ για την κίνηση των πλανητών διατύπωσε τους τρεις μνημειώδεις νόμους της κίνησης και τον περισπούδαστο «νόμο της βαρύτητας»

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Οι Νόμοι της Κίνησης

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Ως τώρα, μελετήσαμε κινήσεις σωματιδίων
  - Ορίσαμε θέση, μετατόπιση, ταχύτητες, επιταχύνσεις…
  - …καθώς και **μοντέλα κίνησης** με τα οποία μπορούμε να περιγράψουμε πραγματικά φαινόμενα
    - Κίνηση υπό μηδενική ή μη-μηδενική, σταθερή, επιτάχυνση
  - Δεν μας ενδιέφερε η **αιτία** της κίνησης
- Καιρός να τη μελετήσουμε κι αυτή! ☺

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Ερωτήματα**
  - Γιατί μεταβάλλεται η κίνηση ενός αντικειμένου;
  - Τι προκαλεί την κίνηση ή την ακινησία του;
  - Γιατί είναι πιο εύκολο να κινήσουμε ένα “μικρό” από ένα “μεγάλο” αντικείμενο;

- «Κλειδιά» για τις απαντήσεις
  - **Δύναμη (Force – F)** που <u>ασκείται</u> στο αντικείμενο
  - **Μάζα (Mass – m)** του αντικειμένου

Οι Νόμοι της Κίνησης

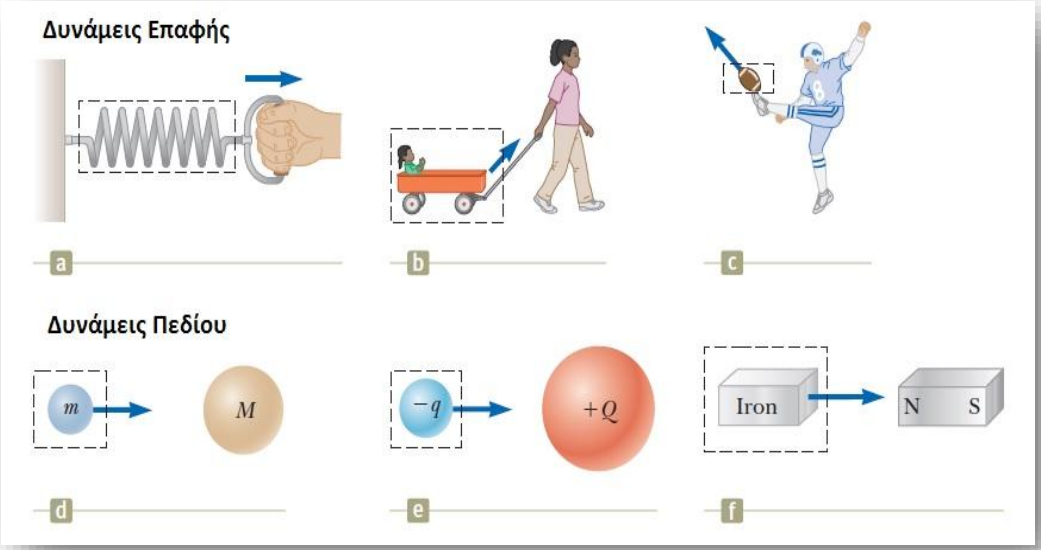
- **Δύναμη**
  - Καθημερινή εμπειρία
    - Πέταγμα μπάλας
    - Σπρώξιμο ντουλάπας
    - Τράβηγμα συρταριού
  - Αλληλεπίδραση με αντικείμενα μέσω μυϊκής δράσης, με αποτέλεσμα την αλλαγή της κινητικής τους κατάστασης
  - Δεν είναι όμως πάντα απαραίτητη η πρόκληση κίνησης
    - Βαριά μπάλα
    - Μεγάλη ντουλάπα
    - Κλειδωμένο συρτάρι

Οι Νόμοι της Κίνησης

- *“Οι Δυνάμεις είναι αυτές που αλλάζουν την ταχύτητα ενός σώματος”*

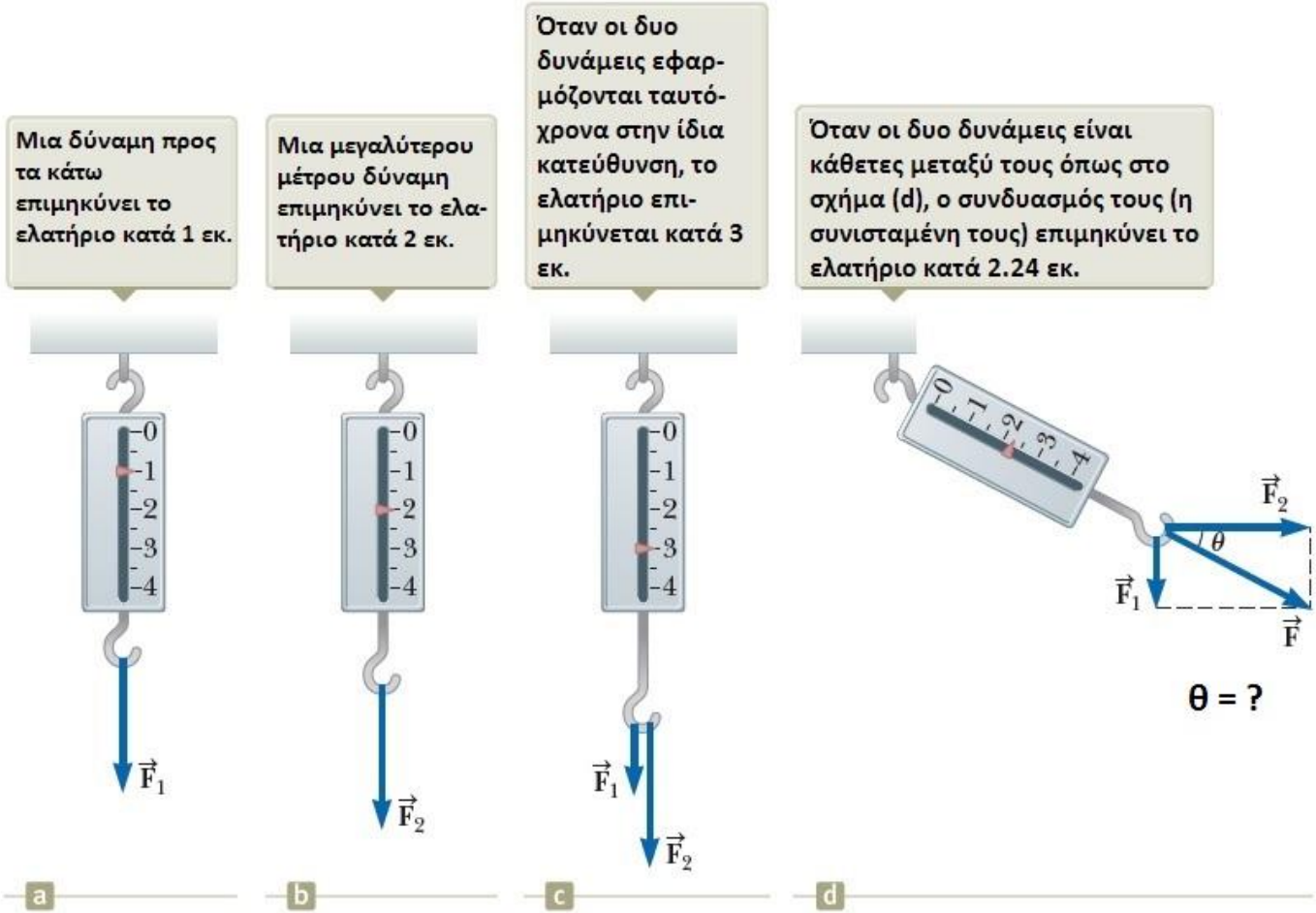
(I. Newton)

- Δυο κατηγορίες δυνάμεων (κλασική θεώρηση)
  - Δυνάμεις Επαφής
  - Δυνάμεις Πεδίου (ή δυνάμεις από απόσταση)



Οι Νόμοι της Κίνησης

- Η διανυσματική φύση της Δύναμης



Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Συστήματα αναφοράς**
  - **Σύστημα αναφοράς** ονομάζουμε το φυσικό αντικείμενο στο οποίο προσαρτούμε το σύστημα συντεταγμένων μας (και το οποίο αντικείμενο θεωρούμε ότι δεν κινείται)
    - Π.χ. το έδαφος, όταν μετράμε την ταχύτητα ενός σώματος
  - Αν ένα σώμα **δεν αλληλεπιδρά με άλλα σώματα,** μπορούμε να ορίσουμε ένα **σύστημα αναφοράς** στο οποίο το σώμα έχει **μηδενική επιτάχυνση: αδρανειακό σύστημα αναφοράς**
    - $\vec{a} = 0 \Rightarrow$ ακίνητο σώμα **Ή** κινούμενο με σταθερή ταχύτητα
  - **Όλα** τα συστήματα αναφοράς στο μάθημα θα (φροντίσουμε να) είναι αδρανειακά…
    - …οπότε ΔΕ θα αναφερόμαστε σε αυτή τους την ιδιότητα

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Πρώτος Νόμος του Newton**
  - Πάντα μπορούμε να βρούμε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς
    - …και στη συνέχεια θα θεωρούμε κάθε σύστημα αναφοράς ως αδρανειακό, κι εκεί θα ισχύουν οι νόμοι που θα περιγράψουμε
  - **Απουσία εξωτερικών δυνάμεων και παρουσία αδρανειακού συστήματος αναφοράς**
    - **ένα σώμα σε ηρεμία παραμένει σε ηρεμία**
    - **ένα σώμα υπό σταθερή ταχύτητα παραμένει υπό σταθερή ταχύτητα**
  - Με άλλα λόγια
    - **Όταν δεν επιδρά καμιά δύναμη σε ένα σώμα, η ταχύτητά του (ως διάνυσμα) δεν μπορεί να αλλάξει**
      - **Κι άρα η επιτάχυνση του σώματος είναι μηδενική**
- Η τάση ενός σώματος να αντιδρά σε οποιαδήποτε μεταβολή της κινητικής του κατάστασης λέγεται **αδράνεια** (και η **μάζα** του αποτελεί **«μέτρο»** της αδράνειάς του)

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Πρώτος Νόμος του Newton**
  - Όμως η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος
  - Μπορούν να ασκούνται δυνάμεις επάνω σε ένα σώμα αλλά η συνολική δύναμη (ή **συνισταμένη**) να είναι μηδέν!

- Άρα μια πιο πλήρης διατύπωση του 1ου νόμου του Newton θα είναι:

- **Αν η συνισταμένη (το διανυσματικό άθροισμα) των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα είναι μηδενική, η επιτάχυνση του σώματος είναι μηδενική**
  - **Αν το σώμα είναι ακίνητο, τότε παραμένει ακίνητο**
  - **Αν κινείται υπό σταθερή ταχύτητα, συνεχίζει και κινείται έτσι**

- Λέμε τότε ότι **το σώμα ισορροπεί**

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Από τα προηγούμενα, μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι:

- **Ο 1ος νόμος του Newton γράφεται ως**

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

- **Αν σε ένα σώμα απουσιάζουν δυνάμεις ή η συνισταμένη τους είναι μηδέν, το σώμα ισορροπεί (δηλ. δεν επιταχύνει)!**
  - **Ένα σώμα που επιταχύνει πρέπει να υπόκειται σε κάποια (συνισταμένη, μη μηδενική) δύναμη**

- **Η δύναμη είναι το αίτιο της <u>μεταβολής</u> της κινητικής κατάστασης ενός σώματος**

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Ο 1ος Νόμος του Newton μας εξηγεί τι συμβαίνει σε ένα σώμα όταν οι δυνάμεις που ασκούνται έχουν **συνισταμένη μηδέν**
- Ο 2ος Νόμος του Newton (που θα δούμε αμέσως) μας εξηγεί τι συμβαίνει όταν οι δυνάμεις που ασκούνται επάνω του **ΔΕΝ έχουν μηδενική συνισταμένη**
- Πριν τον δούμε, ας μιλήσουμε για την έννοια της **μάζας** ενός σώματος

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Η έννοια της μάζας**
- Διαφορετικά σώματα χρειάζονται διαφορετικό μέτρο δύναμης για να μεταβάλλουν την κατάσταση κίνησής τους
  - Με άλλα λόγια, αντιστέκονται περισσότερο ή λιγότερο στη μεταβολή της κίνησής τους
- Γιατί;
  - Γιατί έχουν διαφορετική **μάζα**
- Η **μάζα** είναι μια ιδιότητα ενός σώματος που **ορίζει «πόση» αντίσταση παρουσιάζει στην προσπάθεια μεταβολής της ταχύτητάς του**

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Δεύτερος Νόμος του Newton**
  - Σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η **επιτάχυνση** ενός σώματος είναι
    1. **ευθέως ανάλογη** της **συνολικής δύναμης**, $\sum \vec{\mathrm{F}}$, που ασκείται επάνω του και
    2. **αντιστρόφως ανάλογη** της **μάζας** του, m

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

και έτσι έχουμε τη γνωστή σχέση

$$\boxed{\Sigma\, \vec{F} = m\vec{a}}$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Φυσικά, μπορούμε – και σε πολλές περιπτώσεις **επιβάλλεται** – να αναλύσουμε το 2ο νόμο (όπως και τον 1ο) σε ***συνιστώσες παράλληλες με τους άξονες*** **του συστήματος αναφοράς μας**

$$\sum \vec{\mathrm{F}}_x = m\vec{a}_x, \qquad \sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y, \qquad \sum \vec{F}_z = m\vec{a}_z$$

- **Μπορούμε να μετατρέψουμε τις παραπάνω διανυσματικές εξισώσεις σε αλγεβρικές λαμβάνοντας υπ' όψη τη θετική φορά του εκάστοτε άξονα**
  - ….όπως θα δείξουμε στο επόμενο παράδειγμα

- Μονάδα μέτρησης δύναμης στο S.I.
  - Newton (N) ⇔ $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2}$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Δυο (στους τρεις ☺) Νόμοι του Newton**

1. **Ένα σώμα στο οποίο η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται είναι μηδενική, <u>ισορροπεί</u> (δηλ. δεν επιταχύνεται)**

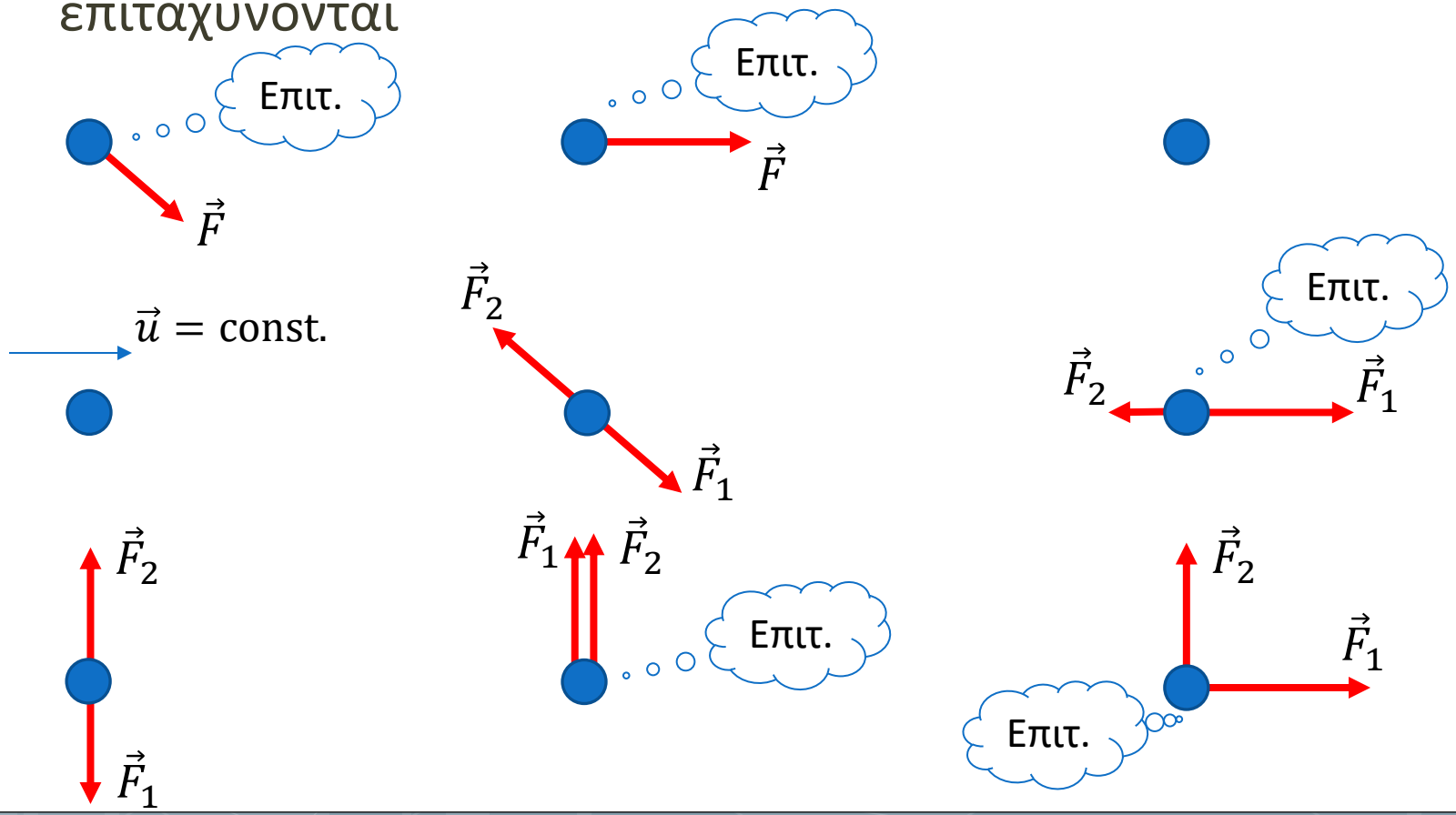
$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

2. **Ένα σώμα στο οποίο η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται είναι μη μηδενική, <u>επιταχύνεται</u>**

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Quiz:**
- Βρείτε αν τα παρακάτω σώματα ισορροπούν ή επιταχύνονται



Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα:**
  - Ένας δίσκος του hockey στον πάγο, μάζας 0.3 kg, ολισθαίνει ελεύθερα σε οριζόντια επιφάνεια πάγου. Δυο μπαστούνια τη χτυπούν ταυτόχρονα, με δυνάμεις και υπό γωνίες όπως στην Εικόνα. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της επιτάχυνσης του δίσκου.

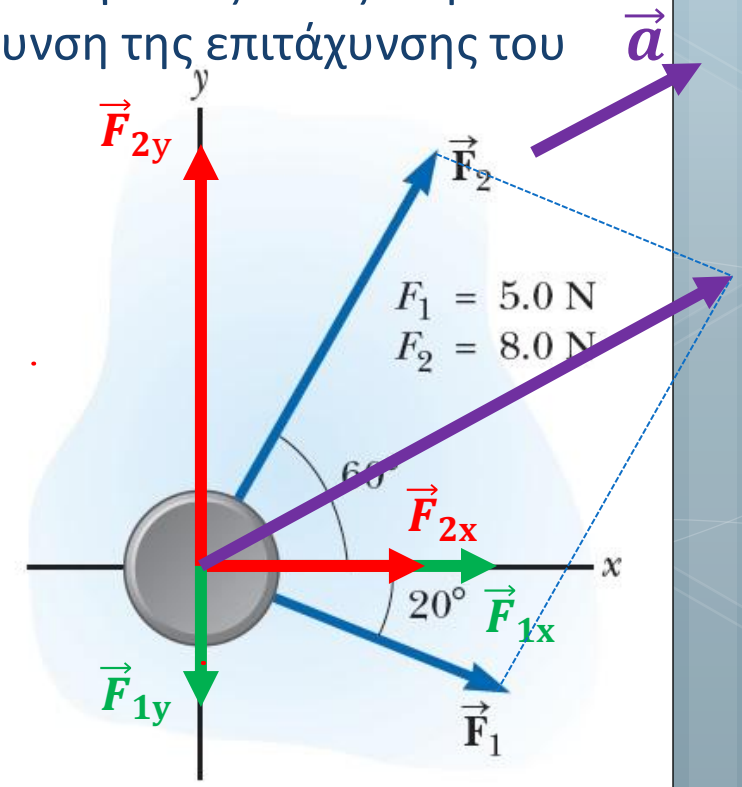
Αναλύαμε τις δυνάμεις σε συνιστώσες!

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{1y} = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j}$$

$$= F_1\cos(-20^\circ)\vec{i} + F_1\sin(-20^\circ)\vec{j}$$

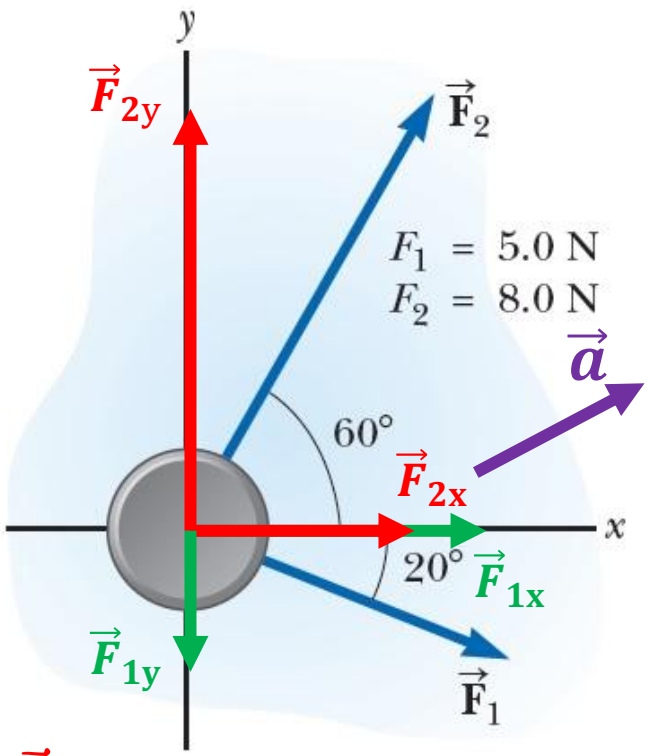
$$= 5\cos(-20^\circ)\vec{i} + 5\sin(-20^\circ)\cdot\vec{j}$$

$$= 5\cos(20^\circ)\vec{i} - 5\sin(20^\circ)\vec{j} \quad (1)$$



Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Επίσης,

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{2y} = F_{2x}\cdot\vec{i} + F_{2y}\cdot\vec{j}$$

$$= F_2\cos(60^\circ)\,\vec{i} + F_2\sin(60^\circ)\,\vec{j}$$

$$= 8\cos(60^\circ)\,\vec{i} + 8\sin(60^\circ)\,\vec{j} \quad (2)$$

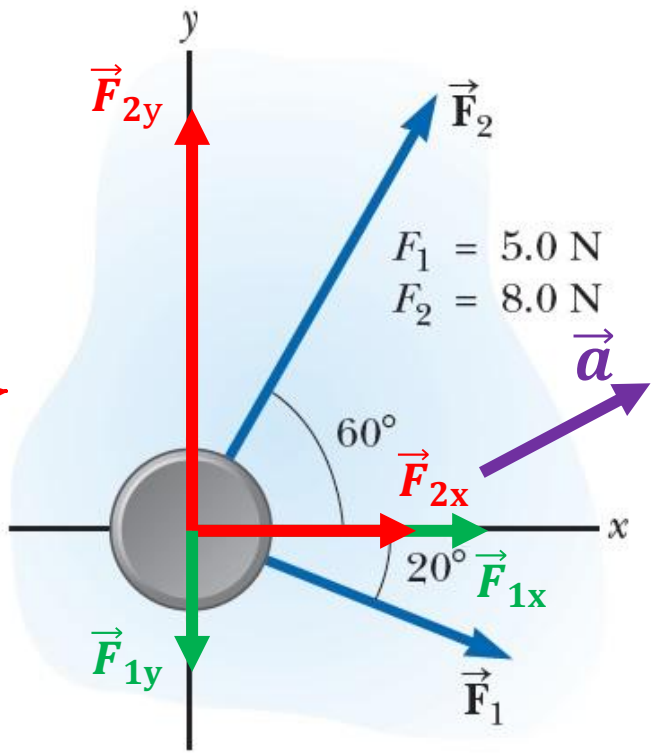
Ο δίσκος επιταχύνεται και στους δυο άξονες:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}$$

Άρα θα δουλέψαμε με το 2ο Ν. Νεύτον και στους δυο άξονες!

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Στον άξονα x'x:

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \Leftrightarrow \sum F_x \vec{i} = m a_x \vec{i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum F_x = m a_x \Leftrightarrow F_{1x} + F_{2x} = m a_x$$

Λόγω ①, ②

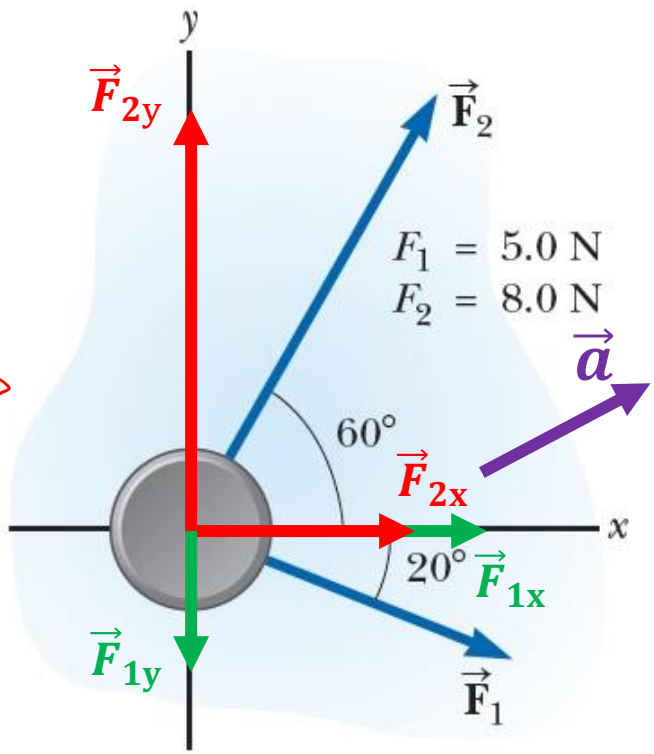
$$5\cos 20^\circ + 8\cos 60^\circ = m \cdot a_x$$

$$a_x = \frac{5\cos 20^\circ + 8\cos 60^\circ}{0.3} \simeq 29 \frac{m}{s^2}$$

Άρα $\vec{a}_x = a_x \vec{i} = \left(29 \frac{m}{s^2}\right)\vec{i}$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**



~ Στον άξονα y'y:

$$\Sigma \vec{F}_y = m\vec{a}_y \Leftrightarrow \Sigma F_y \cdot \vec{j} = m a_y \cdot \vec{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma F_y = m a_y \Leftrightarrow F_{1y} + F_{2y} = m a_y$$

Λόγω ①, ②

$$-5 \sin 20^\circ + 8 \sin 60^\circ = m a_y$$

$$a_y = \frac{8 \sin 60^\circ - 5 \sin 20^\circ}{0.3} \simeq 17 \ \frac{m}{s^2}$$

Άρα $\vec{a}_y = a_y \cdot \vec{j} = \left(17 \frac{m}{s^2}\right) \vec{j}$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**

Άρα τελικά

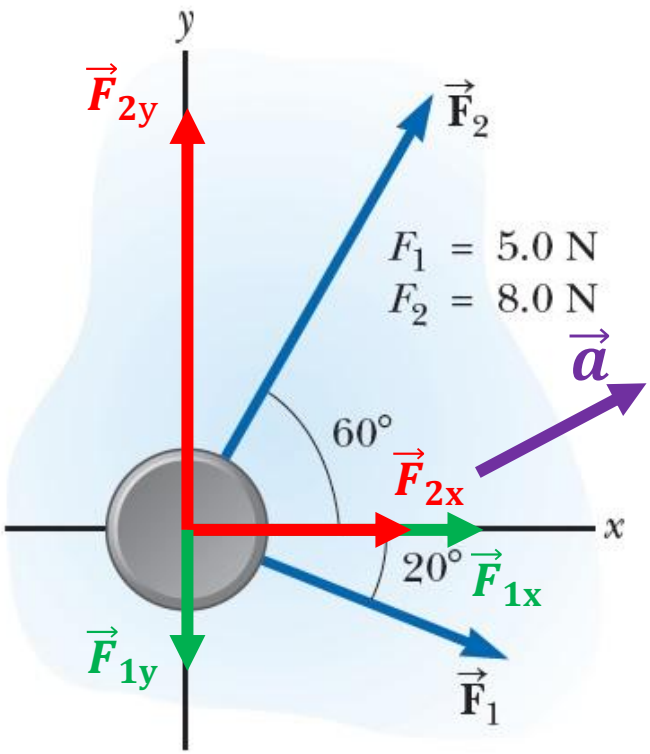
$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

$$= \left(29 \frac{m}{s^2}\right)\vec{i} + \left(17 \frac{m}{s^2}\right)\vec{j}$$

οπότε

$$|\vec{a}| = \sqrt{29^2 + 17^2} \simeq 33.6 \frac{m}{s^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{17}{29}\right) \simeq 30^\circ$$



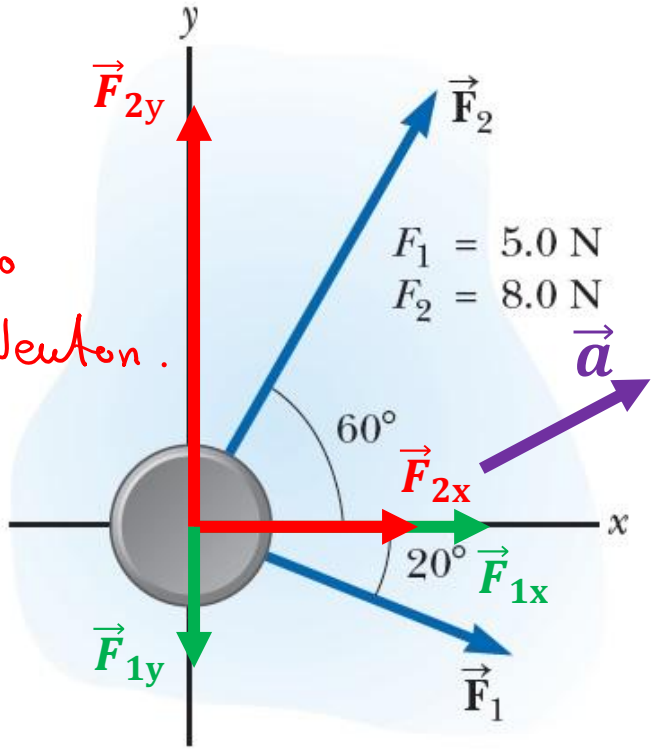
Οι Νόμοι της Κίνησης

- Τι μας έδειξε το προηγούμενο παράδειγμα?

- Ότι μπορούμε να:
  - Γράφουμε τους νόμους του Newton ανά άξονα...
    - ...στη διανυσματική μορφή τους
  - ...και στη συνέχεια, επιλέγοντας θετική φορά για τους δυο άξονες, να τις μετατρέπουμε σε αλγεβρικές, χωρίς να κουβαλάμε τα μοναδιαία διανύσματα! Πως?
    - Δυνάμεις που «κοιτάζουν» προς τη **θετική φορά του** κάθε άξονα θα έχουν **θετικό πρόσημο** στις αλγεβρικές εξισώσεις
    - Δυνάμεις που «κοιτάζουν» **αντίθετα της θετικής φοράς** κάθε άξονα θα έχουν **αρνητικό πρόσημο** στις αλγεβρικές εξισώσεις
      - Πώς θα προκύπτουν αυτές?
      - Από την ανάλυση σε συνιστώσες κ' τις γωνίες του προβλήματος!

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση (ΞΑΝΑ):**



Το σώμα επιταχύνεται και στους δυο άξονες, άρα ισχύει ο 2ος Νόμος Newton.

$\rightsquigarrow$ Στον x'x: $\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} = m\vec{a}_x \Rightarrow$

$\Rightarrow +F_{1x} + F_{2x} = m a_x \Rightarrow$

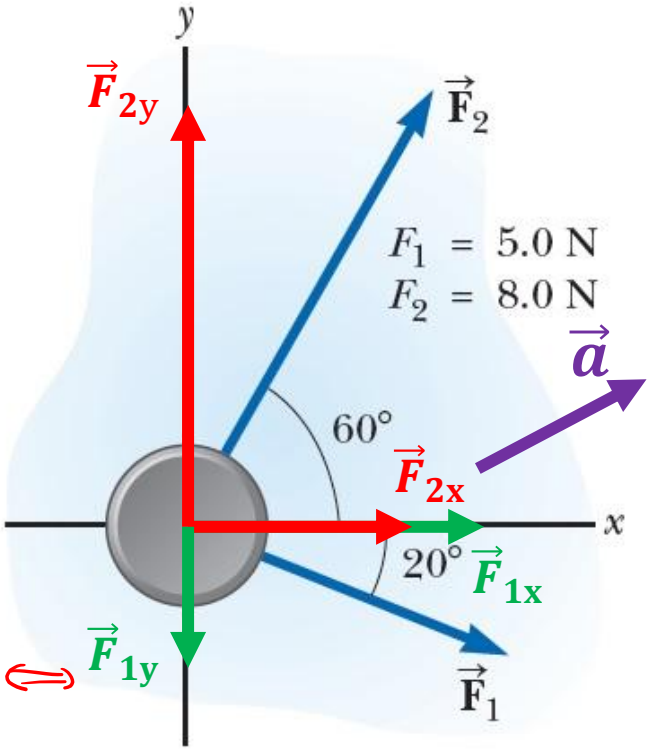
$\Rightarrow F_1 \cos 20^\circ + F_2 \cos 60^\circ = m a_x \Rightarrow$

$\Rightarrow a_x = \dfrac{F_1 \cos 20^\circ + F_2 \cos 60^\circ}{m} \simeq 29 \dfrac{m}{s^2}$

Άρα $\vec{a}_x = a_x \cdot \vec{i} = \left(29 \dfrac{m}{s^2}\right)\vec{i}$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση (ΞΑΝΑ):**



$\rightsquigarrow$ Στον $y'y$: $\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} = m\vec{a}_y \Rightarrow$

$\Rightarrow -F_{1y} + F_{2y} = m a_y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -F_1 \sin 20^\circ + F_2 \sin 60^\circ = m a_y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_y = \dfrac{F_2 \sin 60^\circ - F_1 \sin 20^\circ}{m} \simeq 17 \dfrac{m}{s^2}$

Άρα

$\vec{a}_y = a_y \cdot \vec{j} = \left(17 \dfrac{m}{s^2}\right) \vec{j}$

Οι Νόμοι της Κίνησης

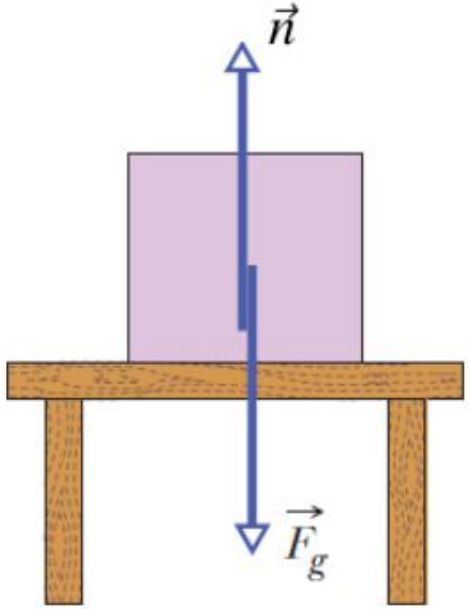
- **Δύναμη του βάρους**
  - Όλα τα σώματα έλκονται από τη Γη
  - Με άλλα λόγια, η Γη ασκεί δύναμη επάνω τους
  - Την περίφημη **<u>δύναμη του βάρους</u>** $\vec{F}_g$
  - Άρα, τα επιταχύνει προς το κέντρο της!

- **Βαρυτική επιτάχυνση** $\vec{g} = \left(-9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)\vec{j}$

- 2ος Νόμος του Newton για αντικείμενο που **πέφτει ελεύθερα**, θετική φορά ↑

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} \Leftrightarrow \vec{F}_g = m\vec{g} \Rightarrow F_g = -mg$$

Οι Νόμοι της Κίνησης



- **Κάθετη δύναμη** από επιφάνεια
  - Το σώμα ισορροπεί στο τραπέζι
  - Πρέπει

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0}$$

  - Αν $\vec{n}$ η δύναμη που ασκεί το τραπέζι πάνω στο σώμα, τότε

$$\sum \vec{F}_y = \vec{n} + \vec{F}_{\mathrm{g}} = \vec{0} \Rightarrow n - \vec{F}_g = 0 \Rightarrow n = F_g$$

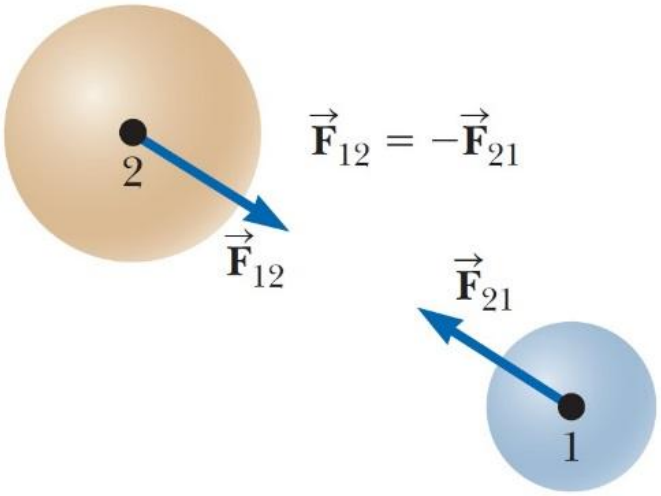
  - Άρα η κάθετη δύναμη από το τραπέζι στο σώμα είναι

$$n = F_g = mg$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Τρίτος Νόμος του Newton**
  - *Σε κάθε δράση, υπάρχει μια αντίδραση!*
  - Πιο τυπικά… ☺
    - ***Αν δυο σώματα αλληλεπιδρούν, η δύναμη $\vec{F}_{12}$ που ασκείται από το σώμα 1 στο σώμα 2 είναι ίση σε μέτρο και αντίθετη σε κατεύθυνση στη δύναμη $\vec{F}_{21}$, που ασκείται από το σώμα 2 στο σώμα 1:***

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



Οι δυνάμεις του 3ου νόμου Newton ασκούνται σε διαφορετικά σώματα!!!

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Τρεις Νόμοι του Newton**

1. **Ένα σώμα στο οποίο η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται είναι μηδενική, ισορροπεί (δηλ. δεν επιταχύνεται)**

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

2. **Ένα σώμα στο οποίο η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται είναι μη μηδενική, επιταχύνεται**

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

3. **Αν δυο σώματα αλληλεπιδρούν, η δύναμη $\vec{F}_{12}$ που ασκείται από το σώμα 1 στο σώμα 2 είναι ίση σε μέτρο και αντίθετη σε κατεύθυνση στη δύναμη $\vec{F}_{21}$, που ασκείται από το σώμα 2 στο σώμα 1**

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Ανάλυση** με βάση τους Τρεις Νόμους
  - Δυο **νέα** μοντέλα
  - Α) Όταν τα σώματα βρίσκονται σε **ισορροπία** $(\vec{a} = \mathbf{0})$**,** και η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω τους είναι μηδενική
  - Β) Όταν σώματα **επιταχύνουν** υπό την άσκηση εξωτερικών δυνάμεων $(\vec{a} \neq \mathbf{0})$ και η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω τους είναι μη μηδενική

Θυμηθείτε τα μοντέλα της Κινητικής!!

Α. Κίνηση υπό σταθερή ταχύτητα

Β. Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Τέσσερα μοντέλα ανάλυσης της κίνησης**

Σώμα σε ακινησία

Κίνηση υπό σταθερή ταχύτητα (διαδρομή Α→Β)

$$x_B = x_A + u_x t$$

Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση (διαδρομή Α→Β)

1. $u_{x_B} = u_{x_A} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_A} + u_{x_B}}{2}$
3. $x_B = x_A + u_{x,avg} t$
4. $x_B = x_A + u_{x_A} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
5. $u_{x_B}^2 = u_{x_A}^2 + 2a_x(x_B - x_A)$

Σώμα σε ισορροπία

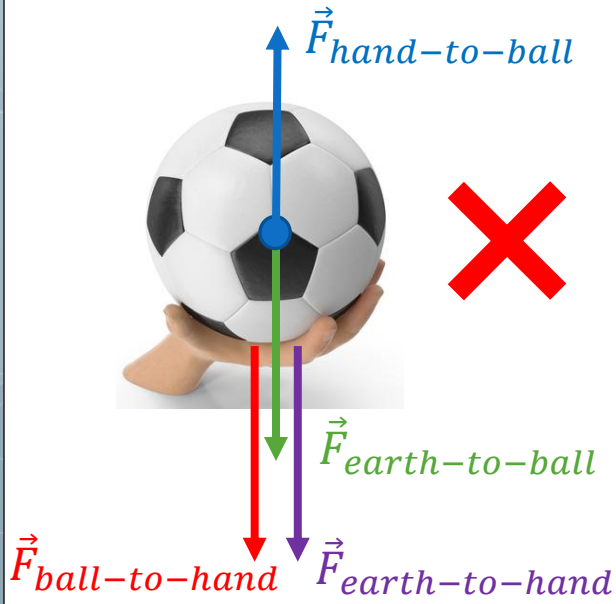
$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

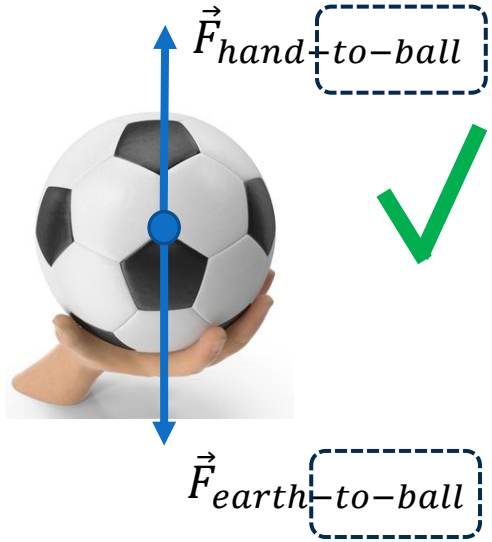
Σώμα σε επιτάχυνση

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Πώς βρίσκουμε/σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα?**
  - Κατ'αρχάς πρέπει να καταλαβαίνουμε **<u>ΠΟΙΕΣ</u>** είναι αυτές οι δυνάμεις
    - …να τις διακρίνουμε δηλαδή από όποιες άλλες…
    - …και να τις σχεδιάσουμε **πάνω στο σώμα**, θεωρώντας ότι όλες ξεκινούν από το **κέντρο του** (σαν να ήταν σωματίδιο)



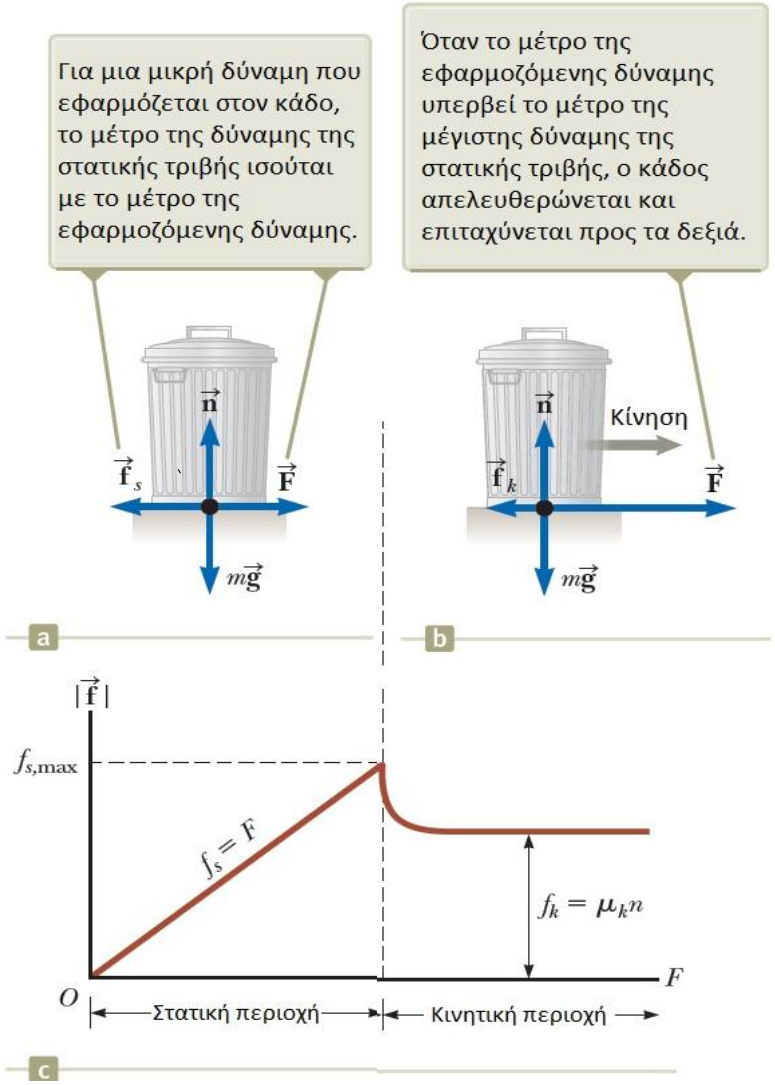


Διάγραμμα ελευθέρου σώματος

Οι Νόμοι της Κίνησης

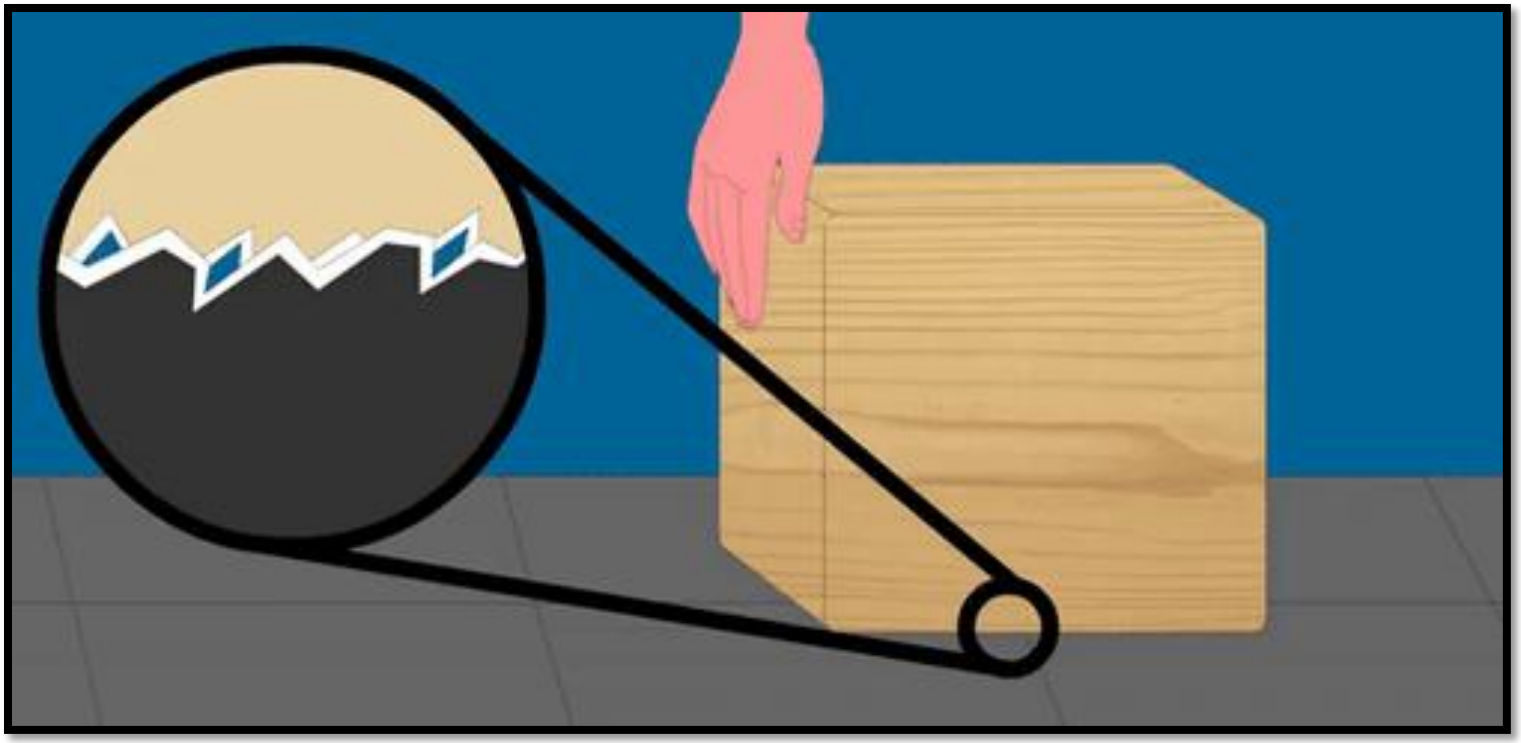
- **Δυνάμεις Τριβής**
  - Ως τώρα, τις αγνοήσαμε
  - Πολύ σημαντικές (είναι ο λόγος που περπατάμε, που τα αυτοκίνητα κινούνται, που μπορούμε να κρατήσουμε ένα μολύβι, που μπορούμε να δέσουμε τα κορδόνια μας κλπ)
  - **Τριβή ονομάζουμε τη δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση ενός σώματος όταν αυτό εφάπτεται σε μια επιφάνεια**
  - Πολλά είδη τριβής
    - Στατική τριβή, τριβή ολίσθησης, τριβή ρευστών, κ.α.
  - Στη Κίνηση Σωμάτων, μας ενδιαφέρουν μόνο:
    - **Στατική τριβή**
    - **Τριβή ολισθήσεως**

Οι Νόμοι της Κίνησης



- **Στατική Τριβή**
  - Δύναμη $\vec{f}_s$ που αντιστέκεται στην κίνηση και στη δύναμη που την προκαλεί **σε ένα ακίνητο αντικείμενο**
- **Τριβή Ολίσθησης**
  - Δύναμη $\vec{f}_k$ που αντιστέκεται στην κίνηση για ένα αντικείμενο **που βρίσκεται σε κίνηση**

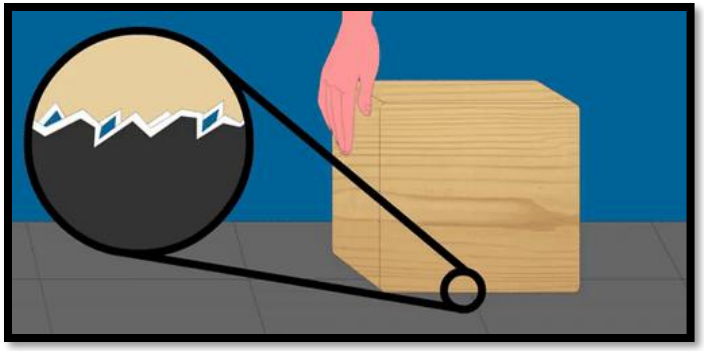
Οι Νόμοι της Κίνησης



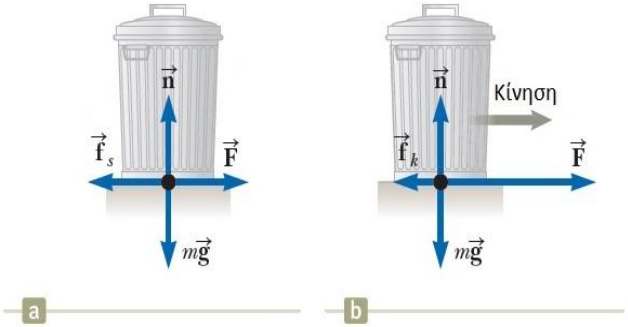
Οι Νόμοι της Κίνησης

- Οι δυνάμεις τριβής είναι **διαμοριακές** δυνάμεις: δρουν μεταξύ των μορίων δύο επιφανειών σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή

- Σε μικροσκοπική κλίμακα, οι περισσότερες επιφάνειες είναι τραχιές
  - Ακόμη και οι επιφάνειες που φαίνονται απόλυτα λείες με γυμνό μάτι…
  - … εμφανίζουν πολλές «προεξοχές» και «βαθουλώματα» στο μικροσκόπιο



Οι Νόμοι της Κίνησης



- **Παρατηρήσεις**
  - Το μέτρο της δύναμης της **στατικής** τριβής f_s ανάμεσα σε δυο επιφάνειες σε επαφή μπορεί να πάρει τιμές

$$f_s \leq \mu_s n \Rightarrow f_{s,max} = \mu_s n$$

όπου η σταθερά μ_s λέγεται **συντελεστής στατικής τριβής**, και n είναι το μέτρο της δύναμης που ασκείται από την ακίνητη επιφάνεια στην προς κίνηση επιφάνεια (από το έδαφος στον κάδο)

  - Το μέτρο της δύναμης της τριβής **ολίσθησης** ανάμεσα σε δυο επιφάνειες ισούται με

$$f_k = \mu_k n$$

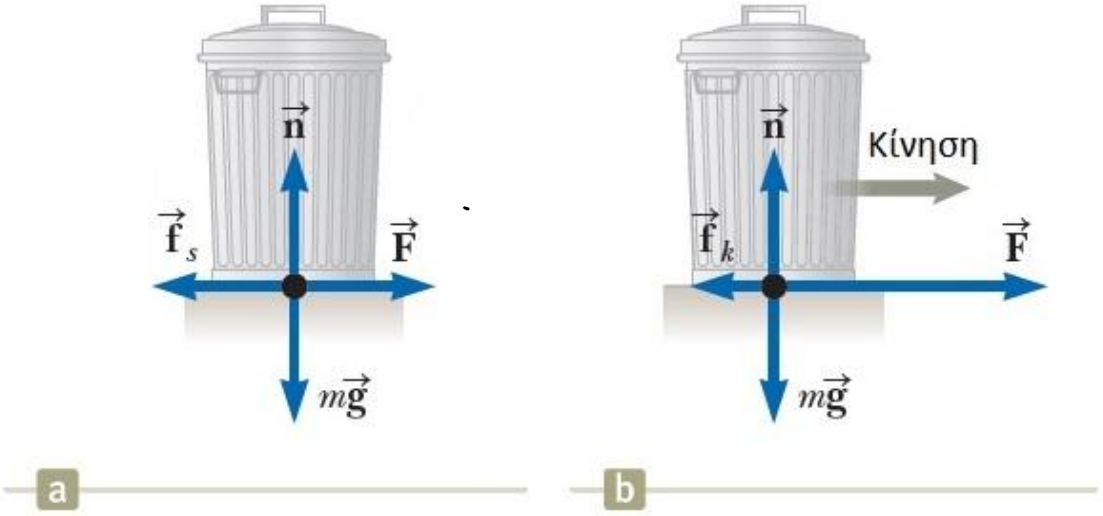
Οι εξισώσεις αυτές ΔΕΝ είναι διανυσματικές!!

όπου η σταθερά μ_k λέγεται **συντελεστής τριβής ολίσθησης**.

  - Οι συντελεστές αυτοί θα θεωρούνται σταθεροί

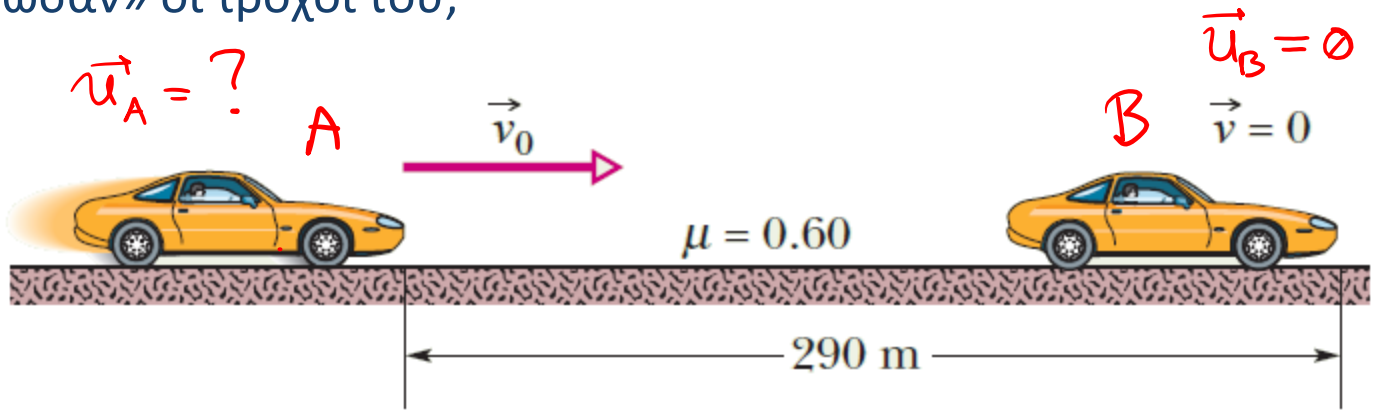
Οι Νόμοι της Κίνησης

- Οι τιμές των συντελεστών εξαρτώνται από το είδος της επιφάνειας
- Η **διεύθυνση** της δύναμης τριβής είναι πάντα **παράλληλη με την επιφάνεια** στην οποία εφάπτεται το σώμα, και η **φορά** της πάντα **αντίθετη** στην κίνηση (ή στην προσπάθεια κίνησης) σε σχέση με την επιφάνεια



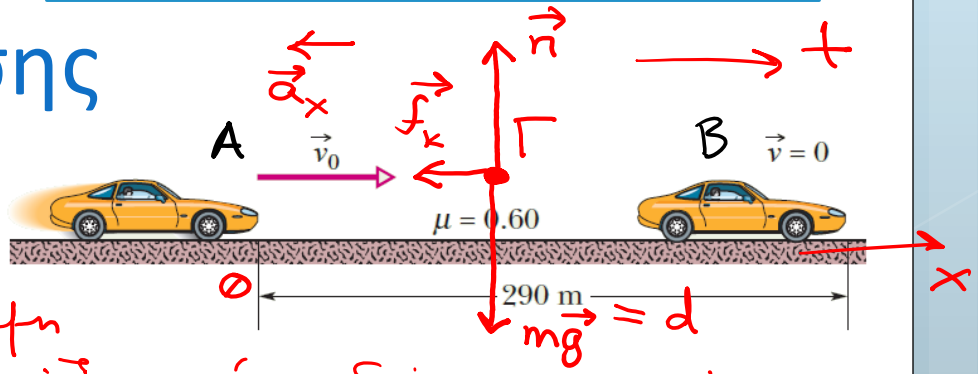
Οι Νόμοι της Κίνησης

- **<u>Παράδειγμα:</u>**
- Όταν οι τροχοί ενός αυτοκινήτου «κλειδώνουν» (σταματούν να γυρίζουν) εξ' αιτίας ενός απότομου φρεναρίσματος, το αυτοκίνητο ολισθαίνει στο δρόμο και «αποτυπώνει» στο οδόστρωμα ίχνη από τα ελαστικά του. Το ρεκόρ για τα μεγαλύτερα σε μήκος ίχνη ελαστικών σε δημόσιο δρόμο έγινε το 1960 στην Αγγλία – το μήκος του ίχνους ήταν 290 μέτρα! Υποθέτοντας ότι $\mu_k = 0.6$ μεταξύ οδοστρώματος και ελαστικών, και ότι το αυτοκίνητο επιταχυνόταν σταθερά κατά το φρενάρισμα, πόσο γρήγορα έτρεχε το αυτοκίνητο ακριβώς όταν «κλείδωσαν» οι τροχοί του;



Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση, σε άξονα x'x. Επίσης, το σώμα υπόκειται σε δυνάμεις, δηλ. ισχύει ο 2ος νόμος του Newton.

Δουλεύαμε στη διαδρομή A→B, θεωρήσαμε $x_A = 0$, και θεωρήσαμε ότι $t_A = 0$. Ισχύει

$$x_B - x_A = d = 290\ m$$

$$u_B^2 = u_A^2 \overset{*}{-} 2a_x \Delta x$$

$$0 = u_A^2 - 2a_x d$$

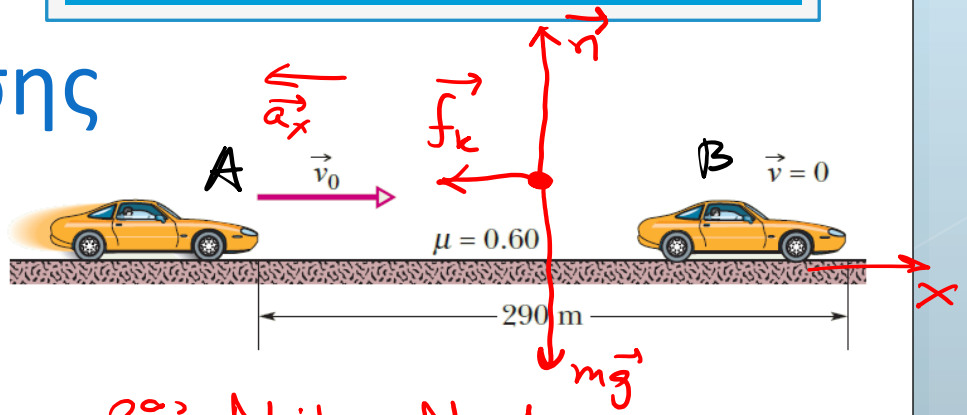
$$u_A^2 = 2a_x d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_A = \pm\sqrt{2a_x d} \Rightarrow \boxed{u_A = \sqrt{2a_x d}} \quad (1)$$

*με το "μείον" έχουμε ήδη λάβει υπ'όψη μας την αρνητική φορά της $\vec{a}_x$ σε σχέση με τη θετική φορά της κίνησης.

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Δε γνωρίζαμε το a_x!

Ισχύει στη διαδρομή A→B ο 2ος Νόμος Newton:

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \Leftrightarrow \vec{f}_k = m\vec{a}_x \Rightarrow -f_k = m a_x \Rightarrow \boxed{a_x = -\frac{f_k}{m}}$$

Επίσης ξέραμε ότι $\boxed{f_k = \mu_k n}$. Στον άξονα y, το σώμα ισορροπεί, άρα ισχύει ο 1ος Νόμος Newton:

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{n} + m\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow n - mg = 0 \Leftrightarrow \boxed{n = mg}$$

Άρα $f_k = \mu_k m g$ και άρα $a_x = -\frac{\mu_k \cancel{m} g}{\cancel{m}} = -\mu_k g \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{a_x = -\mu_k g} \quad (2).$$

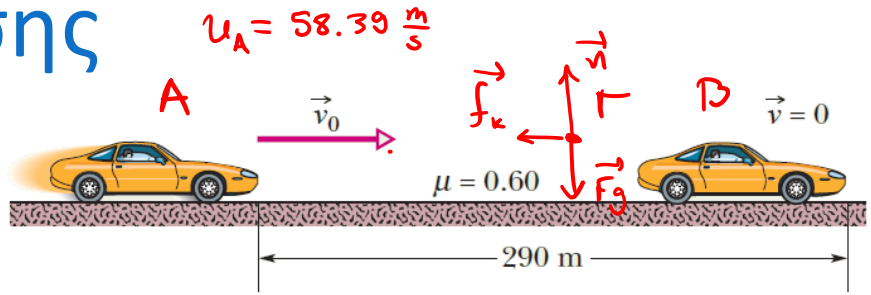
Η (1) λόγω (2), $u_A = \sqrt{2\mu_k g d} \simeq$

Η a_x εδώ μπαίνει ως |·|

$\simeq 58.39 \frac{m}{s}$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Η ταχύτητα αυτή ισούται με περίπου 210 km/h, που είναι ένας λογικός αριθμός για ένα τέτοιο αγώνισμα.

Οπότε μπορούμε να γράψουμε

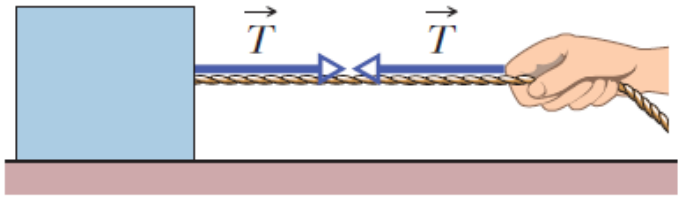
$$\vec{u_A} = \left(58.39\ \frac{m}{s}\right)\vec{i}$$

Ερώτηση: Πως πιστεύετε θα άλλαζε το αποτέλεσμα αν:

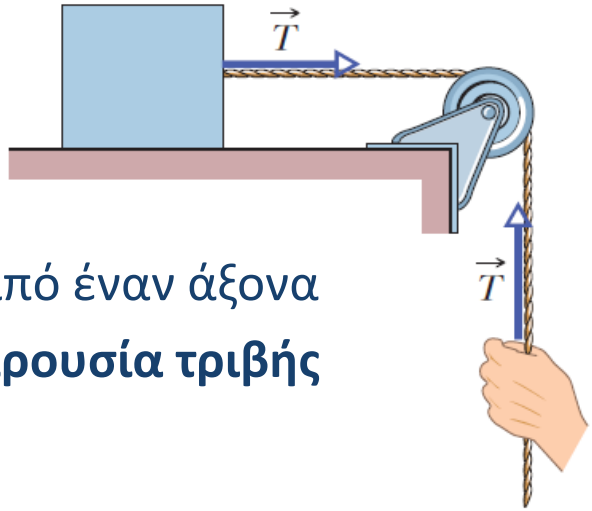
α) $\mu_k \uparrow$

β) $\mu_k \downarrow$

Οι Νόμοι της Κίνησης



- **Τάση νήματος και τροχαλίες**
- Έστω ένα **τεντωμένο νήμα** (ή καλώδιο ή σχοινί ή άλλο παρόμοιο) που δένεται σε ένα σώμα
- Σχεδόν πάντα το νήμα θεωρείται **αβαρές** και **ανελαστικό** (χωρίς βάρος και χωρίς ικανότητα «τεντώματος» ή «συμπίεσης»)
- Αν τραβήξουμε το σώμα μέσω του νήματος, το νήμα τραβά το σώμα (και το χέρι) με δύναμη $\vec{T}$ με κατεύθυνση μακριά από (προς) το σώμα και κατά μήκος του νήματος
- Η δύναμη συχνά ονομάζεται ***τάση νήματος***



- Μια **τροχαλία** αποτελείται από ένα κυλινδρικό μέρος που περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα
- Θεωρούνται και αυτές **αβαρείς** και **χωρίς παρουσία τριβής** κατά την κύλισή τους

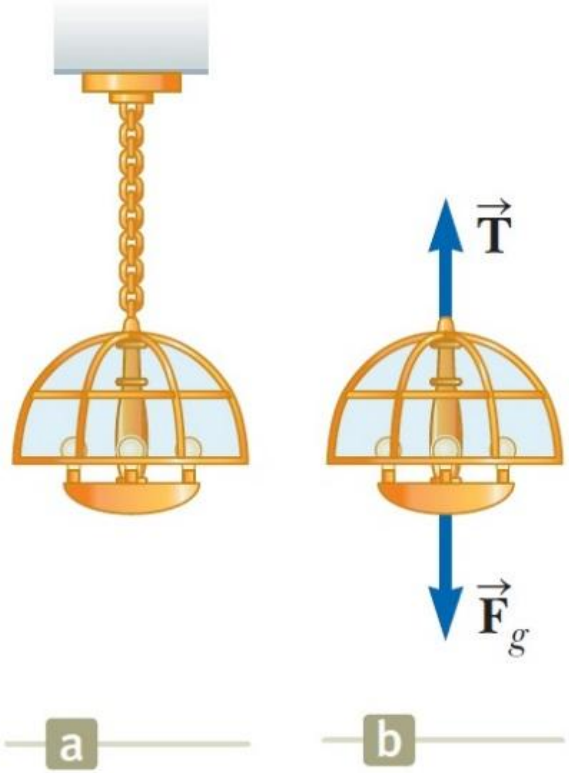
Οι Νόμοι της Κίνησης

- Α) Όταν τα αντικείμενα βρίσκονται σε **ισορροπία**

$$(\vec{\boldsymbol{a}} = \mathbf{0})$$

τότε

$$\sum \vec{F} = 0\ !$$



- **Παράδειγμα**
  - Ο πολυέλαιος κρέμεται σταθερά από το ταβάνι. Ποιες δυνάμεις ασκούνται επάνω του?

Οι Νόμοι της Κίνησης

- Β) Όταν τα σώματα επιταχύνουν υπό την επίδραση δύναμης ($\vec{\boldsymbol{a}} \neq \mathbf{0}$)

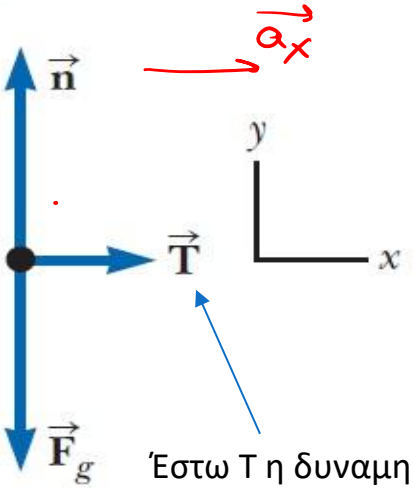
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

- **Παράδειγμα**
  - Βρείτε την επιτάχυνση στην οποία υπόκειται το κιβώτιο (λείο επίπεδο)
  - Βρείτε τη δύναμη που ασκεί το δάπεδο επάνω στο κιβώτιο

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα**
  - Α. Βρείτε την επιτάχυνση στην οποία υπόκειται το κιβώτιο

Διάγραμμα ελεύθερου σώματος



Έστω Τ η δυναμη από το νήμα στο κιβώτιο

Το κιβώτιο επιταχύνεται μόνο στον άξονα x'x (στον y'y ισορροπεί). Άρα

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + \cancel{a_y \vec{j}}^{\,0} = a_x \vec{i}$$

Στο κιβώτιο ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο διάγραμμα ελεύθερου σώματος.

Ισχύει ο 2ος νόμος Newton στον άξονα x'x:

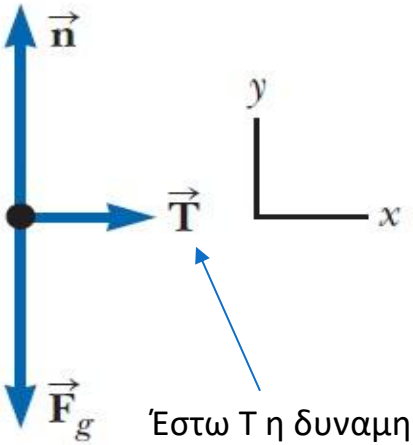
$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \Leftrightarrow \vec{T} = m\vec{a}_x \Rightarrow T = m a_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{T}{m}, \text{ δηλ. } \quad \vec{a} = \left(\frac{T}{m}\right)\vec{i}$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα**
  - Β. Βρείτε τη δύναμη που ασκεί το δάπεδο επάνω στο κιβώτιο

Διάγραμμα ελεύθερου σώματος



Έστω Τ η δυναμη από το νήμα στο κιβώτιο

Το σώμα είναι ακίνητο στον άξονα y'y, δηλ. ισορροπεί. Ισχύει ο 1ος νόμος Newton:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_g = \vec{0}$$

$$n - F_g = 0 \Leftrightarrow \boxed{n = F_g = mg}$$

Άρα $\vec{n} = (mg)\vec{j}$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Δυο σημεία** που πρέπει να προσέξετε

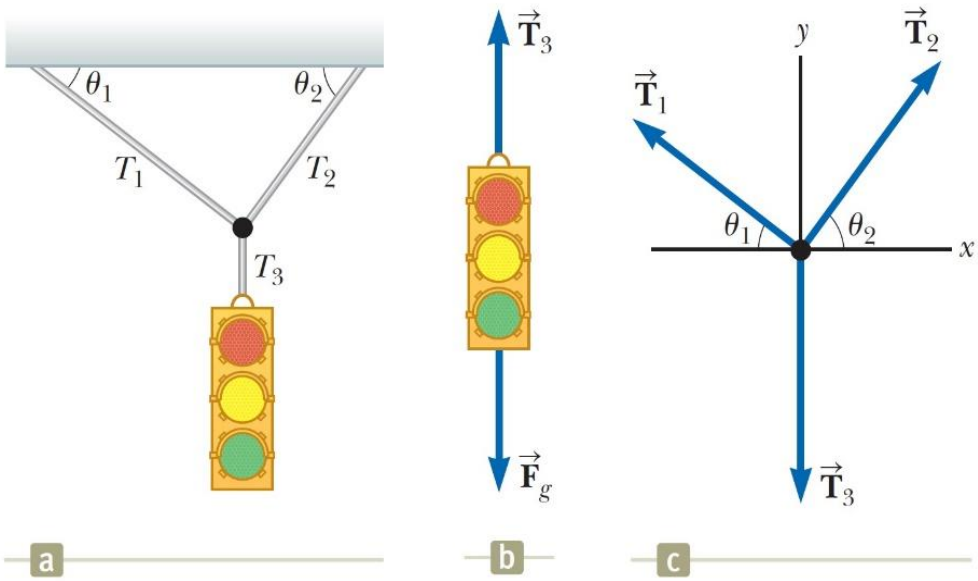
- **1) Είναι δυνατόν να έχετε διαφορετικά μοντέλα ανάλυσης σε διαφορετικές κατευθύνσεις (άξονες)**
  - Προηγούμενο παράδειγμα
    - Ισορροπία στον άξονα y
    - Επιτάχυνση στον άξονα x

- **2) Είναι δυνατόν να έχετε πολλαπλά μοντέλα ανάλυσης στην ίδια κατεύθυνση (άξονα)**
  - Προηγούμενο παράδειγμα
    - Σώμα υπό επίδραση μη μηδενικής συνισταμένης δύναμης στον άξονα x
    - Σώμα υπό επίδραση σταθερής επιτάχυνσης στον άξονα x

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **<u>Παράδειγμα</u>**

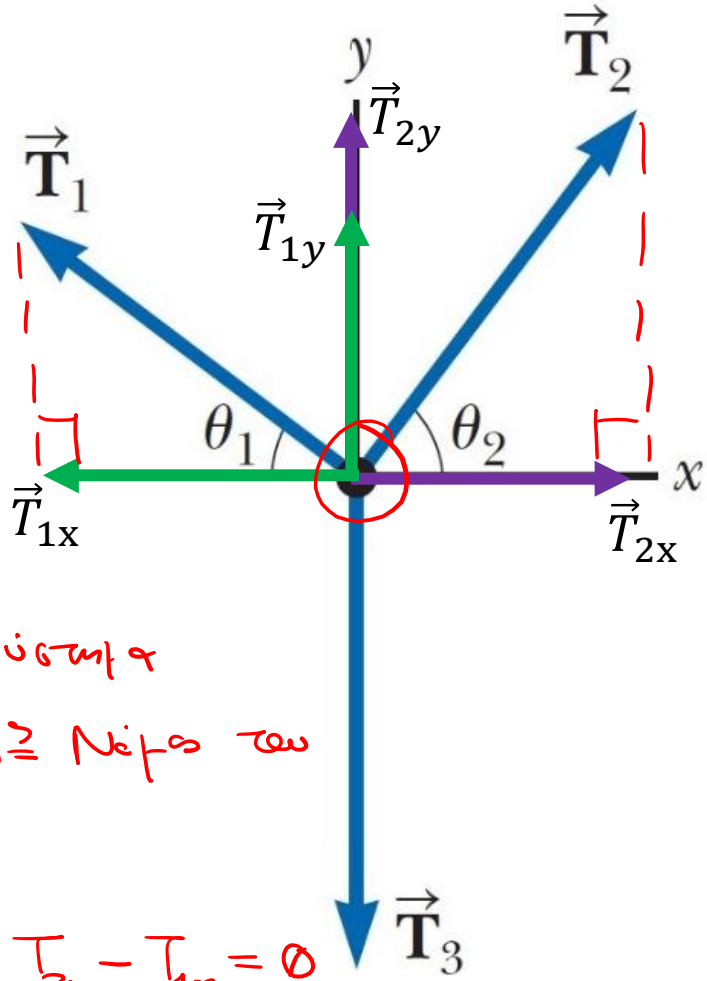
Ένα φανάρι με βάρος 122 N κρέμεται από ένα καλώδιο, που κρέμεται από άλλα δυο καλώδια, όπως στο Σχήμα, μέσω ζεύξης. Οι γωνίες θ_1, θ_2 είναι ίσες με 37 και 53 μοίρες, αντίστοιχα. Τα άνω καλώδια σπάνε αν δεχθούν (το καθένα) δύναμη μεγαλύτερη από 100 N. Μπορεί να συμβεί αυτό;



Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**

$$\cos(\theta_1) = 0.8, \sin(\theta_1) = 0.6$$
$$\cos(\theta_2) = 0.6, \sin(\theta_2) = 0.8$$



Θα μελετήσαμε τη ζεύξη των τριών χαλωδίων. Οι άξονες x,y φαίνονται στο σχήμα. Προβάλλαμε τις δυνάμεις $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ επάνω στους άξονες. Το όλο σύστημα σταθμιάια ισορροπεί. Άρα ισχύει ο 1ος Νόμος του Newton και στους δυο άξονες.

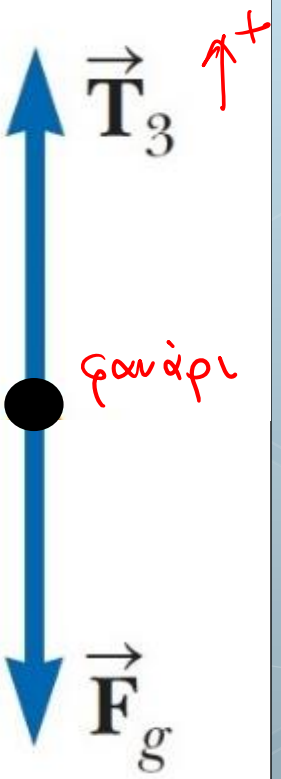
- $\sum \vec{F}_x = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{T}_{1x} + \vec{T}_{2x} = \vec{0} \Rightarrow T_{2x} - T_{1x} = 0$

Άρα $T_{1x} = T_{2x} \Leftrightarrow T_1 \cos\theta_1 = T_2 \cos\theta_2 \Leftrightarrow \boxed{T_1 = \frac{3}{4} T_2}$ (1)

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**

$$\cos(\theta_1) = 0.8, \sin(\theta_1) = 0.6$$
$$\cos(\theta_2) = 0.6, \sin(\theta_2) = 0.8$$



- $\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{T}_3 + \vec{T}_{1y} + \vec{T}_{2y} = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow T_{1y} + T_{2y} - T_3 = 0 \Leftrightarrow T_{1y} + T_{2y} = T_3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 = T_3}$ (2)

Το φανάρι ισορροπεί, άρα ισχύει ο 1ος νόμος Newton:

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{T}_3 + \vec{F}_g = \vec{0}$$

$$T_3 - F_g = 0 \Leftrightarrow \boxed{T_3 = F_g = 122\ N} \quad (3)$$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**

$$\cos(\theta_1) = 0.8, \sin(\theta_1) = 0.6$$
$$\cos(\theta_2) = 0.6, \sin(\theta_2) = 0.8$$

Λύνουμε το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{3}{4} T_2 \\ T_1 \cdot 0.6 + T_2 \cdot 0.8 &= 122 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1 \simeq 73.2 \text{ N}$$

$$T_2 \simeq 97.6 \text{ N}$$

Άρα αν τέλειο τα σχοινιά δε θα σπάσαν!

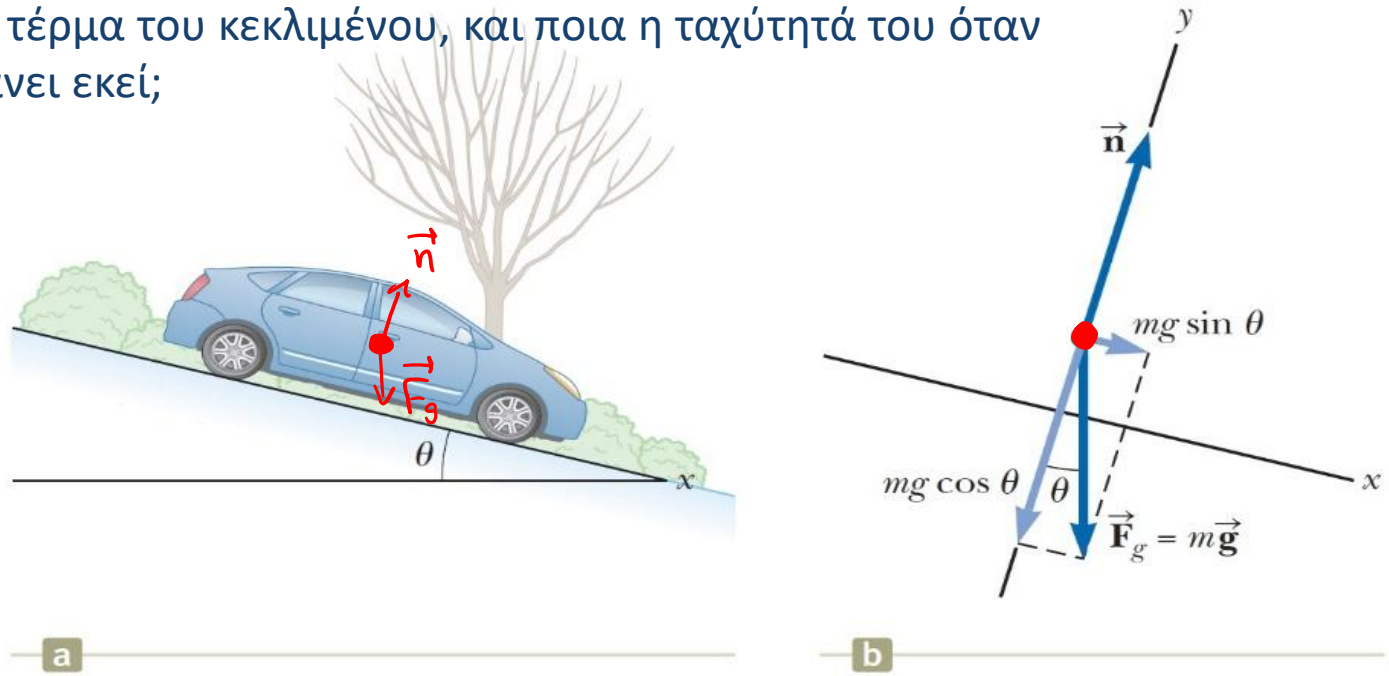
Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα:**

Αυτοκίνητο μάζας m κινείται χωρίς τριβές προς τη βάση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ. **Με ποια μοντέλα μπορείτε να περιγράψετε την κίνησή του?**

Α) Βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου.

Β) Αν το αυτοκίνητο αφεθεί από την κορυφή του κεκλιμένου, που απέχει απόσταση d από το τέρμα του κεκλιμένου, πόσο χρόνο χρειάζεται για να φτάσει στο τέρμα του κεκλιμένου, και ποια η ταχύτητά του όταν φτάνει εκεί;

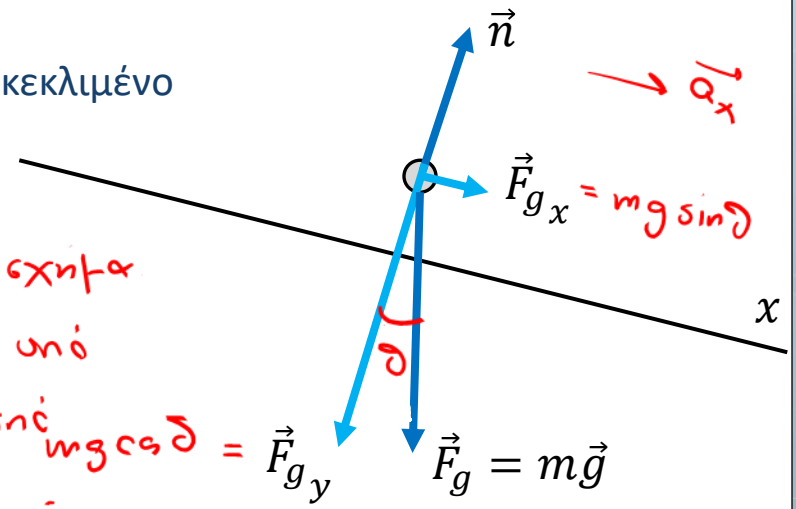


Οι Νόμοι της Κίνησης

- **<u>Παράδειγμα – Λύση:</u>**

  Αυτοκίνητο μάζας m κινείται χωρίς τριβές σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ.

  Α) Βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου.



Θέταμε τους άξονες x,y όπως στο σχήμα

Το αμάξι μοντελοποιείται ως σώμα υπό σταθερή επιτάχυνση <u>ΚΑΙ</u> ως σώμα υπό σταθερή δύναμη ($\vec{F}_{g_x}$) στον άξονα x'x.

Οι δυνάμεις $\vec{n}$, $\vec{F}_g$ φαίνονται στο σχήμα. Ισχύει ο 2ος νόμος Newton στον άξονα x'x:

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \Leftrightarrow \vec{F}_{g_x} = m\vec{a}_x$$

δηλ. $mg\sin\theta = ma_x \Leftrightarrow \boxed{a_x = g\sin\theta}$

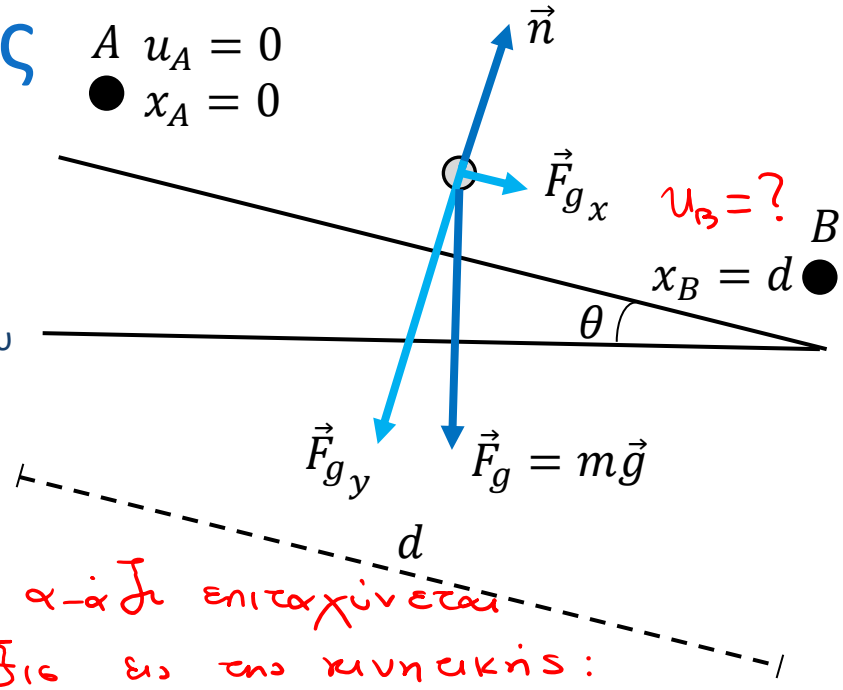
Άρα $\vec{a} = a_x\vec{i} = (g\sin\theta)\vec{i}$

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**

  Αυτοκίνητο μάζας m κινείται χωρίς τριβές σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ.

  B) Αν το αυτοκίνητο αφεθεί από την κορυφή του κεκλιμένου, που απέχει απόσταση d από το τέρμα του κεκλιμένου, πόσο χρόνο χρειάζεται για να φτάσει στο τέρμα του κεκλιμένου, και ποια η ταχύτητά του όταν φτάνει εκεί;



Έστω η διαδρομή $A \to B$ όπου το α-άλ επιταχύνεται με $x_A = 0$, $x_B = d$. Ισχύουν οι εξισ. κινηματικής:

$$x_B = x_A + u_{x_A} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \Leftrightarrow d = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} g \sin\theta \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{2d}{g\sin\theta} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{g\sin\theta}}.$$ Για την ταχύτητα u_B έχουμε

$$u_{B_x} = u_{A_x} + a_x \cdot t = 0 + g\sin\theta \sqrt{\frac{2d}{g\sin\theta}} = \sqrt{2gd\sin\theta}.$$ Εξίσου καλά

δουλεύει και η σχέση $u_{B_x}^2 = u_{A_x}^2 + 2a_x \Delta x$.

Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος

Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος

Ενέργεια Συστήματος

- Με όσα έχουμε δει ως τώρα
  - **Θέση**
  - **Ταχύτητα**
  - **Επιτάχυνση**
  - **Δύναμη**

και με αρχές όπως οι **νόμοι του Newton**, μπορούμε να λύσουμε πολλά προβλήματα…

- Όμως σε πιο σύνθετα προβλήματα αντιμετωπίζουμε δυσκολίες…
  - Π.χ. αν η δύναμη είναι μεταβαλλόμενη κατά μέτρο ή αν η διαδρομή κίνησης δεν είναι ευθύγραμμη
- Χρειαζόμαστε μια διαφορετική/συμπληρωματική προσέγγιση, που θα κάνει τα προβλήματα πιο απλά…

Ενέργεια Συστήματος

- Κάποιες έννοιες ίσως σας φανούν οικείες, αλλά στη Φυσική απαιτείται λίγο μεγαλύτερη ακρίβεια…
- Ας ξεκινήσουμε με την έννοια της **ενέργειας**
- Ιδέες που έχουμε από την καθημερινότητά μας για την ενέργεια
  - Βενζίνη και πετρέλαιο για μεταφορές και θέρμανση
  - Ηλεκτρισμός για φωτισμό και συσκευές
  - Φαγητό για κατανάλωση
- «Έχεις ενέργεια να πάμε για τρέξιμο?»
  - Ικανότητα να κάνεις κάποια δουλειά, κάποιο… **έργο**

Ενέργεια Συστήματος

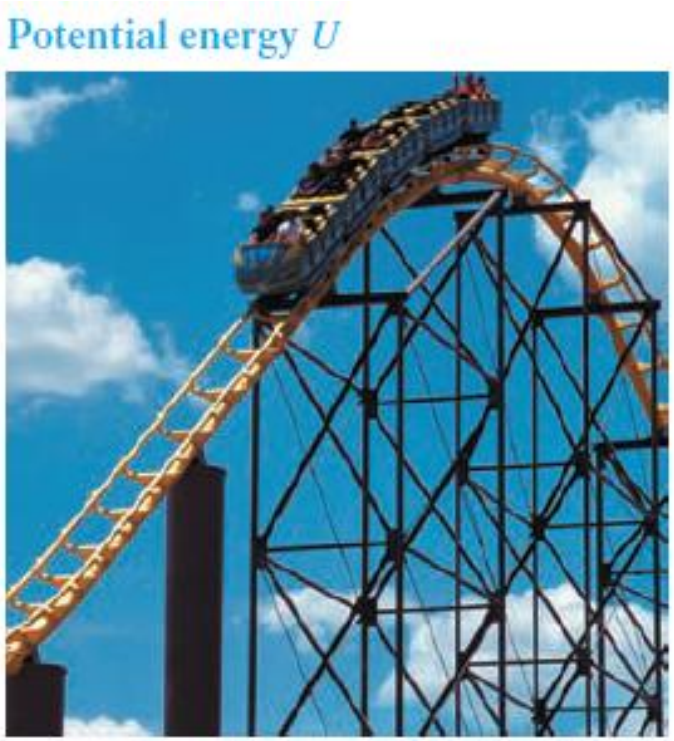
- Θα μας απασχολήσουν τρία είδη ενέργειας:
  - **Κινητική, Δυναμική, και Θερμική**

Kinetic energy K

- **Η κινητική ενέργεια είναι η ενέργεια της κίνησης.**
- **Όλα τα κινούμενα αντικείμενα έχουν κινητική ενέργεια.**
- **Όσο μεγαλύτερη μάζα ή όσο πιο γρήγορα κινείται ένα αντικείμενο, τόσο μεγαλύτερη η κινητική του ενέργεια.**

Ενέργεια Συστήματος

- Θα μας απασχολήσουν τρία είδη ενέργειας:
  - **Κινητική, Δυναμική, και Θερμική**



- **Η δυναμική ενέργεια είναι αποθηκευμένη ενέργεια που σχετίζεται με τη θέση ενός αντικειμένου.**
- **Το τρενάκι της εικόνας έχει βαρυτική δυναμική ενέργεια που εξαρτάται από τη θέση του (ύψος) πάνω από το έδαφος.**
- **Θα τη σχετίσουμε με τη δύναμη του βάρους (αλλά και με άλλες που θα δούμε).**

Ενέργεια Συστήματος

- Θα μας απασχολήσουν τρία είδη ενέργειας:
  - **Κινητική, Δυναμική, και Θερμική**

Thermal energy E_{th}

- **Η θερμική ενέργεια είναι το άθροισμα όλων των μικροσκοπικών κινητικών και δυναμικών ενεργειών των ατόμων και δεσμών που συνιστούν ένα σώμα.**
- **Ένα σώμα έχει μεγαλύτερη θερμική ενέργεια όταν είναι ζεστό παρά όταν είναι κρύο.**
- **Θα τη σχετίσουμε με δυνάμεις τριβής.**

Ενέργεια Συστήματος

- Τα παραπάνω δεν αποτελούν ορισμό της ενέργειας
  - …είναι απλά **παραδείγματα**
- Γενικότερα, είναι δύσκολο να οριστεί με ακρίβεια η ενέργεια
  - Είναι περισσότερο… «αφηρημένη» έννοια
  - Θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελεί **έναν αριθμό που σχετίζεται με την κατάσταση ενός… συστήματος**
  - **Αν η χρήση αυτών των αριθμών γίνει σωστά, μπορούμε να προβλέψουμε αποτελέσματα πειραμάτων και να κατασκευάσουμε μηχανές!**
- Κάθε διαδικασία στη φύση αφορά ενέργεια και μεταφορές/ μετασχηματισμούς αυτής

Ενέργεια Συστήματος

- Ξεκινάμε τη συζήτηση θεωρώντας ένα νέο μοντέλο, το **σύστημα**

- Προς το παρόν, ας δούμε τι είναι ένα **σύστημα** και πώς σχετίζεται με την ενέργεια
  - **Συστήματα** μπορεί να είναι:
    - **Ένα ή περισσότερα σώματα**
    - **Μια περιοχή του χώρου**
    - Κάτι που αλλάζει σχήμα και μέγεθος
    - **Συνδυασμός των παραπάνω**

Προς εξέταση

- Αργότερα, θα μιλήσουμε για **μοντέλα ανάλυσης** ενός συστήματος
  - …αντί ενός μόνο σώματος, που είχαμε ως τώρα

Ενέργεια Συστήματος

- Πρώτο βήμα είναι η **αναγνώριση** του συστήματος
- Όταν συζητάμε για ένα σύστημα, είτε αγνοούμε (**απομονωμένο** σύστημα) είτε ενδιαφερόμαστε (**μη απομονωμένο** σύστημα) για τις **ενεργειακές** αλληλεπιδράσεις του περιβάλλοντος με το σύστημα
  - Ακόμα δε γνωρίζουμε ποιές είναι αυτές, με τι σχετίζονται, και πώς τις βρίσκουμε... (απλώς υποθέτουμε – υπομονή ☺)
  - Επίσης υποθέτουμε ότι κάποιες **δυνάμεις** δρουν στο σύστημα και του **μεταβάλλουν την ενεργειακή κατάσταση**
- Ανεξαρτήτως του συστήματος που επιλέγουμε πάντα υπάρχει το **όριο/σύνορο συστήματος**:
  - Μια (συνήθως) φανταστική επιφάνεια που χωρίζει το σύστημα με το περιβάλλον του
  - Π.χ. σε ένα κιβώτιο, η επιφάνειες του κιβωτίου

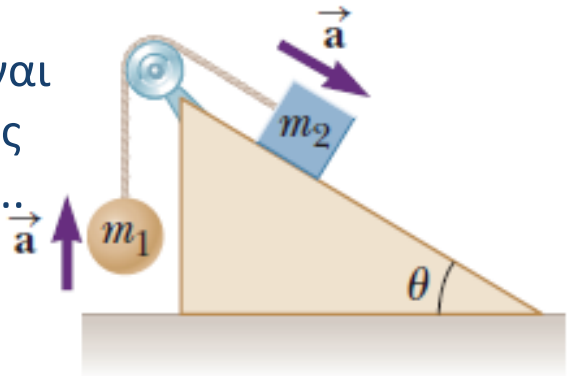
Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα 1:**
  - Σύστημα {σπόγγος} : **μονομελές**
  - **Μη απομονωμένο** (ασκείται **εξωτερική** δύναμη που το κινεί – **μεταβάλλει την κινητική του ενέργεια**, καθώς υπάρχει και η δύναμη **τριβής** με την επιφάνεια που ολισθαίνει, η οποία αυξάνει τη **θερμική ενέργεια** του συστήματος – και της επιφάνειας)
    - Επιφάνεια σπόγγου = σύνορο συστήματος
    - Η δύναμη (μέσω του χεριού) και η τριβή είναι μια ενεργειακή επιρροή στο σύστημα από το περιβάλλον του, και οι οποίες ασκούνται επάνω στο σύνορο (επιφάνεια) του συστήματος

- **Παράδειγμα 2:**
  - Σύστημα {σπόγγος, τραπέζι} : **πολυμελές**
  - **Μη απομονωμένο** (ασκείται **εξωτερική** δύναμη που το κινεί – μεταβάλλει την κινητική του ενέργεια, αλλά πλέον η **τριβή** αποτελεί **εσωτερική** δύναμη του συστήματος)
    - Ασκείται από ένα μέλος του συστήματος σε ένα άλλο

Ενέργεια Συστήματος

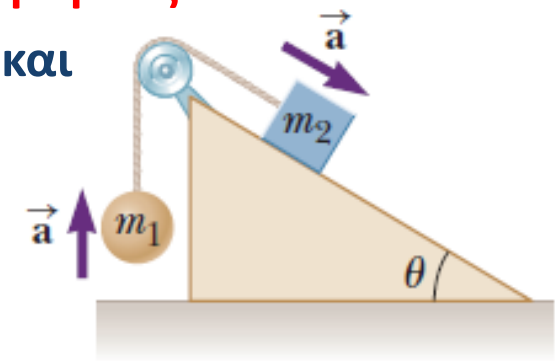
- **Παράδειγμα 3:**
  - Σύστημα {σώματα, σχοινί} : **πολυμελές και μη απομονωμένο**!
    - Οι δυνάμεις από το σχοινί επιταχύνουν τα σώματα (άρα αλλάζουν την **κινητική** τους ενέργεια) και είναι **εσωτερικές**, **δεν** ανήκουν στο περιβάλλον του
    - Αντίθετα, οι **δυνάμεις του βάρους** τους είναι **εξωτερικές**! Θα δούμε αργότερα πως αυτές αλλάζουν κάτι «ενεργειακό» στο σύστημα...
    - Το ίδιο και η **δύναμη τριβής** από το κεκλιμένο...



- **Παράδειγμα 4:**
  - Σύστημα {σώματα, σχοινί, Γη} : **πολυμελές και μη απομονωμένο**!
    - Όλες οι δυνάμεις που πιθανόν μεταβάλλουν την ενέργειά του είναι **εσωτερικές, πλην της δύναμης τριβής!**
    - **Μόνο αυτή** ανήκει στο περιβάλλον του

Ενέργεια Συστήματος

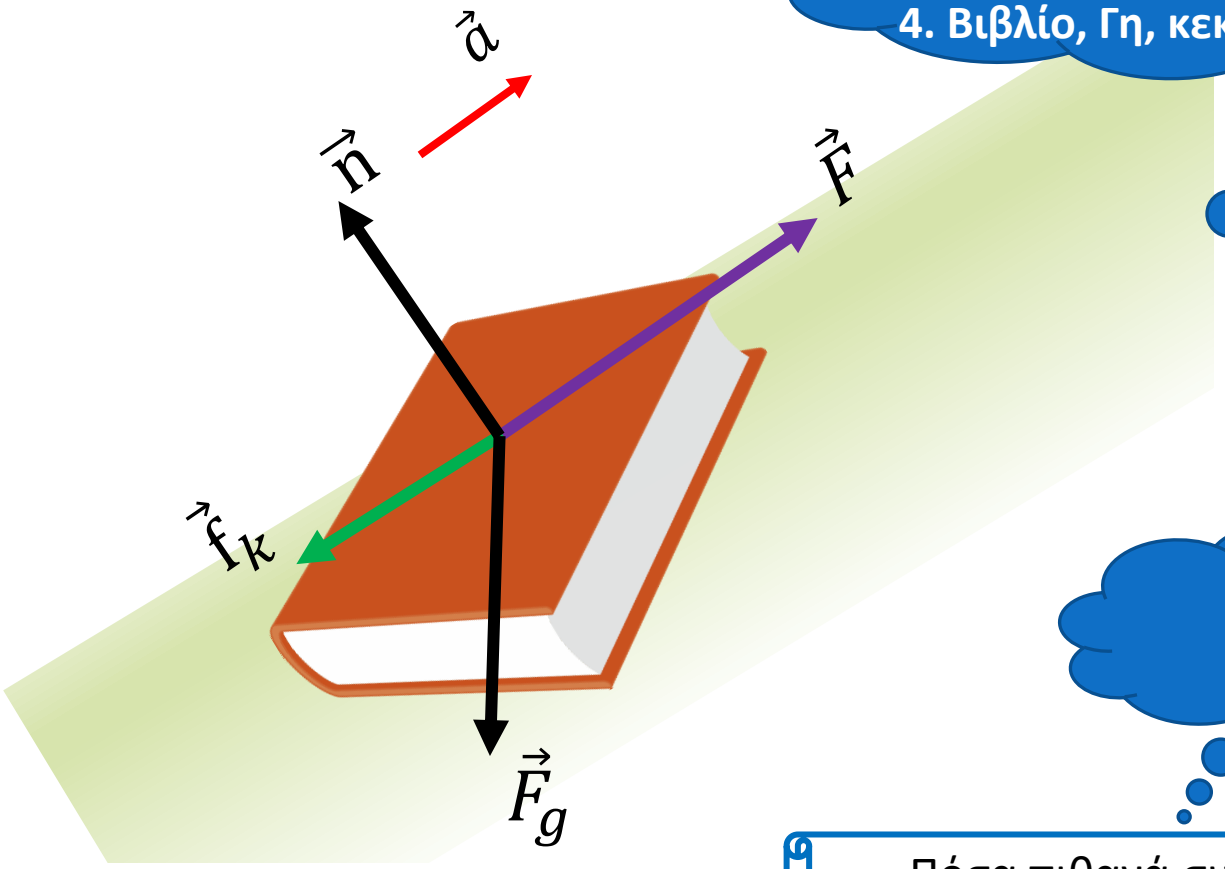
- **Παράδειγμα 5:**
  - Σύστημα {σώματα, σχοινί, κεκλιμένο} : **πολυμελές και μη απομονωμένο**!
    - Όλες οι δυνάμεις που πιθανόν μεταβάλλουν την ενέργειά του είναι **εσωτερικές, πλην της δύναμης του βάρους**
    - **Μόνο αυτή ανήκει στο περιβάλλον (Γη) και θα δούμε αργότερα ότι πράγματι μεταβάλλει ενεργειακά το σύστημα**



- **Παράδειγμα 6:**
  - Σύστημα {σώματα, σχοινί, Γη, κεκλιμένο} : **πολυμελές κι απομονωμένο**!
  - Όλες οι δυνάμεις που πιθανόν μεταβάλλουν την ενέργειά του είναι **εσωτερικές : καμιά** δεν ανήκει στο περιβάλλον του

Ενέργεια Συστήματος

- **Quiz:**



1.Βιβλίο
2. Βιβλίο, Γη
3. Βιβλίο, κεκλιμένο
4. Βιβλίο, Γη, κεκλιμένο

4

Πόσα πιθανά συστήματα μπορείτε να διαλέξετε?

Ενέργεια Συστήματος

Ταξινόμηση Δυνάμεων και Συστημάτων

Ένα σύστημα μπορεί να ανήκει σε μια από δυο κατηγορίες:

- **Απομονωμένο**: όταν το σύστημα **δεν** "επικοινωνεί" ενεργειακά με το περιβάλλον του.
- **Μη απομονωμένο**: όταν το σύστημα "επικοινωνεί" ενεργειακά με το περιβάλλον του.

Οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σύστημα διακρίνονται σε μια από δυο κατηγορίες:

- **Εξωτερικές**: όταν δρουν πάνω σε ένα ή περισσότερα μέλη ενός συστήματος και η προέλευση της δύναμης ανήκει στο περιβάλλον του συστήματος.
- **Εσωτερικές**: όταν δρουν μεταξύ των μελών του συστήματος, δηλ. από ένα μέλος του σε ένα άλλο.

Επίσης, τα συστήματα μπορεί να είναι **μονομελή** ή **πολυμελή**, αν στο σύστημα υπάρχει ένα ή περισσότερα μέλη, αντίστοιχα.

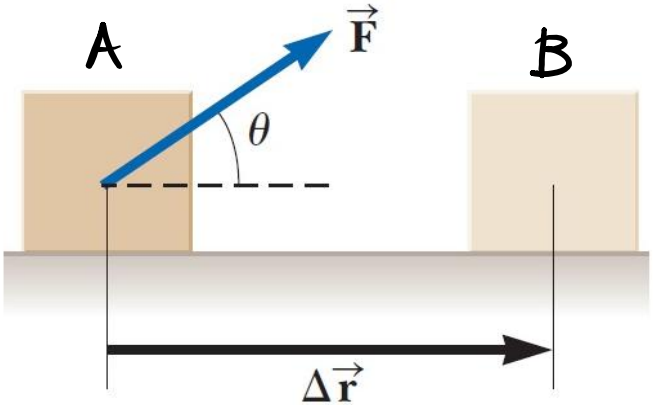
Ενέργεια Συστήματος

© Cengage Learning/Charles D. Winters

- Ας ξεκινήσουμε από **μονομελή** συστήματα
- Αναγνωρίζουμε το σύστημα: {σπόγγος}, μη απομονωμένο
  - Η εξωτερική δυναμη που ασκείται από το χέρι επιταχύνει το σύστημα, δηλ. του μεταβάλλει την κινητική του ενέργεια
- Ερώτημα: **πόσο αποτελεσματικοί είμαστε με την εξωτερική δύναμη που βάζουμε (όμοια σε μέτρο σε όλες τις περιπτώσεις) στο να κινήσουμε το σπόγγο (χωρίς τριβές);**
  - **Δηλ. να του αλλάξουμε την κινητική του κατάσταση!**
- Σε ποια περίπτωση τα καταφέρνουμε καλύτερα;
  - Μέτρο δύναμης – Κατεύθυνση – Μετατόπιση

Ενέργεια Συστήματος

- Ας μείνουμε σε ένα τέτοιο απλό παράδειγμα
  - Ένα σύστημα ενός σώματος μετατοπίζεται σε ευθεία γραμμή από μια **σταθερή** δύναμη $\vec{F}$ που του ασκείται υπό γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο



- Το **έργο (Work) W** που **παράγεται στο σύστημα από τη δύναμη** που ασκείται εξωτερικά στο σύστημα ορίζεται ως
  - το γινόμενο του μέτρου της σταθερής **δύναμης** $\vec{F}$, του μέτρου της **μετατόπισης** $\Delta\vec{r}$ του σημείου εφαρμογής της δύναμης, και του **συνημιτόνου** της **γωνίας** θ ανάμεσα στα δυο προηγούμενα:

$$W \equiv |\vec{F}||\Delta\vec{\mathbf{r}}|\cos(\theta) = \mathbf{F}\,\Delta\mathbf{r}\cos(\theta)$$

Ενέργεια Συστήματος

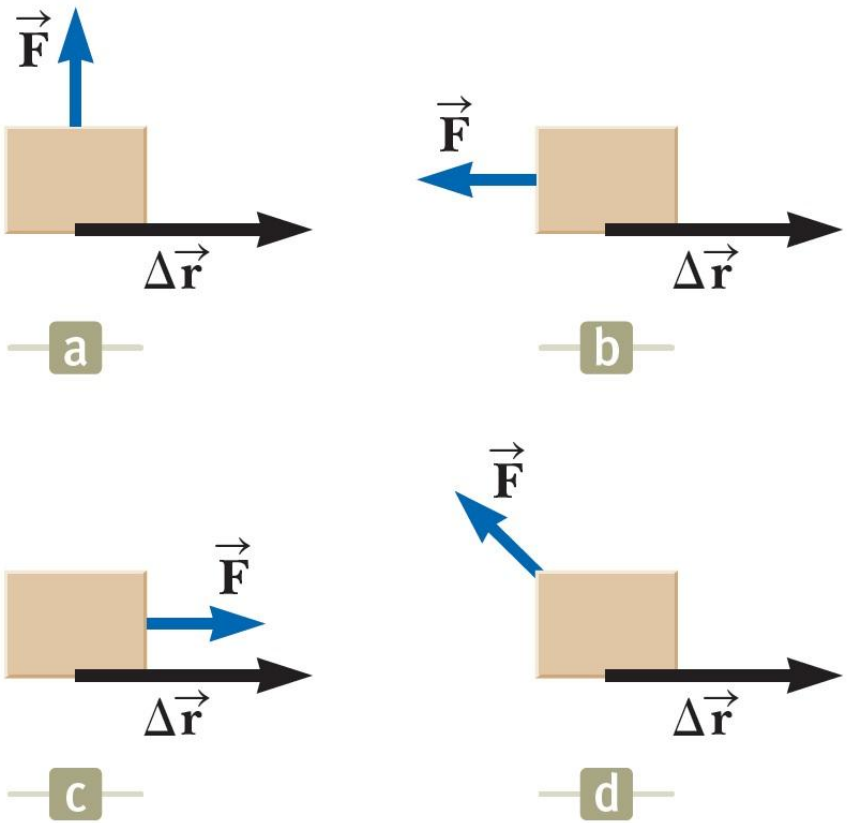
$$W \equiv F\,\Delta r\cos(\theta)$$

- **Quiz:** Κατατάξτε τις παρακάτω περιπτώσεις σε αύξουσα τιμή έργου

$W = 0$ $W > 0$

b, d, a, c

$W < 0$



Ενέργεια Συστήματος

- Διακρίνετε μια διαφορά με την καθημερινή σας εμπειρία για το έργο;
  - Κρατήστε μια βαριά μπάλα στο ύψος των ώμων σας για 2’
  - Στο τέλος, θα έχετε κουραστεί και θα θεωρείτε ότι «παράξατε αρκετό έργο» επάνω στην μπάλα
  - Η αλήθεια είναι ότι ο ορισμός που μόλις είδαμε θα σας πει ότι $W = 0$
    - Γιατί απλά υποστηρίζατε την μπάλα, δεν τη μετακινήσατε
- Επίσης, δείτε ξανά την (c) εικόνα με το σπόγγο.

Ενέργεια Συστήματος

- Η μαθηματική έκφραση

$$\boldsymbol{W} \equiv \boldsymbol{F}\,\mathbf{\Delta r}\,\mathbf{cos(\theta)}$$

μοιάζει γνωστή…

- Προκύπτει από το μαθηματικό εργαλείο που λέγεται

εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

- Έστω δυο διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}$. Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μια βαθμωτή ποσότητα (= αριθμός) που ισούται με

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = |\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{B}}|\,\mathbf{cos(\theta)}$$

- Άρα το έργο $\boldsymbol{W}$ που παράγεται σε ένα σώμα από μια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ για μετατόπιση $\mathbf{\Delta}\vec{\boldsymbol{r}}$ μπορεί να γραφεί ως $\vec{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{\Delta}\vec{\boldsymbol{r}}$!

Ενέργεια Συστήματος

- Θυμηθείτε από τις **ιδιότητες** του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων ότι:

  - $\vec{F} \perp \Delta\vec{r} \Rightarrow \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \mathrm{W} = 0$
  - $\vec{F} \uparrow\uparrow \Delta\vec{r} \Rightarrow \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \left|\vec{F}\right||\Delta\vec{r}| = F\Delta r \Rightarrow \mathrm{W} = F\Delta r$
  - $\vec{F} \uparrow\downarrow \Delta\vec{r} \Rightarrow \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = -\left|\vec{F}\right||\Delta\vec{r}| = -F\Delta r \Rightarrow \mathrm{W} = -F\Delta r$

- Αυτές οι ιδιότητες θα φανούν πολύ χρήσιμες, καθώς αναλύουμε δυνάμεις σε $x -$ και $y -$ συνιστώσες!
  - Με αυτόν τον τρόπο, όλες οι συνιστώσες θα είναι παράλληλες ή κάθετες στη μετατόπιση $\Delta\vec{r}$

Ενέργεια Συστήματος

- Μονάδα μέτρησης έργου

$$N \cdot m = J \text{ (Joule)}$$

- Μπορούμε να πούμε ότι «**το έργο W αποτελεί ενέργεια που μεταφέρεται προς ή από ένα σύστημα μέσω μιας δύναμης που δρα στο σύστημα**»

$$\textbf{\textit{έργο}} = \textbf{\textit{ενέργεια}}$$

$$\textbf{\textit{παραγωγή έργου}} = \textbf{\textit{μεταφορά ενέργειας}}$$

- Αν W είναι το έργο που παράγεται σε ένα σύστημα, τότε
  - $\boldsymbol{W > 0}$**: Έργο θετικό** → Μεταφορά ενέργειας <u>προς</u> το σύστημα
  - $\boldsymbol{W < 0}$**: Έργο αρνητικό** → Μεταφορά ενέργειας <u>από</u> το σύστημα

Ενέργεια Συστήματος

- **Έργο θετικό** → Μεταφορά ενέργειας <u>προς</u> το σύστημα
  - Σπρώχνουμε και επιταχύνουμε οριζόντια ένα κιβώτιο
  - Σηκώνουμε ένα βιβλίο από το τραπέζι σε ένα ράφι
  - Το έργο που παράγουμε πάνω στο (κιβώτιο/βιβλίο) είναι θετικό
  - Δύναμη στο (κιβώτιο/βιβλίο) παράλληλη με τη μετατόπιση
- **Έργο αρνητικό** → Μεταφορά ενέργειας <u>από</u> το σύστημα
  - Προσπαθούμε να συγκρατήσουμε ένα άλογο με το λάσο
  - Επιστρέφουμε ένα βιβλίο από το ράφι στο τραπέζι
  - Το έργο που παράγουμε πάνω στο (κιβώτιο/βιβλίο) είναι αρνητικό
  - Δύναμη στο (άλογο/βιβλίο) αντίθετη στη μετατόπιση

Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα**
- Ένα σωματίδιο στο xy επίπεδο υπόκειται σε μετατόπιση $\Delta\vec{r} = (2.0\ m)\ \vec{\boldsymbol{\imath}} + (3.0\ m)\ \vec{\boldsymbol{\jmath}}$ m λόγω μιας **σταθερής** δύναμης $\vec{F} = (5.0\ N)\ \vec{\boldsymbol{\imath}} + (2.0\ N)\ \vec{\boldsymbol{\jmath}}$ που ασκείται στο σωματίδιο. Βρείτε το έργο που παράγεται από τη δύναμη στο σωματίδιο.

Είναι $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = (5\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j})$

$= 10\vec{i}\cdot\vec{i} + 15\vec{i}\cdot\vec{j} + 4\vec{i}\cdot\vec{j} + 6\vec{j}\cdot\vec{j}$

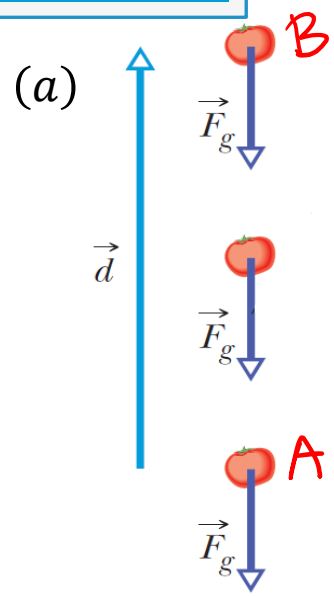
$= 10\cdot 1 + 15\cdot 0 + 4\cdot 0 + 6\cdot 1$

$= 16\ J$

Ενέργεια Συστήματος

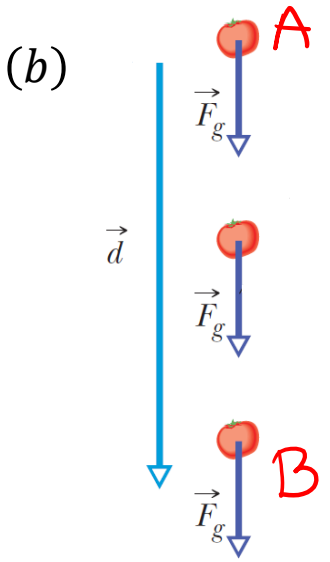
- **Έργο δύναμης βάρους**
  - Όταν ένα σώμα ανέρχεται κατακόρυφα (α):

$$W_{F_g} = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = F_g d \cos(\pi)$$
$$= -F_g d = -mgd$$



  - Όταν ένα σώμα κατέρχεται κατακόρυφα (b):

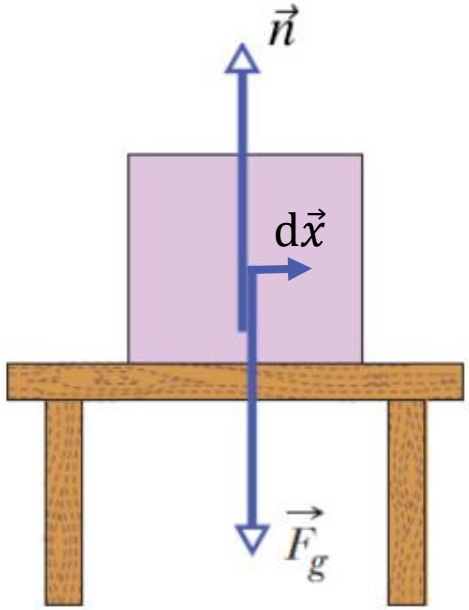
$$W_{F_g} = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = F_g d \cos(0)$$
$$= F_g d = mgd$$



  - Παρατηρήστε τα πρόσημα. «Βγάζουν» νόημα?

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Έργο κάθετης δύναμης** από επιφάνεια
  - Για μια οποιαδήποτε μετατόπιση $d\vec{x}$ σε οποιαδήποτε επιφάνεια, το έργο της κάθετης δύναμης $\vec{\boldsymbol{n}}$ θα ισούται με μηδέν!

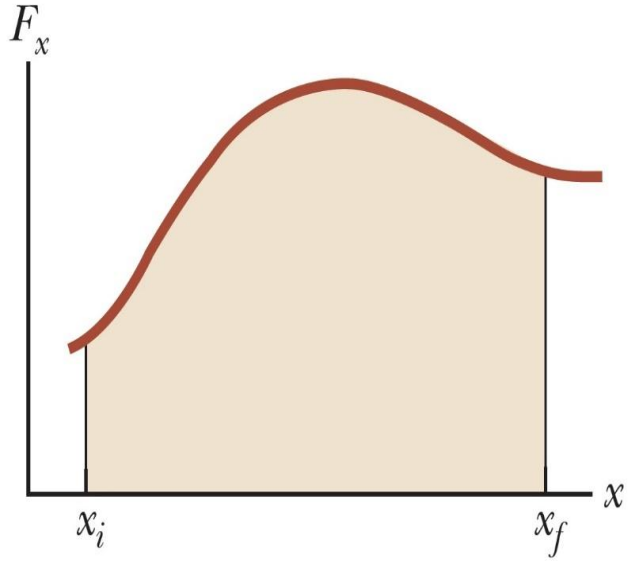


$$dW_n = \vec{n} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = n\, dx \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

  - Άρα το έργο της κάθετης δύναμης ισούται με μηδέν!
    - …όταν το σώμα κινείται σε ακίνητη, άκαμπτη επιφάνεια

Ενέργεια Συστήματος

- Η συζήτησή μας αφορούσε έργο υπό **σταθερή δύναμη**
  - Τι γίνεται όταν η δύναμη είναι **μεταβαλλόμενη** αλλά η κίνηση εξακολουθεί να είναι ευθύγραμμη;
  - Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις που είδαμε!
  - Ας πούμε ότι μεταβάλλεται μόνο το μέτρο της – τι συμβαίνει τότε?



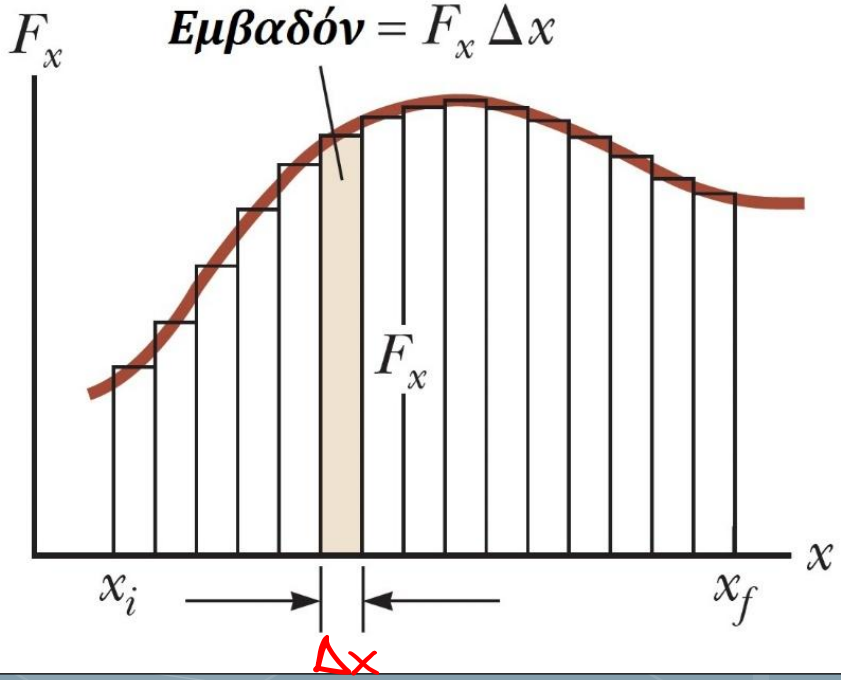
- Παράδειγμα:
  - Η x-συνιστώσα της δύναμης μεταβάλλεται κατά την κίνηση σε νοητό άξονα $x'x$

Ενέργεια Συστήματος

- Μπορούμε να θεωρήσουμε τη δύναμη ως **τμηματικά** (για πολύ μικρά διαστήματα Δx) **σταθερή**!

- Προσέγγιση:
  - Χωρίζουμε το διάστημα σε μικρά διαστήματα Δx
  - Σε κάθε τέτοιο διάστημα έχουμε έργο W_j, που ισούται με το εμβαδόν του αντίστοιχου παρα-ληλλογράμμου

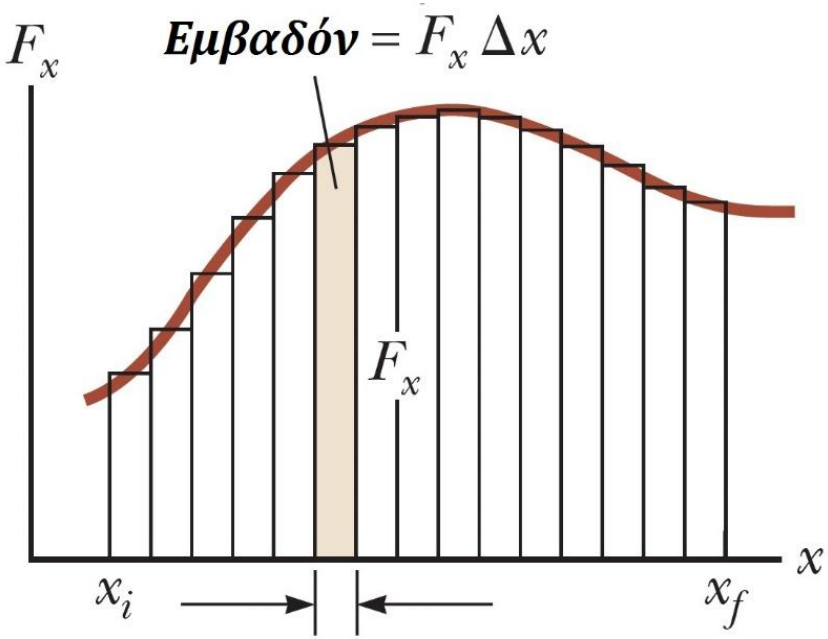
$$W_j = F_x \Delta x$$



Ενέργεια Συστήματος

- Μπορούμε να θεωρήσουμε τη δύναμη ως **τμηματικά** (για πολύ μικρά διαστήματα Δx) **σταθερή**!

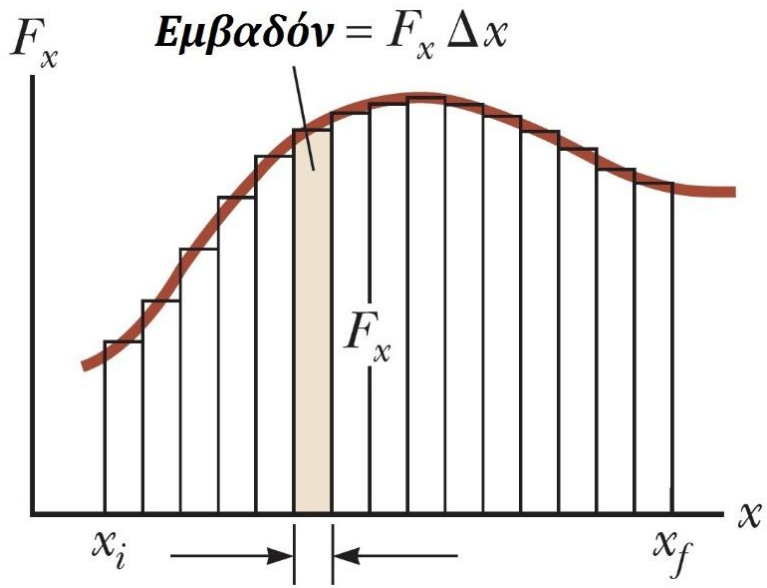
- Παράδειγμα:
  - Το συνολικό έργο είναι $\approx \sum_j W_j$
  - Όταν τα διαστήματα γίνονται απειροστά μικρά ($\Delta x \to 0$), τότε το συνολικό έργο ισούται με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη!

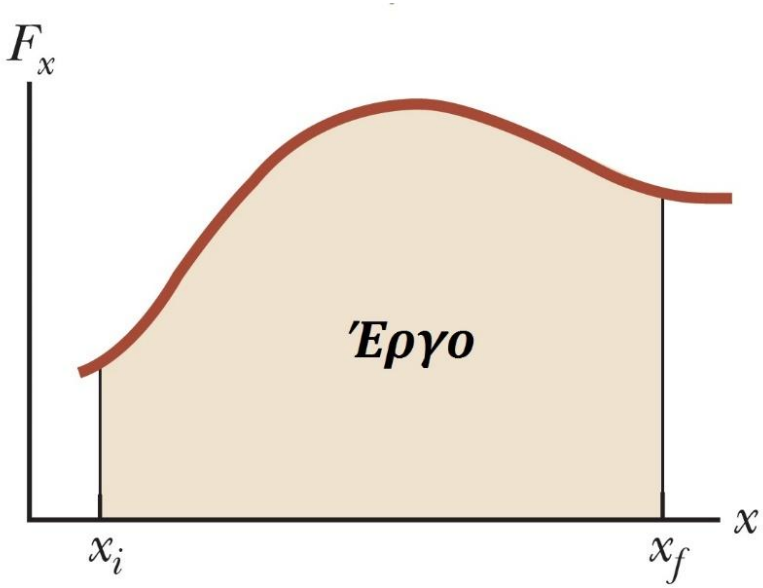


Ενέργεια Συστήματος

- Με μαθηματικά,

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} F_x \cos(0)\, dx = \int \vec{F}_x \cdot d\vec{x}$$





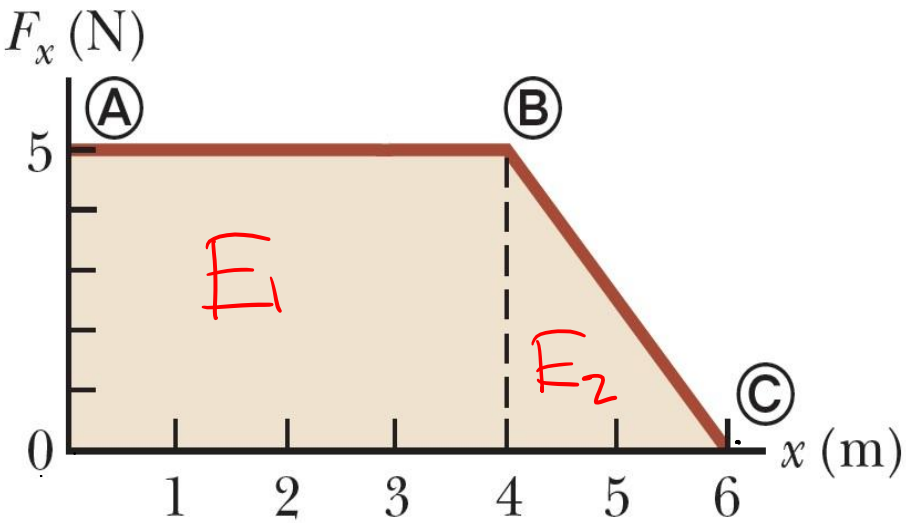
Ενέργεια Συστήματος

- **<u>Παράδειγμα:</u>**
- Μια δύναμη ασκείται σε ένα σωματίδιο, η οποία μεταβάλλεται με την απόσταση, όπως στο Σχήμα. Υπολογίστε το έργο που παράγεται από τη δύναμη στο σωματίδιο όταν αυτό κινείται από $x = 0$ ως $x = 6$ m.

$E_1 = 20$ J

$E_2 = 5$ J

$W = E_1 + E_2 = 25$ J



Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**

Άλλη λύση: ("κακή")

$$W = \int_0^6 F_x\,dx = \int_0^4 5\cdot dx + \int_4^6 \left(-\frac{5}{2}x + 15\right) dx$$

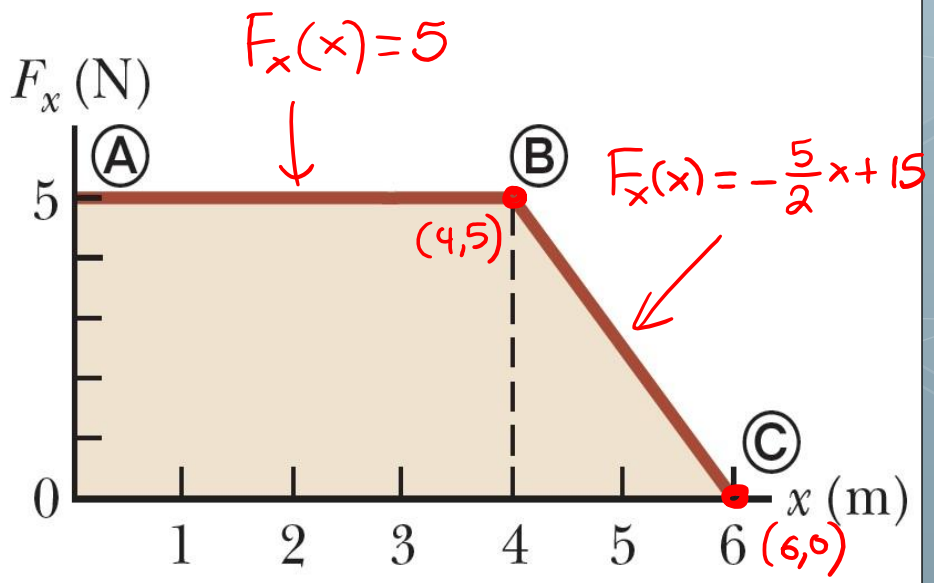
$$= 5x\Big|_0^4 + \left(-\frac{5}{4}x^2 + 15x\right)\Big|_4^6$$

$$= 20 - 0 + \left(-45 + 90 - (-20 + 60)\right)$$

$$= 20 + (45 - 40)$$

$$= 20 + 5$$

$$= 25\ \mathrm{J}$$



Ενέργεια Συστήματος

- Ας μελετήσουμε μια πολύ… δημοφιλή δύναμη **<u>μεταβαλλόμενου μέτρου</u>**

- Θα κατανοήσουμε τη λειτουργία της και θα υπολογίσουμε το έργο που **παράγει** πάνω σε ένα σύστημα...
  - …που θα καθορίσουμε **εμείς** ποιο θα είναι

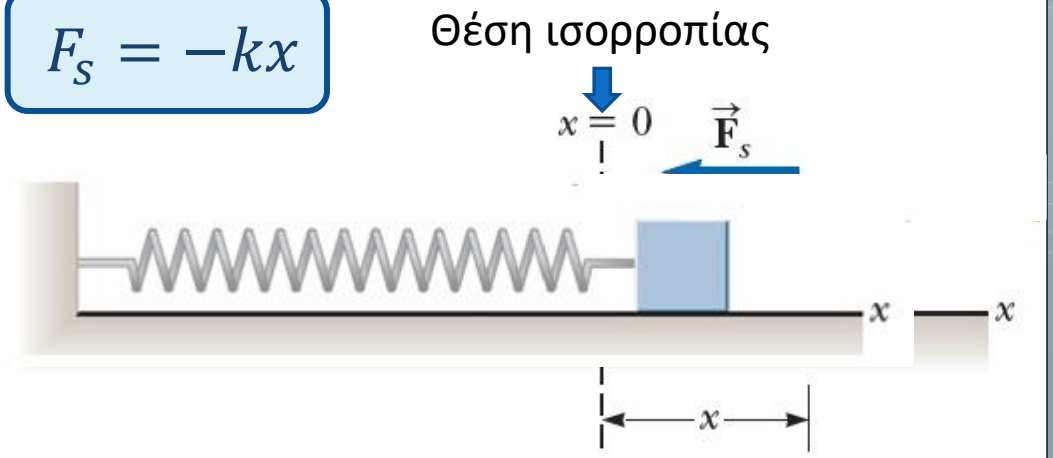
- Ταυτόχρονα, θα διατυπώσουμε κλειστούς τύπους για το έργο που σχετίζεται με αυτή τη δύναμη

- Τέλος, θα δούμε τη σχέση του έργου με τις αντίστοιχες ενέργειες που θα ορίσουμε

Ενέργεια Συστήματος

- **Δύναμη ελατηρίου**
  - Σύστημα = {σώμα} – δεμένο στο ελατήριο
  - Δύναμη $\vec{F}_s$ εγείρεται επάνω στο σώμα από το ελατήριο όταν το τελευταίο εκτείνεται ή συμπιέζεται
  - Η δύναμη μεταβάλλεται ανάλογα με τη απομάκρυνση από τη **θέση ισορροπίας (θέση φυσικού μήκους)**
  - Δύναμη ελατηρίου στο σώμα: ***Νόμος του Hooke***

$$\boxed{F_s = -kx}$$



  - Ελατήρια: **Αποθηκεύουν** ή **απορροφούν** ενέργεια!

Ενέργεια Συστήματος

$$F_s = -kx$$

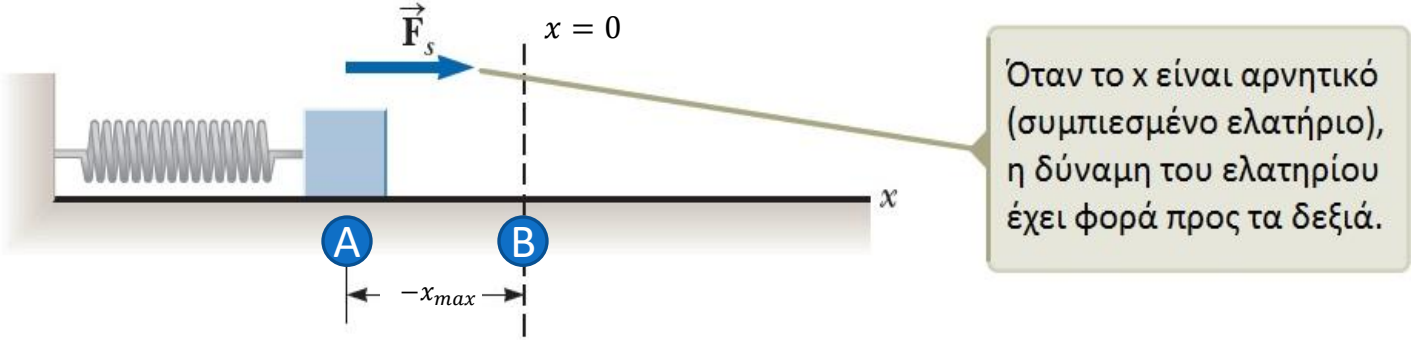
- **Δύναμη ελατηρίου**
  - Η τιμή της σταθεράς k είναι μια ένδειξη της σκληρότητας του ελατηρίου
    - Μεγάλο k → σκληρό ελατήριο
    - Μικρό k → μαλακό ελατήριο
  - Μονάδες της σταθεράς k είναι $\mathbf{N/m}$
  - Διανυσματική μορφή για οριζόντια κίνηση

$$\vec{F}_s = F_s\vec{\boldsymbol{\imath}} = -kx\vec{\boldsymbol{\imath}}$$

Ενέργεια Συστήματος

$$F_s = -kx$$

- Ας θεωρήσουμε ότι το ελατήριο συμπιέζεται στη μέγιστη τιμή (θέση $x_i = x_A = -x_{max}$) και αφήνεται ελεύθερο.



- Έστω η τελική θέση $x_f = x_B = 0$ (θέση ισορροπίας)

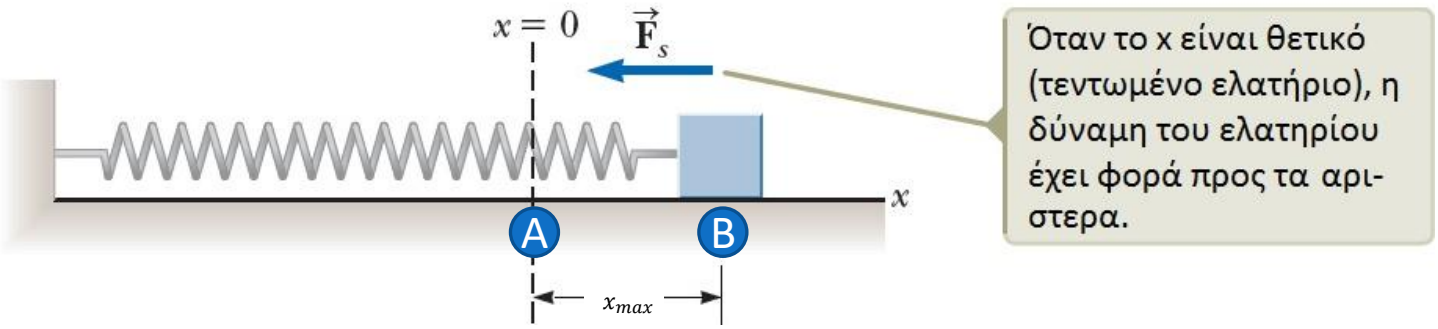
- Το έργο της δύναμης του ελατηρίου επάνω στο σώμα ισούται με

$$W_s = \int \vec{F}_s \cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\vec{\imath}) \cdot (dx\vec{\imath}) = \int_{-x_{max}}^{0} (-kx)dx = -\frac{kx^2}{2}\Big|_{-x_{max}}^{0} = \frac{1}{2}kx_{max}^2$$

Ενέργεια Συστήματος

$$F_s = -kx$$

- Ας θεωρήσουμε ότι το ελατήριο συνεχίζει την πορεία του, περνώντας από τη θέση ισορροπίας (θέση $x_i = x_A = 0$)



- Έστω η τελική θέση $x_f = x_B = x_{max}$

- Το έργο της δύναμης του ελατηρίου επάνω στο σώμα ισούται με

$$W_s = \int \vec{F}_s \cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\vec{\imath}) \cdot (dx\vec{\imath}) = \int_{0}^{x_{max}} (-kx)dx = -\frac{1}{2}kx_{max}^2$$

Ενέργεια Συστήματος

$$F_s = -kx$$

- Άρα το συνολικό έργο της δύναμης ελατηρίου επάνω στο σώμα **για μετατόπιση από $-x_{max}$ ως x_{max}** είναι μηδέν!!
  - Το ίδιο ισχύει για οποιεσδήποτε συμμετρικές ως προς το μηδέν θέσεις

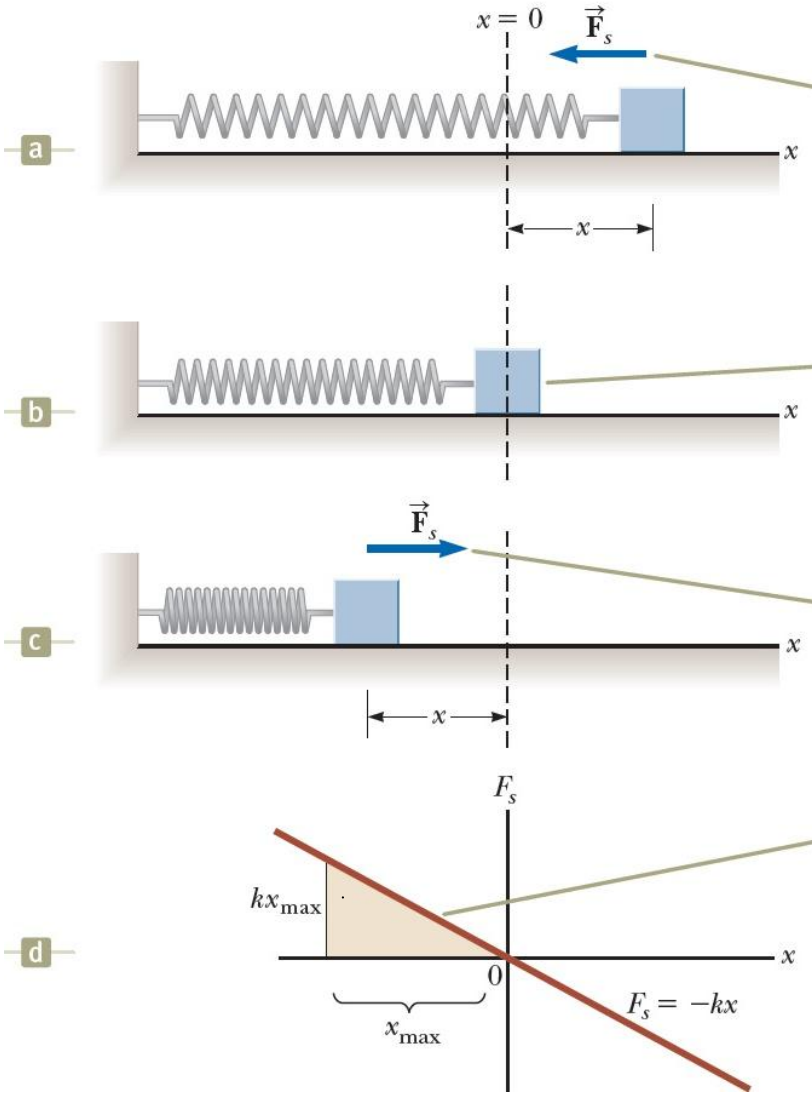
- Όμως για μια **οποιαδήποτε** μετατόπιση από μια θέση x_i σε μια θέση x_f, ισχύει:

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

που δεν είναι απαραίτητα ίσο με το μηδέν…

- Η παραπάνω σχέση δίνει το **έργο της δύναμης του ελατηρίου από μια οποιαδήποτε θέση ως μια οποιαδήποτε άλλη**

Ενέργεια Συστήματος



Όταν το x είναι θετικό (τεντωμένο ελατήριο), η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά προς τα αρι-στερα.

Όταν το x είναι μηδέν (στο φυσικό μήκος του ελατηρίου), η δύναμη του ελατηρίου είναι μηδέν.

Όταν το x είναι αρνητικό (συμπιεσμένο ελατήριο), η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά προς τα δεξιά.

Το έργο που παράγεται από τη δύναμη του ελατηρίου επάνω στο σώμα, όσο αυτό κινείται από $-x_{max}$ στο 0, είναι το εμβαδόν της γραμμοσκι-ασμένης περιοχής: $\frac{1}{2}kx_{max}^2$

Ενέργεια Συστήματος

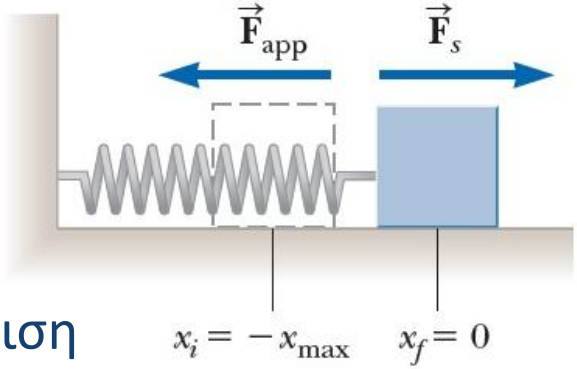
$\vec{F}_{app} = -\vec{F}_s$

- Έστω μια <u>εξωτερική</u> δύναμη $\vec{F}_{app}$ που εφαρμόζεται στο σύστημα-σώμα, όπως στο σχήμα
  - Κίνηση από το $-x_{max}$ στο 0
- $W_{ext} = \int \vec{F}_{app} \cdot d\vec{x} = \int -\vec{F}_s \cdot d\vec{x}$

$$= \int_{x_i}^{x_f} -(-kx\vec{\imath}) \cdot (dx\,\vec{\imath})$$

$$= \int_{-x_{max}}^{0} kxdx = -\frac{1}{2}kx_{max}^2$$

Αν η διαδικασία της κίνησης του σώματος γίνεται ΠΟΛΥ αργά, τότε η $\vec{F}_{app}$ είναι ίση σε μέτρο και αντίθετης φοράς με την $\vec{F}_s$, για κάθε χρονική στιγμή.



- Όμοια με πριν, για οποιαδήποτε μετατόπιση

$$W_{ext} = \int_{x_i}^{x_f} kxdx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 = -W_s$$

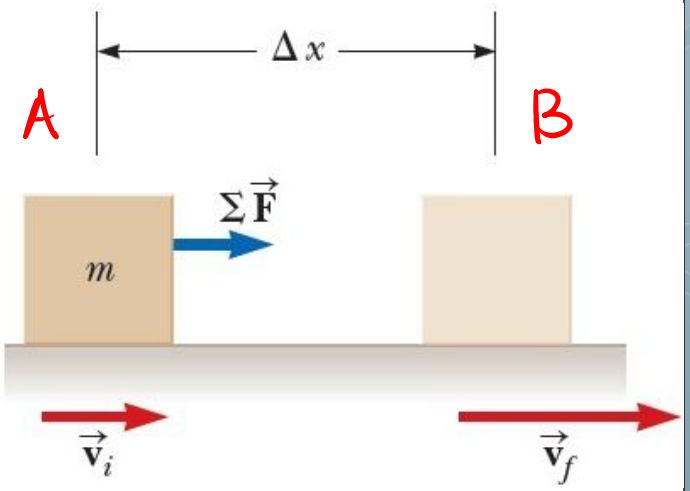
Ενέργεια Συστήματος

- **Παραγωγή έργου = Μηχανισμός μεταφοράς ενέργειας**
  - Τι γίνεται αυτή η ενέργεια;
  - ***Πιθανότατα*** αλλάζει την ταχύτητα ενός σώματος

- 1ος Τύπος Ενέργειας που μπορεί να έχει ένα σύστημα:

Κινητική Ενέργεια

- Έστω το διπλανό παράδειγμα:
  - Σύστημα = {σώμα μάζας m}
    - Σώμα επιταχύνει από $\vec{u}_i$ σε $\vec{u}_f$
    - Σώμα υπό επίδραση σταθερής δύναμης (**μοντέλο κίνησης Ι**)



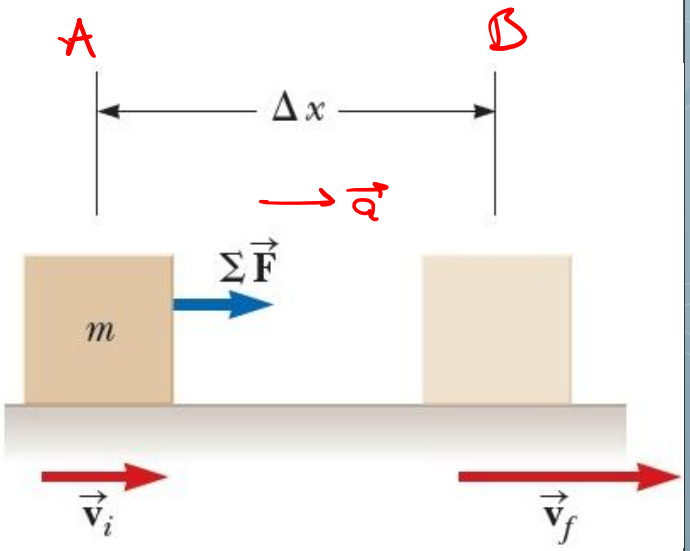
Ενέργεια Συστήματος

- Θεωρήστε την συνισταμένη των δυνάμεων σταθερή
- Η κίνηση είναι επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση (**μοντέλο κίνησης ΙΙ**)
- Άρα

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta x \Leftrightarrow a = \frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x}$$

- Από 2ο νόμο Newton, είναι

$$\sum F = ma$$



και με αντικατάσταση έχουμε

Ενέργεια Συστήματος

$$\sum F = m\frac{u_f^2 - u_i^2}{2\Delta x} \Leftrightarrow \overbrace{\Sigma F \Delta x}^{W_{\Sigma F}} = \frac{1}{2}mu_f^2 - \frac{1}{2}mu_i^2$$

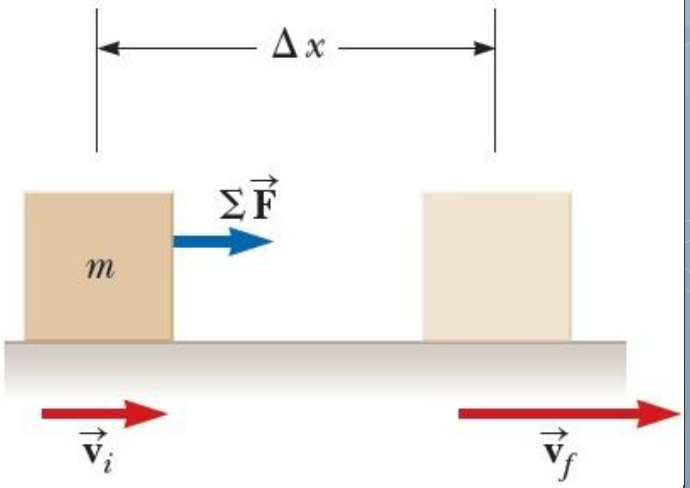
- Το 1ο μέλος είναι ο ορισμός του έργου σταθερών δυνάμεων
- Άρα

$$W_{\Sigma F} = \frac{1}{2}mu_f^2 - \frac{1}{2}mu_i^2 = K_f - K_i = \Delta K$$

όπου

$$\boxed{K = \frac{1}{2}mu^2}$$

η ***κινητική ενέργεια*** του σώματος



Ενέργεια Συστήματος

- Η κινητική ενέργεια αναπαριστά την ενέργεια που σχετίζεται με την **κίνηση** ενός σώματος
  - Μονάδα μέτρησης στο SI:

$$kg \cdot \left(\frac{m}{s}\right)^2 = kg \cdot \left(\frac{m}{s^2}\right) \cdot m = N \cdot m = 1\ Joule\ (J)$$

- Συνοψίζοντας:

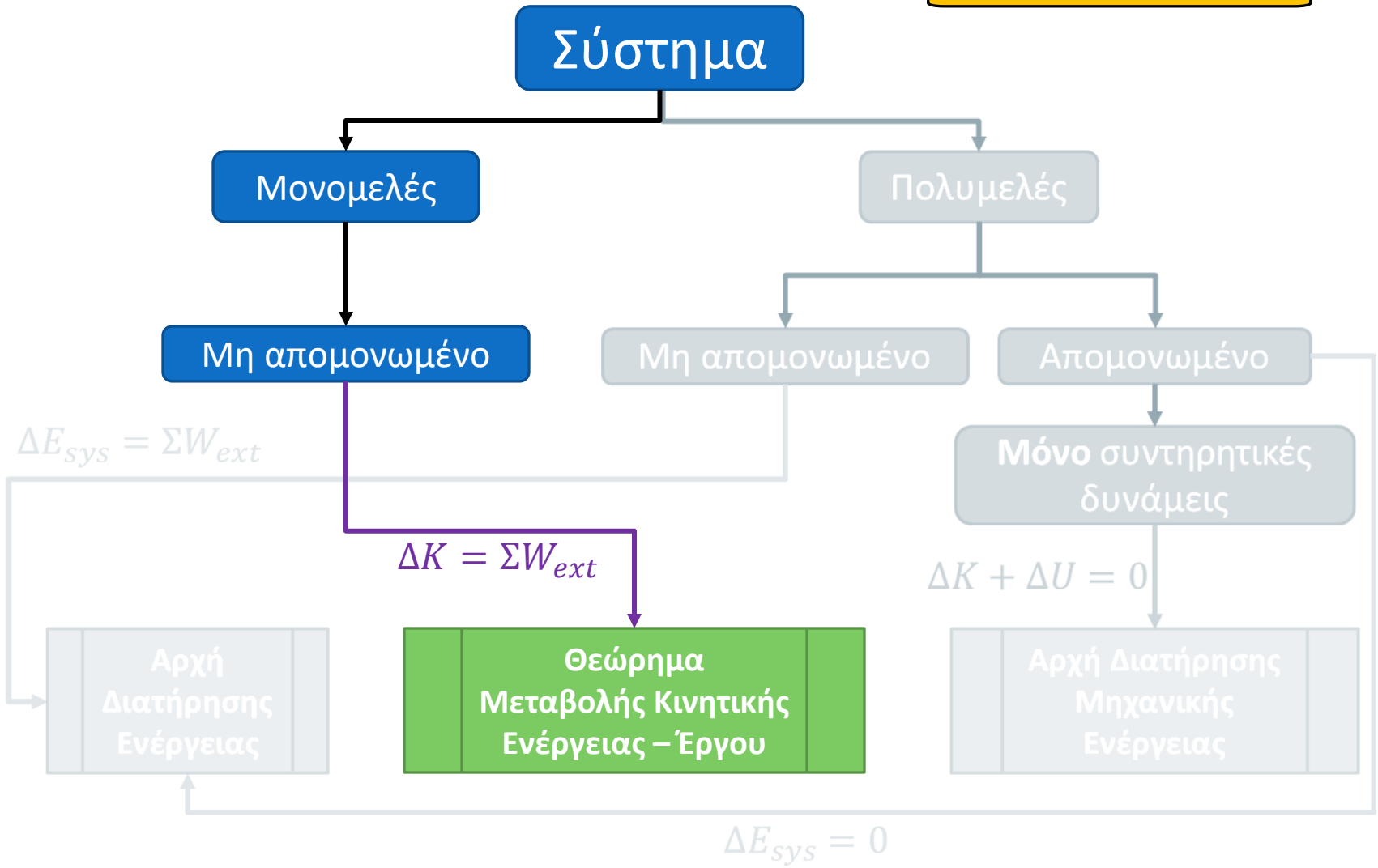
$$\boxed{\sum \boldsymbol{W_{ext}} = \boldsymbol{K_f} - \boldsymbol{K_i} = \boldsymbol{\Delta K}}$$

1ο Ενεργειακό Θεώρημα!

- **<u>Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου</u>**
  - **Όταν σε ένα σύστημα παράγεται έργο από μια συνισταμένη δυνάμεων, και η μόνη αλλαγή σε αυτό αφορά το μέτρο της ταχύτητας του, το συνολικό έργο ισούται με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος**

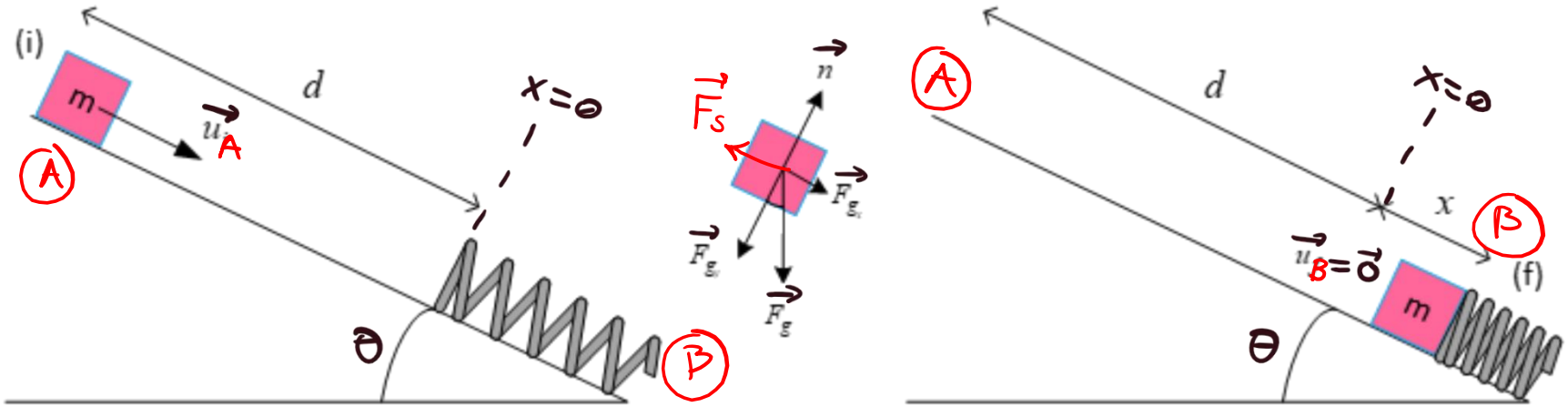
Ενέργεια Συστήματος

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων



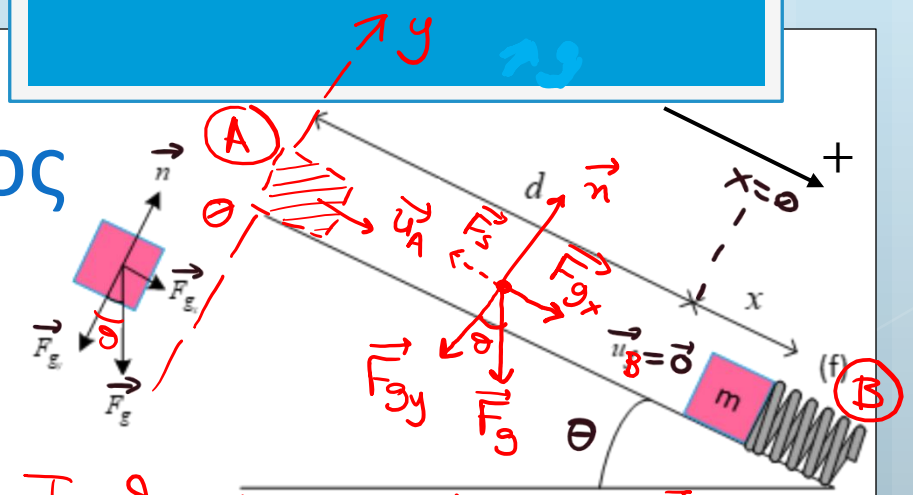
Ενέργεια Συστήματος

- **<u>Παράδειγμα:</u>**
- Λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ έχει ελατήριο σταθεράς k στερεωμένο στο κάτω μέρος του. Ένα κουτί μάζας m τοποθετείται πάνω στο κεκλιμένο σε απόσταση d από το ελατήριο. Από τη θέση αυτή, το κουτί βάλλεται προς το ελατήριο με ταχύτητα u_0. Μπορείτε να προβλέψετε πόσο θα έχει συμπιεστεί το ελατήριο όταν το κουτί φτάνει στιγμιαία σε ηρεμία?



Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Δαλεύαμε στη διαδρομή ΑΒ.

Θεωράμε το σύστημα {σώμα}. Τοποθετούμε το σύστημα αξόνων όπως στο σχήμα (x'x ∥ κεκλιμένο, y'y ⊥ κεκλιμένο). Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕΕ στη διαδρομή Α→Β.

$$\Delta K_{A\to B} = \sum W_{ext} = \cancel{W_n}^{\,0} + W_{F_{g_x}} + \cancel{W_{F_{g_y}}}^{\,0} + W_s \quad \Big|\ \vec{n}, \vec{F}_{g_y} \perp \Delta\vec{x}$$

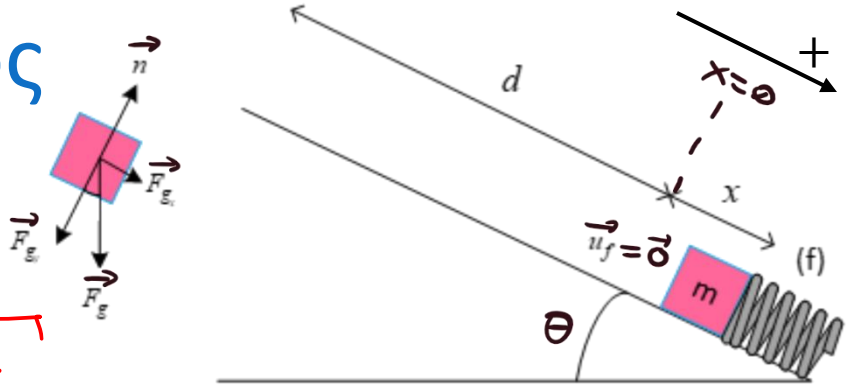
$$K_B - K_A = W_{F_{g_x}} + W_s \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2} m u_A^2 = W_{F_{g_x}} + W_s \quad (1)$$

- $W_{F_{g_x}} = \vec{F}_{g_x} \cdot \Delta\vec{x} = mg\sin\theta \cdot (d+x)$ (2)
- $W_s = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 = 0 - \frac{1}{2}kx^2$ (3)

$$(1) \xRightarrow[(3)]{(2)} -\frac{1}{2} m u_A^2 = mg\sin\theta\,(d+x) - \frac{1}{2}kx^2 \quad (\text{πολυώνυμο του } x)$$

Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Θυμήθηκε ότι

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\quad,\text{ αν}\quad \alpha x^2+\beta x+\gamma=0$$

Το πολυώνυμο μας είναι:

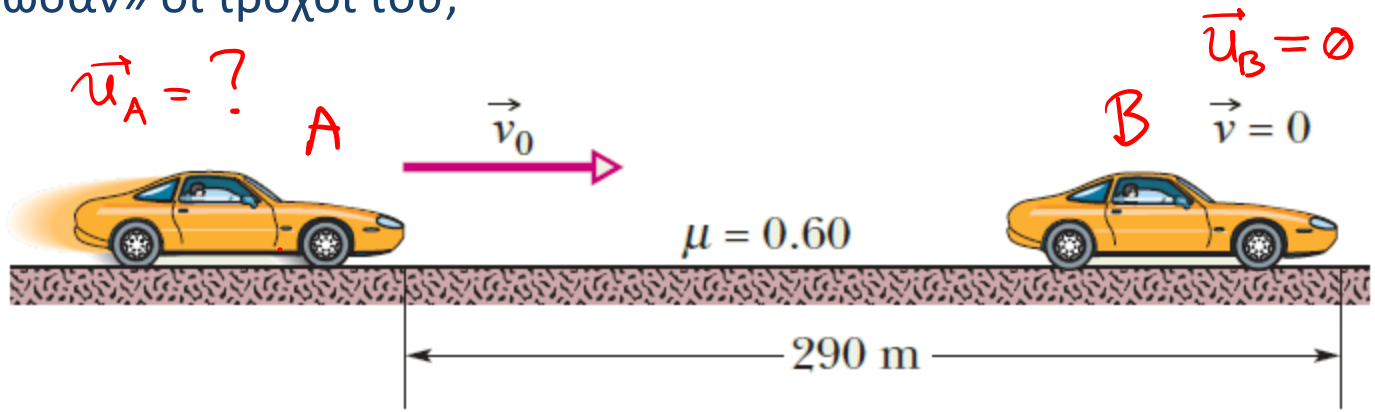
$$\overbrace{\left(\frac{1}{2}k\right)}^{\alpha}x^2\overbrace{-mg\sin\theta}^{\beta}\cdot x\overbrace{-\frac{1}{2}mu_A^2-mg\sin\theta\cdot d}^{\gamma}.$$

$$x_{1,2}=\frac{mg\sin\theta\pm\sqrt{(mg\sin\theta)^2+4\cdot\frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}mu_A^2+mg\sin\theta\cdot d\right)}}{2\frac{1}{2}k}$$

Από τις δυο ρίζες επιλέγω τη θετική γιατί η συμπίεση $\vec{x}$ του ελατηρίου είναι προς τη θετική φορά του $x'x$.

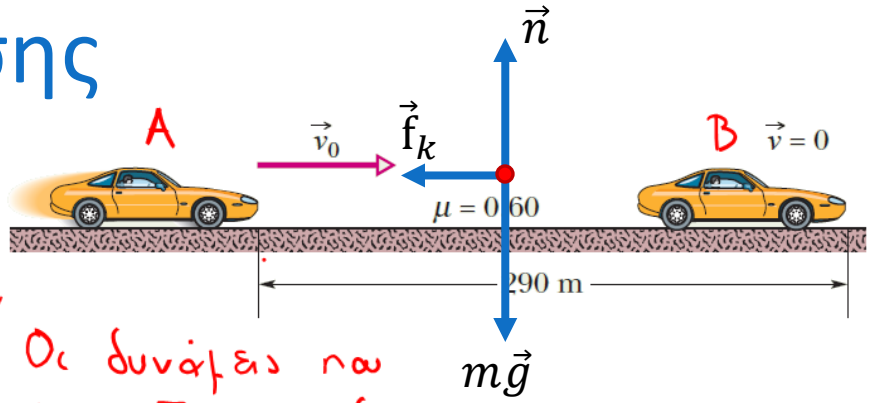
Οι Νόμοι της Κίνησης

- **<u>Παράδειγμα:</u>**
- Όταν οι τροχοί ενός αυτοκινήτου «κλειδώνουν» (σταματούν να γυρίζουν) εξ' αιτίας ενός απότομου φρεναρίσματος, το αυτοκίνητο ολισθαίνει στο δρόμο και «αποτυπώνει» στο οδόστρωμα ίχνη από τα ελαστικά του. Το ρεκόρ για τα μεγαλύτερα σε μήκος ίχνη ελαστικών σε δημόσιο δρόμο έγινε το 1960 στην Αγγλία – το μήκος του ίχνους ήταν 290 μέτρα! Υποθέτοντας ότι $\mu_k = 0.6$ μεταξύ οδοστρώματος και ελαστικών, και ότι το αυτοκίνητο επιταχυνόταν σταθερά κατά το φρενάρισμα, πόσο γρήγορα έτρεχε το αυτοκίνητο ακριβώς όταν «κλείδωσαν» οι τροχοί του;



Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Θεωρούμε το σύστημα {αμάξι}, μονοσέλές και μη αναστρέψιμο. Οι δυνάμεις που του ασκούνται φαίνονται στο σχήμα. Στη διαδρομή A→B ισχύει το ΘΜΚΕΕ:

$$\Delta K_{A\to B} = \sum W_{ext} = \cancel{W_n}^{\,0} + \cancel{W_{F_s}}^{\,0} + W_{f_k}$$

$$= W_{f_k} = \vec{f}_k \cdot \Delta\vec{x} = -f_k \cdot \Delta x = -\mu_k n \Delta x$$

Το σώμα ισορροπεί στον y, άρα ισχύει ο 1ος νόμος Newton:

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{n} + \vec{F}_g = 0 \Rightarrow n - F_g = 0 \Rightarrow n = F_g = mg$$

Άρα τελικά $\Delta K_{A\to B} = -\mu_k mg\Delta x \Leftrightarrow \cancel{K_B}^{\,0} - K_A = -\mu_k mg\Delta x \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}mu_A^2 = -\mu_k mg\Delta x \Rightarrow u_A = \sqrt{2\mu_k g\Delta x}.$$

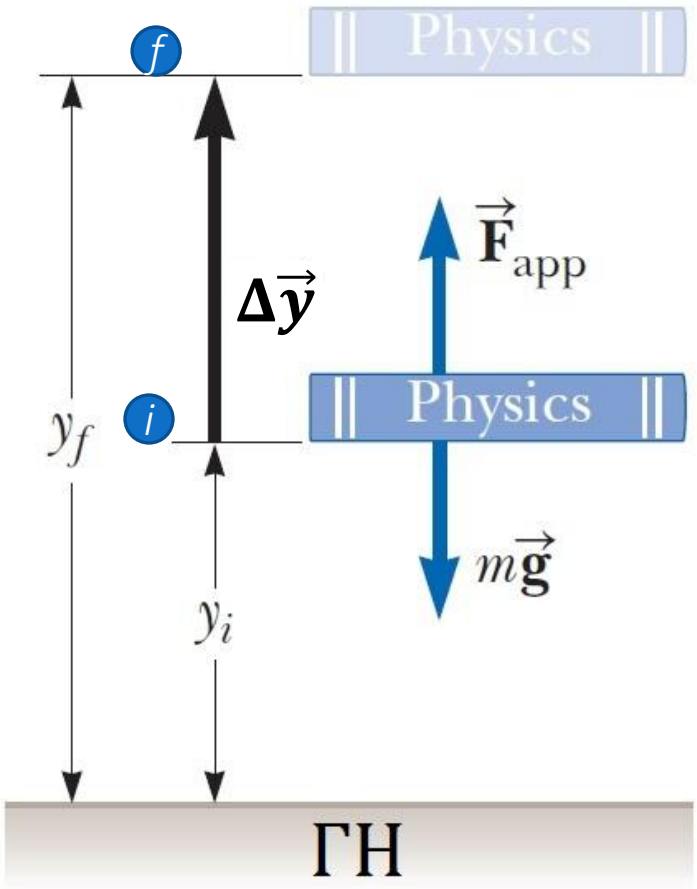
Ενέργεια Συστήματος

- Ως τώρα, είδαμε την επίδραση ***εξωτερικών*** δυνάμεων σε ένα σύστημα **ενός** μόνο σώματος
- Ας δούμε συστήματα από **δυο ή περισσότερα** σώματα (**πολυμελή**) με δυνάμεις ***εσωτερικές*** στο σύστημα
  - Δηλ. δυνάμεις που **δεν** ασκούνται **μόνο** από το εξωτερικό περιβάλλον
    - a.k.a. δυνάμεις **τόσο εξωτερικές, όσο και εσωτερικές**
- Τι «ενεργειακό» νέο έχουν να μας πουν τέτοια συστήματα?

Ενέργεια Συστήματος

Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- Μετατοπίζουμε <u>αργά</u> (με σταθερή ταχύτητα) ένα βιβλίο από τη θέση y_i στη θέση y_f μέσω **εξωτερικής** δύναμης $\vec{F}_{app}$
  - **Μη απομονωμένο σύστημα**
- **Αύξηση** ενέργειας συστήματος λόγω θετικού έργου της $\vec{F}_{app}$
  - Μεταφέρουμε ενέργεια **στο** σύστημα
  - Υπάρχει δύναμη & μετατόπιση προς τα πάνω, άρα υπάρχει **μη μηδενικό, θετικό έργο**!



Ενέργεια Συστήματος

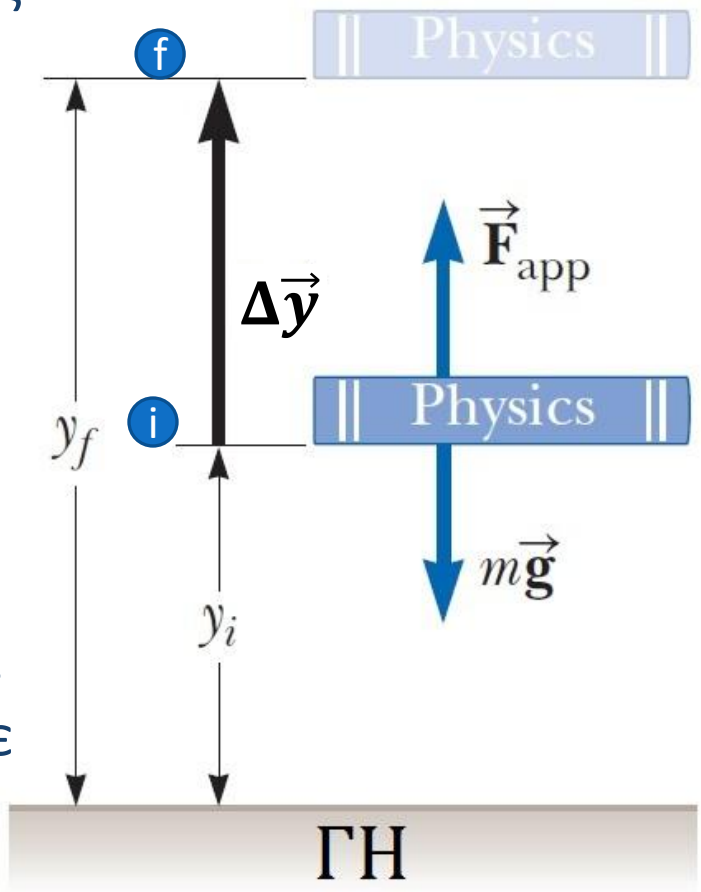
Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- **Καμιά αλλαγή/μεταβολή** στην κινητική ενέργεια του συστήματος μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσης! Γιατί; Υποθέσαμε

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0}$$

δηλ. η ταχύτητα ανόδου είναι σταθερή!

- Η ενέργεια που μεταφέρθηκε μέσω έργου στο βιβλίο πρέπει να έχει αποθηκευτεί στο σύστημα με **άλλη μορφή**!

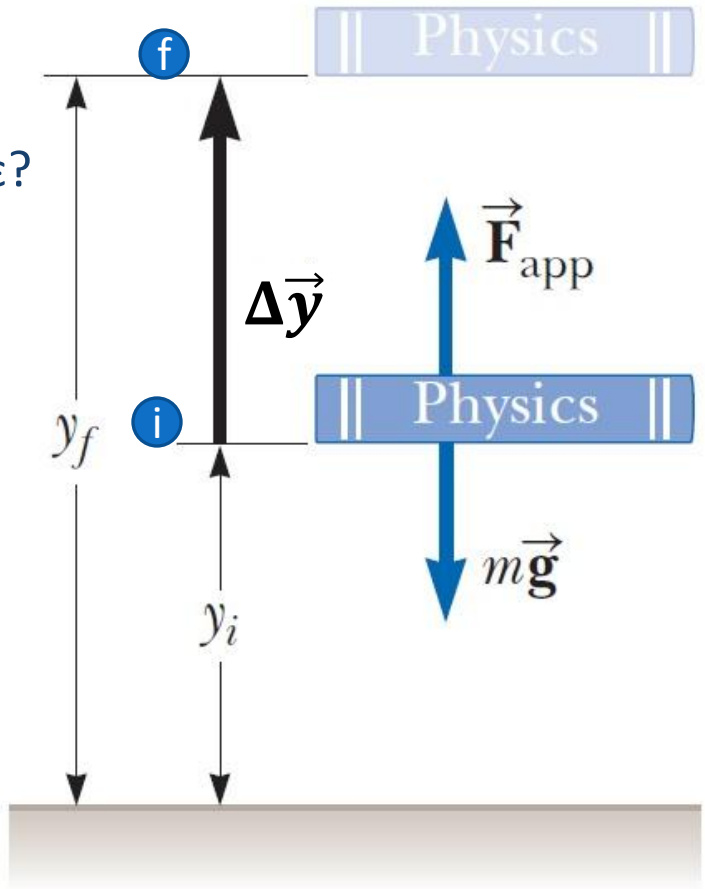


Ενέργεια Συστήματος

Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- Αν αφήσουμε όμως το βιβλίο, θα πέσει στο ύψος y_i
- Τώρα, το βιβλίο (και το σύστημα) έχει **κινητική ενέργεια**!
  - Πώς την απέκτησε; Από πού προήλθε?
  - Προέρχεται από το **έργο της δύναμης** $\vec{F}_{app}$ κατά την ανύψωση του βιβλίου νωρίτερα
  - Μέσω ποιου έργου εκφράστηκε?
  - Μέσω του **έργου του βάρους**
- Η ενέργεια που ήταν αποθηκευμένη στο σύστημα {βιβλίο, Γη} πριν το πρώτο αφεθεί να πέσει λέγεται

βαρυτική δυναμική ενέργεια

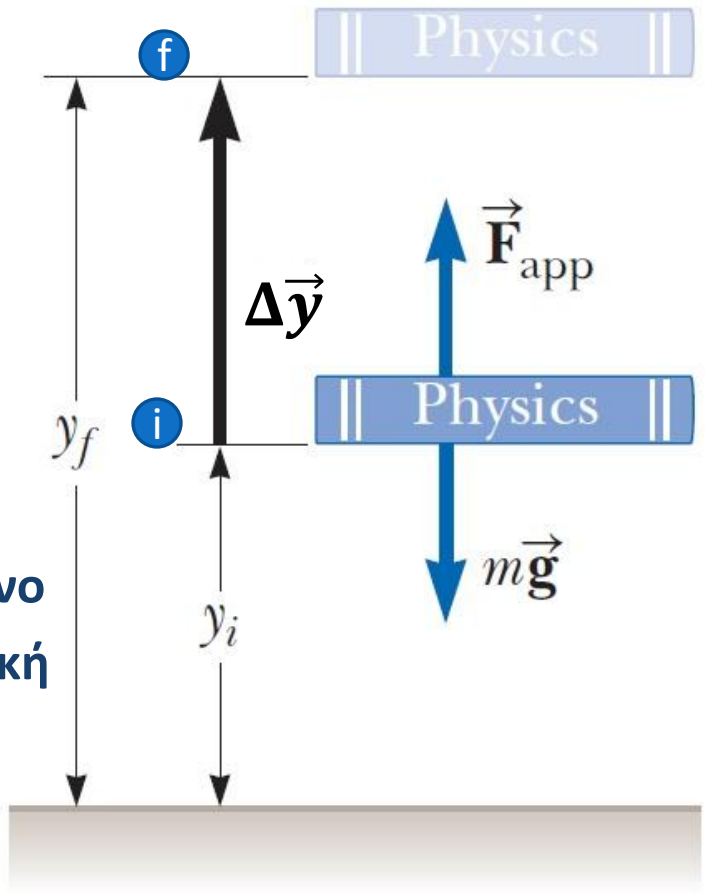


Ενέργεια Συστήματος

Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- Βλέπετε τις ενεργειακές μετατροπές?

- Μια **εξωτερική δύναμη** $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{app}}$ εισή-γαγε ενέργεια μέσω έργου στο μη απομονωμένο σύστημα {Γη, βιβλίο}, ανυψώνοντας το ένα μέλος (βιβλίο)
- Το έργο αποθηκεύτηκε ως **βαρυτική δυναμική ενέργεια**
- Η εξωτερική δύναμη έπαψε να δρα
  - Το σύστημα είναι πλέον **απομονωμένο**
  - Η **δύναμη του βάρους** είναι **εσωτερική** στο σύστημα
- Η **βαρυτική δυναμική** ενέργεια μετατράπηκε όλη σε **κινητική**!



Ενέργεια Συστήματος

Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- Εφαρμόζουμε δύναμη για να **ανυψώσουμε** το βιβλίο με (σταθερή) πολύ αργή ταχύτητα (έτσι ώστε $\Sigma\vec{F}_y = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_{app} = -m\vec{g}$)

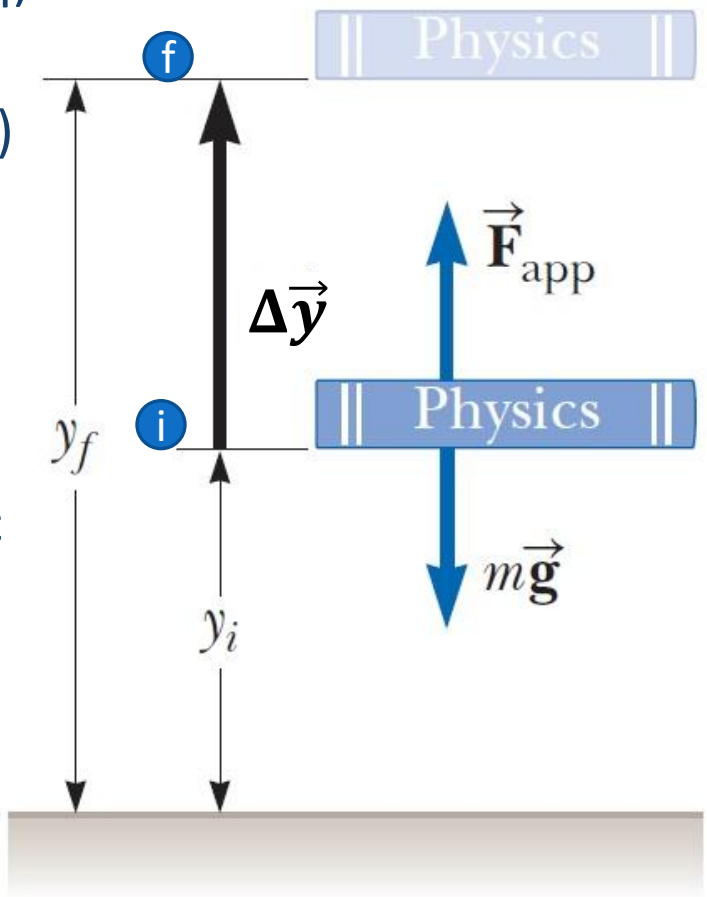
- $$\begin{aligned} W_{ext} &= \vec{\mathrm{F}}_{app} \cdot \Delta\vec{y} = -m\vec{g} \cdot \Delta\vec{y} \\ &= -m(-g\vec{\boldsymbol{j}}) \cdot (y_f - y_i)\vec{\boldsymbol{j}} \\ &= mgy_f - mgy_i \end{aligned}$$

- Αν συμβολίζουμε με $U = mgy$, τότε

$$W_{ext} = U_{g_f} - U_{g_i} = \Delta U_g$$

- **Βαρυτική Δυναμική ενέργεια**

$$\boxed{U_g = mgy}$$



Ενέργεια Συστήματος

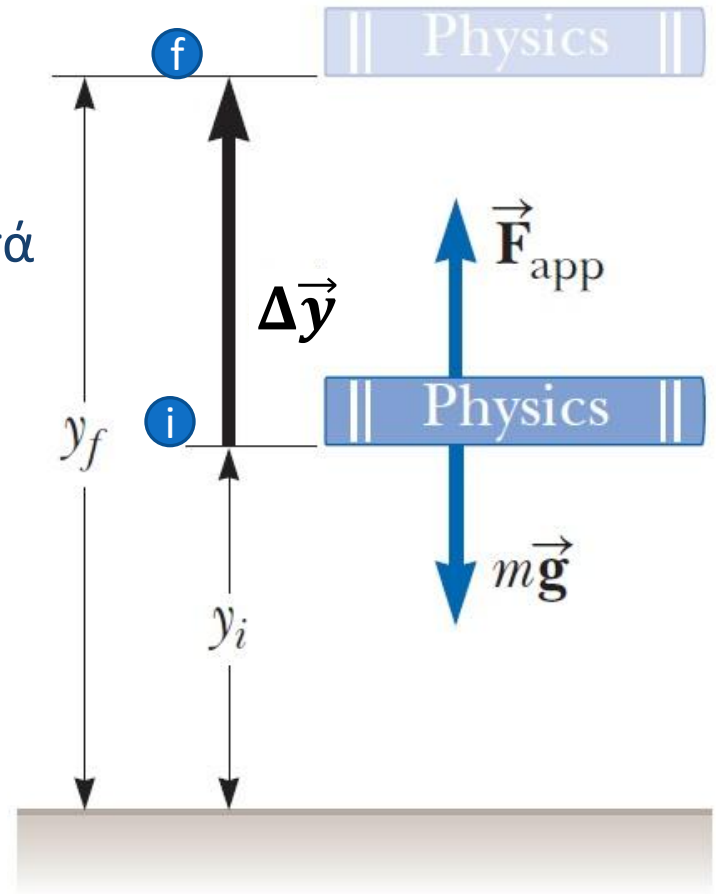
Σύστημα: Βιβλίο + Γη

$$W_{ext} = U_{g_f} - U_{g_i} = \Delta U_g$$

- Το **έργο της εξωτερικής δύναμης** κατά την **ανύψωση** ενός σώματος σε ένα σύστημα {σώμα, Γη} ισούται με τη **μεταβολή στη**

  βαρυτική δυναμική ενέργεια

  του **συστήματος**!



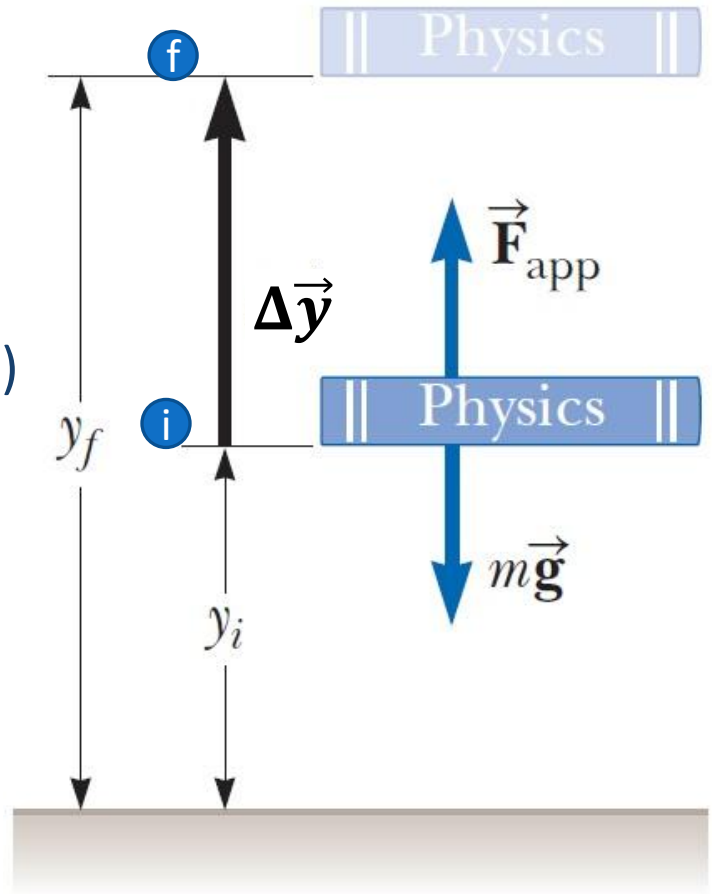
Ενέργεια Συστήματος

Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- Ας κάνουμε το ίδιο για το **έργο** της δύναμης του **βάρους**!

- Εφαρμόζουμε δύναμη για να **ανυψώσουμε** το βιβλίο με (σταθερή) πολύ αργή ταχύτητα (έτσι ώστε $\Sigma\vec{F}_y = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_{app} = -m\vec{g}$)

- $$W_{F_g} = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{y} = m\vec{g} \cdot \Delta\vec{y}$$
$$= m(-g\vec{\boldsymbol{j}}) \cdot (y_f - y_i)\vec{\boldsymbol{j}}$$
$$= mgy_i - mgy_f$$
$$= U_{g_i} - U_{g_f} = -\Delta U_g$$



Ενέργεια Συστήματος

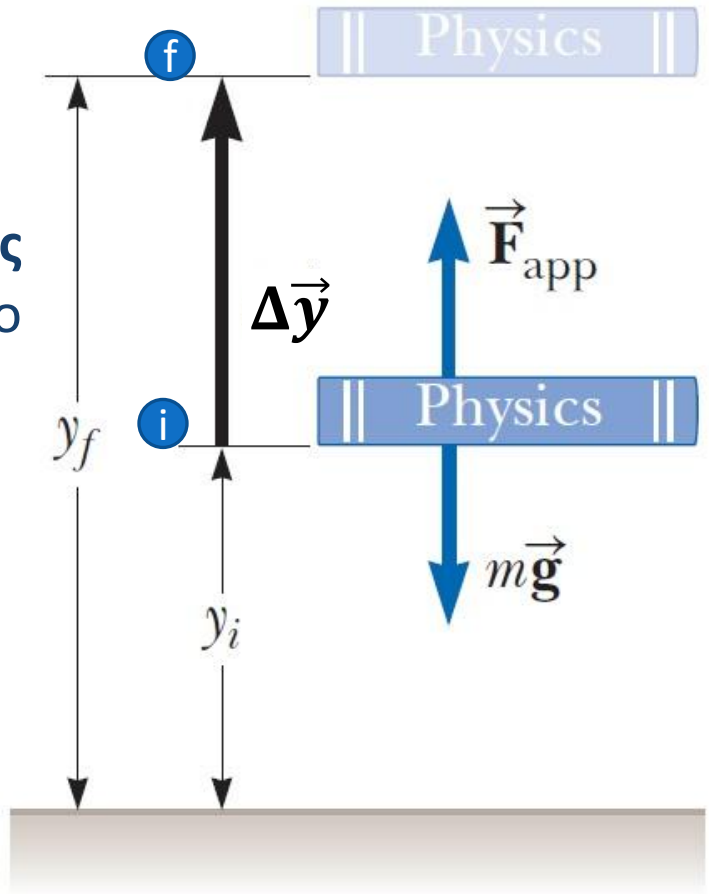
Σύστημα: Βιβλίο + Γη

$$W_{F_g} = U_{g_i} - U_{g_f} = -\Delta U_g$$

- Άρα το **έργο της δύναμης του βάρους** κατά την **ανύψωση** ενός σώματος στο σύστημα {σώμα, Γη} ισούται με την **αρνητική μεταβολή στη**

βαρυτική δυναμική ενέργεια

του **συστήματος {σώμα, Γη}**!



Ενέργεια Συστήματος

- **Θυμηθείτε:**
  - Έχουμε δει ότι το έργο που παράγεται σε ένα σύστημα ***μπορεί*** να ισοδυναμεί με **μεταβολή της κινητικής του ενέργειας**, που «μεταφράζεται» σε ***κίνηση*** των μελών του συστήματος
  - Στο παράδειγμα που ολοκληρώσαμε, είδαμε ότι το έργο που παράγεται στο σύστημα εμφανίζεται ως **μεταβολή της (βαρυτικής) δυναμικής ενέργειας** του
    - …που «μεταφράζεται» ως αλλαγή στη

διάταξη / διαμόρφωση / σύνθεση

των **μελών** του συστήματος.

  - Εν προκειμένω, το βιβλίο ανυψώθηκε σε **σχέση με την επιφάνεια της Γης** (άλλαξε η μεταξύ τους «διάταξη»)

Ενέργεια Συστήματος

- Σε πρακτικά προβλήματα, πρέπει να επιλέγουμε μια **διάταξη των μελών** του συστήματος (διάταξη αναφοράς) όπου η **βαρυτική δυναμική ενέργεια** θεωρείται **μηδενική**
  - Για παράδειγμα, όταν τα σώματα βρίσκονται **ακριβώς πάνω** στην επιφάνεια της Γης.
    - Τότε θεωρούμε ότι η **βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος {Γη, σώματα} είναι μηδενική**
    - Οποιαδήποτε **μεταβολή** στο **ύψος** κάποιου σώματος σε σχέση με την επιφάνεια της Γης οδηγεί σε **μεταβολή** της **βαρυτικής δυναμικής ενέργειας** του συστήματος που αυτό ανήκει
  - Πολλές φορές, το πρόβλημα «οδηγεί» στην κατάλληλη επιλογή της διάταξης

Ενέργεια Συστήματος

- Ας δούμε μια **άλλης μορφής δυναμική ενέργεια** που μπορεί να έχει ένα σύστημα
- Πίσω στο ελατήριο! ☺ Σύστημα: **{ελατήριο, σώμα}**
  - **Διμελές** σύστημα!
  - Δύναμη ελατηρίου: **εσωτερική** στο σύστημα!
- Είδαμε αρκετές διαφάνειες πριν ότι

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 = -W_{ext}$$

- Το **έργο** που παράγεται στο σύστημα **εξαρτάται από την αρχική και την τελική θέση του σώματος σε σχέση με τη θέση ισορροπίας του ελατηρίου**
  - Είναι κι αυτό μια **διάταξη** των μελών του συστήματος!

Ενέργεια Συστήματος

- Άρα αν θεωρήσουμε ότι

$$\boxed{U_s = \frac{1}{2}kx^2}$$

τότε

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$
$$= U_s^i - U_s^f = -\Delta U_s$$

με U_s την

ελαστική δυναμική ενέργεια

που σχετίζεται με το **σύστημα {σώμα, ελατήριο}**

Ενέργεια Συστήματος

- Συνοψίζοντας:

- Σύστημα {σώμα, Γη}
  - Πολυμελές!
  - **Βαρυτική** δυναμική ενέργεια
  - «Θέση» αναφοράς: συνήθως επίπεδο επιφάνειας Γης ($y = 0$)

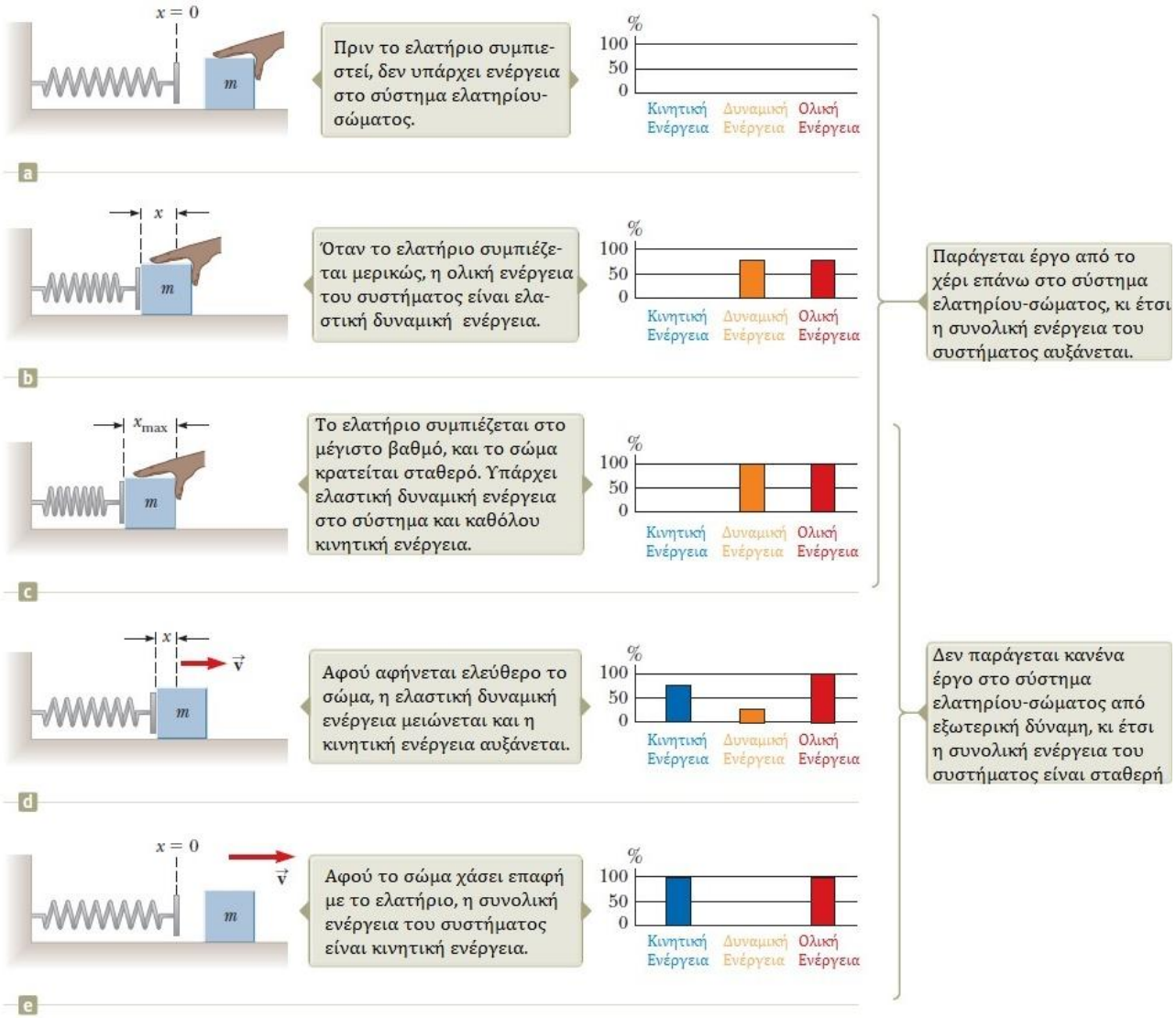
$$U_g = mgy$$

- Σύστημα {ελατήριο, σώμα}
  - Πολυμελές!
  - **Ελαστική** δυναμική ενέργεια
  - «Θέση» αναφοράς: θέση φυσικού μήκους ελατηρίου ($x = 0$)

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2$$

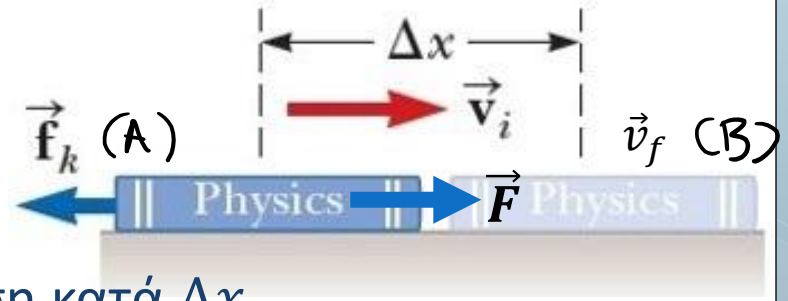
- Και στις δυο περιπτώσεις, οι **διαφορές** δυναμικής ενέργειας έχουν σημασία!

Ενέργεια Συστήματος



Ενέργεια Συστήματος

- Ας δούμε και μια ακόμη μορφή ενέργειας που μπορεί να έχει ένα σύστημα



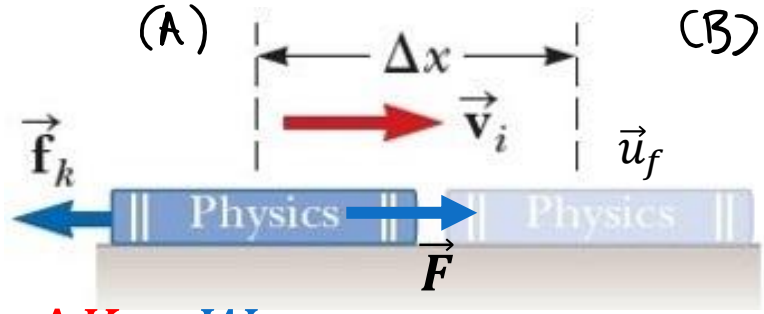
- Σύστημα = **{βιβλίο}**
  - **Σταθερή** δύναμη $\vec{F}$
  - **Σταθερή** επιτάχυνση: μετατόπιση κατά Δx
  - Κίνηση υπό σταθερή δύναμη (**Μοντέλο Ι**) και κίνηση υπό σταθερή επιτάχυση (**Μοντέλο ΙΙ**):

$$\sum F_x = ma \Leftrightarrow F - f_k = m\boldsymbol{a}$$

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta x \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \frac{1}{\Delta x}\frac{(u_f^2 - u_i^2)}{2}$$

$$F\Delta x - f_k\Delta \mathrm{x} = W_F - f_k\Delta \mathrm{x} = K_f - K_i \Rightarrow W_F = \Delta K + f_k\Delta \mathrm{x}$$

Ενέργεια Συστήματος



- Σύστημα = {**βιβλίο**}

$$W_F = \Delta K + f_k \Delta x = \Delta K - W_{f_k}$$

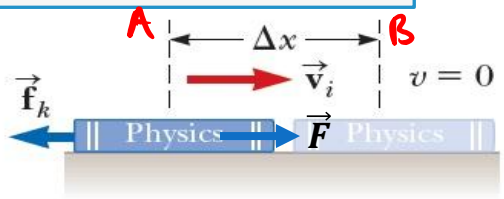
- Πού πήγε η ενέργεια μέσω του έργου της $\vec{F}$??
  - Μετατράπηκε τόσο σε αύξηση της **κινητικής ενέργειας** του σώματος όσο και σε **αύξηση της θερμοκρασίας της επιφάνειας και του βιβλίου → μεταβολή στη θερμική ενέργεια**:

$$\Delta E_{th} = f_k \Delta x = -(-f_k \Delta x) = -W_{f_k}$$

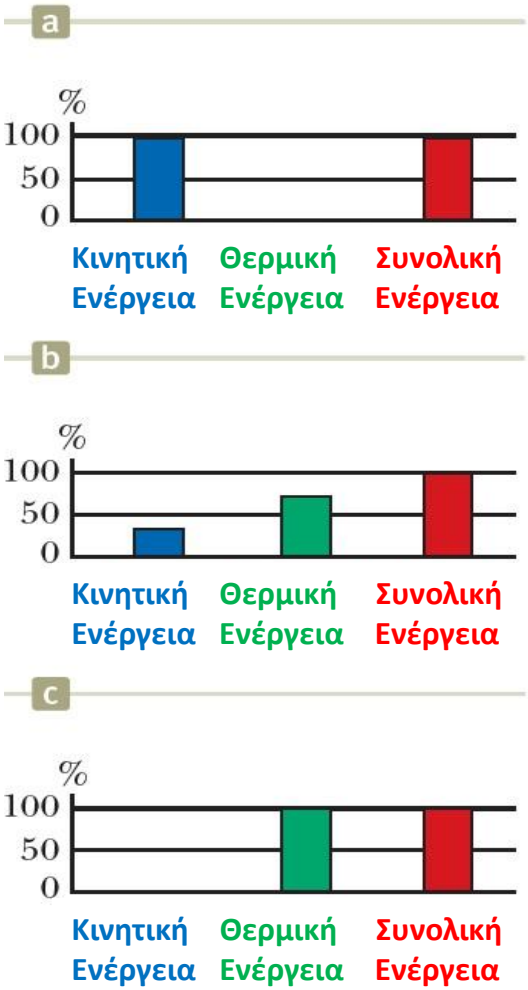
  - Μεταβολή στη θερμοκρασία του συστήματος

{βιβλίο, επιφάνεια}

Ενέργεια Συστήματος



- Η ενέργεια που προσφέρθηκε στο σύστημα μετατράπηκε <u>και</u> σε ***θερμική ενέργεια*** του συστήματος {**βιβλίο, επιφάνεια**} (**όχι μόνο βιβλίο**!)
  - **Η επιφάνεια <u>και</u> το βιβλίο** θερμάνθηκαν!



- Θα ονομάζουμε την ενέργεια που σχετίζεται με τη θερμοκρασία ενός συστήματος ως ***<u>θερμική ενέργεια</u>***, και θα τη συμβολίζουμε με

$$E_{th}$$

- Στο προηγούμενο παράδειγμα (και γενικότερα)

$$\boxed{\Delta E_{th} = -W_{\tau\rho\iota\beta\eta\varsigma} = f_k \Delta x}$$

Ενέργεια Συστήματος

- **Συνολικές παρατηρήσεις**

- Για να μιλήσουμε για **δυναμικές** ενέργειες (κάθε μορφής) χρειαζόμαστε **πολυμελή** (**διμελή** τουλάχιστον) συστήματα
  - Η δύναμη που σχετίζεται με τη **δυναμική** ενέργεια πρέπει να είναι **εσωτερική** δύναμη στο σύστημα
    - Δύναμη **βάρους** στο σύστημα {σώμα, **Γη**}
      - Σχετίζεται με τη **βαρυτική** δυναμική ενέργεια
    - Δύναμη **ελατηρίου** στο σύστημα {**ελατήριο**, σώμα}:
      - Σχετίζεται με την **ελαστική** δυναμική ενέργεια

- Για να μιλήσουμε για **θερμική** ενέργεια χρειαζόμαστε ξανά **πολυμελή** συστήματα (**διμελή** τουλάχιστον), με το ένα μέλος να είναι κάποια **μη λεία επιφάνεια** όπου ολισθαίνει ένα άλλο μέλος του συστήματος
  - Η δύναμη που σχετίζεται με τη **θερμική** ενέργεια είναι **εσωτερική** του συστήματος
    - Δύναμη **τριβής ολισθήσεως** στο σύστημα {σώμα, **επιφάνεια**}

Ενέργεια Συστήματος

- **Συνολικές παρατηρήσεις**

- Χρειαζόμαστε ένα «**ενεργειακό πλαίσιο**» για να εφαρμόζουμε τις νέες αυτές ενεργειακές μεταβολές
- Το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου αφορά **μονομελή** συστήματα και οι ενεργειακές μεταβολές που είδαμε εκφράζονται μέσω των **έργων** των αντίστοιχων δυνάμεων
- Για παράδειγμα, σε ένα **μονομελές** σύστημα, το ΘΜΚΕΕ θα δίνει:

$$\Delta K = W_F + W_{f_k} + W_{F_g} + W_{F_s}$$

- Είδαμε πριν ότι

$$W_{f_k} = -\Delta E_{th}$$
$$W_{F_g} = U_{g_i} - U_{g_f} = -\Delta U_g$$
$$W_{F_s} = U_{s_i} - U_{s_f} = -\Delta U_s$$

- **<u>ΔΕΝ</u>** μπορούμε να κάνουμε αυτές τις αντικαταστάσεις στην παραπάνω εξίσωση, καθώς δεν ορίζονται σε μονομελή συστήματα!

Ενέργεια Συστήματος

- **Συνολικές παρατηρήσεις**

$$\Delta K = W_F + W_{f_k} + W_{F_g} + W_{F_s}$$

- Φυσικά μπορούμε να γράψουμε ότι

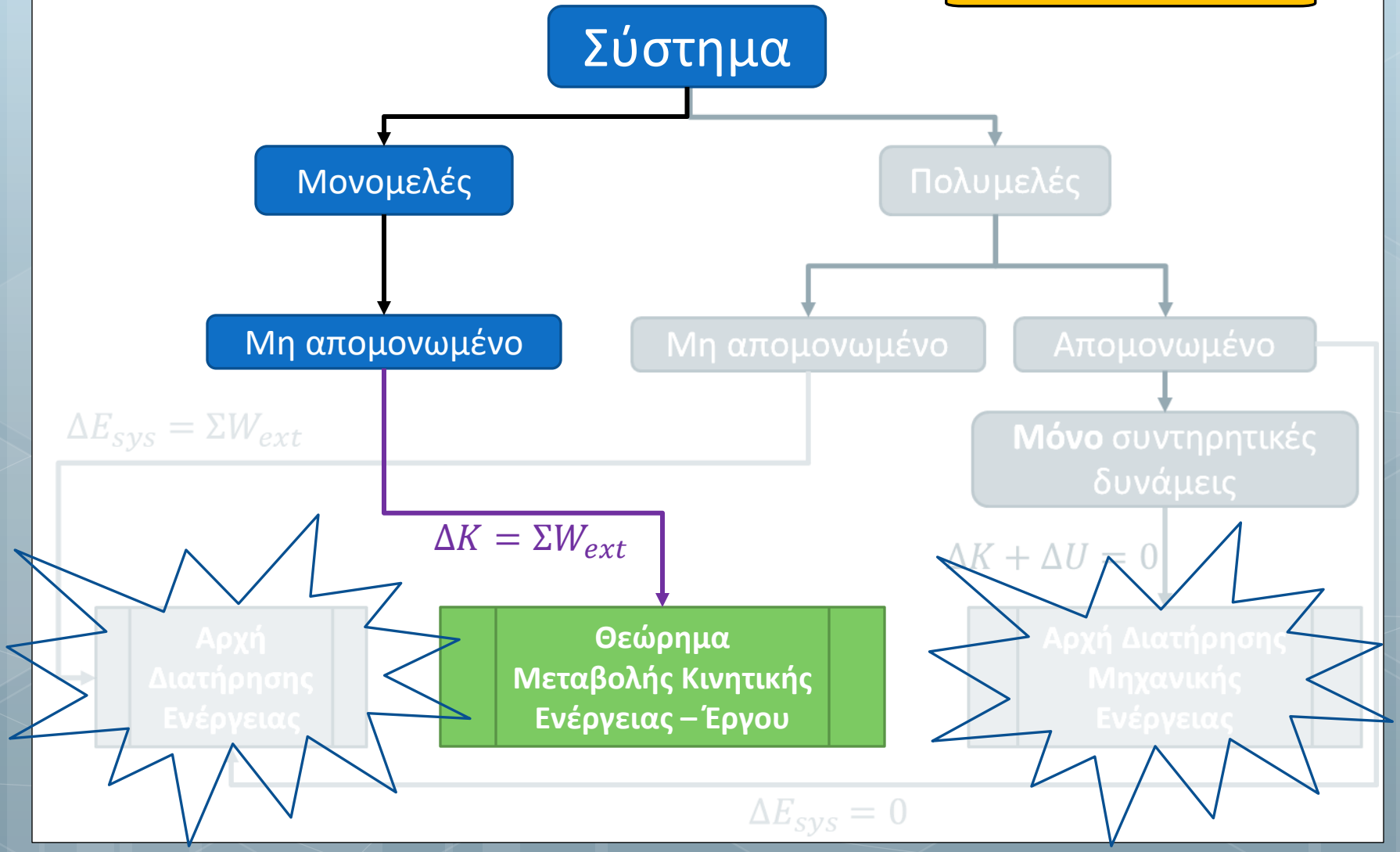
$$W_{f_k} = \vec{f}_k \cdot \Delta\vec{x} = f_k \Delta x \cos(\pi) = -f_k \Delta x$$
$$W_{F_g} = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{y} = -mg\left(y_f - y_i\right) = mgy_i - mgy_f$$
$$W_{F_s} = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

- ...και να λύσουμε το πρόβλημα, αλλά δεν μπορούμε να αναφερθούμε σε **μεταβολές ενέργειας πέραν της κινητικής στο ΘΜΚΕΕ!**

- **Άραγε ποιό/ά ενεργειακό/ά θεώρημα/τα μπορεί να μας επιτρέψει να χρησιμοποιούμε κατευθείαν τις δυναμικές, θερμικές ενέργειες??!!**

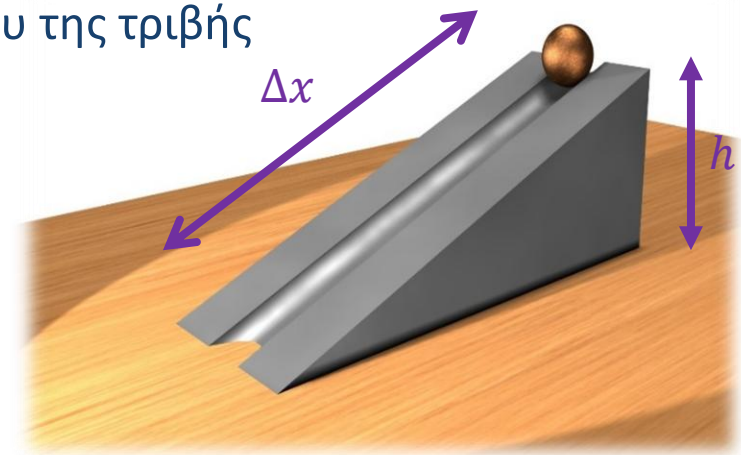
Ενέργεια Συστήματος

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων



Ενέργεια Συστήματος

- Θεωρήστε το διπλανό σύστημα: **{μπάλα, επικλινές, επιφάνεια (Γη)}**
  Η **απόσταση** που καλύπτει μια μπάλα ολισθαίνοντας σε μια επικλινή επιφάνεια <u>με τριβές</u> έχει μεγάλη σημασία για το **πόση** *δυναμική* ενέργεια μετατρέπεται σε *θερμική* μέσω του έργου της τριβής
  - Μεγαλύτερη απόσταση → μεγαλύτερο ποσοστό **δυναμικής** ενέργειας μετατρέπεται σε **θερμική** λόγω του έργου της δύναμης τριβής
  - Υπάρχει εξάρτηση από το «μονοπάτι»



- Αντίθετα, το έργο της δύναμης του βάρους **<u>δεν</u>** εξαρτάται από το «μονοπάτι» που ακολουθεί το σώμα!

$$W_g = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{y} = -mg\vec{j} \cdot (y_f - y_i)\vec{j} = mg\boldsymbol{h}$$

ενώ

$$W_{\tau\rho\iota\beta\eta\varsigma} = -f_k \boldsymbol{\Delta x}$$

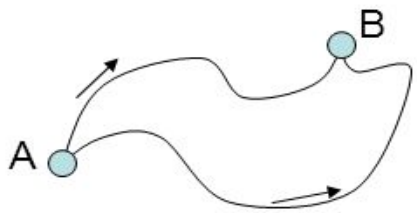
Ενέργεια Συστήματος

- Αυτή η **εξάρτηση από τη διαδρομή** (ή από το «μονοπάτι») που ακολουθεί το σώμα ορίζει δυο κατηγορίες δυνάμεων:
  - ***Συντηρητικές (conservative)***
    - Έργο **ανεξάρτητο** από τη διαδρομή, π.χ. δύναμη βαρύτητας
  - ***Μη συντηρητικές (nonconservative)***
    - Έργο **εξαρτημένο** από τη διαδρομή, π.χ. δύναμη τριβής ολίσθησης
- **Συντηρητικές δυνάμεις – Ιδιότητες:**
  1. Το **έργο** που παράγεται από μια τέτοια δύναμη σε ένα σώμα που κινείται ανάμεσα σε οποιαδήποτε δυο σημεία είναι **ανεξάρτητο της διαδρομής** ανάμεσα σε αυτά.
  2. Το **έργο** που παράγεται από μια τέτοια δύναμη σε ένα σώμα που κινείται **σε κλειστή διαδρομή είναι μηδέν**.

Ενέργεια Συστήματος

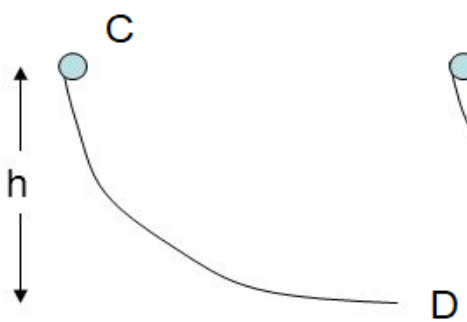
Έστω ότι οι κινήσεις μεταξύ των σημείων οφείλονται σε μια συντηρητική δύναμη

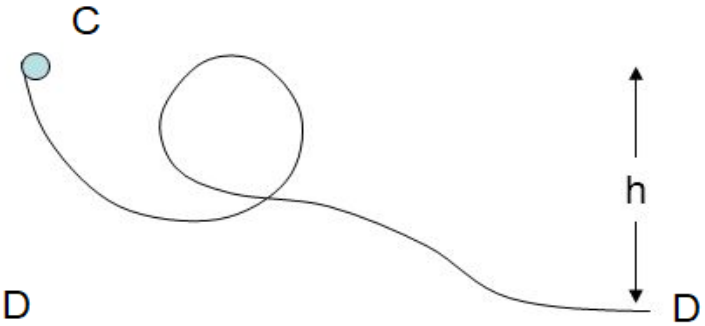
Συντηρητικές δυνάμεις - Ιδιότητες:

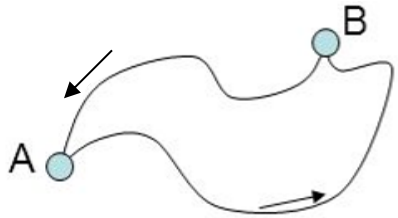


Το έργο που παράγεται στη διαδρομή από το A στο B είναι το ίδιο για κάθε μια από τις διαδρομές.

Όμοια και για τις διαδρομές από το C στο D.







Το έργο μιας συντηρητικής δύναμης από το A στο B και ξανά μετά στο A είναι μηδέν (κλειστή διαδρομή)

Ενέργεια Συστήματος

- Μια δύναμη λέγεται ***μη συντηρητική*** αν δεν ικανοποιεί (τουλάχιστον μια από) τις ιδιότητες 1 και 2 που είδαμε πριν
  - Παράδειγμα: τριβή ολίσθησης

- Η δράση **αποκλειστικά συντηρητικών** δυνάμεων είναι μεγάλο πλεονέκτημα για ένα σύστημα, καθώς μπορεί να υποστηρίξει ένα **συγκεκριμένο ενεργειακό θεώρημα**

- Ας ορίσουμε το **άθροισμα της κινητικής K και της (μιας ή περισσότερων) δυναμικής ενέργειας U** ενός **πολυμελούς** συστήματος ως τη ***μηχανική ενέργεια*** του συστήματος:

$$\boxed{E_{mech} = K + U}$$

Ενέργεια Συστήματος

- Αποδεικνύεται πειραματικά ότι οι ***μη*** *συντηρητικές* δυνάμεις που δρουν σε ένα **πολυμελές** σύστημα **αλλάζουν** τη **μηχανική ενέργεια** του συστήματος! Αντίθετα, **οι *συντηρητικές* τη διατηρούν**!

Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας – ΑΔΜΕ

$$\Delta E_{mech} = \Delta K + \Delta U = 0$$

<u>μόνο</u> αν στο πολυμελές σύστημα παράγουν έργο **<u>αποκλειστικά</u> συντηρητικές** δυνάμεις!

- Προφανώς για τον ορισμό δυναμικής ενέργειας απαιτείται **πολυμελές** σύστημα
- Και **ποιες** δυνάμεις είναι συντηρητικές?…

Ενέργεια Συστήματος

- **Παραδείγματα συντηρητικών δυνάμεων**

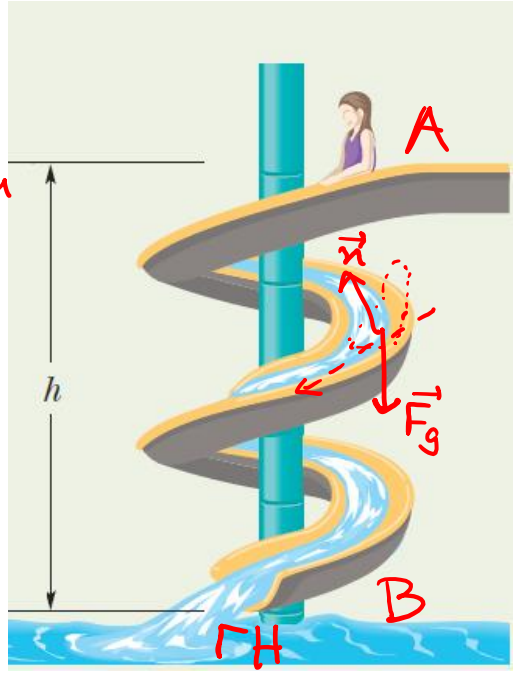
  - **Δύναμη βάρους $\vec{F}_g$**
    - $W_g = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{y} = -mg\vec{j} \cdot (y_f - y_i)\vec{j} = mgy_i - mgy_f$
    - Εξάρτηση μόνο από τα y_i, y_f, **όχι** από τη διαδρομή σε αυτά
    - $W_g = 0$, σε **κλειστή** διαδρομή ($y_i = y_f$)

  - **Δύναμη ελατηρίου $\vec{F}_s$**
    - $W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$
    - Εξάρτηση μόνο από τα x_i, x_f, **όχι** από τη διαδρομή σε αυτά
    - $W_s = 0$, σε **κλειστή** διαδρομή ($x_i = x_f$)

Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα:**
- Ένα παιδί μάζας m ολισθαίνει από ακίνητη θέση σε μια νεροτσουλήθρα ύψους $h = 8.5\ m$. Υποθέστε ότι η νεροτσουλήθρα περιγράφει μια επιφάνεια χωρίς τριβές και βρείτε την ταχύτητα του παιδιού στο τέρμα της.

Το σύστημά μας θα είναι {Γη, παιδί}.
Οι δυνάμεις που ασκούνται στο παιδί είναι η $\vec{n}$ και η $\vec{F}_g$. Το $W_n = 0$ γιατί η $\vec{n}$ είναι κάθετη σε οποιαδήποτε μικρή μετατόπιση dx επάνω στην τσουλήθρα. Η μόνη άλλη δύναμη είναι αυτή του βάρους, $\vec{F}_g$, η οποία είναι συντηρητική! Άρα έχουμε ένα απομονωμένο, διμελές σύστημα που παράγει έργο μόνο η $\vec{F}_g$.



Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**

Θεωρούμε ότι στη θέση Β, $U_{g_B} = 0$.

Ισχύει η ΑΔΜΕ στη διαδρομή $A \to B$.

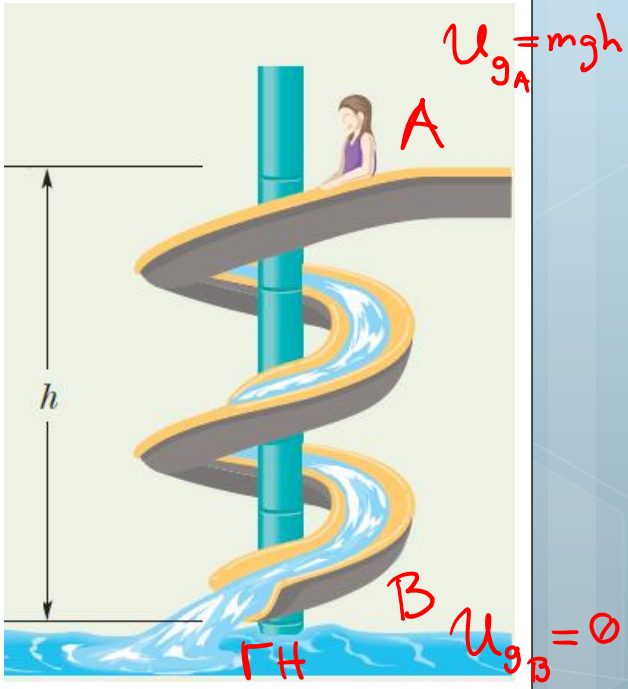
$$\Delta E_{MHX}^{A \to B} = 0$$

$$\Delta K_{A \to B} + \Delta U_{g_{A \to B}} = 0$$

$$K_B - K_A + U_{g_B} - U_{g_A} = 0$$

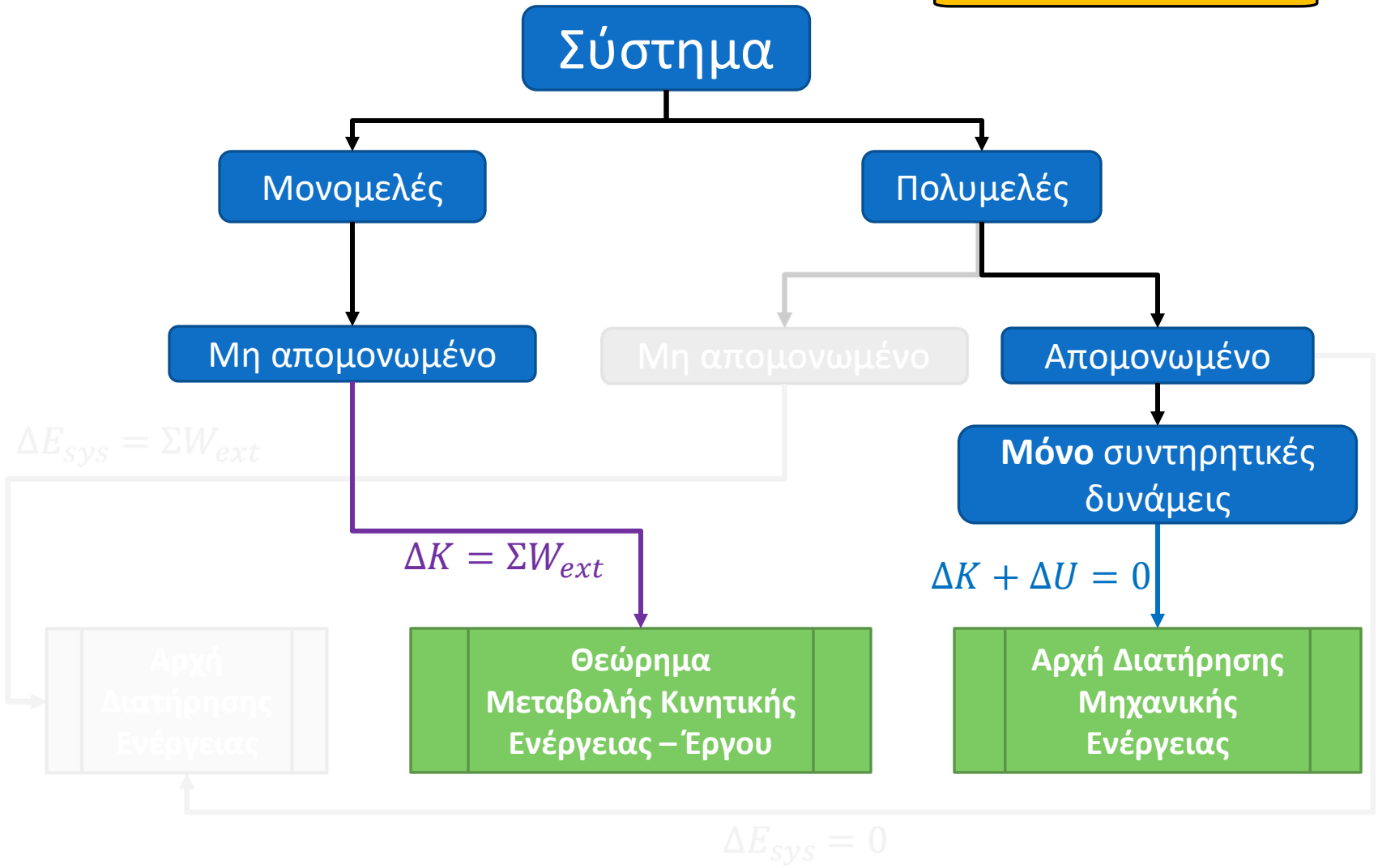
$$\frac{1}{2} m u_B^2 - 0 + 0 - mgh = 0$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} u_B^2 = \cancel{m} g h \Rightarrow u_B^2 = 2gh \Rightarrow u_B = \sqrt{2gh}.$$



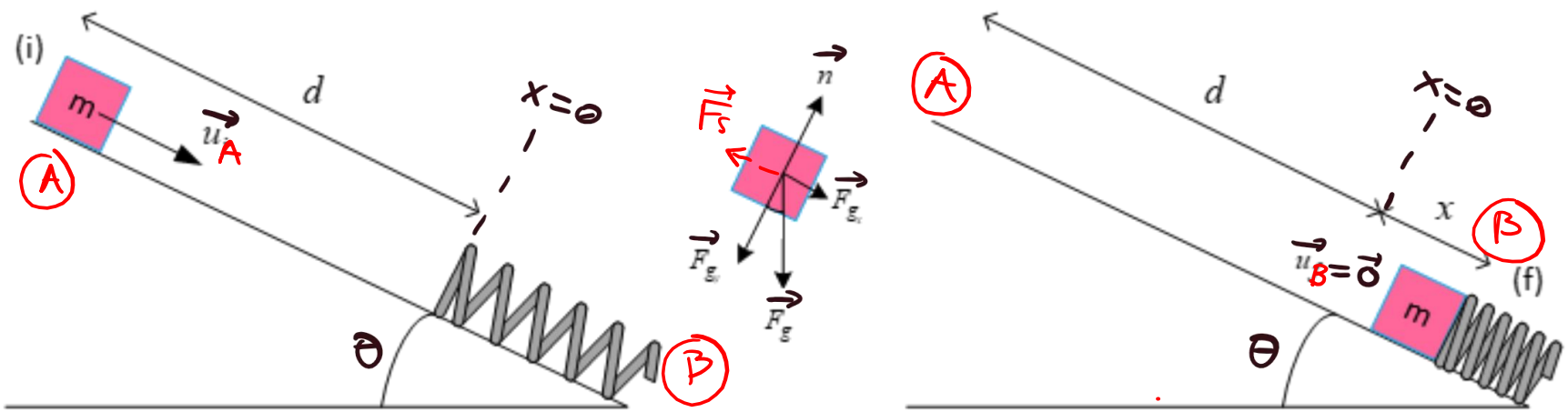
Ενέργεια Συστήματος

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων

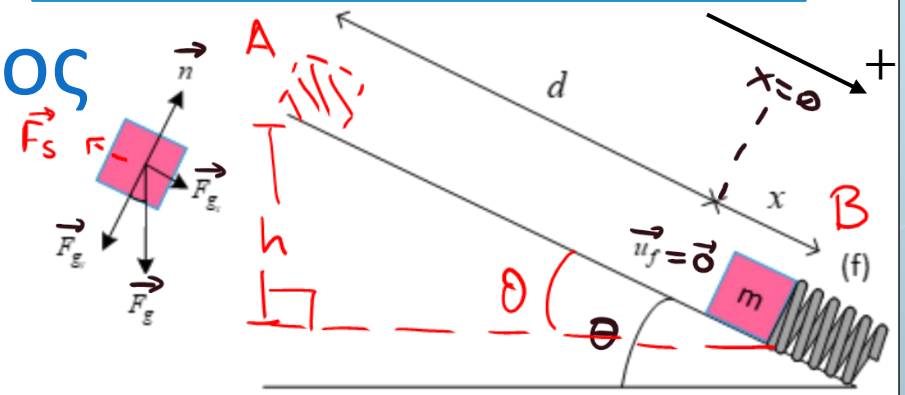


Ενέργεια Συστήματος

- **<u>Παράδειγμα:</u>**
- Λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ έχει ελατήριο σταθεράς k στερεωμένο στο κάτω μέρος του. Ένα κουτί μάζας m τοποθετείται πάνω στο κεκλιμένο σε απόσταση d από το ελατήριο. Από τη θέση αυτή, το κουτί βάλλεται προς το ελατήριο με ταχύτητα u_0. Πόσο έχει συμπιεστεί το ελατήριο όταν το κουτί φτάνει στιγμιαία σε ηρεμία?



Ενέργεια Συστήματος



- **Παράδειγμα – Λύση:**

Θεωρούμε ως σύστημα το

{σώμα, Γη, ελατήριο}

πολυμελές και ανοικτό. Οι μόνες δυνάμεις να παράγουν έργο στο σύστημα είναι οι $\vec{F}_g$ και η $\vec{F}_s$, οι οποίες είναι συντηρητικές!

Στη διαδρομή $A \rightarrow B$:

$$\Delta E_{MHX}^{A\rightarrow B} = 0$$

$$\Delta K_{A-B} + \Delta U_{g_{A\rightarrow B}} + \Delta U_{s_{A\rightarrow B}} = 0$$

$$K_B - K_A + U_{g_B} - U_{g_A} + U_{s_B} - U_{s_A} = 0$$

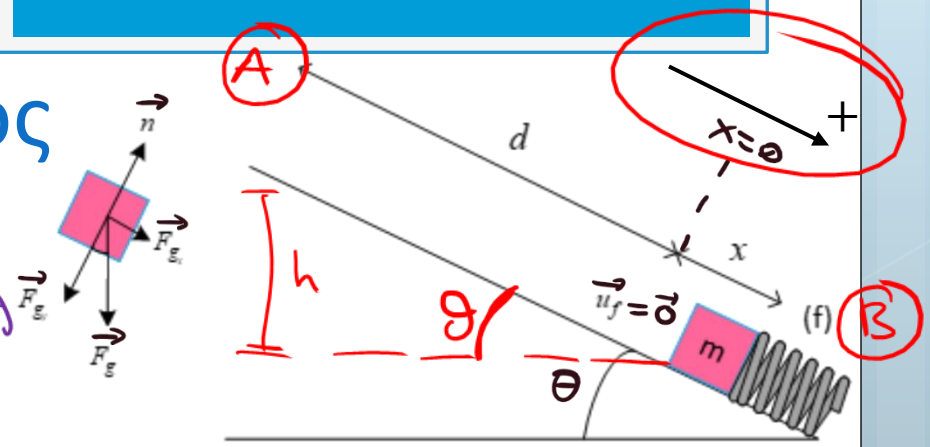
$$0 - \frac{1}{2}mu_A^2 + 0 - mgh + \frac{1}{2}kx^2 - 0 = 0$$

$$\frac{1}{2}kx^2 - mgh - \frac{1}{2}mu_A^2 = 0$$

$$\sin\theta = \frac{h}{d+x}$$

Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Άρα

$h = (d+x)\sin\theta$

$$\frac{1}{2}kx^2 - mgh - \frac{1}{2}mu_A^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}kx^2 - mg(d+x)\sin\theta - \frac{1}{2}mu_A^2 = 0$$

Άρα

$$x_{1,2} = \frac{mg\sin\theta \pm \sqrt{(mg\sin\theta)^2 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot k\left(\frac{1}{2}mu_A^2 + mg\sin\theta\, d\right)}}{2\cdot\frac{1}{2}k}$$

Κρατάμε τη θετική ρίζα γιατί η θετική λύση "δείχνει" προς τη θετική φορά της κίνησης (προς τη βάση του κεκλιμένου).

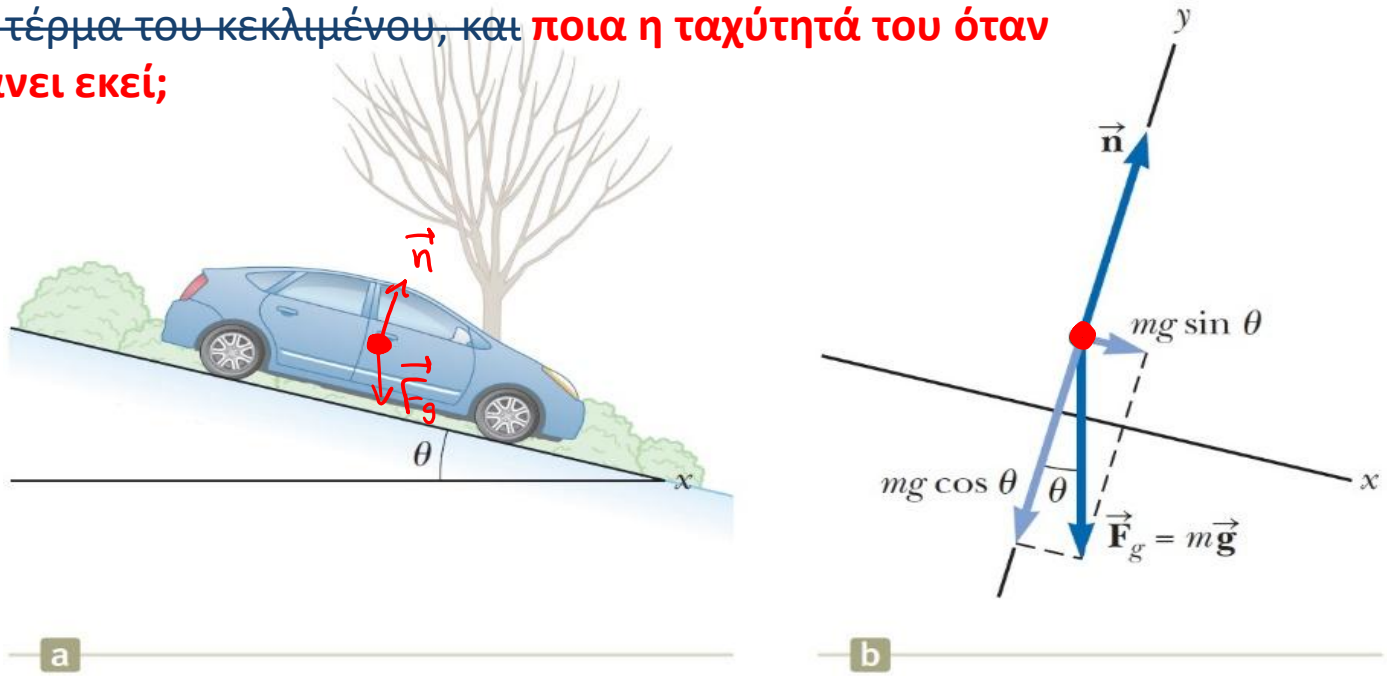
Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα:**

Αυτοκίνητο μάζας m κινείται χωρίς τριβές προς τη βάση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ. **Με ποια μοντέλα μπορείτε να περιγράψετε την κίνησή του?**

~~Α) Βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου.~~

Β) **Αν το αυτοκίνητο αφεθεί από την κορυφή του κεκλιμένου, που απέχει απόσταση d από το τέρμα του κεκλιμένου**~~, πόσο χρόνο χρειάζεται για να φτάσει στο τέρμα του κεκλιμένου, και~~ **ποια η ταχύτητά του όταν φτάνει εκεί;**

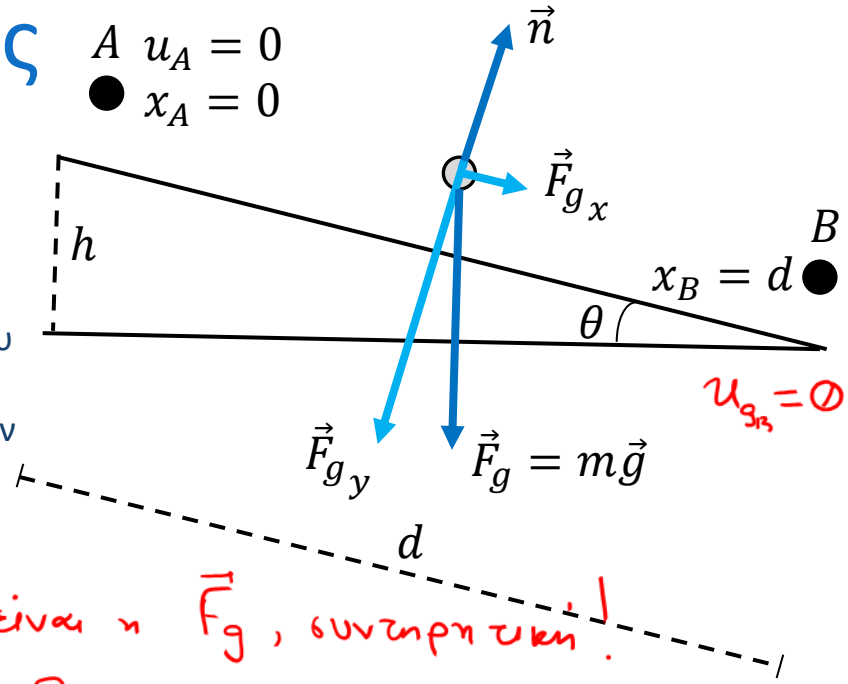


Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**

  Αυτοκίνητο μάζας m κινείται χωρίς τριβές σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ.

  Β) Αν το αυτοκίνητο αφεθεί από την κορυφή του κεκλιμένου, που απέχει απόσταση d από το τέρμα του κεκλιμένου, ποια η ταχύτητά του όταν φτάνει εκεί;



Θεωρούμε το σύστημα {Γη, σώμα}

Η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι η $\vec{F}_g$, συντηρητική!

Ισχύει η ΑΔΜΕ στη διαδρομή Α→Β:

$$\Delta E_{MHX}^{A\to B} = 0$$

$$\Delta K_{A\to B} + \Delta U_{gA\to B} = 0$$

$$K_B - K_A + U_{g_B} - U_{g_A} = 0$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 - 0 + 0 - mgh = 0 \quad (2)$$

$$\sin\theta = \frac{h}{d}$$

$$\Downarrow$$

$$h = d\sin\theta \quad (1)$$

Η (2) $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$$u_B = \sqrt{2gd\sin\theta}$$

Ενέργεια Συστήματος

- Δύναμη **βάρους** → **συντηρητική** δύναμη →**βαρυτική δυναμική** ενέργεια
- Δύναμη **ελατηρίου** → **συντηρητική** δύναμη → **ελαστική δυναμική** ενέργεια

(peek into the future ☺)

- **Ηλεκτρική** δύναμη → **συντηρητική** δύναμη → **ηλεκτρική δυναμική** ενέργεια
  - ...που σχετίζεται με το ηλεκτρικό **δυναμικό**
- Παρατηρούμε κάποιο μοτίβο...
- Μια **συντηρητική** δύναμη σχετίζεται με τη **μεταβολή μιας δυναμικής ενέργειας**!

Ενέργεια Συστήματος

- Έστω ένα **πολυμελές** σύστημα που αλλάζει από μια διάταξη των μελών του σε μια άλλη λόγω έργου <u>μιας</u> ***εσωτερικής συντηρητικής δύναμης***, $W_{F,int}$
  - …χωρίς ενεργειακή επίδραση άλλων δυνάμεων (**απομονωμένο** σύστημα)

- Ένα **σώμα** από τα μέλη του **κινείται** από μια θέση i (αρχική) σε μια θέση f (τελική)
- **Μεταβλήθηκε** (έστω αυξήθηκε) η **κινητική του ενέργεια**
- Πρέπει **ισόποσα** να **μεταβληθεί «αντίστροφα»** (μειωθεί) **η δυναμική του ενέργεια**
  - …λόγω Α.Δ.Μ.Ε! $\Delta K + \Delta U = 0$

$$W_{F,int} = \Delta K = -\Delta U$$

Ενέργεια Συστήματος

- Το έργο $W_{F,int}$ που παράγεται από μια ***εσωτερική συντηρητική δύναμη σε ένα άλλο σώμα που είναι μέλος του απομονωμένου συστήματος*** ισούται με την αρνητική μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος

  - Π.χ. έργο **βάρους** κατά την ανύψωση βιβλίου στο σύστημα {Γη, βιβλίο}

$$W_{F_g} = -\Delta U_g$$

  - Π.χ. έργο **δύναμης του ελατηρίου** κατά τη μετατόπιση του από τη θέση ισορροπίας στο σύστημα {ελατήριο, σώμα}

$$W_s = -\Delta U_s$$

Ενέργεια Συστήματος

- Έστω ότι αυτή η ***εσωτερική συντηρητική δύναμη*** $\vec{F}_{int}$ προκαλεί **αλλαγή της διάταξης/σύνθεσης/διαμόρφωσης** του συστήματος λόγω της **κίνησης** ενός από τα σώματα επάνω **στο $x'x$ άξονα**
  - **Έστω ότι η δύναμη ασκείται υπό γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα**
    - Τα ίδια ακριβώς θα ισχύουν και για δύναμη υπό γωνία με τον άξονα $y'y$ ή τον $z'z$, αλλά χάριν απλότητας ας κρατήσουμε μόνο τον $x'x$

- Το έργο της (σταθερής) δύναμης αυτής θα είναι (ορισμός έργου):

2 slides πριν

$$W_{F,int} = \vec{F}_{int} \cdot \Delta\vec{x} = F_{int}\Delta x \cos\theta = F_{x,int}\Delta x \doteq -\Delta U$$

Ενέργεια Συστήματος

Για ευκολία, παραλείπουμε το δείκτη *int* για τη δύναμη αλλά συνεχίζουμε να εννοούμε την εσωτερική συντηρητική δύναμη του συστήματος

- Αν $\boldsymbol{\Delta x} \rightarrow \boldsymbol{dx}$, μπορούμε να πούμε ότι $\boldsymbol{\Delta U} \rightarrow \boldsymbol{dU}$

$$-dU = F_x dx \Rightarrow \boxed{F_x = -\frac{dU}{dx}}$$

- Έτσι

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow U(x) = -\int F_x dx + U_i$$

- Η συνάρτηση $U(x)$ λέγεται **συνάρτηση δυναμικής ενέργειας**
- Η θέση x όπου $F_x = 0$ λέγεται **θέση ισορροπίας του συστήματος**
- Προφανώς ισχύει και

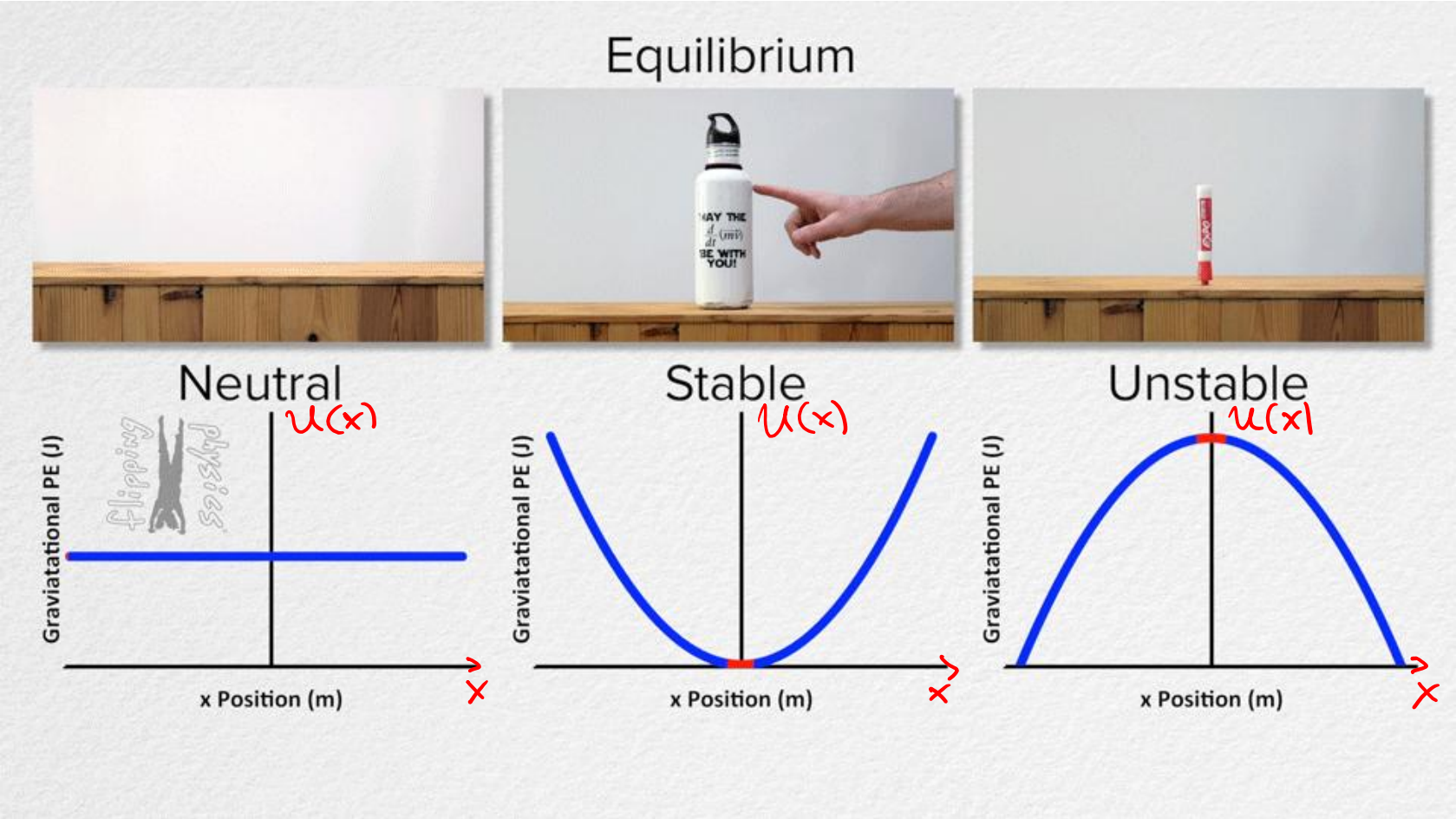
$$F_y = -\frac{dU}{dy}, \qquad F_z = -\frac{dU}{dz}$$

Ενέργεια Συστήματος

- **Ευσταθής ισορροπία (stable equilibrium)**
  - Ένα σύστημα λέγεται ευσταθούς ισορροπίας όταν οποιαδήποτε μεταβολή μακριά από τη θέση ισορροπίας του έχει ως συνέπεια την έγερση μιας δύναμης που επαναφέρει το σύστημα στη θέση ισορροπίας του
    - Παραδείγματα: σύστημα σώματος-ελατηρίου, σύστημα μπίλιας-κυρτού μπώλ-Γης
- **Ασταθής ισορροπία (unstable equilibrium)**
  - Ένα σύστημα λέγεται ασταθούς ισορροπίας όταν οποιαδήποτε μεταβολή μακριά από τη θέση ισορροπίας του έχει ως συνέπεια την έγερση μιας δύναμης που απομακρύνει περισσότερο το σύστημα από τη θέση ισορροπίας του
    - Παραδείγματα: σύστημα μολυβιού-Γης που ισορροπεί στη μύτη του επάνω σε μια επιφάνεια, σύστημα μπάλας-Γης στην κορυφή ενός λόφου
- **Ουδέτερη ισορροπία (neutral equilibrium)**
  - Ένα σύστημα λέγεται ουδέτερης ισορροπίας αν η θέση ισορροπίας του δεν εξαρτάται από μετατοπίσεις από την αρχική του θέση, δηλ. όταν παραμένει στη νέα του θέση μετά από κάποια μετατόπιση χωρίς να επιστρέφει πίσω στην αρχική του θέση
    - Παράδειγμα: σύστημα μπάλας-οριζόντιου εδάφους, σύστημα βιβλίου πλευρικά τοποθετημένου-οριζόντιου εδάφους

Ενέργεια Συστήματος

Συστήματα {σώμα, Γη}



Ενέργεια Συστήματος

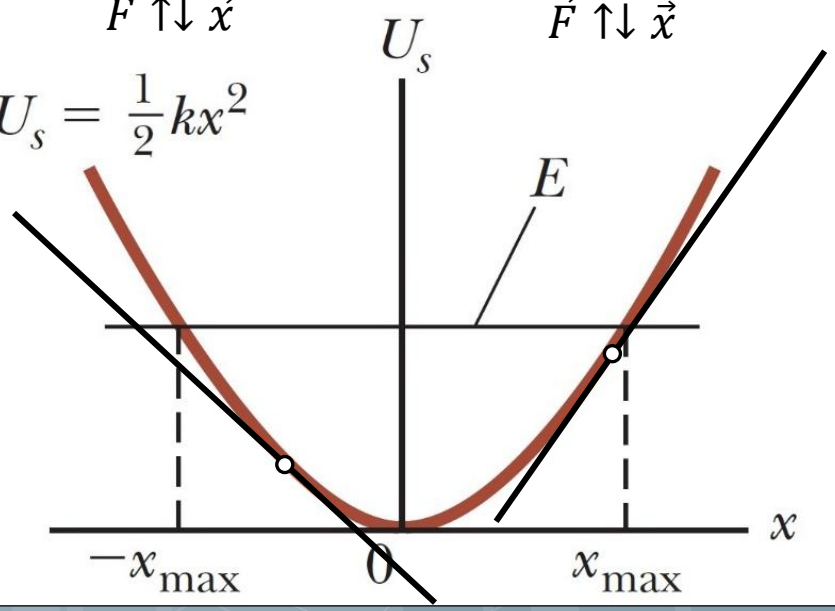
$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

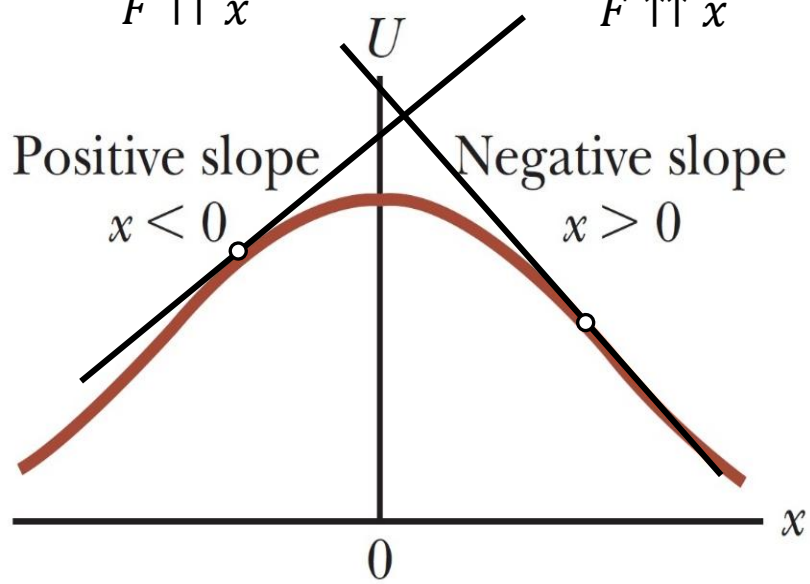
- Η κλίση $\frac{dU}{dx}$ μας πληροφορεί για την ευστάθεια ή αστάθεια ενός συστήματος
- **Παραδείγματα:**

$\frac{dU}{dx} < 0 \Rightarrow F_x > 0$ $\quad$ $\frac{dU}{dx} > 0 \Rightarrow F_x < 0$ $\quad$ $\frac{dU}{dx} > 0 \Rightarrow F_x < 0$ $\quad$ $\frac{dU}{dx} < 0 \Rightarrow F_x > 0$

$\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{x}$ $\quad$ $\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{x}$ $\quad$ $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{x}$ $\quad$ $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{x}$

$U_s = \frac{1}{2}kx^2$





Ενέργεια Συστήματος

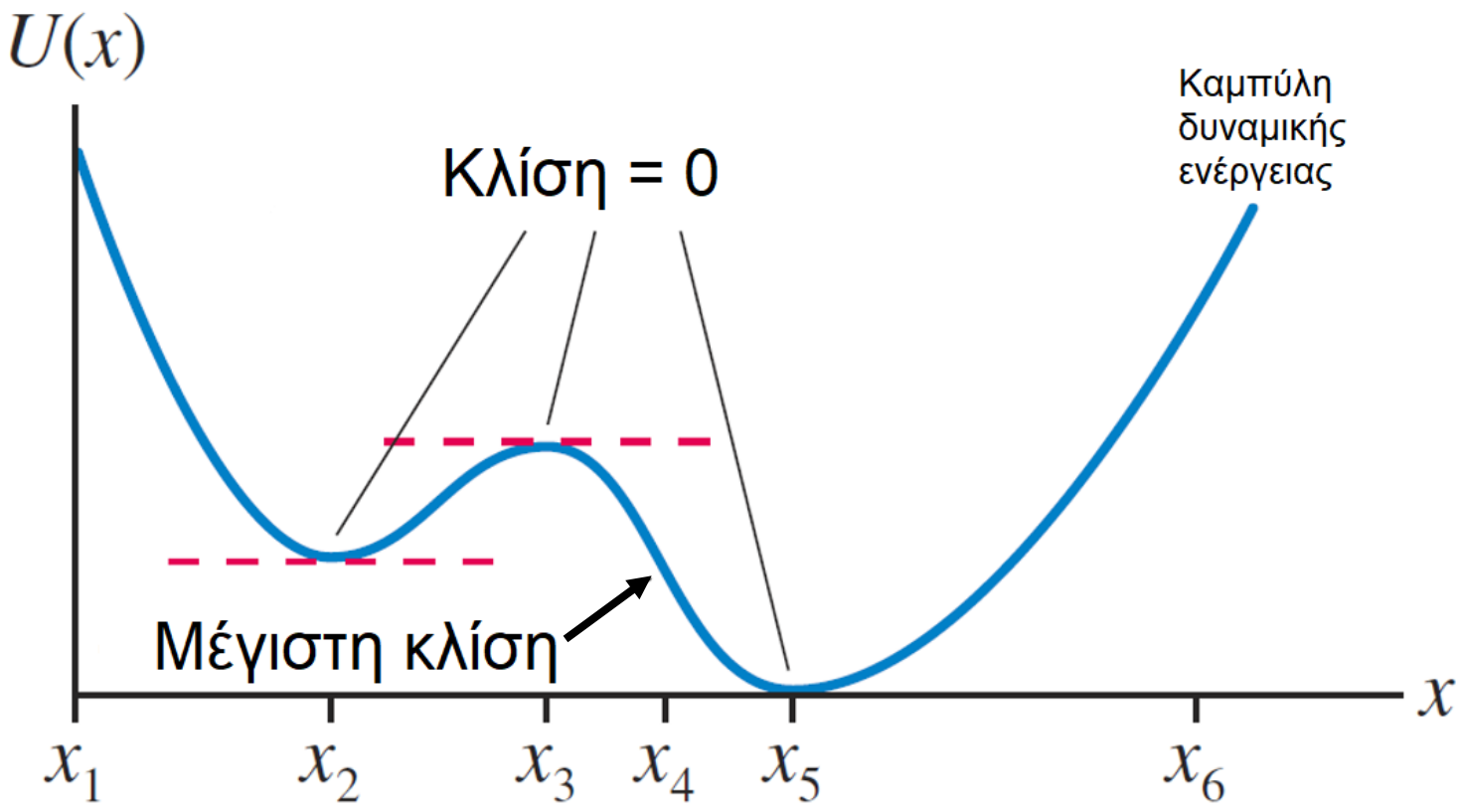
$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Όταν $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{x}$: η **δύναμη** που εγείρεται είναι **ομόρροπη** με τα **μετατόπιση**
  - Το σύστημα **μετατοπίζεται περαιτέρω μακριά** από τη θέση ισορροπίας του!
    - **Αστάθεια**!

- Όταν $\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{x}$: η **δύναμη** που εγείρεται είναι **αντίρροπη** με τα **μετατόπιση**
  - Το σύστημα **επιστρέφει** στη θέση ισορροπίας του!
    - **Ευστάθεια**!

Ενέργεια Συστήματος

- Ένα πραγματικό σύστημα μπορεί να έχει **περιοχές ευσταθούς, ασταθούς, και ουδέτερης** ισορροπίας



Διατήρηση της Ενέργειας

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων

Σύστημα

- Μονομελές
  - Μη απομονωμένο → $\Delta K = \Sigma W_{ext}$ → **Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου**
- Πολυμελές
  - Μη απομονωμένο
  - Απομονωμένο → **Μόνο** συντηρητικές δυνάμεις → $\Delta K + \Delta U = 0$ → **Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας**

Διατήρηση της Ενέργειας

- Γνωρίσαμε δυο ενεργειακά θεωρήματα
  - ΘΜΚΕΕ
  - ΑΔΜΕ
  - **Υπάρχει άλλο?**
- Διαφορετικές υποθέσεις για καθένα από αυτά
- Οι υποθέσεις σχετίζονταν με το **σύστημα** και τις **δυνάμεις** που **παράγουν έργο** στο σύστημα
  - Μονομελές ή πολυμελές
  - Εσωτερικές ή εξωτερικές, συντηρητικές ή μη
- Ας κάνουμε μια τελευταία, **ομαδική θεώρηση** σε αυτά

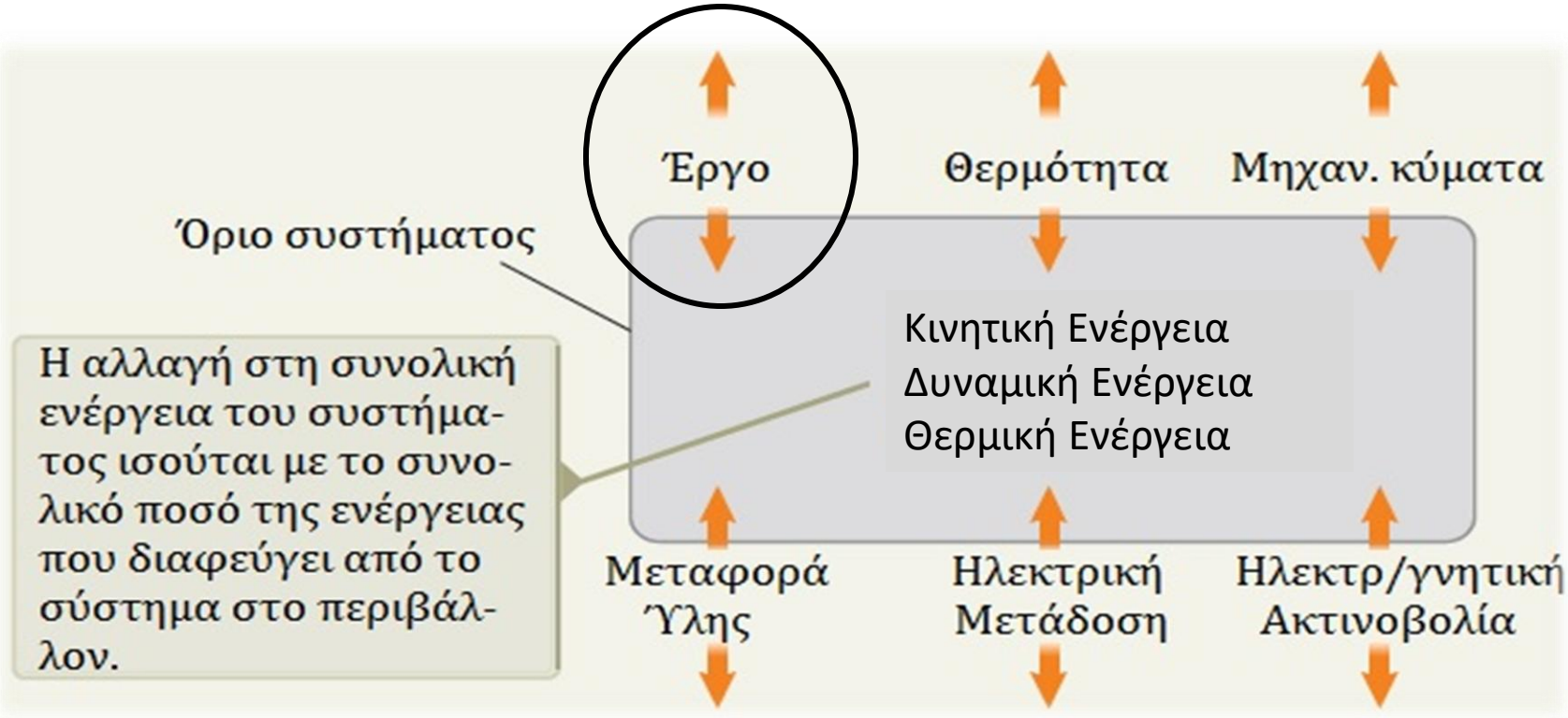
Διατήρηση της Ενέργειας

- **Μη απομονωμένα συστήματα**
  - Σύστημα βρίσκεται σε «επικοινωνία» με το περιβάλλον του μέσω μεταφοράς ενέργειας
    - Υπάρχει ενεργειακό «πάρε-δώσε» με το περιβάλλον
  - **Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου**
    - **Εξωτερική** δύναμη αλλάζει **μέσω έργου** την κινητική ενέργεια ενός **μονομελούς** συστήματος ({σώματος})
  - Έχουμε δει μόνο το **έργο** ως μέσο μεταφοράς ενέργειας σε ένα σύστημα
  - Υπάρχουν κι άλλοι τρόποι… (ακολουθεί μικρή παρένθεση)

Διατήρηση της Ενέργειας

Διατήρηση της Ενέργειας

Μη απομονωμένα συστήματα



(κλείνει η παρένθεση)

Διατήρηση της Ενέργειας

- **Μη απομονωμένα συστήματα**
- **Αν η συνολική ενέργεια σε ένα μη απομονωμένο σύστημα αλλάζει, αυτό συμβαίνει ΜΟΝΟΝ αν ενέργεια έχει μεταφερθεί από ή προς το περιβάλλον του συστήματος, με κάποιον μηχανισμό**

- **Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας – ΑΔΕ**

$$\Delta E_{system} = \sum T = \sum W_{ext}$$

όπου E_{system} είναι η συνολική ενέργεια του συστήματος (κάθε μορφής), και T είναι το ποσό της ενέργειας που μεταφέρεται εκτός ή εντός συστήματος με κάποιο μηχανισμό **(εμείς θα μείνουμε μόνο στο μηχανισμό μέσω έργου)**

Διατήρηση της Ενέργειας

Ενεργειακή αλληλεπίδραση με το περιβάλλον!!

- **Μη απομονωμένα συστήματα**
- Αν το σύστημα είναι **πολυμελές**, με παρουσία όλων των δυνατών ενεργειών, τότε

$$\Delta E_{system} \quad \boxed{\Delta \mathbf{K} + \Delta \mathbf{U}_{g,s} + \Delta \mathbf{E}_{th}} = \boxed{\sum W_{ext.forces}}$$

ΑΔΕ

- Αν το σύστημα είναι **πολυμελές** με παρουσία μόνο κινητικών και δυναμικών ενεργειών, τότε

$$\Delta E_{system} \quad \boxed{\Delta \mathbf{K} + \Delta \mathbf{U}_{g,s}} = \boxed{\sum W_{ext.forces}}$$

ΑΔΕ

- Αν το σύστημα είναι πολυμελές με παρουσία μόνο θερμικής και κινητικής ενέργειας, τότε

$$\Delta E_{system} \quad \boxed{\Delta \mathbf{K} + \Delta \mathbf{E}_{th}} = \boxed{\sum W_{ext.forces}}$$

ΑΔΕ

- Αν το σύστημα είναι **μονομελές**, τότε

$$\Delta E_{system} \quad \boxed{\Delta \mathbf{K}} = \boxed{\sum W_{ext.forces}}$$

ΘΜΚΕΕ

Διατήρηση της Ενέργειας

- **Απομονωμένα (κλειστά) συστήματα**
- **Δεν** υπάρχει «εισαγωγή/διαφυγή» ενέργειας με κανένα τρόπο
- Η **συνολική ενέργεια** του συστήματος είναι **σταθερή**
- **Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας – ΑΔΕ**

$$\boxed{\Delta E_{system} = 0}$$

Διατήρηση της Ενέργειας

Μηδενική ενεργειακή αλληλεπίδραση με το περιβάλλον!!

- **Απομονωμένα (κλειστά) συστήματα**
  - Αναγκαστικά **πολυμελές** σύστημα
  - **Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας – ΑΔΕ**

$$\Delta E_{system} \quad \boxed{\Delta \mathbf{K} + \Delta \mathbf{U}_{g,s} + \Delta E_{th}} = \boxed{0}$$

ΑΔΕ

αν παράγουν έργο **συντηρητικές και μη** δυνάμεις, δηλ**. σε κάθε περίπτωση!**

  - **Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας – ΑΔΜΕ**

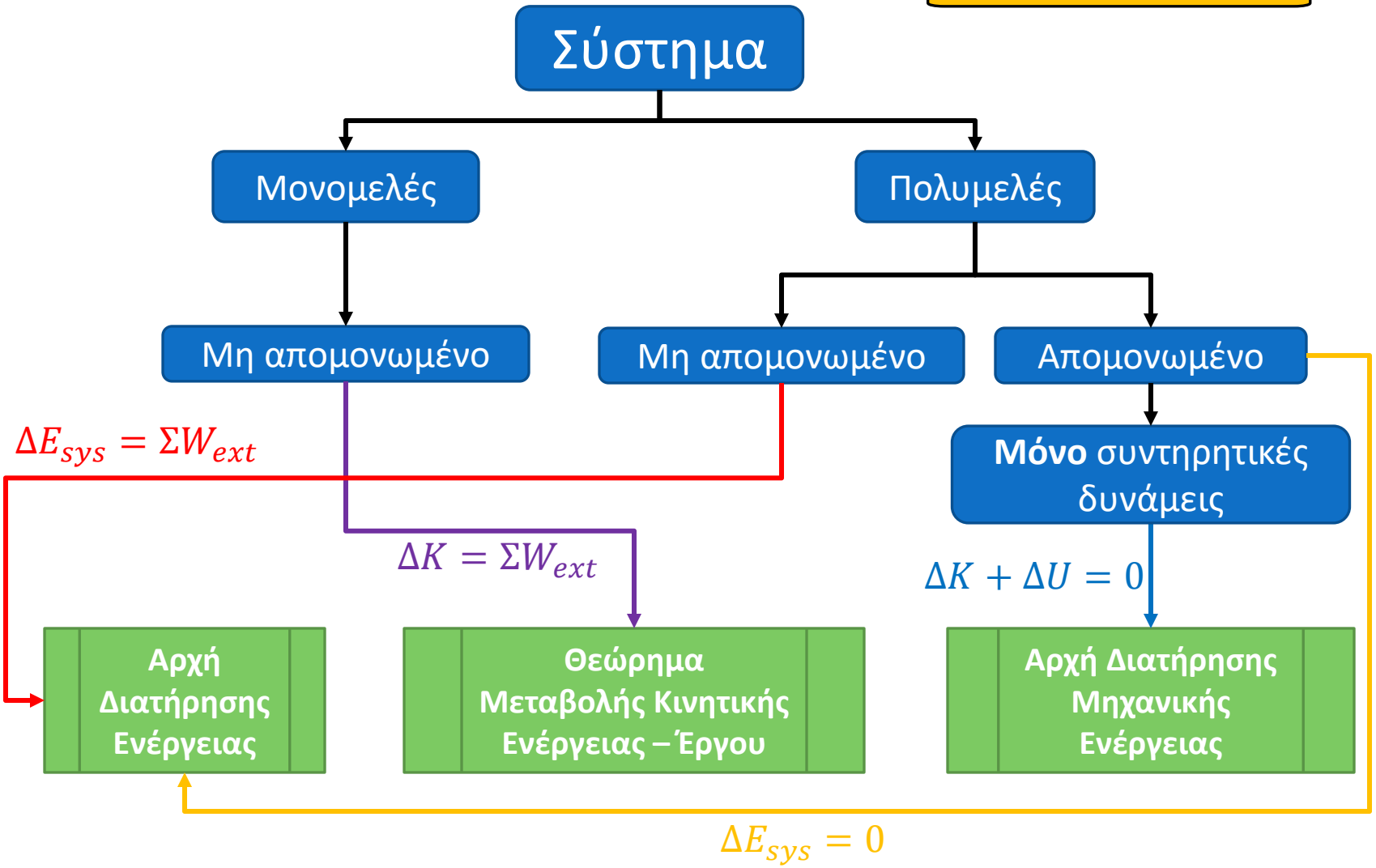
$$\Delta E_{system} \quad \boxed{\Delta E_{mech} = \Delta \mathbf{K} + \Delta \mathbf{U}_{g,s}} = \boxed{0}$$

ΑΔΜΕ

μόνον όταν παράγουν έργο **αποκλειστικά συντηρητικές** δυνάμεις!

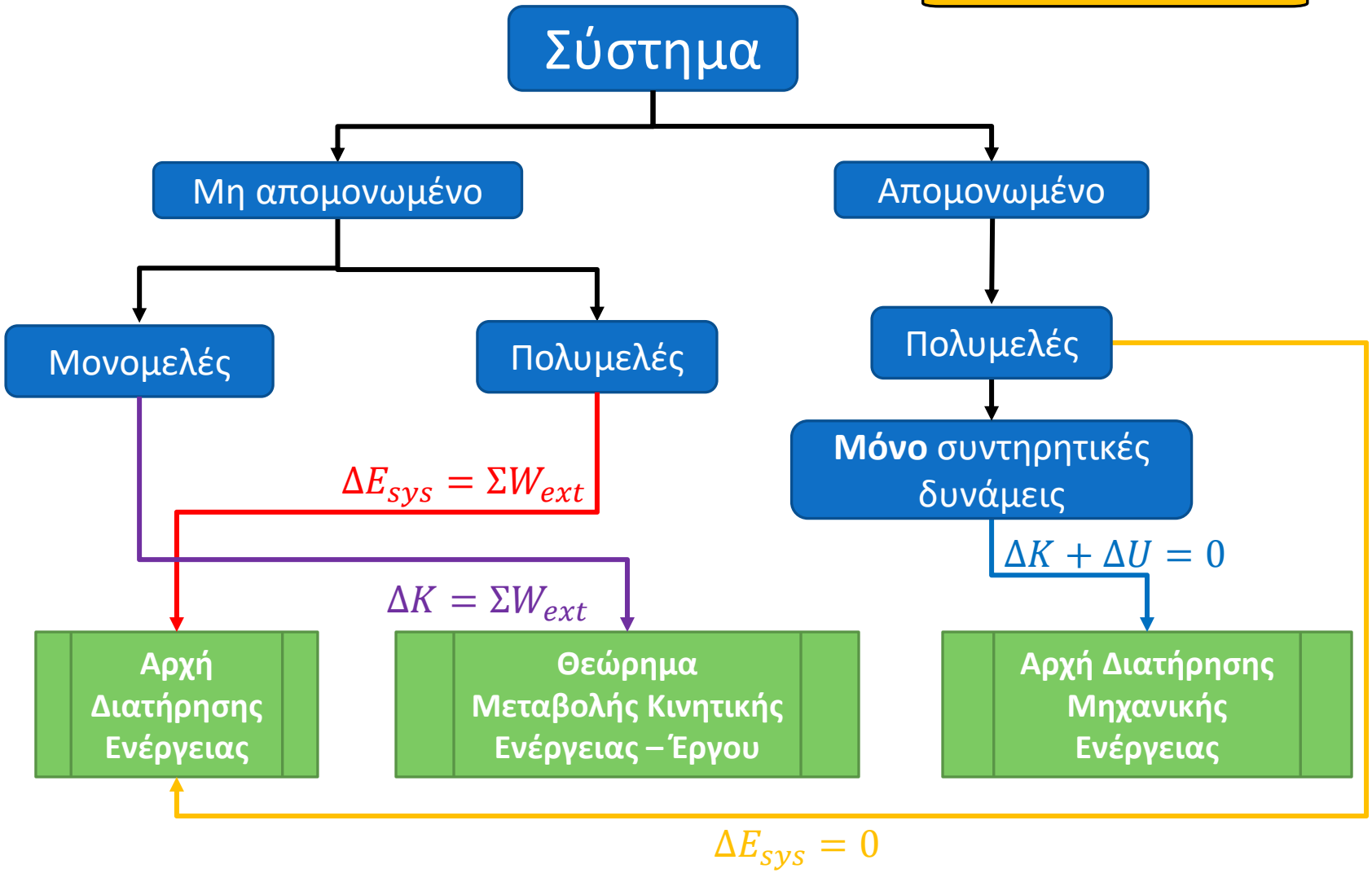
Διατήρηση της Ενέργειας

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων



Διατήρηση της Ενέργειας

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων

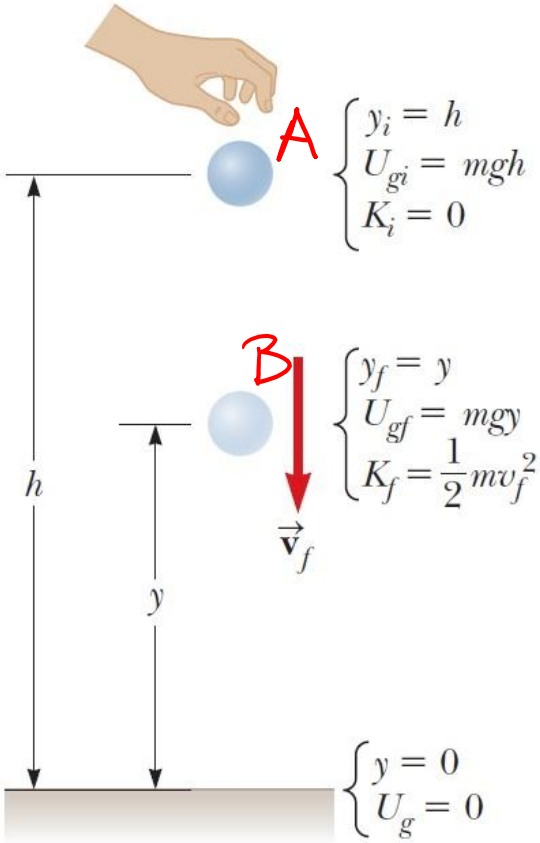


Διατήρηση της Ενέργειας

- Προσέξτε!!
- Παρ’ όλο που το προηγούμενο slide εμφανίζει τα διάφορα ενεργειακά θεωρήματα ως διαφορετικά μεταξύ τους, στην πραγματικότητα όλα είναι «παιδιά» της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας (Α.Δ.Ε)!
- Η Α.Δ.Ε είναι **καθολικό** ενεργειακό θεώρημα, ισχύει από το μικρόκοσμο (άτομα) μέχρι το μακρόκοσμο (πλανητικά συστήματα)
- Το Θ.Μ.Κ.Ε-Ε και η Α.Δ.Μ.Ε είναι «**υποπεριπτώσεις»** της Α.Δ.Ε

Διατήρηση της Ενέργειας

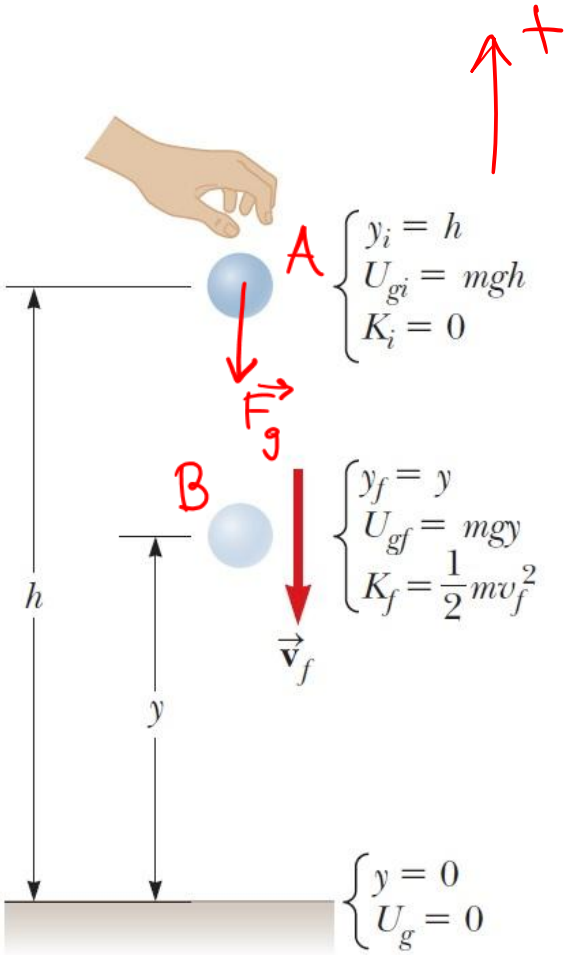
- **<u>Παράδειγμα:</u>**
  - Μπάλα μάζας m αφήνεται από ύψος h.
    - Α) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας σε ύψος y. **Το σύστημα θα είναι η μπάλα και η Γη**.
    - Β) Υπολογίστε ξανά το Α) ερώτημα θεωρώντας ως **σύστημα την μπάλα, δηλ. θεωρήστε ότι η Γη ανήκει στο περιβάλλον του συστήματος!**



Διατήρηση της Ενέργειας

- **<u>Παράδειγμα – Λύση:</u>**
  - Μπάλα μάζας m αφήνεται από ύψος h.
    - Α) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας σε ύψος y. Το σύστημα θα είναι η μπάλα και η Γη.

Το σύστημα μας {Γη, μπάλα} είναι πολυμελές και απομονωμένο. Η μόνη δύναμη που παράγει έργο στο σύστημα είναι η δύναμη του βάρους, εσωτερική και συντηρητική. Άρα ισχύει η ΑΔΜΕ στη διαδρομή $A \rightarrow B$.



Διατήρηση της Ενέργειας

- **<u>Παράδειγμα – Λύση:</u>**
  - Μπάλα μάζας m αφήνεται από ύψος h.
    - Α) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας σε ύψος y. Το σύστημα θα είναι η μπάλα και η Γη.

$$\Delta E_{\mu\eta\chi}^{A\to B} = 0$$

$$E_{\mu\eta\chi}^{A} = E_{\mu\eta\chi}^{B}$$

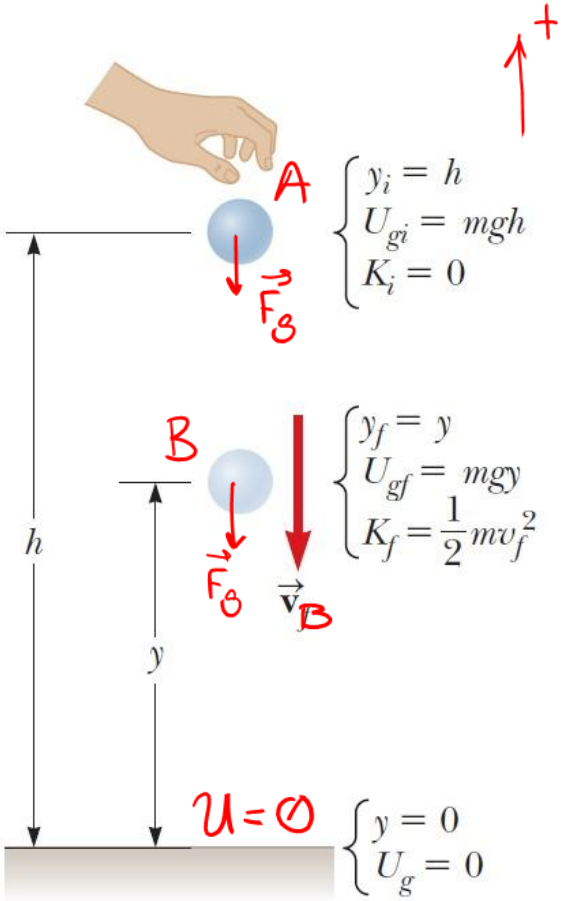
$$K_A + U_{g_A} = K_B + U_{g_B}$$

$$0 + \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}u_B^2 + \cancel{m}gy$$

$$u_B^2 = 2g(h-y)$$

$$u_B = \sqrt{2g(h-y)}$$

Άρα $\vec{u}_B = \left(-\sqrt{2g(h-y)}\right)\vec{j}$



Διατήρηση της Ενέργειας

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Μπάλα μάζας m αφήνεται από ύψος h.
    - Β) Υπολογίστε ξανά το Α) ερώτημα θεωρώντας ως σύστημα την μπάλα.

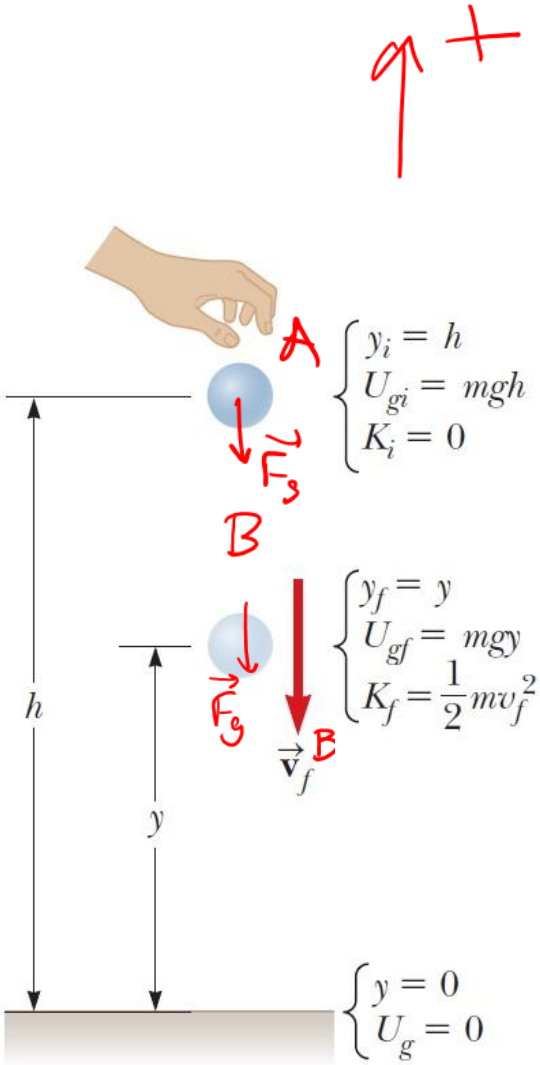
Επιλέγαμε ως σύστημα την μπάλα, μονωμένο και μη απομονωμένο. Ισχύει το ΘΜΚΕΕ στη διαδρομή Α→Β.

$$\Delta K_{A\to B} = \sum W_{ext} = W_{F_g}$$

$$K_B - K_A = W_{F_g}$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 - 0 = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{y}$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 = F_g \Delta y$$



Διατήρηση της Ενέργειας

- **<u>Παράδειγμα – Λύση:</u>**
  - Μπάλα μάζας m αφήνεται από ύψος h.
    - Β) Υπολογίστε ξανά το Α) ερώτημα θεωρώντας ως σύστημα την μπάλα.

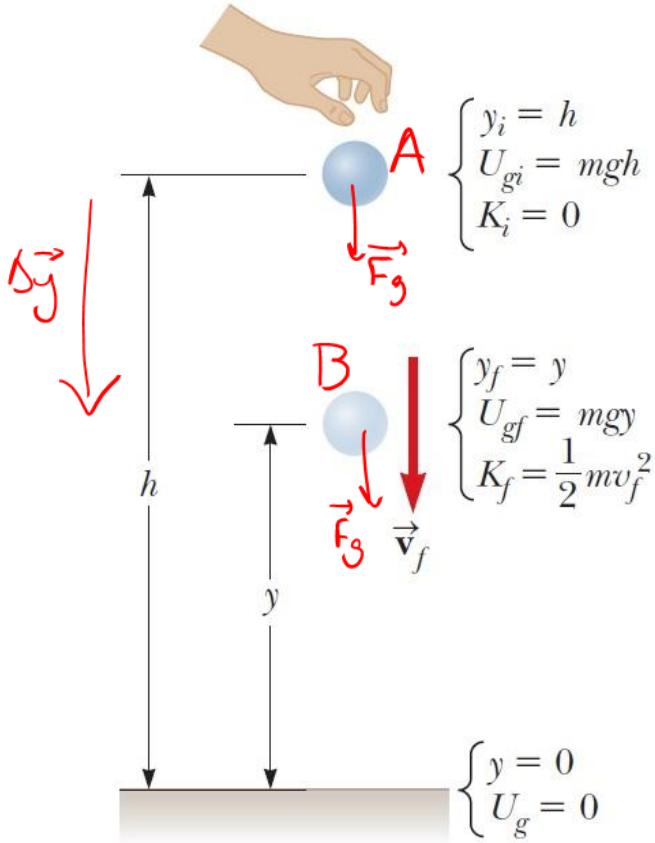
$$\frac{1}{2}\cancel{m}u_B^2 = mg\,\Delta y$$

$$= \cancel{m}g(h-y)$$

$$u_B^2 = 2g(h-y)$$

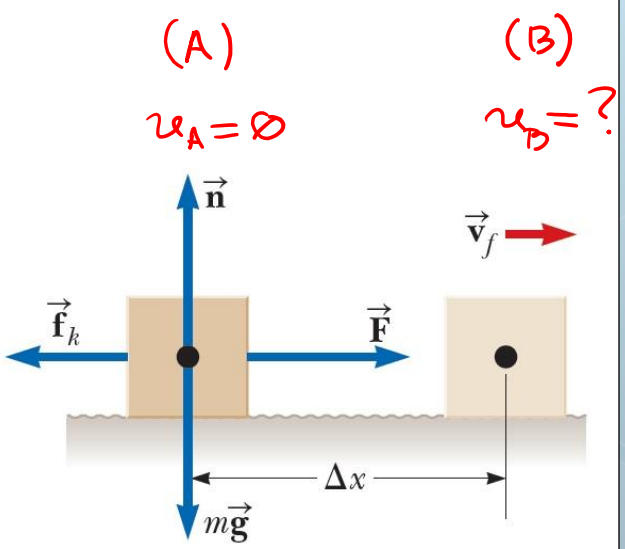
$$u_B = \sqrt{2g(h-y)}$$

Άρα $\vec{u}_B = \left(-\sqrt{2g(h-y)}\right)\vec{j}$



Διατήρηση της Ενέργειας

- **<u>Παράδειγμα</u>:**
  - Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N. Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15

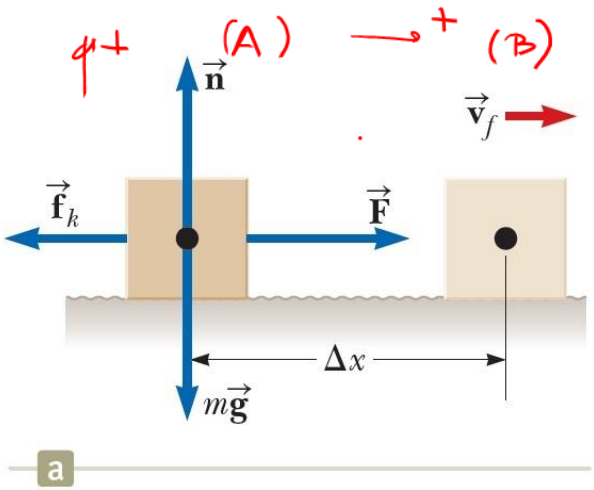


Σύστημα = {σώμα}

Διατήρηση της Ενέργειας

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.

    Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15



Το σύστημα είναι μονωμένο και μη απομονωμένο. Ισχύει το ΘΜΚΕΕ$_{A\to B}$:

$$\Delta K_{A\to B} = \sum W_{ext}$$

$$K_B - K_A = W_{f_k} + \cancel{W_n}^{\,0} + \cancel{W_{F_g}}^{\,0} + W_F$$

$$\frac{1}{2}mu_B^2 - 0 = -f_k \Delta x + F\,\Delta x \quad (1)$$

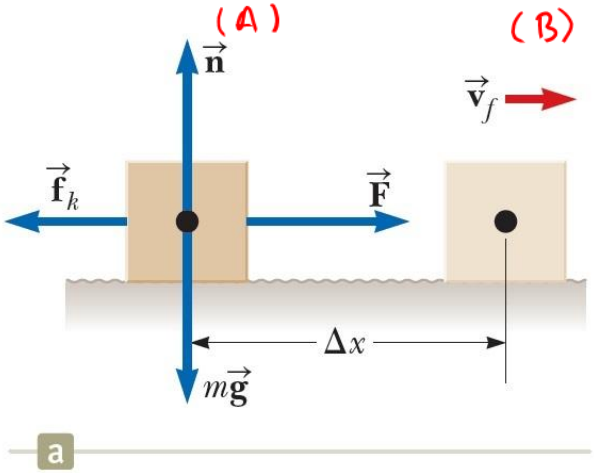
Ξέρω ότι $f_k = \mu_k n$ (2). Το σώμα ισορροπεί στον y'y άξονα

άρα $\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_g + \vec{n} = \vec{0} \Rightarrow mg = n$ (3)

Διατήρηση της Ενέργειας

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.

    Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15



Η (2) $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $f_k = -\mu_k m g$ (4)

Άρα η (1) λόγω της (4) δίνει $\frac{1}{2} m u_B^2 = -\mu_k m g \Delta x + F \cdot \Delta x$,

δηλ

$$u_B^2 = \frac{2F \cdot \Delta x - 2\mu_k m g \Delta x}{m}$$

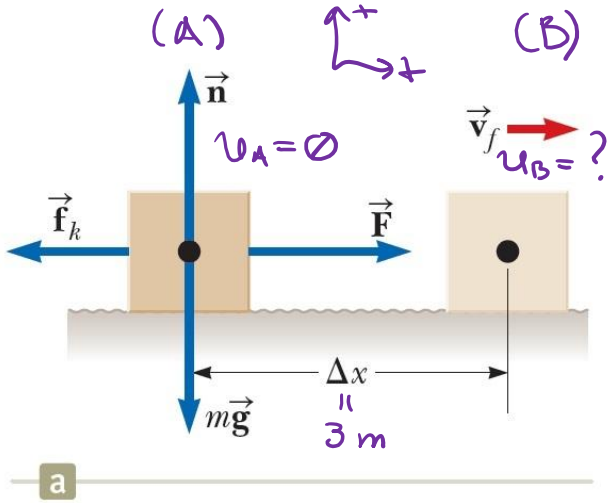
$$u_B = \sqrt{\frac{2F \cdot \Delta x - 2\mu_k m g \Delta x}{m}}$$

Δείτε την επόμενη λύση αν θεωρήσουμε ως σύστημα το **{σώμα, οριζόντια επιφάνεια}**!

Διατήρηση της Ενέργειας

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.

    Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15



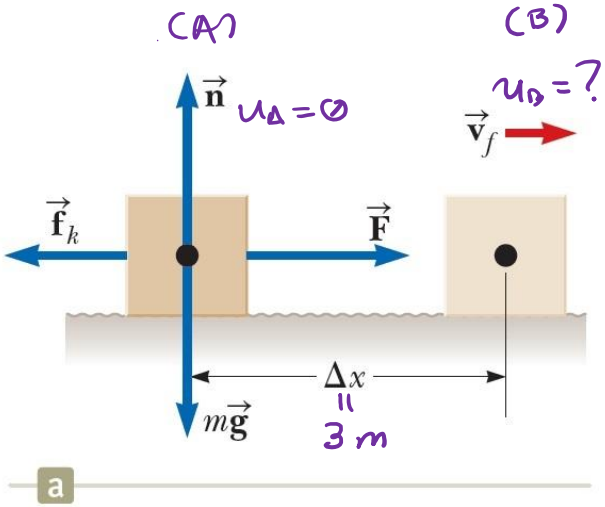
Θεωρούμε ως σύστημα το {σώμα, επίπεδο}. Είναι πολυμελές αλλά όχι απομονωμένο, καθώς "μιλάει" ενεργειακά με την εξωτερική δύναμη $\vec{F}$ (οι δυνάμεις $\vec{n}$, $m\vec{g}$ δεν παράγουν έργο ως κάθετες στη μετατόπιση). Η δύναμη τριβής ολίσθησης $\vec{f}_k$ είναι εσωτερική του συστήματος αλλά <u>έχει</u> συντηρητική. Μπορούμε να εφαρμόσουμε Α.Δ.Ε στη διαδρομή Α→Β:

$$\Delta E_{sys} = \sum W_{ext} = \cancel{W_{\vec{n}}}^{\,0} + \cancel{W_{m\vec{g}}}^{\,0} + W_{\vec{F}} \qquad (\perp \Delta\vec{x})$$

Διατήρηση της Ενέργειας

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.

    Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15



$$\Delta E_{sys} = W_{\vec{F}}$$

$$\Delta K_{A\to B} + \Delta E_{th}^{A\to B} = W_{\vec{F}}$$

$$K_B - K_A + f_k \cdot \Delta x = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x}$$

$$\frac{1}{2} m u_B^2 - 0 + \mu_k n \Delta x = F \cdot \Delta x \cdot \cancel{\cos(0)}^{\,1}$$

$$\frac{1}{2} m u_B^2 = F \cdot \Delta x - \mu_k n \cdot \Delta x \quad (1)$$

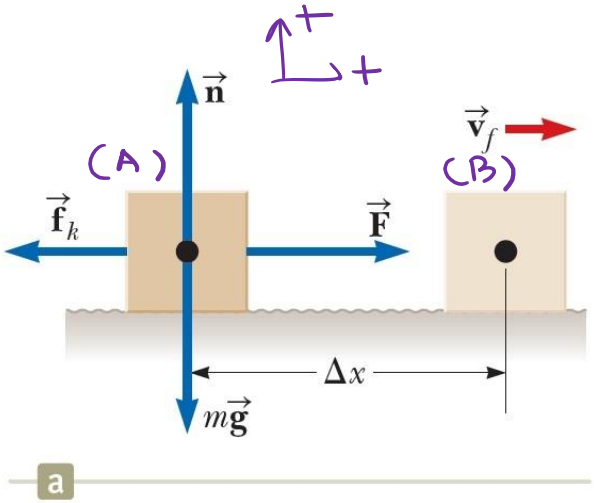
Reminder:

$$\Delta E_{th} = -W_{f_k} = f_k \cdot \Delta x$$

Διατήρηση της Ενέργειας

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένα σώμα μάζας 6 kg σε αρχική ηρεμία κινείται προς τα δεξιά επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια λόγω σταθερής οριζόντιας δύναμης 12 N.

    Βρείτε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό μετατοπιστεί κατά 3 m, εάν η επιφάνεια επαφής έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης 0.15



Όμως λόγω ισορροπίας στον άξονα y'y, ισχύει ο 1ος N. Newton:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{n} + m\vec{g} = \vec{0}$$

Θετική φορά προς τα πάνω, άρα $n - mg = 0 \Leftrightarrow n = mg$ (2)

Η (1) $\overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{2} m u_B^2 = F \cdot \Delta x - \mu_k m g \Delta x \Leftrightarrow$

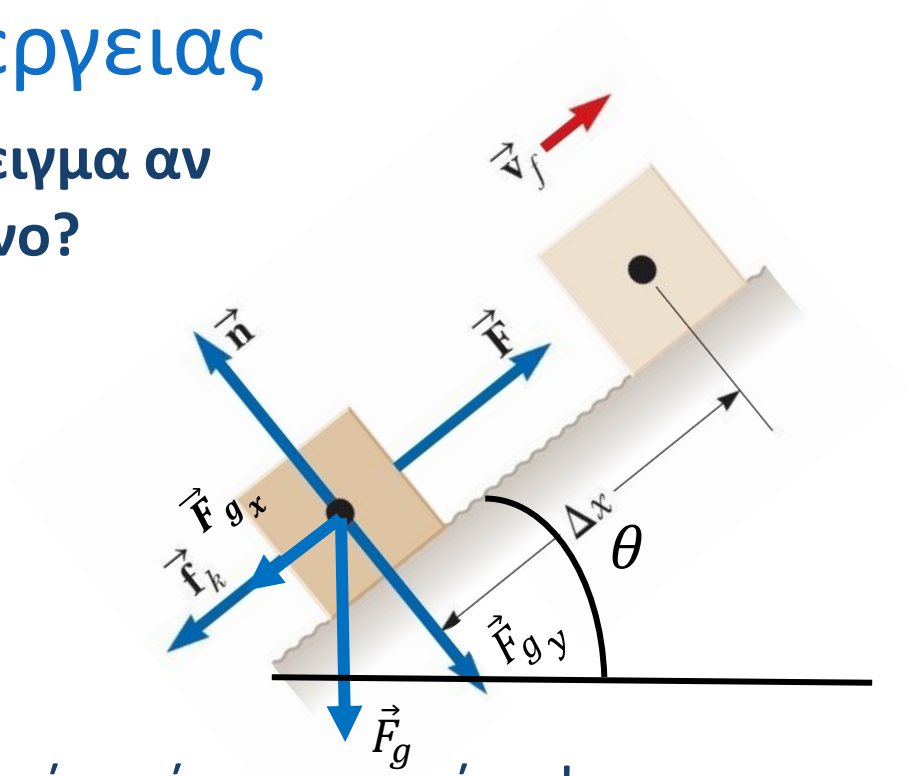
$$\Leftrightarrow u_B^2 = \frac{2F \cdot \Delta x - 2\mu_k m g \Delta x}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_B = \sqrt{\frac{2F \cdot \Delta x - 2\mu_k m g \Delta x}{m}} \simeq 1.8 \frac{m}{s}$$, όπως και πριν.

Διατήρηση της Ενέργειας

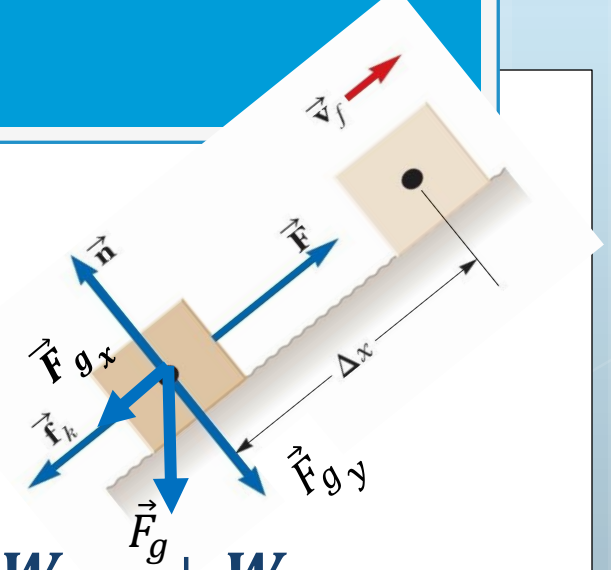
- **Τι θα άλλαζε στο παράδειγμα αν το επίπεδο ήταν κεκλιμένο?**

- Δείτε το διπλανό σχήμα



- Η δύναμη του **βάρους** παράγει έργο στο σώμα!
  - ...και συγκεκριμένα η **x-συνιστώσα του βάρους**
  - **...η y-συνιστώσα του** θα είναι **κάθετη στη μετατόπιση** και το έργο της θα είναι **μηδέν**
- Το σύστημα αξόνων θα στηθεί με τον $x'x$ || κεκλιμένο

Διατήρηση της Ενέργειας



- **Τι θα άλλαζε «ενεργειακά»?**
- **Για το σύστημα {σώμα}, μονομελές και μη απομονωμένο, θα είχαμε**

$$\Delta E_{sys} = \Delta K = \sum W_{ext} = W_F + W_{F_{g_x}} + W_{f_k}$$

- **Για το σύστημα {σώμα, Γη}, πολυμελές και μη απομονωμένο:**

$$\Delta E_{sys} = \Delta K + \Delta U_g = \sum W_{ext} = W_F + W_{f_k}$$

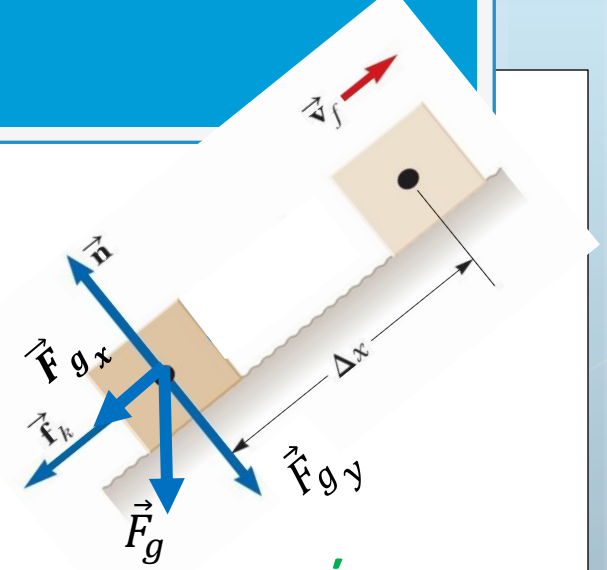
- **Για το σύστημα {σώμα, κεκλιμένο}, πολυμελές και μη απομονωμένο:**

$$\Delta E_{sys} = \Delta K + \Delta E_{th} = \sum W_{ext} = W_F + W_{F_{g_x}}$$

- **Για το σύστημα {σώμα, κεκλιμένο, Γη}, πολυμελές και μη απομονωμένο:**

$$\Delta E_{sys} = \Delta K + \Delta U_g + \Delta E_{th} = \sum W_{ext} = W_F$$

Διατήρηση της Ενέργειας



- Τι θα άλλαζε «ενεργειακά» ***<u>ΧΩΡΙΣ</u>*** παρουσία εξωτερικής δύναμης?

- Για το σύστημα {σώμα}, μονομελές και μη απομονωμένο:

$$\Delta E_{sys} = \Delta K = \sum W_{ext} = W_{F_{g_x}} + W_{f_k}$$

- Για το σύστημα {σώμα, Γη}, πολυμελές και μη απομονωμένο:

$$\Delta E_{sys} = \Delta K + \Delta U_g = \sum W_{ext} = W_{f_k}$$

- Για το σύστημα {σώμα, κεκλιμένο}, πολυμελές και μη απομονωμένο:

$$\Delta E_{sys} = \Delta K + \Delta E_{th} = \sum W_{ext} = W_{F_{g_x}}$$

- Για το σύστημα {σώμα, κεκλιμένο, Γη}, πολυμελές και απομονωμένο:

$$\Delta E_{sys} = \Delta K + \Delta U_g + \Delta E_{th} = 0$$

Διατήρηση της Ενέργειας

- Γνωρίζουμε ότι **παραγωγή έργου = μεταφορά ενέργειας**
  - Ερώτημα: Πόσο **γρήγορα** μεταφέρεται η ενέργεια?
    - Αν θέλετε να αγοράσετε έναν κινητήρα για να κινεί ένα ασανσέρ μάζας 1500 kg για 5 ορόφους, έχει μεγάλη σημασία αν ο κινητήρας το κάνει σε 30 s ή σε 30 min! ☺

- Το «**πόσο γρήγορα**» υποδηλώνει ένα **ρυθμό μεταβολής**
  - Μεταβολή ενέργειας σε χρονικό διάστημα Δt: **μέση ισχύς**

$$P_{avg} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

- Μονάδα μέτρησης: $1\ \mathrm{Watt} = 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$

Διατήρηση της Ενέργειας

- Εναλλακτικά, η ισχύς μπορεί να ιδωθεί ως ο **ρυθμός παραγωγής έργου**

- **Μέση ισχύς σε διάστημα** Δt

$$P_{avg} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{W}{\Delta t}$$

- **Στιγμιαία ισχύς (για έργο σταθερής δύναμης)**

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} P_{avg} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u}$$

Τέλος Ενότητας