



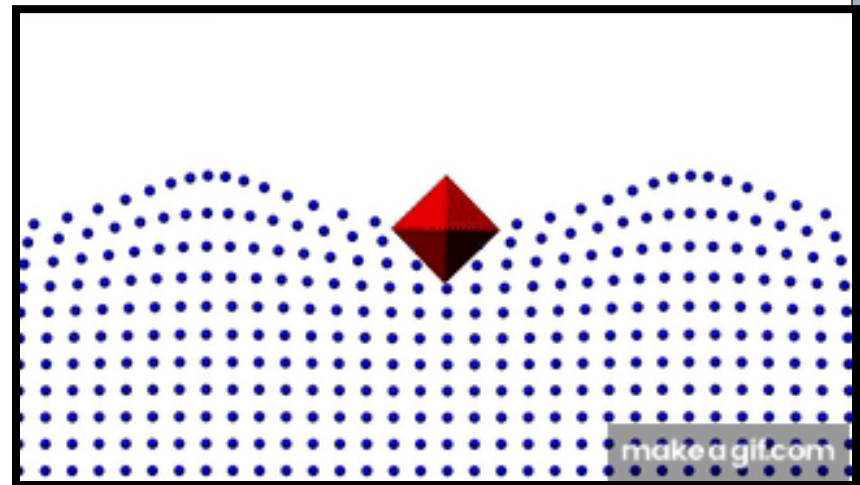
Εικόνα: Ναυαγοσώστες στην Αυστραλία εκπαιδεύονται στην αντιμετώπιση μεγάλων κυμάτων. Τα κύματα που κινούνται στην επιφάνεια του νερού αποτελούν ένα παράδειγμα μηχανικών κυμάτων.

Φυσική για Μηχανικούς

Κύματα

Κύματα

- Ο κόσμος είναι γεμάτος από κύματα!
 - Μηχανικά & Ηλεκτρομαγνητικά
- Στα μηχανικά κύματα, απαιτείται ένα **μέσο διάδοσης**
- Χαρακτηριστικό γνώρισμα μηχανικών κυμάτων
 - Έστω μια σημαδούρα που επιπλέει σε μια λίμνη
 - Αν ρίξουμε κοντά της μια πέτρα, η σημαδούρα θα μετακινηθεί πάνω-κάτω/δεξιά-αριστερά αλλά δε θα μετακινηθεί σε σχέση με το σημείο πτώσης της πέτρας
 - Κυματική κίνηση: μεταφέρεται ενέργεια αλλά όχι ύλη!



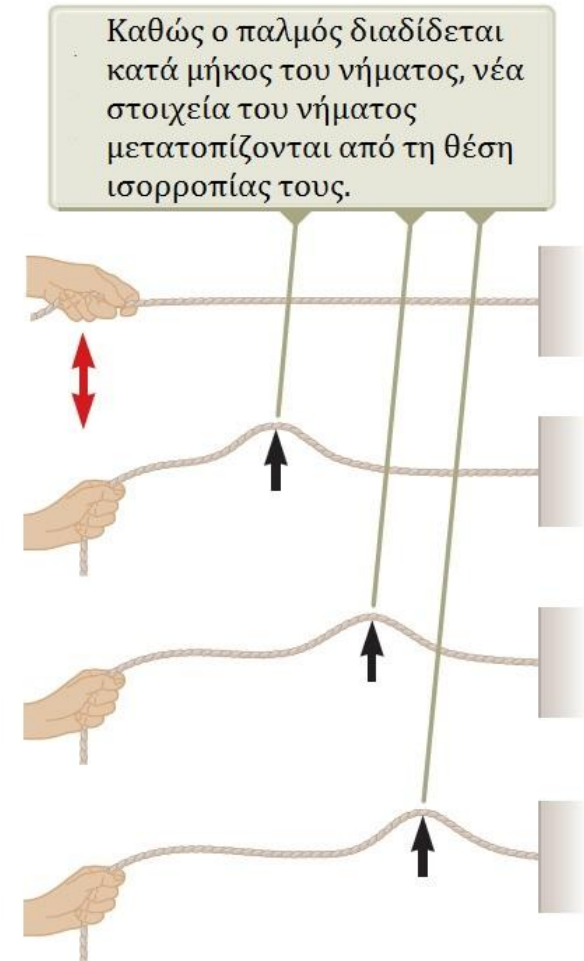
Κύματα

- Όλα τα μηχανικά κύματα προϋποθέτουν

- A) Κάποια πηγή διαταραχής
- B) Ένα μέσο με στοιχεία που μπορούν να διαταραχθούν
- Γ) Κάποιο μηχανισμό με τον οποίο τα στοιχεία του μέσου αλληλεπιδρούν μεταξύ τους

- Κίνηση κύματος

- Παλμός = διαταραχή
- Σχήμα σχεδόν απaráλλαχτο
- Ύψος και ταχύτητα παλμού
 - Ύψος == κατακόρυφη μετατόπιση



Κύματα

Does the medium move from one place to another? No.

What actually moves through the medium?  Energy.

flipping
physics

Κύματα

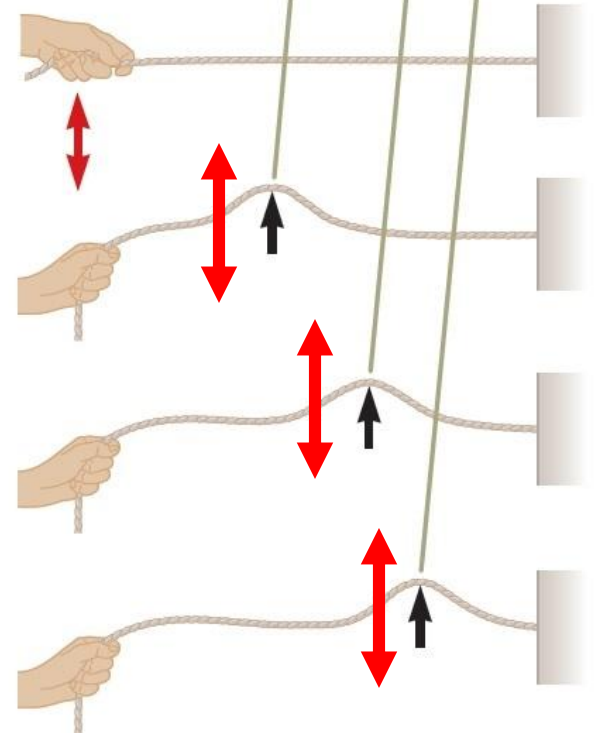
- Προσέξτε την κίνηση των στοιχείων του νήματος
 - Είναι κάθετη προς τη διεύθυνση διάδοσης: **Εγκάρσιο κύμα**
- Προσέξτε την αντίστοιχη του ελατηρίου
 - Είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσης: **Διάμηκες κύμα**

Το χέρι κινείται γρήγορα μπρος-πίσω μια φορά και δημιουργεί έναν διαμήκη παλμό.

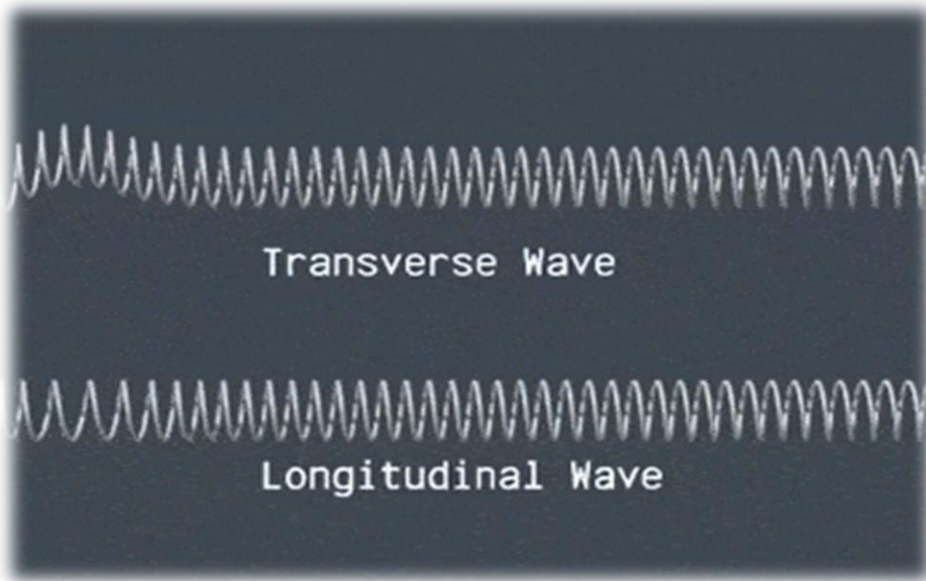
Κατά τη διάδοση του παλμού, οι σπείρες μετατοπίζονται παράλληλα προς τη διεύθυνση διάδοσης.



Καθώς ο παλμός διαδίδεται κατά μήκος του νήματος, νέα στοιχεία του νήματος μετατοπίζονται από τη θέση ισορροπίας τους.



Κύματα



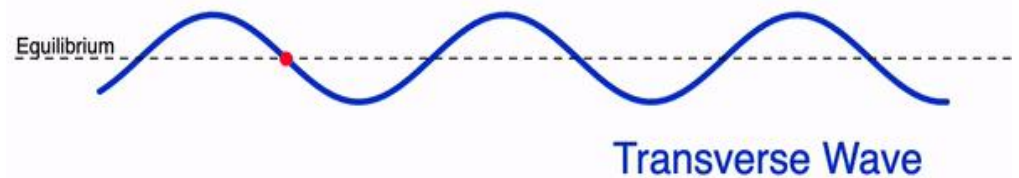
Εγκάρσιο κύμα

Διάμηκες κύμα

Περιοδικό διάμηκες κύμα



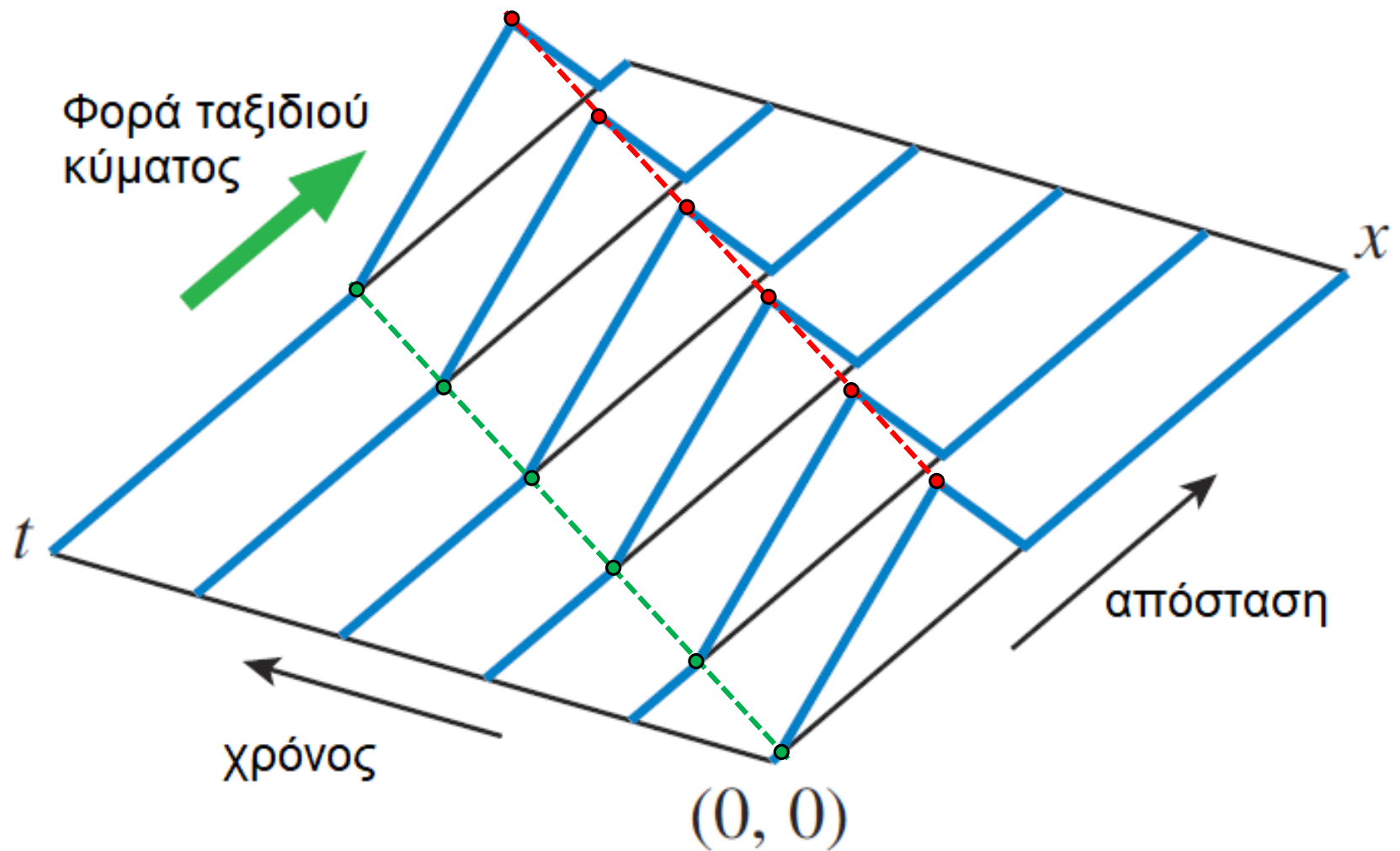
Περιοδικό εγκάρσιο κύμα



Κύματα

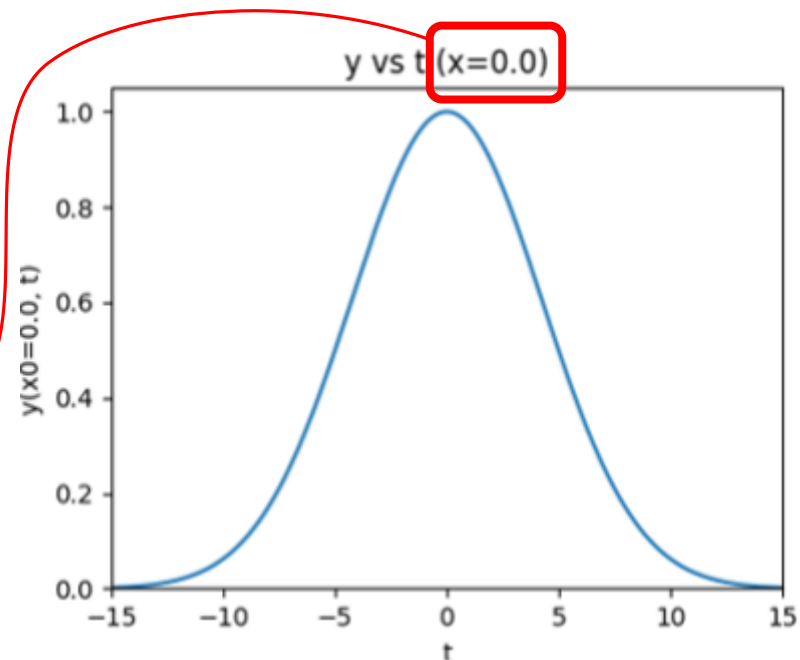
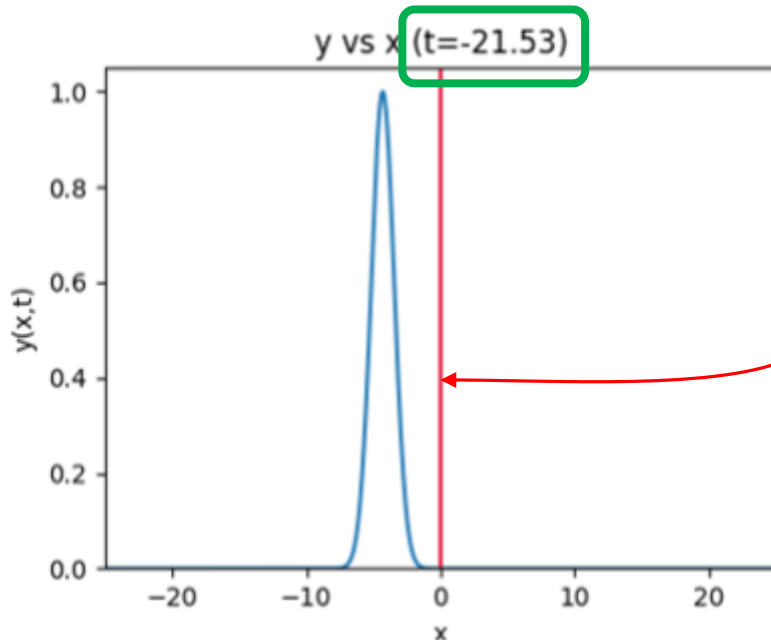
- **Κυματοσυνάρτηση – Συνάρτηση Κύματος $y(x, t)$**
- Χρειαζόμαστε μια συνάρτηση $y(x, t)$ που να περιγράφει το σχήμα του κύματος πάνω π.χ. σε νήμα
 - y : η κατακόρυφη μετατόπιση κάθε στοιχείου του νήματος
 - x : οποιοδήποτε στοιχείο του νήματος
 - t : οποιαδήποτε χρονική στιγμή
- Δύσκολο/άβολο να σχεδιαστεί στο σύνολό της
 - Θα τη βλέπουμε διαχωρίζοντας τις δυο μεταβλητές, σταθεροποιώντας τότε τη μια και τότε την άλλη
- Ας δούμε ένα παράδειγμα αυτής της τριδιάστατης αναπαράστασης πριν συζητήσουμε έναν ευκολότερο τρόπο

Κύματα



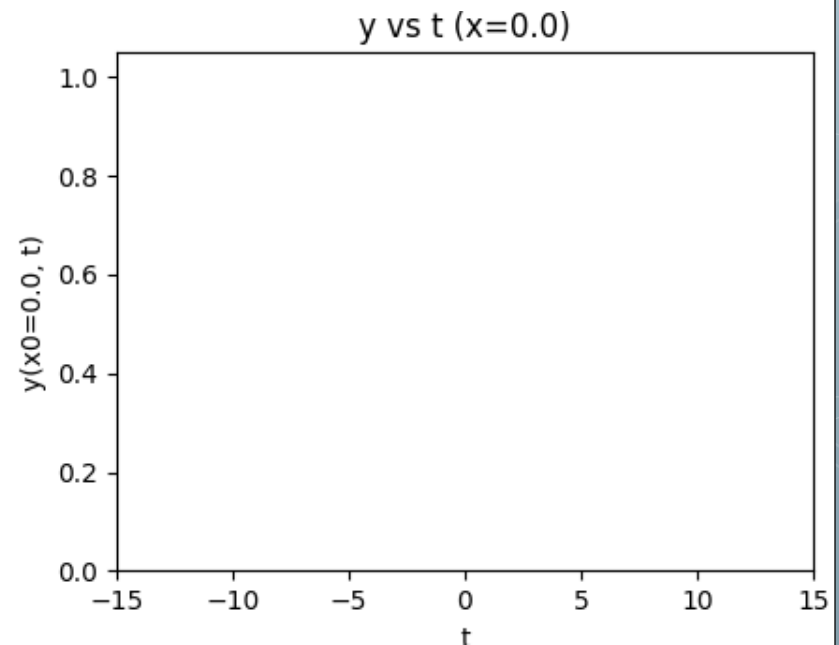
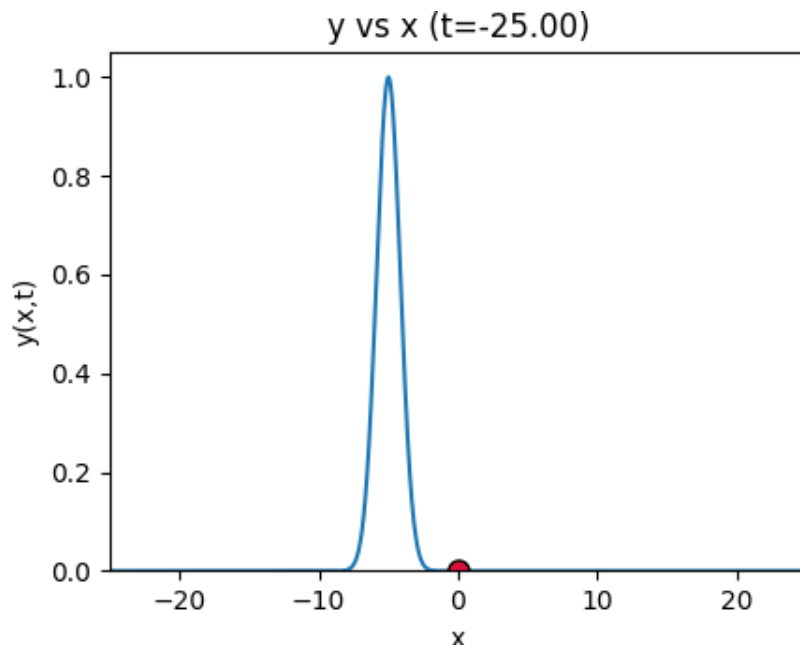
Κύματα

- Κυματοσυνάρτηση – Συνάρτηση Κύματος $y(x, t)$
- Για $t = \text{σταθερό}$, παρατηρούμε μια «φωτογραφία» του όλου κύματος για μια χρονική στιγμή
- Για $x = \text{σταθερό}$, παρατηρούμε την κίνηση ενός στοιχείου του κύματος με την πάροδο του χρόνου



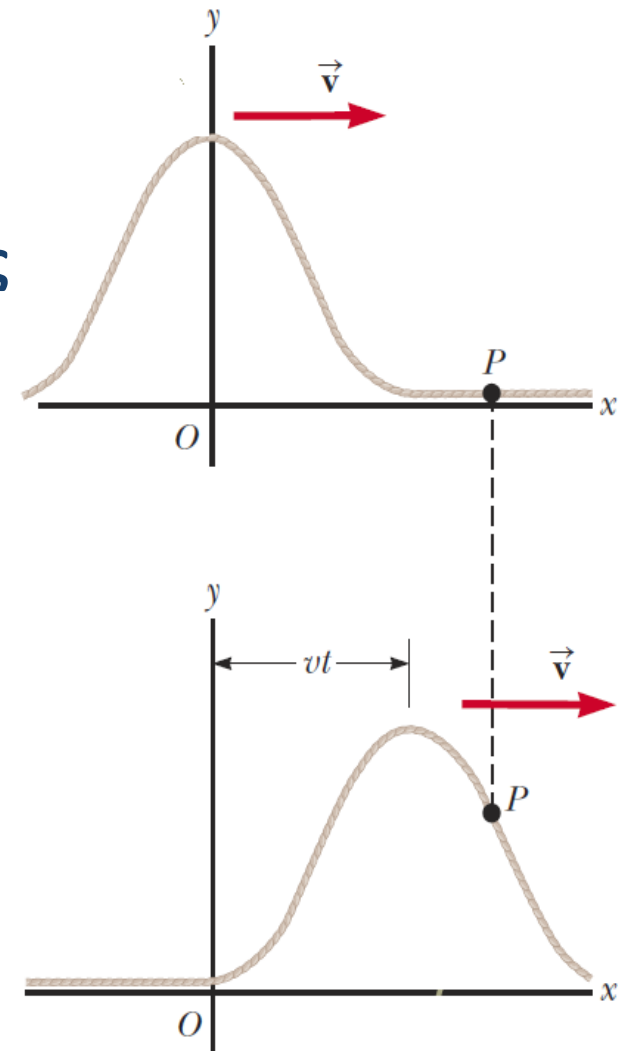
Κύματα

- Κυματοσυνάρτηση – Συνάρτηση Κύματος $y(x, t)$
- Για $t = \text{σταθερό}$, παρατηρούμε μια «**φωτογραφία**» του **όλου** κύματος για μια χρονική στιγμή
- Για $x = \text{σταθερό}$, παρατηρούμε την κίνηση **ενός στοιχείου** του κύματος με την πάροδο του χρόνου



Κύματα

- Κυματοσυνάρτηση – Συνάρτηση
Κύματος $y(x, t)$
- Μετατόπιση y του στοιχείου x ενός
κύματος τη χρονική στιγμή t
 - $y(x, t) = f(x - ut)$ ➡ κίνηση
προς τα δεξιά
 - $y(x, t) = f(x + ut)$ ➡ κίνηση
προς τα αριστερά
 - όπου u η ταχύτητα διάδοσης του
παλμού



Κύματα

- Παράδειγμα:

- Έστω ένας παλμός που κινείται κατά μήκος του άξονα x και περιγράφεται ως

$$y(x, t) = \frac{2}{(x - 3t)^2 + 1}$$

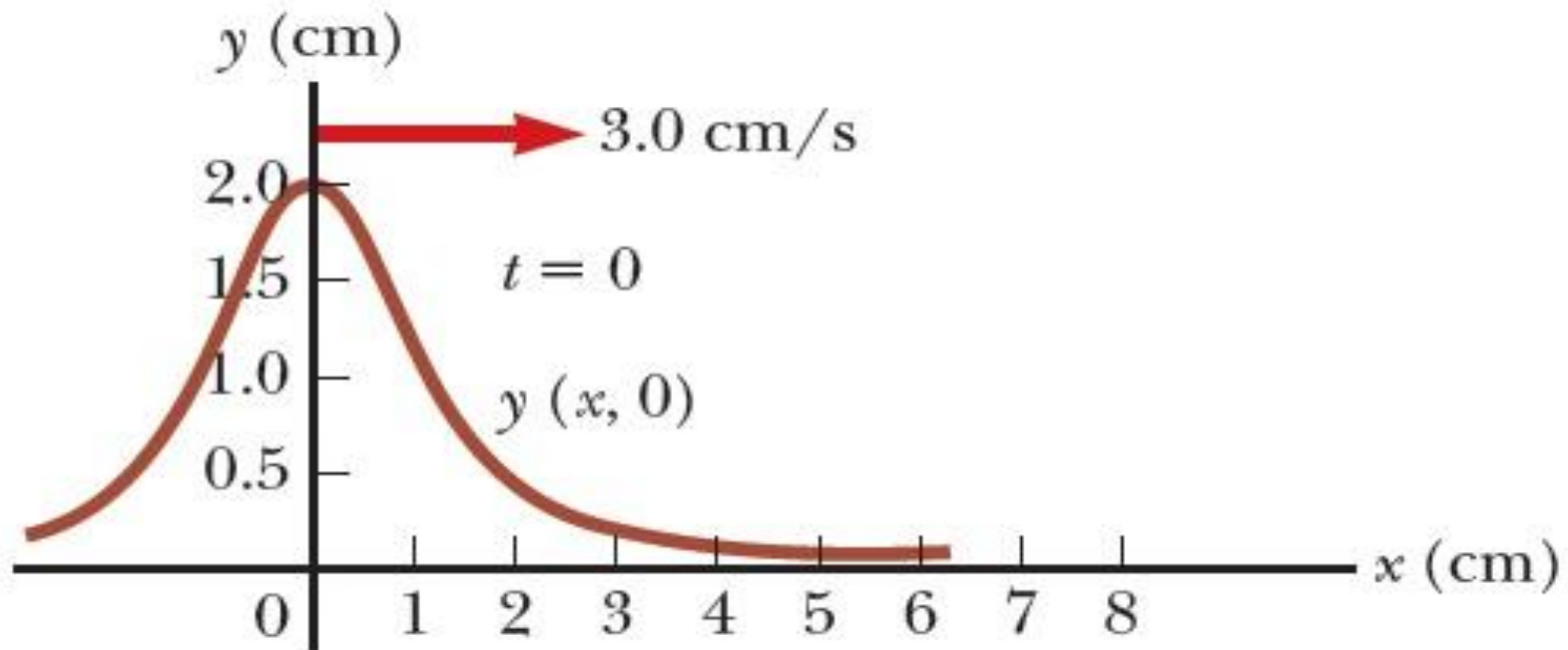
όπου x, y σε εκατοστά και το t σε δευτερόλεπτα.

- Σχεδιάστε τους παλμούς για $t = 0, 1, 2$ s

Κύματα

• Παράδειγμα – Λύση:

$$y(x, 0) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

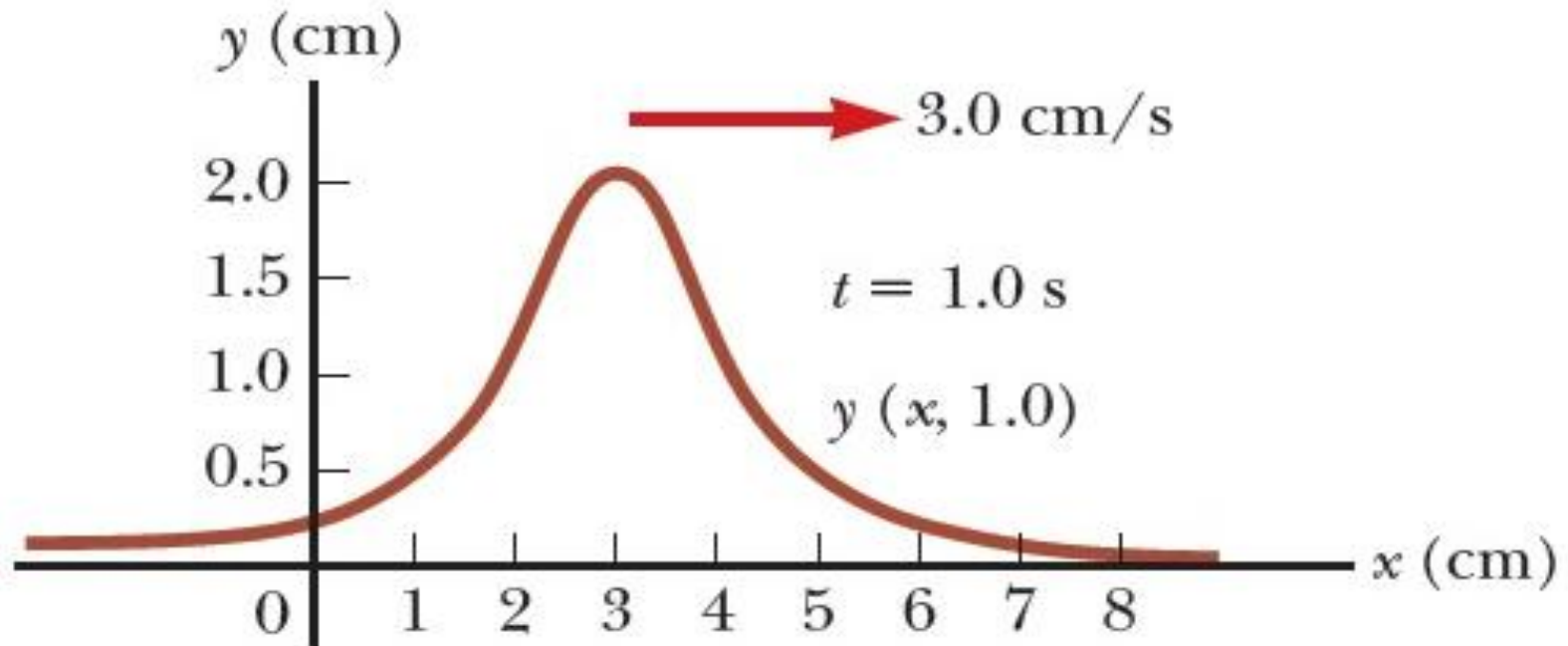


a

Κύματα

• Παράδειγμα – Λύση:

$$y(x, 1) = \frac{2}{(x - 3)^2 + 1}$$

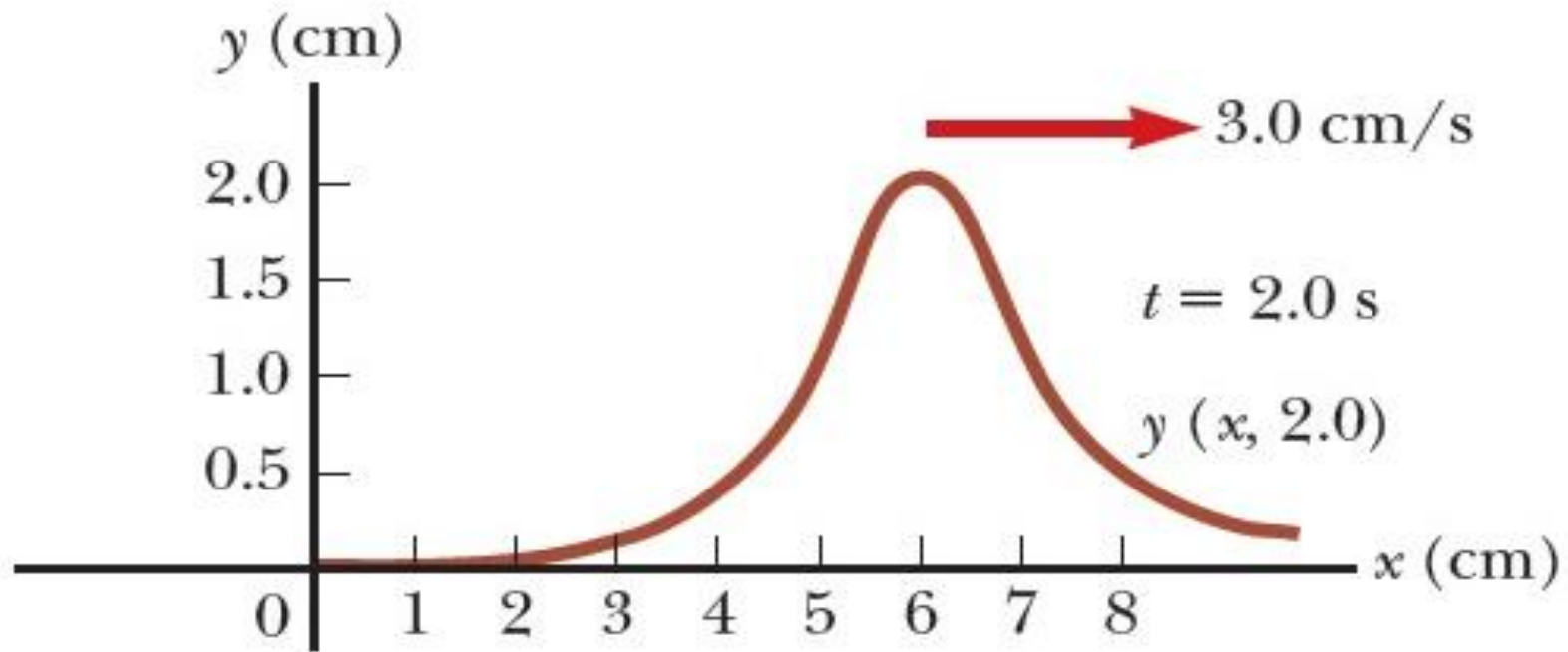


b

Κύματα

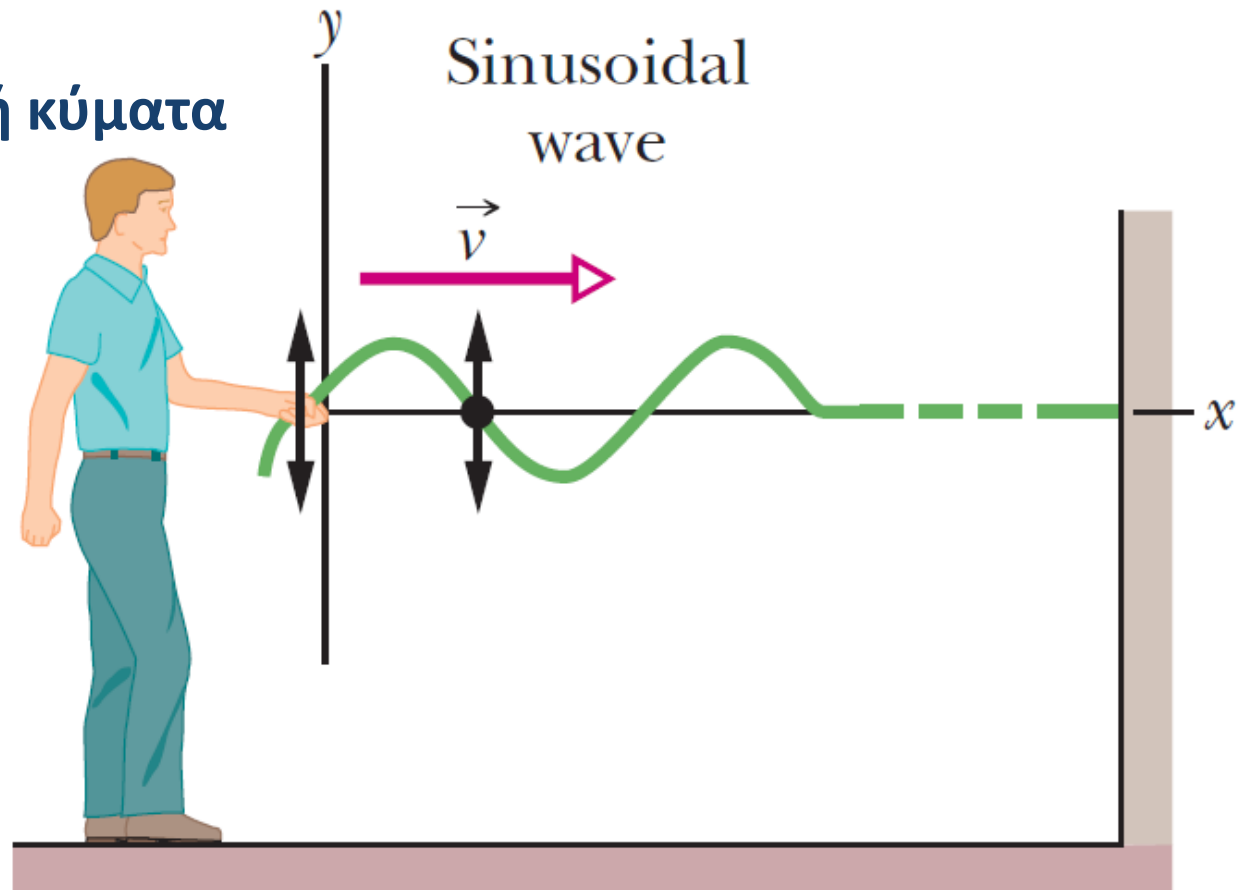
• Παράδειγμα – Λύση:

$$y(x, 2) = \frac{2}{(x - 6)^2 + 1}$$



Κύματα

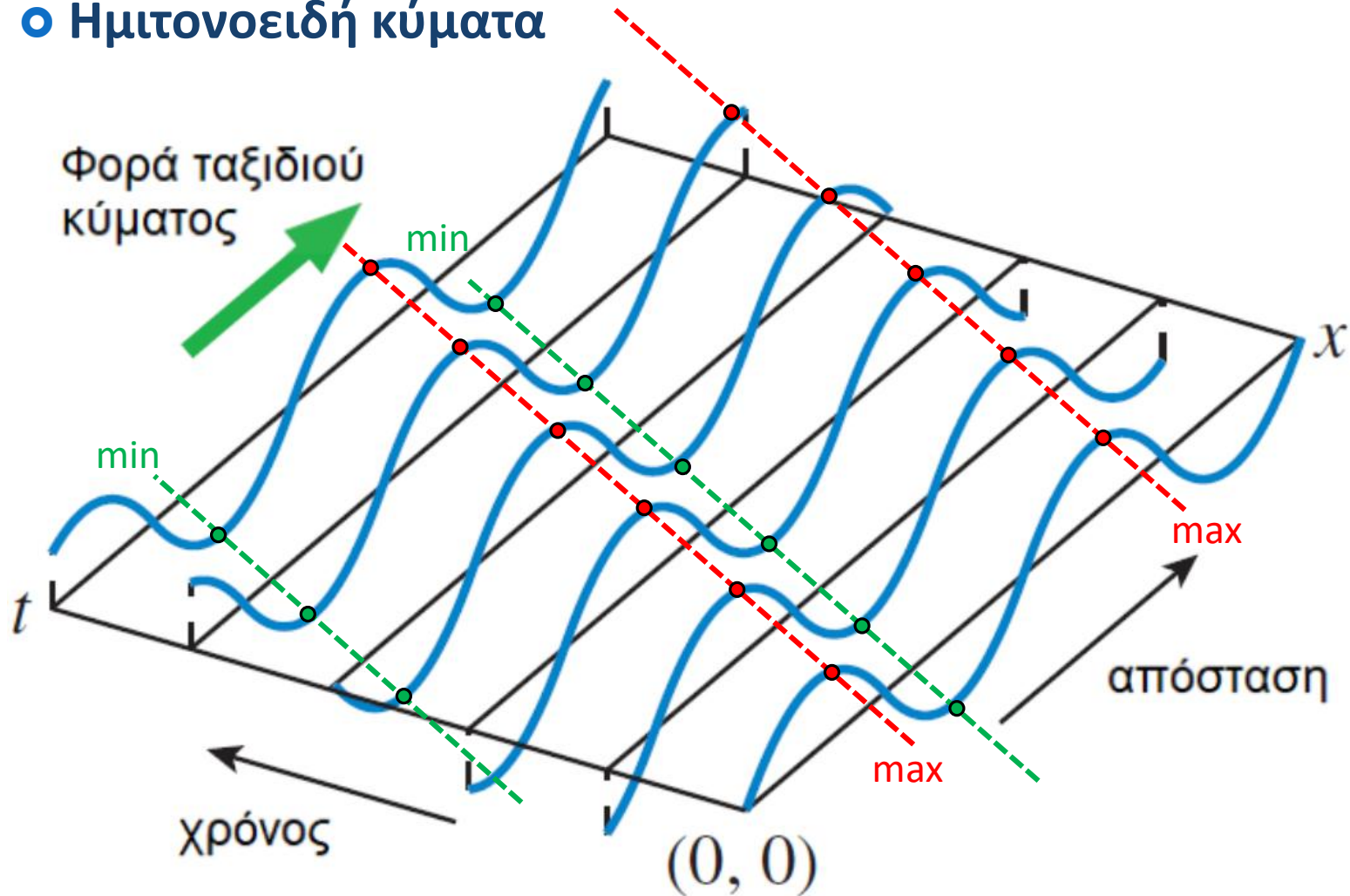
• Ημιτονοειδή κύματα



Όταν ένα ημιτονοειδές κύμα δημιουργείται σε ένα μέσο διάδοσης, κάθε στοιχείο του μέσου διάδοσης εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση!

Κύματα

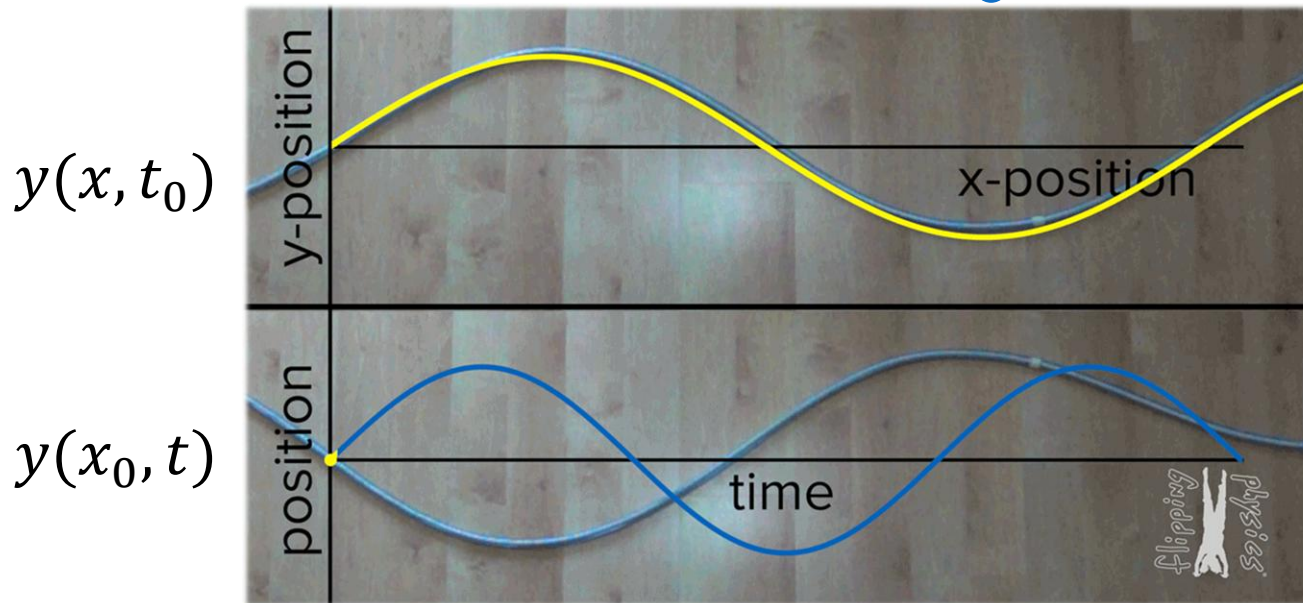
• Ημιτονοειδή κύματα



Κύματα

• Ημιτονοειδή κύματα

t σταθερό:
βλέπουμε όλα τα στοιχεία
για αυτό το t



x σταθερό:
βλέπουμε ένα στοιχείο
για κάθε t

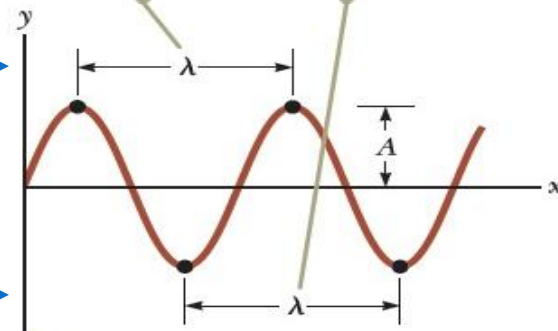
Κύματα

- Ημιτονοειδή κύματα

- Μήκος κύματος λ

- Απόσταση!

Το μήκος κύματος λ ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ διαδοχικών κορυφών ή κοιλάδων.



a

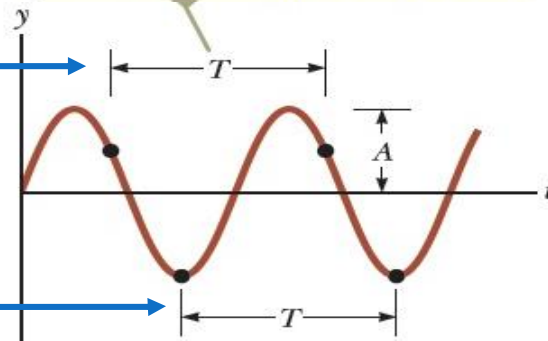
- Περίοδος T

- Χρονικό διάστημα!

Η περίοδος T ενός κύματος είναι το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το στοιχείο για να εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση ή το κύμα για να διατρέξει ένα μήκος κύματος.

- Συχνότητα f

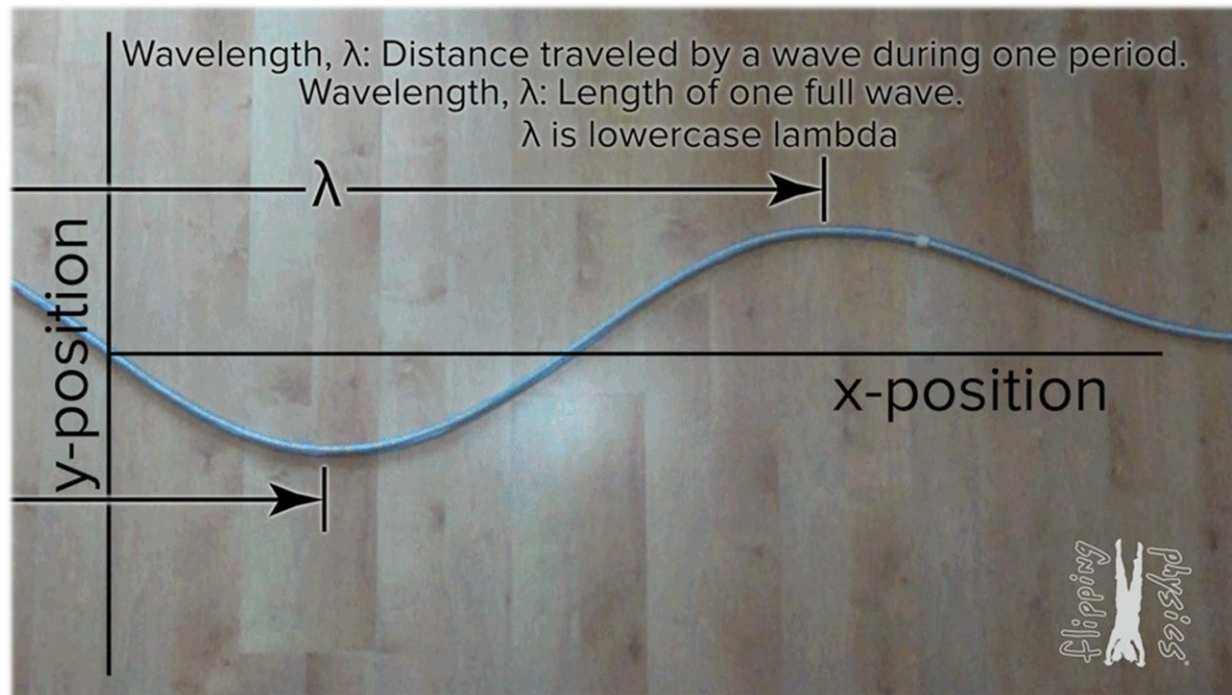
- Αριθμός κορυφών ανά μονάδα χρόνου
- $f = 1/T$
- Μετρείται σε Hertz (Hz)



b

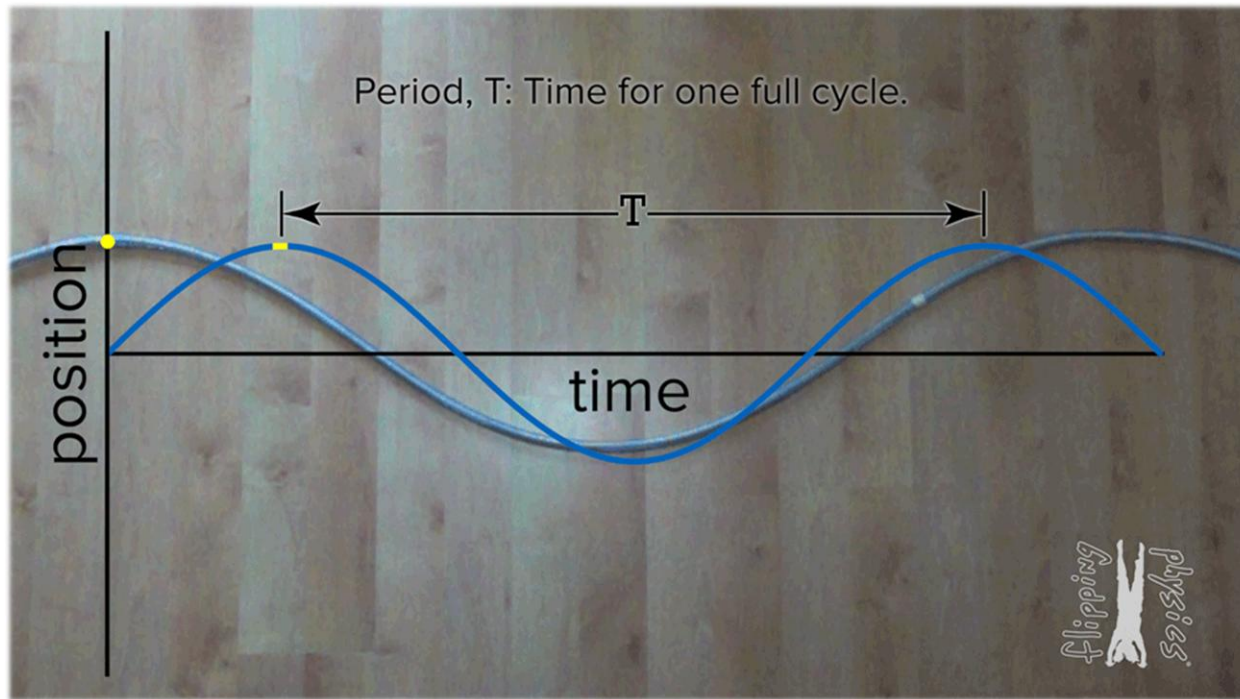
Κύματα

◉ Ημιτονοειδή κύματα



Κύματα

◉ Ημιτονοειδή κύματα



Κύματα

- Χρειαζόμαστε μια 3Δ συνάρτηση για την περιγραφή κύματος
- Κυματοσυνάρτηση

$$y(x, t) = A \sin \left(2\pi \frac{(x \pm ut)}{\lambda} + \varphi \right)$$

Φάση $\Phi(x, t)$

- Ταχύτητα διάδοσης

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

- Κυματαριθμός

$$k = \frac{d}{dx} \Phi(x, t) = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Πόσο αλλάζει η
φάση ανά μέτρο

- Γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \frac{d}{dt} \Phi(x, t) = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Πόσο αλλάζει η
φάση ανά
δευτερόλεπτο?

- Οπότε

$$y(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$$

Κύματα

- Κυματοσυνάρτηση

$$y(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$$

- «Φωτογραφία» για κάποια χρονική στιγμή t (έστω $t = 0$)

$$y(x, 0) = y(x) = A \sin(kx + \varphi)$$

- Περιγράφει **όλο το κύμα – κάθε στοιχείο x – τη χρονική στιγμή $t = 0$!**

- «Κλειδώνουμε» ένα στοιχείο x (έστω $x = 0$)

$$y(0, t) = y(t) = A \sin(\pm \omega t + \varphi)$$

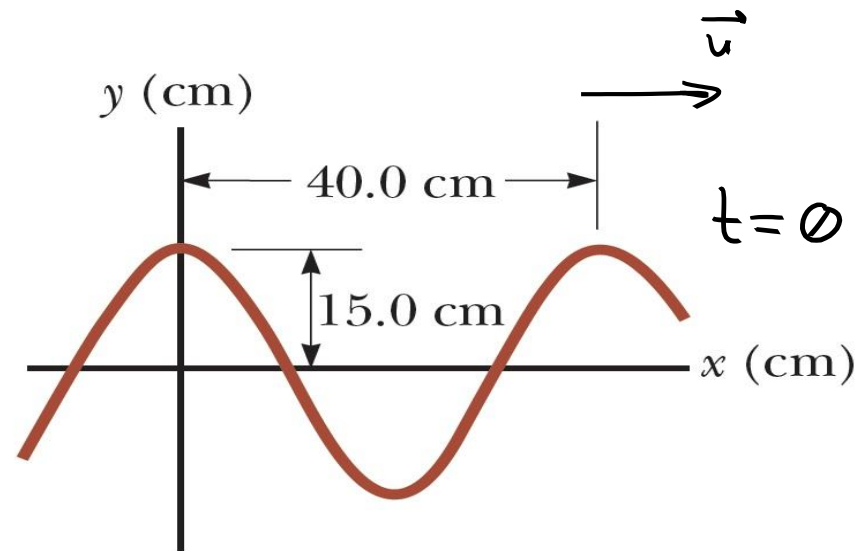
- Περιγράφει **ένα στοιχείο (το $x = 0$ εδώ) του κύματος για κάθε t !**

- Απλός αρμονικός ταλαντωτής!

Κύματα

• Παράδειγμα:

- Ημιτονοειδές κύμα που διαδίδεται στην θετική κατεύθυνση του x -άξονα έχει πλάτος 15 cm, μήκος 40 cm, και συχνότητα $f = 8 \text{ Hz}$. Η χρονική στιγμή $t = 0$ φαίνεται στο σχήμα.
- Α) Βρείτε τα k , T , ω , u .
- Β) Βρείτε τη σταθερά φάσης φ και γράψτε την κυματοσυνάρτηση.



Κύματα

◉ Παράδειγμα – Λύση:

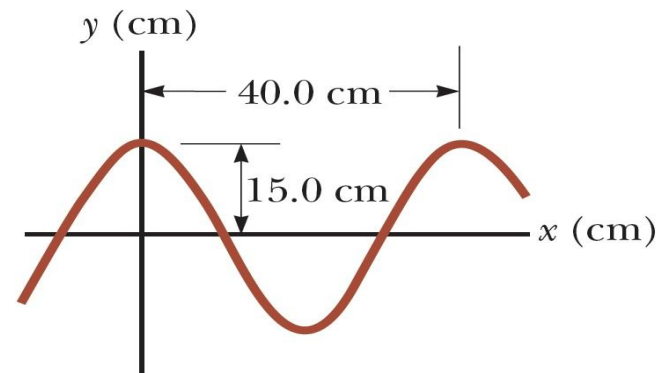
- ◉ Ημιτονοειδές κύμα που διαδίδεται στην θετική κατεύθυνση του x -άξονα έχει πλάτος 15 cm, μήκος 40 cm, και συχνότητα 8 Hz. Η χρονική στιγμή $t = 0$ φαίνεται στο σχήμα.
 - ◉ Α) Βρείτε τα k , T , ω , u .

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8} = 0.125 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 8 = 16\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$u = \lambda f = 0.4 \cdot 8 = 3.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Κύματα

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

• Παράδειγμα – Λύση:

- Η χρονική στιγμή $t = 0$ φαίνεται στο σχήμα.
- Β) Βρείτε τη σταθερά φάσης φ και γράψτε την κυματοσυνάρτηση.

Είναι

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi)$$
$$= 0.15 \sin(5\pi x - 16\pi t + \varphi)$$

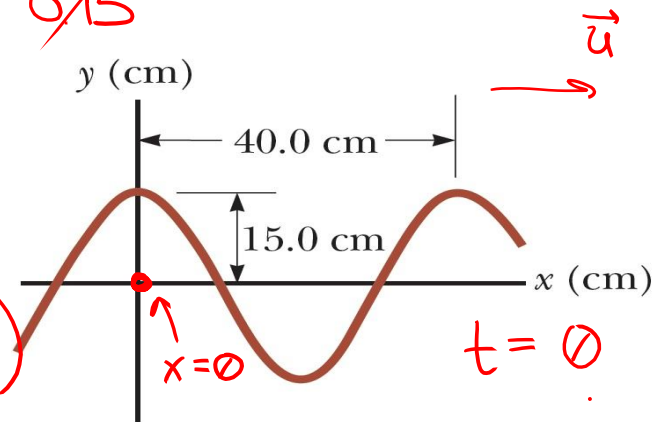
Για $t = 0$, $y(x, 0) = 0.15 \sin(5\pi x + \varphi)$

Για $x = 0$, $y(0, 0) = 0.15 \sin(\varphi) = 0.15$

Άρα $\sin(\varphi) = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

Οπότε

$$y(x,t) = 0.15 \sin\left(5\pi x - 16\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$



Κύματα

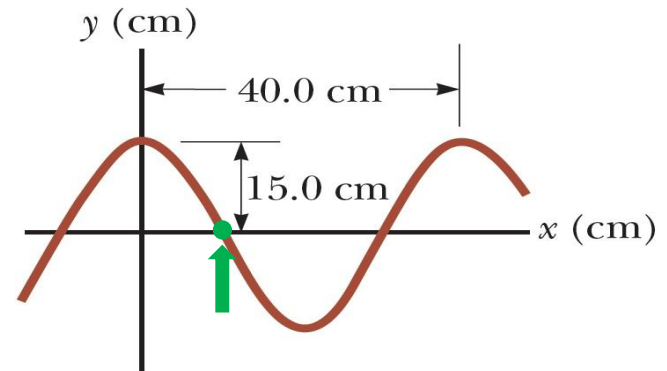
• Παράδειγμα – Λύση:

Στην ερώτηση «*αν παίρναμε άλλο σημείο στο σχήμα, θα παίρναμε την ίδια απάντηση?*», η απάντηση είναι «*ναι*», αν και δεν έχουμε πληροφορία για όλα τα υπόλοιπα σημεία.

$$\begin{aligned} 1. \quad & 2\pi = k\lambda \\ 2. \quad & \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \end{aligned}$$

Homework!

Κάντε το και συζητήστε με το διδάσκοντα αν αντιμετωπίσατε προβλήματα.



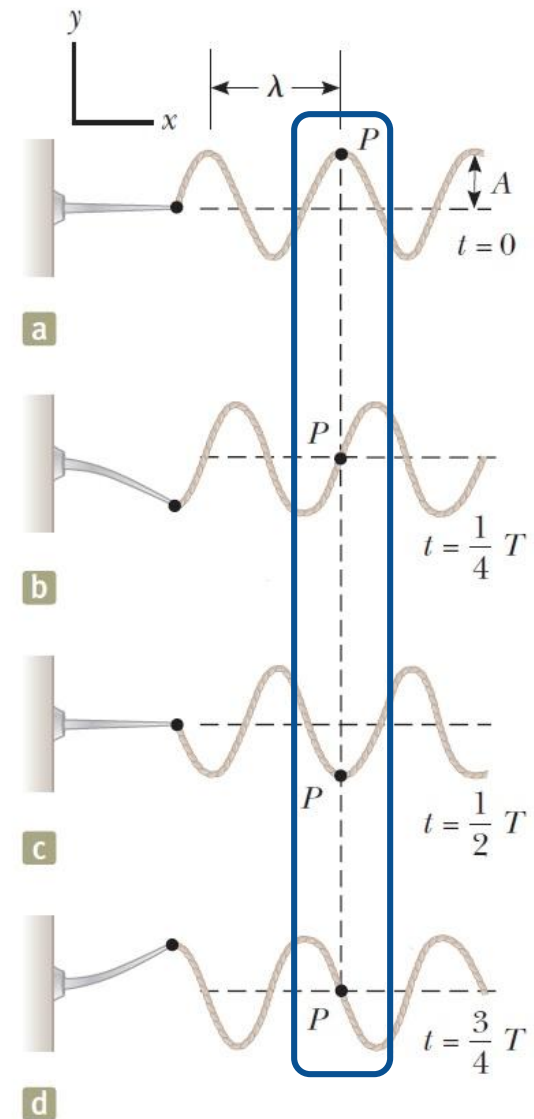
Κύματα

- Ημιτονοειδή κύματα

- Κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το κύμα του διπλανού σχήματος:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

- Άρα περιγράφει και την κίνηση κάθε στοιχείου του, όπως π.χ. το P



Κύματα

• Ημιτονοειδή κύματα

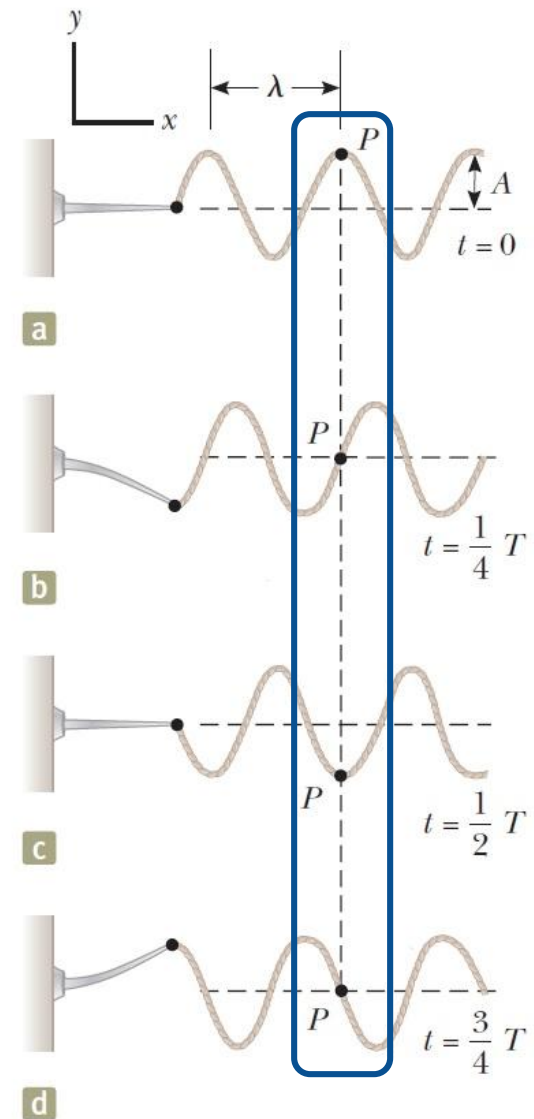
- Εγκάρσια μετατόπιση του στοιχείου P από τη θέση ισορροπίας

$$y(t) = y(x_P, t) = A \sin(kx_P - \omega t)$$

- Εγκάρσια ταχύτητα και επιτάχυνση του στοιχείου P

$$u_y(t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx_P - \omega t)$$

$$a_y(t) = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 A \sin(kx_P - \omega t)$$



Κύματα

- Ένα κύμα ταξιδεύει σε νήμα μόνο αν αυτό βρίσκεται **υπό τάση**
 - Όσο το κύμα ταξιδεύει στο νήμα, μετατοπίζει στοιχεία του νήματος
 - Η τάση του νήματος σχετίζεται με την ελαστικότητά του

- Ταχύτητα Διάδοσης u κύματος σε νήμα υπό τάση

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

όπου T η τάση του νήματος, και μ η μάζα του νήματος ανά μονάδα μήκους

- Μάζα ανά μονάδα μήκους

$$\mu = \frac{m}{l}$$

- Λέγεται και γραμμική πυκνότητα μάζας

Κύματα

ο Παράδειγμα:

Κύμα διαδίδεται σε νήμα και περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$y(x, t) = 0.02 \sin(12.57x - 638t)$$

Μετατοπίσεις και χρόνος εκφράζονται σε μονάδες του S.I.

Η γραμμική πυκνότητα μάζας του νήματος είναι $\mu = 0.005 \text{ kg/m}$.

- A) Βρείτε την τάση του νήματος
- B) Βρείτε τη μέγιστη μετατόπιση ενός στοιχείου του νήματος
- Γ) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα ενός στοιχείου του νήματος

Κύματα

ο Παράδειγμα – Λύση:

$$y(x, t) = 0.02 \sin(12.57x - 638t)$$

$\nearrow k$ $\nearrow \omega$

$$\mu = 0.005 \text{ kg/m.}$$

A) Βρείτε την τάση του νήματος

Ξέρουμε ότι $u = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow u^2 = \frac{T}{\mu} \Rightarrow T = u^2 \mu$ $\nearrow 0.005 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$

—||— $u = \lambda f$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

Άρα $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{12.57} \text{ m}$

—||— $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{638}{2\pi} \text{ Hz}$

Άρα $T = u^2 \mu = (\lambda f)^2 \mu = \left(\frac{2\pi}{12.57} \cdot \frac{638}{2\pi} \right)^2 0.005 \simeq 12.88 \text{ N}$

$$T = 12.88 \text{ N}$$

Κύματα

ο Παράδειγμα – Λύση:

$$y(x, t) = 0.02 \sin(12.57x - 638t)$$

$$\mu = 0.005 \text{ kg/m.}$$

Β) Βρείτε τη μέγιστη μετατόπιση ενός στοιχείου του νήματος

Γ) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα ενός στοιχείου του νήματος

Β) Αφού η κυματοσυνάρτηση περιγράφει κάθε στοιχείο του νήματος, τότε για, η x , $x=0$, $y(0, t) = 0.02 \sin(-638t)$, άρα η μέγιστη μετατόπιση θα είναι $y_{\max} = 0.02 \text{ m}$.

Γ) Είναι $u_{\max} = \omega A = 638 \cdot 0.02 = 12.76 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

αφού $u_y(t) = - \underbrace{\omega A}_{u_{\max}} \cos(kx - \omega t)$

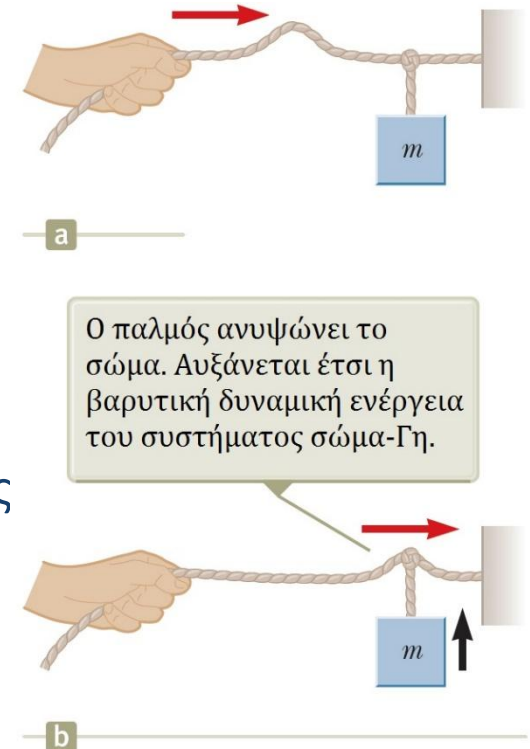
Κύματα

- **Μεταφορά ενέργειας σε νήμα**

- Είπαμε (και είδαμε) ότι στα μηχανικά κύματα μεταφέρεται **ενέργεια**
- Που πηγαίνει αυτή η ενέργεια;

- **Παράδειγμα:**

- Έστω το {σώμα, Γη} ως **μη απομονωμένο σύστημα**
- **Ενέργεια** λόγω έργου (χέρι)
 - **Εξωτερική** στο σύστημα
- Διάδοση παλμού κατά **μήκος** του νήματος
- **Ανύψωση** σώματος
 - **Μεταβολή δυναμικής ενέργειας** συστήματος {Γη, σώμα}

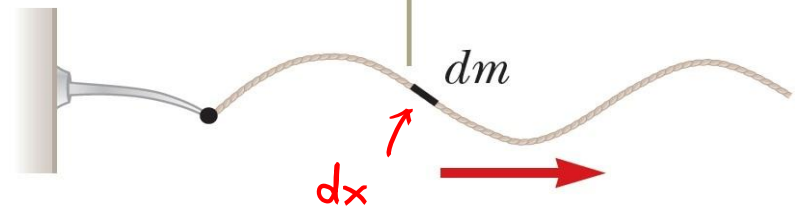


Κύματα

• Μεταφορά ενέργειας σε νήμα

- Ας θεωρήσουμε ένα απειροστά μικρό τμήμα του νήματος μήκους dx και μάζας dm
- Εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση (y -άξονα)!
- Άρα έχει **κινητική και δυναμική** ενέργεια!

Κάθε απειροστά μικρό (στοιχειώδες) τμήμα του νήματος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, και άρα έχει δυναμική και κινητική ενέργεια.



Κύματα

- Μεταφορά ενέργειας σε νήμα

$$u_y = -\omega A \cos(kx - \omega t)$$
$$\mu = \frac{m}{l} = \frac{dm}{dx}$$

- Κινητική ενέργεια για ένα απειροστό μικρό στοιχείο νήματος

$$dK = \frac{1}{2}(dm)u_y^2 = \frac{1}{2}(\mu dx)u_y^2 \quad (t=0) \quad = \quad \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2(kx)dx$$

- Ολοκληρώνοντας για ένα μήκος κύματος

$$K_\lambda = \int dK = \int_0^\lambda \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2(kx)dx = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

- Δυναμική ενέργεια (με όμοιο τρόπο)

$$U_\lambda = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

Κύματα

- **Μεταφορά ενέργειας σε νήμα**

- Η συνολική ενέργεια σε ένα μήκος κύματος ισούται με το άθροισμα κινητικής και δυναμικής

$$E_{mech,\lambda} = K_{\lambda} + U_{\lambda} = E_{\lambda} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \lambda$$

- **Ρυθμός μεταφοράς ενέργειας (= Μέση Ισχύς)**

$$P = \frac{E_{μηχ.κυμ.}}{\Delta t} = \frac{E_{\lambda}}{T} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 u$$

με u την ταχύτητα διάδοσης του κύματος



Τέλος Διάλεξης
