



Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

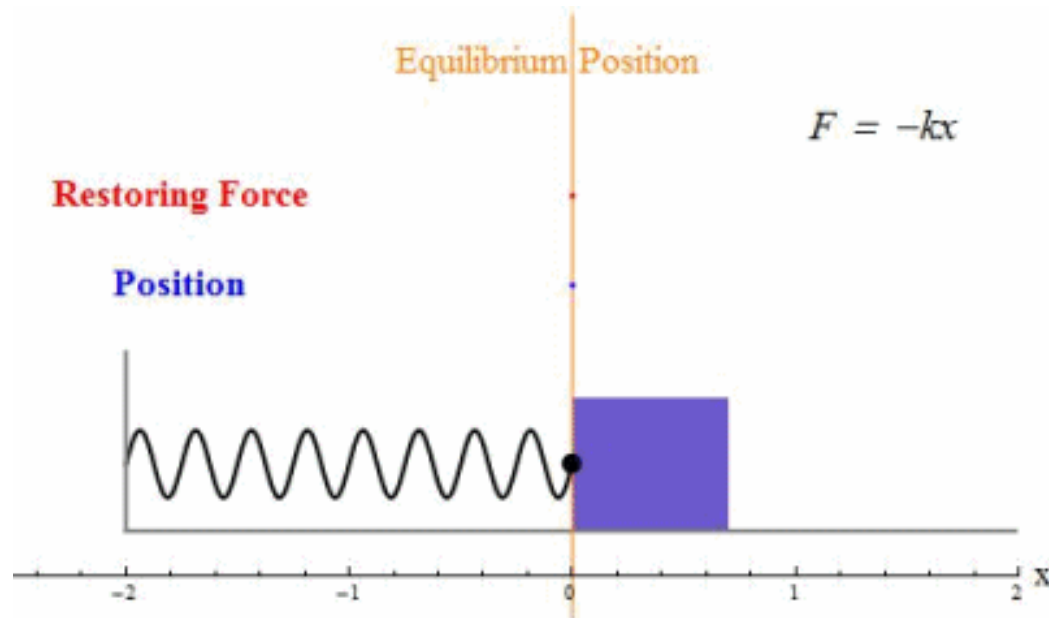
Φυσική για Μηχανικούς

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Απλή Αρμονική Ταλάντωση (review...)

- Ορισμός: Όταν η δύναμη που ασκείται σε ένα σύστημα είναι ανάλογη της μετατόπισης και έχει πάντα κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας του συστήματος, η κίνηση που πραγματοποιεί το σύστημα λέγεται

Απλή Αρμονική Κίνηση / Ταλάντωση



Απλή Αρμονική Ταλάντωση (review...)

• Θέση:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

• Ταχύτητα:

$$u(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

• Επιτάχυνση:

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

• Κυκλική συχνότητα:

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

• Περίοδος:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

• Συχνότητα:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cos(\omega t + \phi) \\u(t) &= -\omega A \sin(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

• Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή

• Κινητική Ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{u}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$\frac{k}{m}$
↓

• Ελαστική Δυναμική Ενέργεια:

$$\frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$U = \frac{1}{2} k \mathbf{x}^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

- Το σύστημα του ταλαντωτή {ελατήριο, σώμα} είναι απομονωμένο

- Η δύναμη του ελατηρίου είναι εσωτερική & **συντηρητική!!**

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

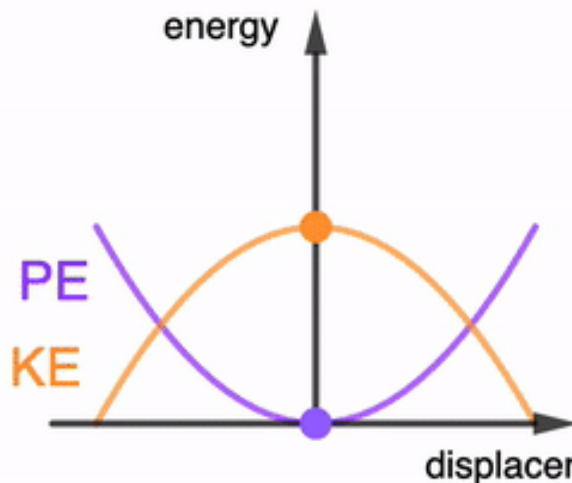
• Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή

- Μηχανική Ενέργεια $K + U$ σταθερή – **ΑΔΜΕ**

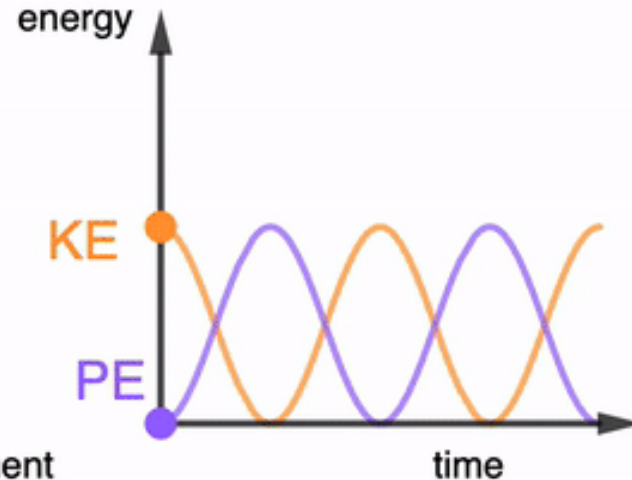
$$E_{mech} = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$

Το άθροισμα $K + U$ είναι
σταθερό και στα δυο
γραφήματα

— U — K — $U = \frac{1}{2}kx^2$ — $K = \frac{1}{2}mv^2$



Διάγραμμα ενέργειας-μετατόπισης

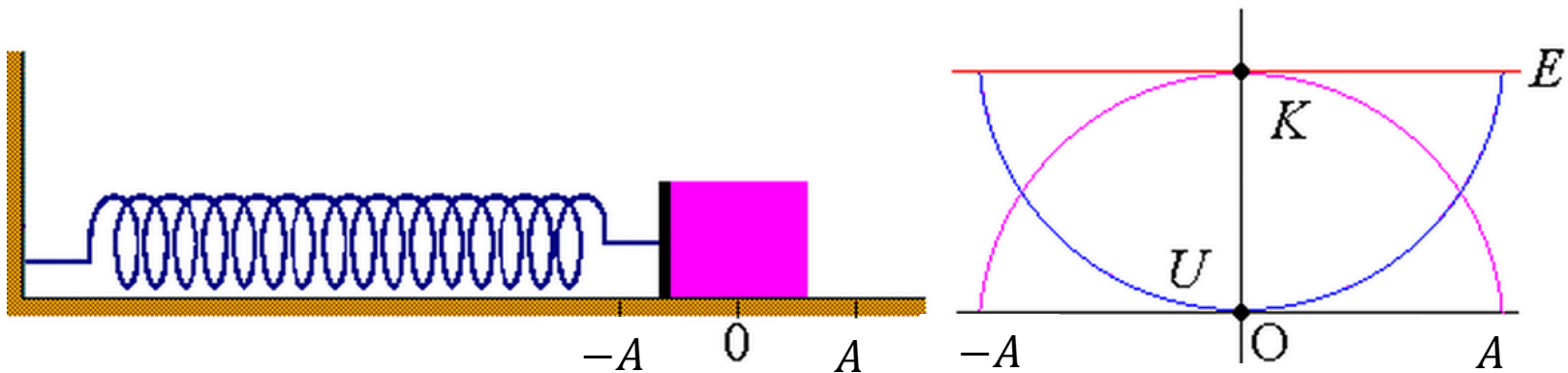


Διάγραμμα ενέργειας-χρόνου

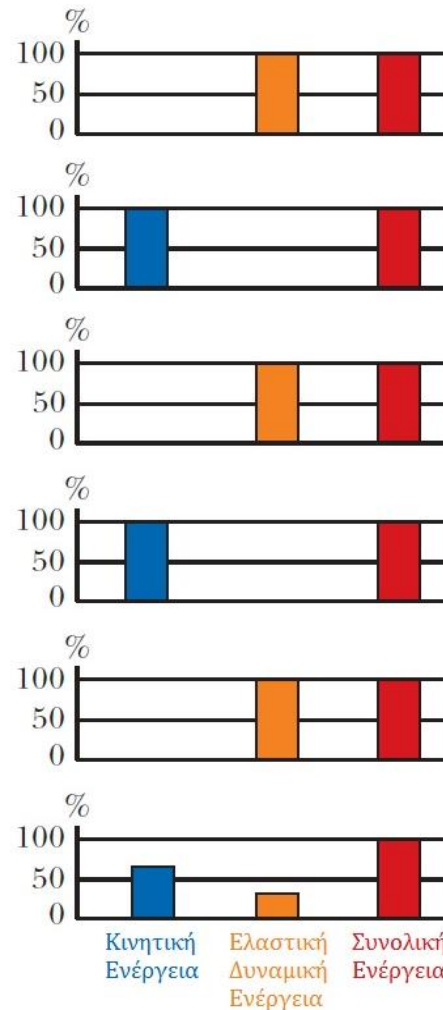
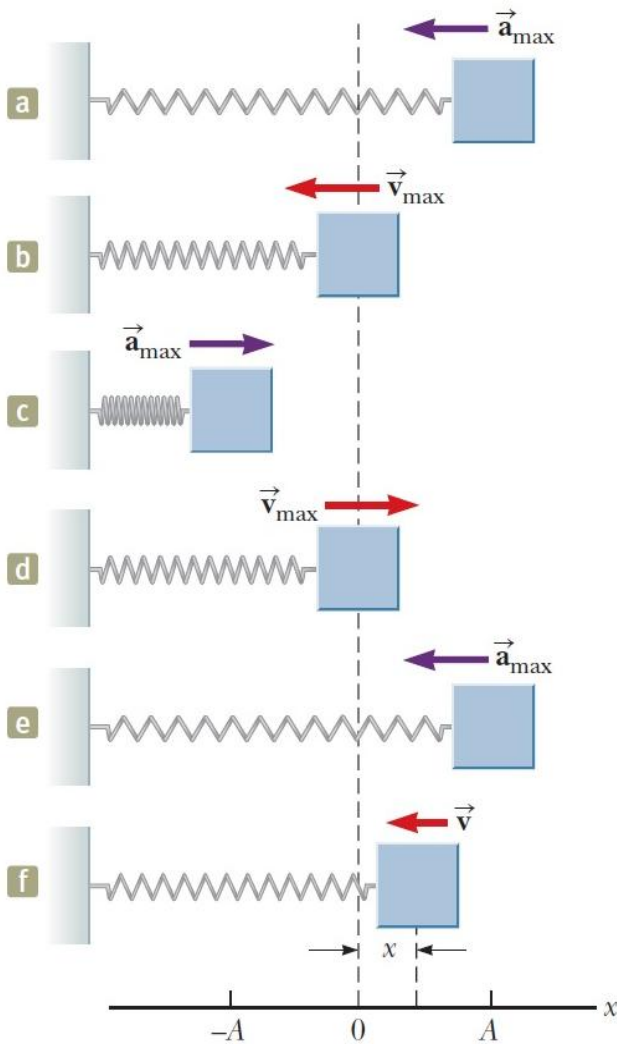
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή
 - Μηχανική Ενέργεια $K + U$

$$E_{mech} = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
t	x	v	$-\omega^2 x$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Πολλά ψηλά κτήρια έχουν αποσβεστήρες μάζας, οι οποίοι είναι συσκευές που εμποδίζουν το κτήριο να ταλαντωθεί ισχυρά από τη δύναμη του ανέμου. Έστω ότι η συσκευή έχει μάζα $m = 2.72 \times 10^5 \text{ kg}$ και έχει σχεδιαστεί να ταλαντώνεται σε συχνότητα $f = 10.0 \text{ Hz}$, με πλάτος $A = 0.2 \text{ m}$.
 - ◉ Α) Βρείτε την ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος.
 - ◉ Β) Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος όταν περνά από το σημείο ισορροπίας?



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

• Παράδειγμα – Λύση:

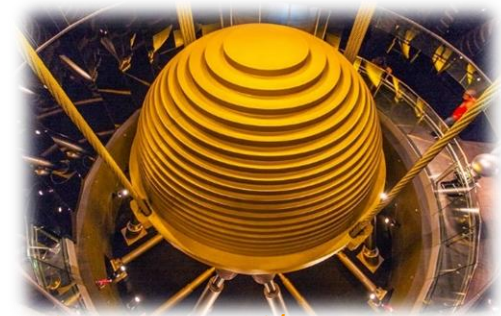
- Συσκευή μάζας $m = 2.72 \times 10^5 \text{ kg}$, ταλαντώνεται σε συχνότητα $f = 10 \text{ Hz}$, με πλάτος $A = 0.2 \text{ m}$.
- Α) Βρείτε την ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος.

Ξέρουμε ότι $E_{\text{μηχ}} = \frac{1}{2} k A^2$, $\omega^2 = \frac{k}{m} = (2\pi f)^2 \Rightarrow k = 4\pi^2 f^2 m$

άρα $k \approx 1.07 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Οπότε

$$E_{\text{μηχ}} = \frac{1}{2} \cdot 1.07 \cdot 10^9 \cdot (0.2)^2 \\ \approx 2.14 \cdot 10^7 \text{ J}$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Συσκευή μάζας $m = 2.72 \times 10^5 \text{ kg}$, ταλαντώνεται σε συχνότητα $f = 10 \text{ Hz}$, με πλάτος $A = 0.2 \text{ m}$.
- ◉ Β) Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος όταν περνά από το σημείο ισορροπίας?

Στη θέση ισορροπίας, η μηχανική ενέργεια του συστήματος γίνεται έλη κινητική!

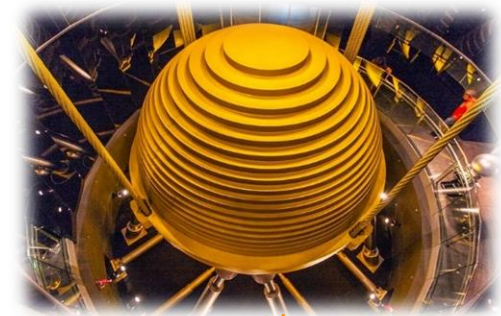
Άρα

$$K_{\theta.I.} = E_{μηχ} = 2.14 \cdot 10^7 \text{ J}$$

$$\frac{1}{2} m u_{\theta.I.}^2 = 2.14 \cdot 10^7 \text{ J}$$

$$u_{\theta.I.}^2 = \frac{4.28 \cdot 10^7}{2.72 \cdot 10^5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{\theta.I.} \approx 12.544 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

• Το εκκρεμές

- Όταν η γωνία θ είναι $< 10^\circ$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το εκκρεμές εκτελεί ΑΑΤ

- Ας κατασκευάσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\vec{F}_{\varepsilon\pi} = m\vec{a}_x \Rightarrow -mg \sin(\theta) = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

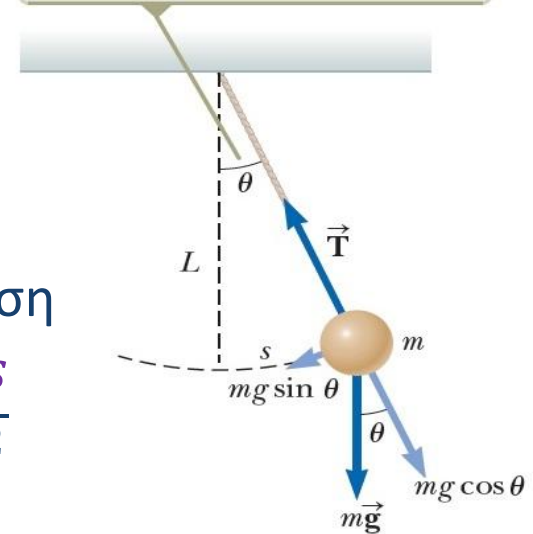
- Επειδή $s = L\theta$,

$$L \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \sin(\theta) \Leftrightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin(\theta)$$

- Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση
 $\sin(\theta) \approx \theta$

για μικρές τιμές του θ (σε rad), έχουμε: $\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta$

Όταν η γωνία θ είναι μικρή, η απλή κίνηση του εκκρεμούς μπορεί να μοντελοποιηθεί ως απλή αρμονική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας $\theta = 0$.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

• Το εκκρεμές

- Γιατί χρειαστήκαμε την προσέγγιση;
- Θυμηθείτε για το {ελατήριο, σώμα} που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

- Για το εκκρεμές, καταλήξαμε σε:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

- Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση είναι ίδια!!
- Άρα το εκκρεμές μπορεί να θεωρηθεί ότι εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση **για μικρό θ ($< 10^\circ$)!**

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Το εκκρεμές

- Γωνιακή συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

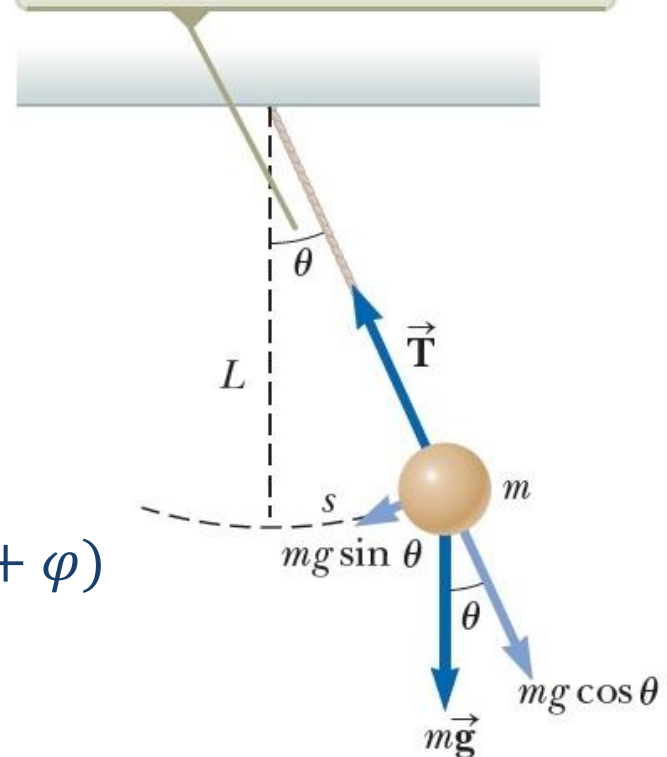
- Περίοδος

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

- Εξίσωση κίνησης

$$\theta(t) = \theta_{max} \cos(\omega t + \varphi)$$

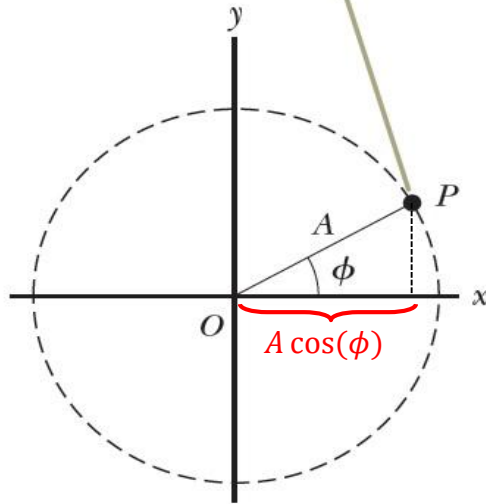
Όταν η γωνία θ είναι μικρή, η απλή κίνηση του εκκρεμούς μπορεί να μοντελοποιηθεί ως απλή αρμονική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας $\theta = 0$.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

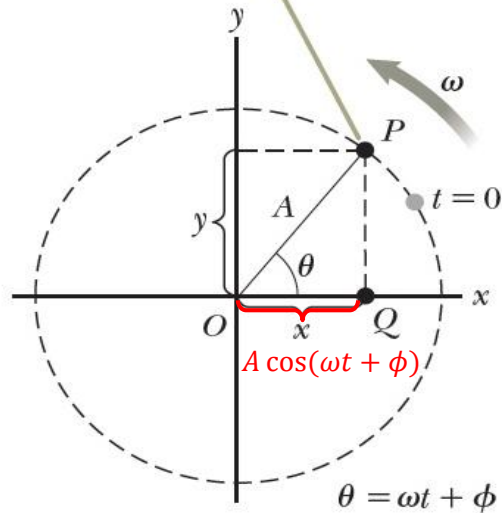
• Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση

Ένα σώμα βρίσκεται στο σημείο P όταν $t=0$.



a

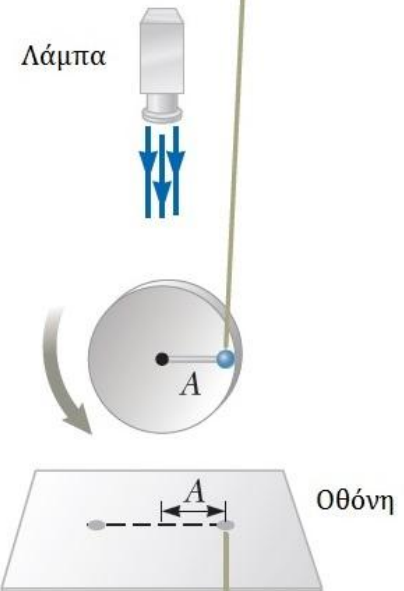
Λίγο αργότερα, τη χρονική στιγμή t, οι x-συνιστώσες των σημείων P και Q είναι ίσες.



b

$$\omega = \Delta\theta / \Delta t$$
$$\theta_f = \theta_i + \omega t$$

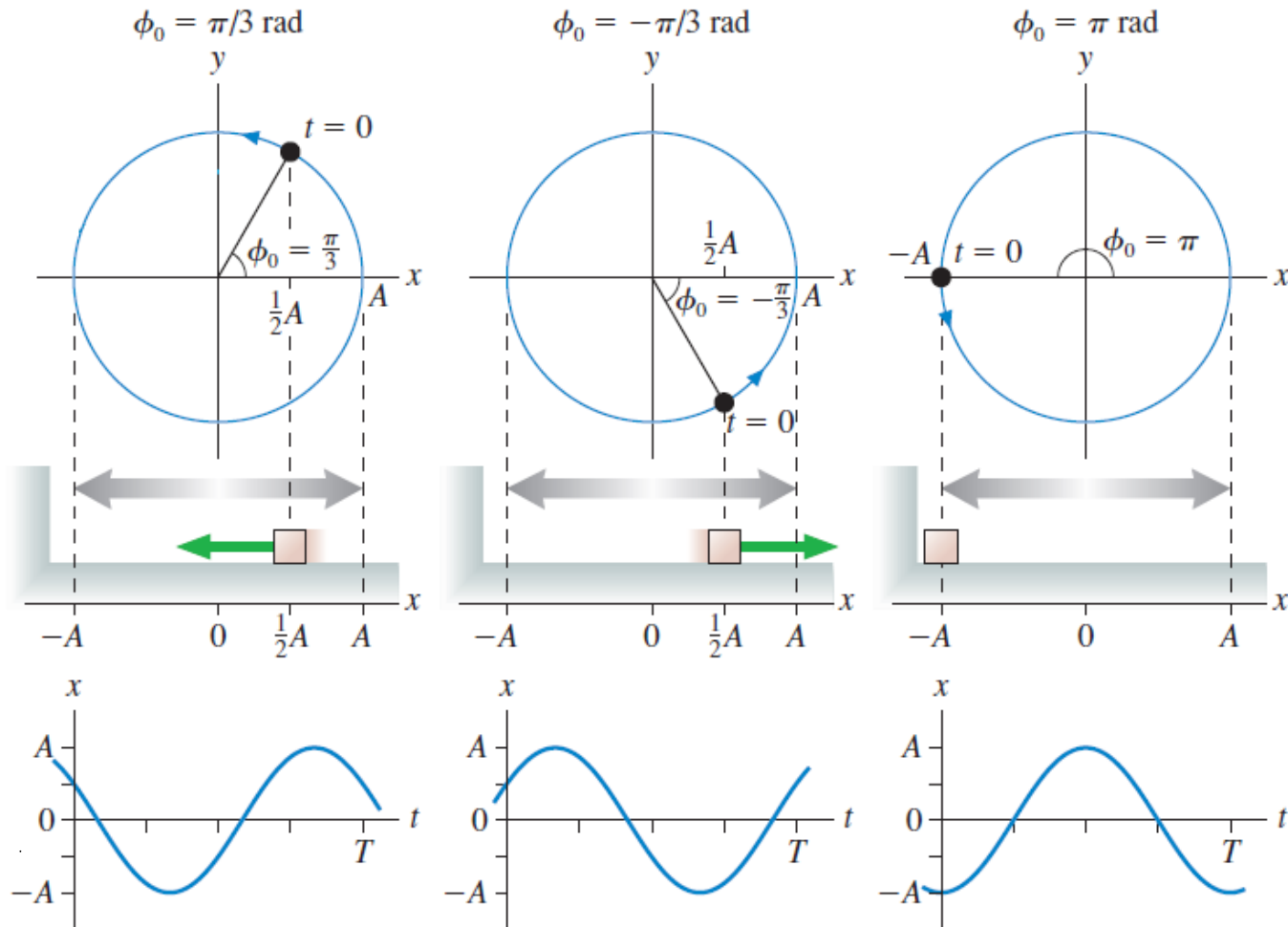
Η μπίλια γυρίζει και συμπεριφέρεται ως σωματίδιο σε ομοιόμορφη κυκλική κίνηση.



Η σκιά της μπάλας κινείται όπως ένα σωματίδιο σε απλή αρμονική κίνηση.

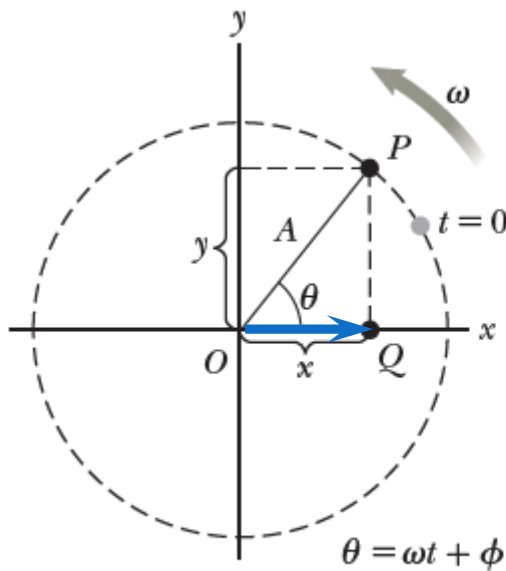
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση

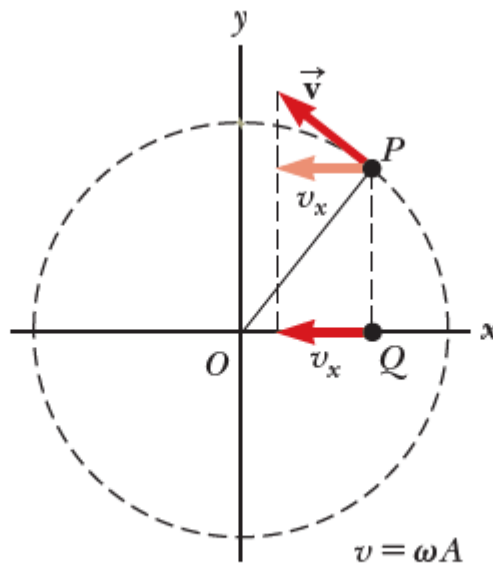


Απλή Αρμονική Ταλάντωση

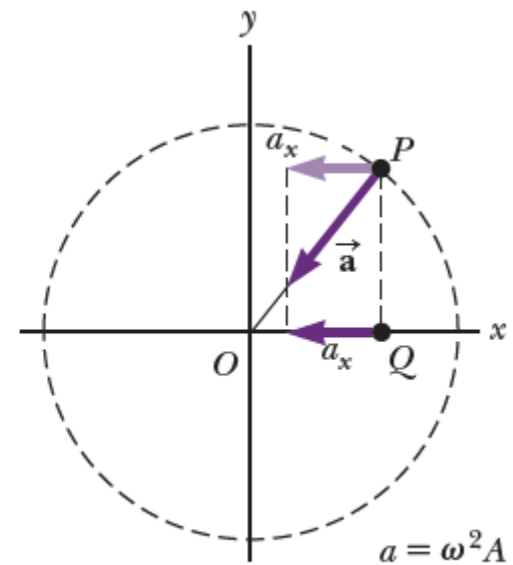
- Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση



b



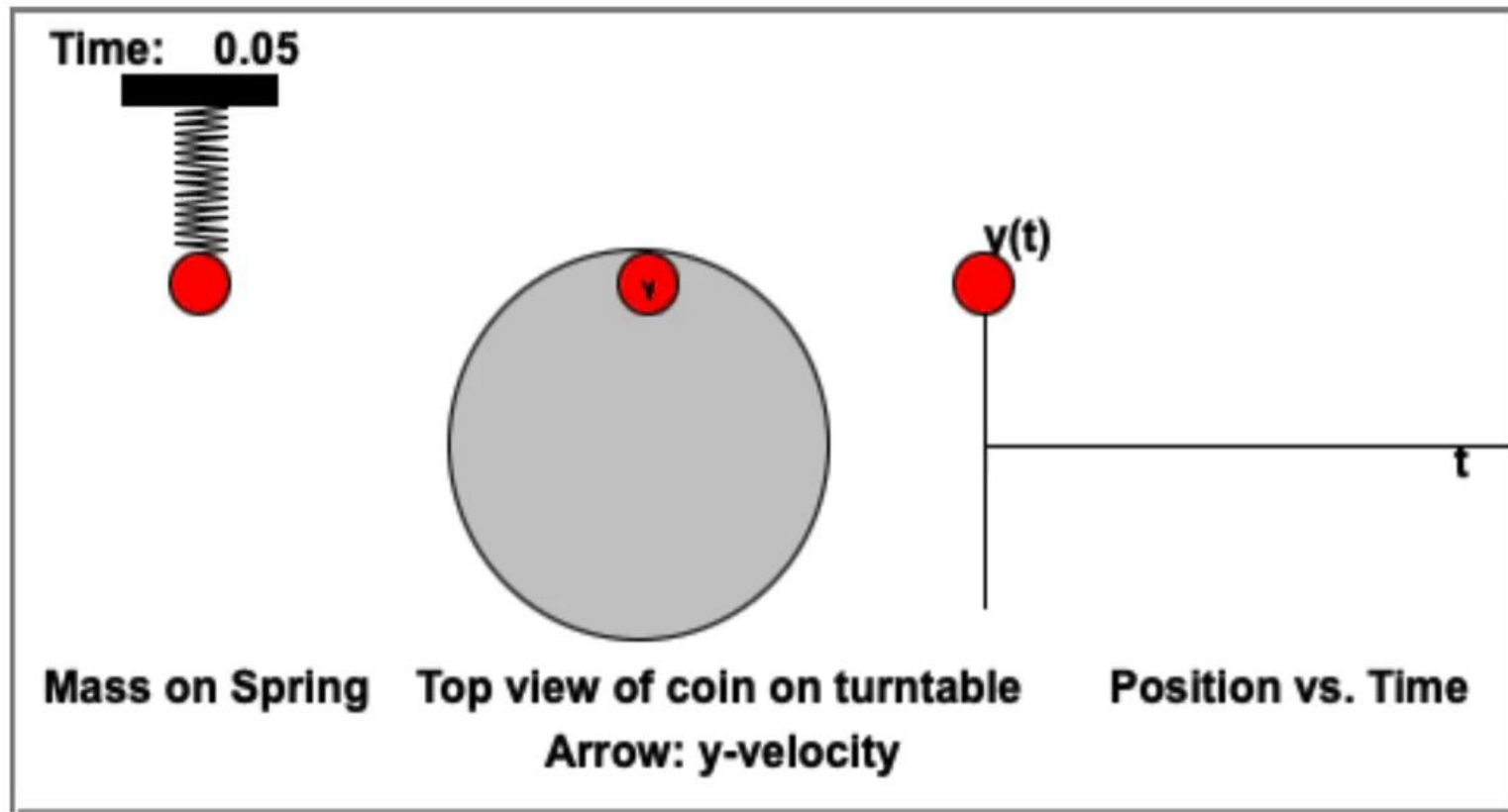
c



d

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

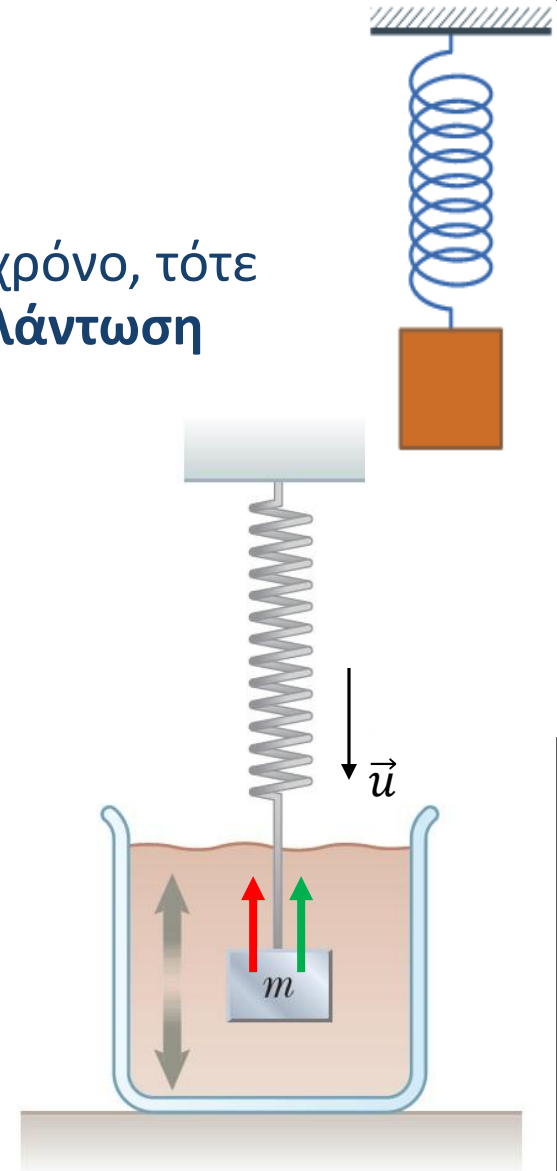
Φθίνουσες ταλαντώσεις

- Όταν η μηχανική ενέργεια φθίνει με το χρόνο, τότε η κίνηση λέγεται ότι είναι **φθίνουσα ταλάντωση**
 - Πιο κοντά στην πραγματικότητα:
 - τριβές, αντίσταση αέρα

Δύναμη επιβράδυνσης

$$\vec{R} = -b\vec{u} = -b \frac{d\vec{x}}{dt}$$

- Συντελεστής απόσβεσης b
- Δρα πάντα **αντίθετα στην ταχύτητα** του σώματος
- $\vec{F} = -k\vec{x}$: δύναμη επαναφοράς



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Φθίνουσες ταλαντώσεις

- Εφαρμόζοντας το 2^ο νόμο του Newton:

$$\sum F_x = -kx - bu = ma_x$$

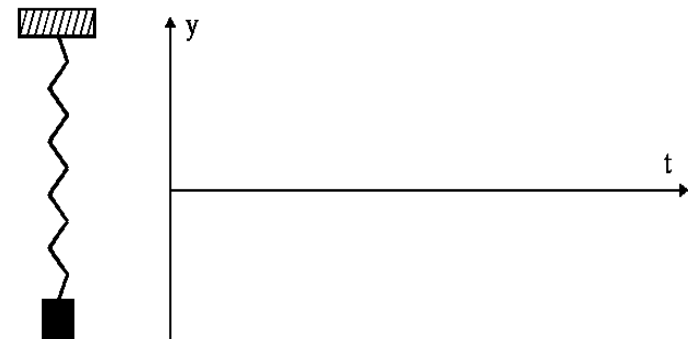
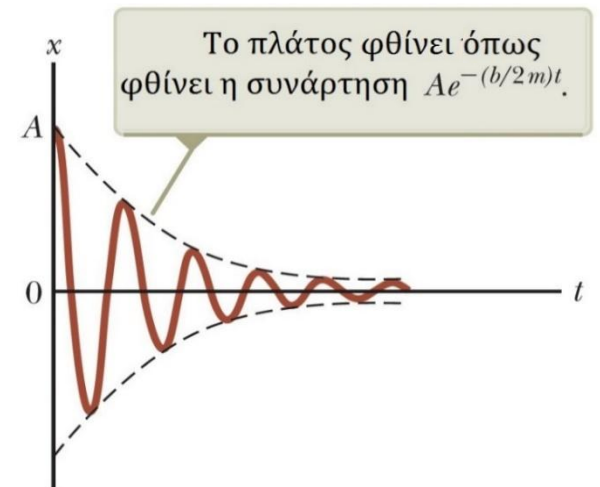
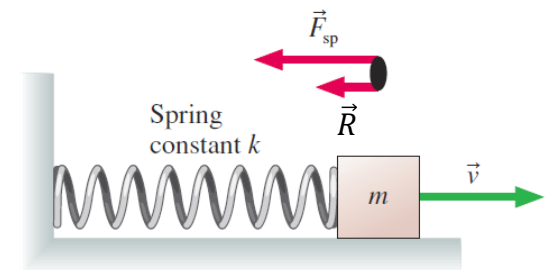
$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

- Η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \cos(\omega t + \varphi)$$

- Εναλλακτικά,

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi)$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Φθίνουσες ταλαντώσεις

- Γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

- Η ποσότητα $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ είναι η γωνιακή συχνότητα, απουσία απόσβεσης

- Άρα $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ και λέγεται

φυσική συχνότητα (ή ιδιοσυχνότητα)

του συστήματος

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Φθίνουσες ταλαντώσεις

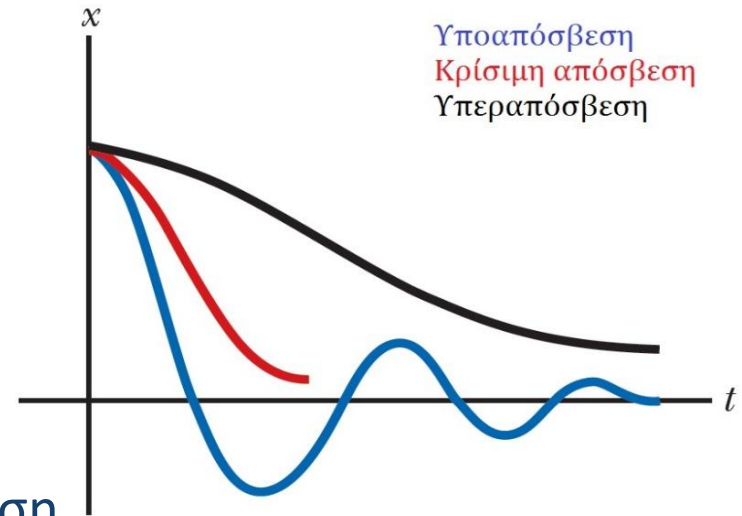
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

• Αν $\frac{b}{2m} < \omega_0 \rightarrow$ υποαπόσβεση

• Αν $\frac{b}{2m} = \omega_0 \rightarrow$ κρίσιμη απόσβεση

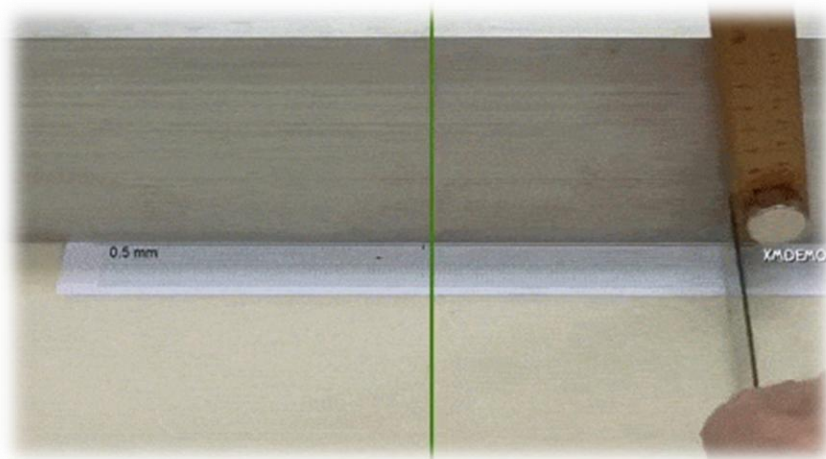
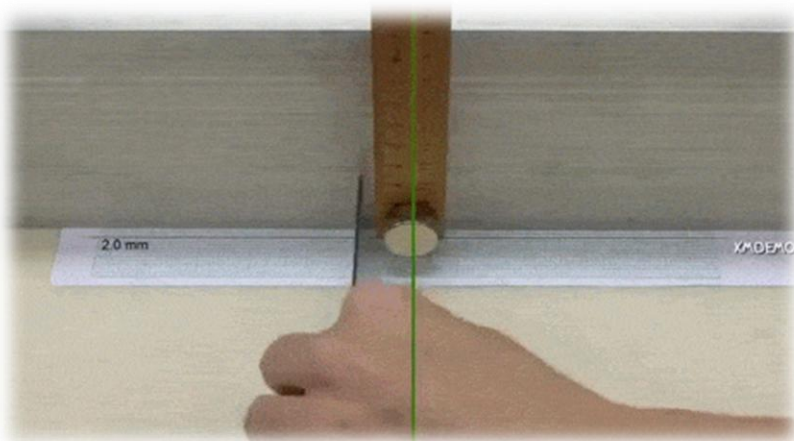
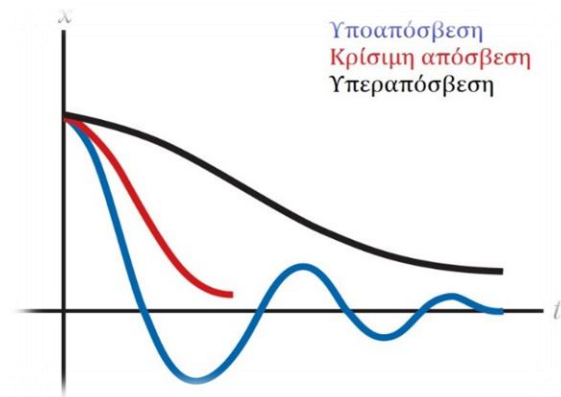
• Αν $\frac{b}{2m} > \omega_0 \rightarrow$ υπεραπόσβεση

• Για συστήματα κρίσιμης απόσβεσης ή υπεραπόσβεσης, η εξίσωση φθίνουσας ταλάντωσης $x(t) = Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \cos(\omega t + \varphi)$ που βρήκαμε δεν ισχύει.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Φθίνουσες ταλαντώσεις



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- Φθίνουσες ταλαντώσεις – Μηχανική Ενέργεια
- Η μηχανική ενέργεια του φθίνοντα ταλαντωτή είναι

$$E_{mech} = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 e^{-\frac{b}{m}t} \left[1 + \frac{b}{2m\omega_0} \cos \left(2\omega t - \tan^{-1} \frac{2m\omega}{b} \right) \right]$$

- Για $\frac{b}{m} \ll \omega_0 \Rightarrow \frac{b}{m\omega_0} \ll 1$, έχουμε

$$E_{mech} \approx \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 e^{-\frac{b}{m}t}$$

που δείχνει ότι πράγματι η μηχανική ενέργεια του ταλαντωτή φθίνει εκθετικά με την πάροδο του χρόνου

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

- ◉ Μπορούμε να αντισταθμίσουμε την απώλεια μηχανικής ενέργειας της ταλάντωσης λόγω της δύναμης επιβράδυνσης
 - ◉ Ασκώντας μια περιοδική εξωτερική δύναμη στο σύστημα
 - ◉ Π.χ. παιδί που κάνει κούνια και ο πατέρας το σπρώχνει περιοδικά για να διατηρήσει την κίνηση του
 - ◉ Π.χ. στον έμφωνο στάσιμο λόγο
 - ◉ Π.χ. στα μουσικά όργανα
 - ◉ Π.χ. σε ηλεκτρικά κυκλώματα
- ◉ Μοντέλο εξωτερική δύναμη διέγερσης: $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$
- ◉ Τότε

$$\sum F_x = ma_x \Leftrightarrow F_0 \sin(\omega t) - b \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

• Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$\sum F_x = ma_x \Leftrightarrow F_0 \sin(\omega t) - b \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

• Λύση:

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$$

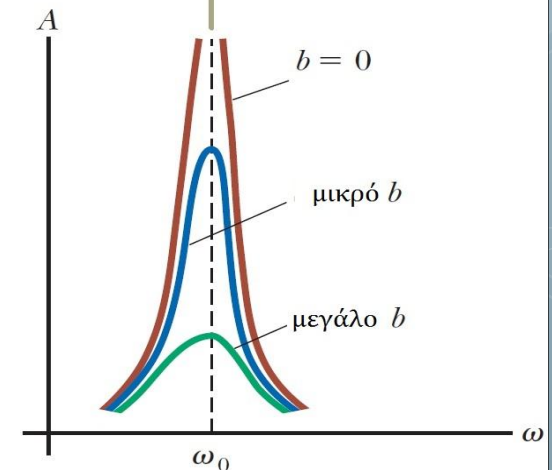
με

$$A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

• **Συντονισμός:** Όταν $\omega \approx \omega_0$ το πλάτος A γίνεται πολύ μεγάλο

• ω_0 : συχνότητα συντονισμού

Όταν η συχνότητα ω της εξωτερικής δύναμης διέγερσης ισούται με την ιδιοσυχνότητα ω_0 του ταλαντωτή, παρατηρείται συντονισμός.



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

ο Παραδείγματα – Μηχανική:



AP Photos

a



© Topham/The Image Works

b

- ο Η αρχική υπόθεση ήταν ότι ο κυματισμός του ανέμου στο οδόστρωμα δημιούργησε περιοδική δύναμη διέγερσης με συχνότητα ίση με τη συχνότητα συντονισμού της γέφυρας. Το πλάτος ταλάντωσης της γέφυρας αυξήθηκε πολύ με αποτέλεσμα την κατάρρευσή της.

https://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge

Απλή Αρμονική Ταλάντωση



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

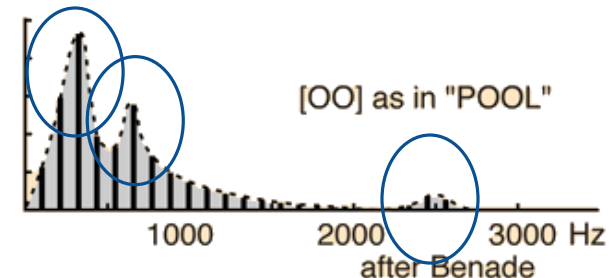
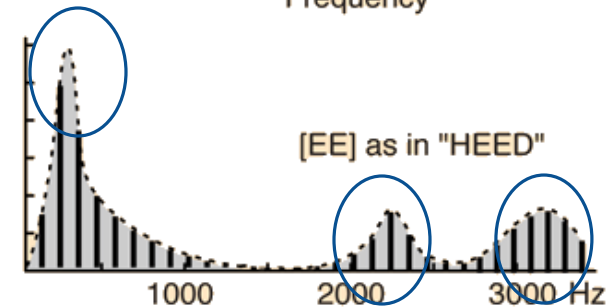
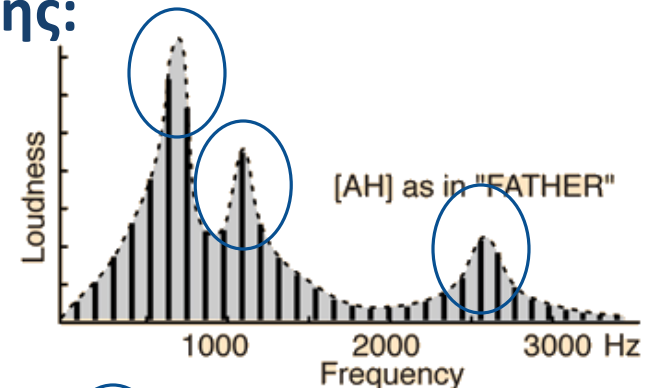
• Παραδείγματα – Παραγωγή Φωνής:

- Διαφορετικές συχνότητες συντονισμού για τα διαφορετικά φωνήματα

- /ου/, /α/, /ι/

• Φωνοσυντονισμός (formant)

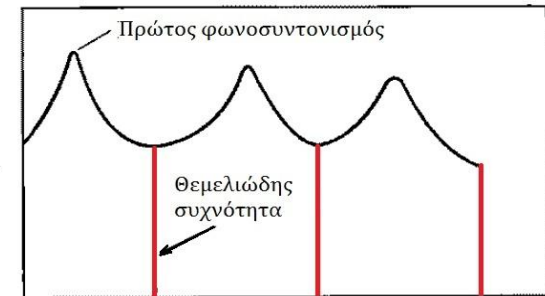
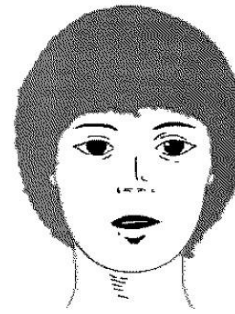
- Υψηλά πλάτη σε περιοχές συγκεκριμένων συχνοτήτων
 - Οι περιοχές αυτές εξαρτώνται από τη διάταξη της φωνητικής οδού



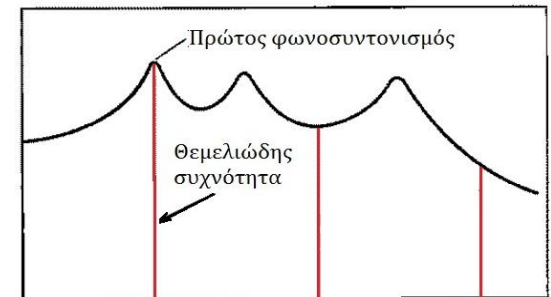
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

◉ Παραδείγματα – Παραγωγή Φωνής:

- ◉ Οι σοπράνο προσπαθούν να «φτιάξουν» τη φωνητική οδό τους έτσι ώστε η συχνότητα φωνοσυντονισμού να συμπίπτει με τη θεμελιώδη συχνότητα της φωνής τους, όταν θέλουν να παράξουν δυνατή φωνή (Σχήμα)
- ◉ Επίσης, οι τενόροι, με διαφορετική διαμόρφωση της φωνητικής οδού μπορούν να «φτιάξουν» ένα φωνοσυντονισμό στην περιοχή συχνοτήτων 2.5 – 3.0 kHz, όπου τα μουσικά όργανα συνήθως δεν έχουν ενέργεια, ώστε να ακούγονται περισσότερο αυτοί παρά τα μουσικά όργανα



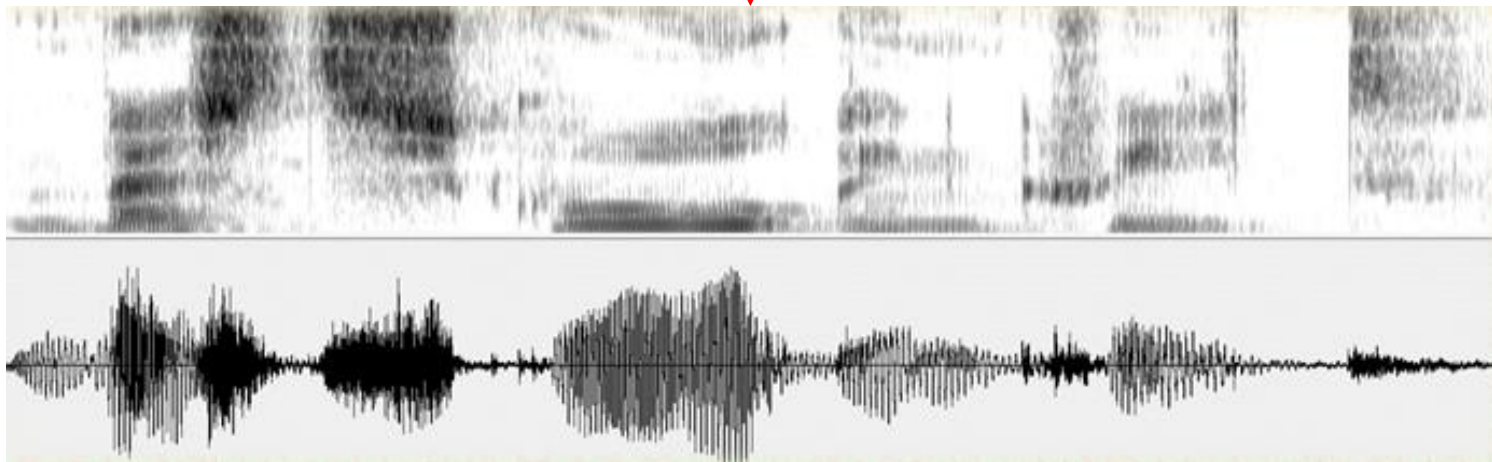
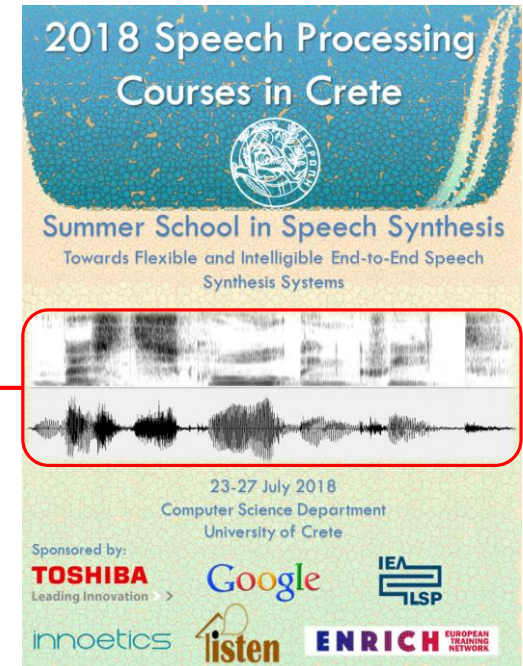
Συχνότητα



Συχνότητα

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

ο Παραδείγματα – Παραγωγή Φωνής:





Τέλος Διάλεξης
