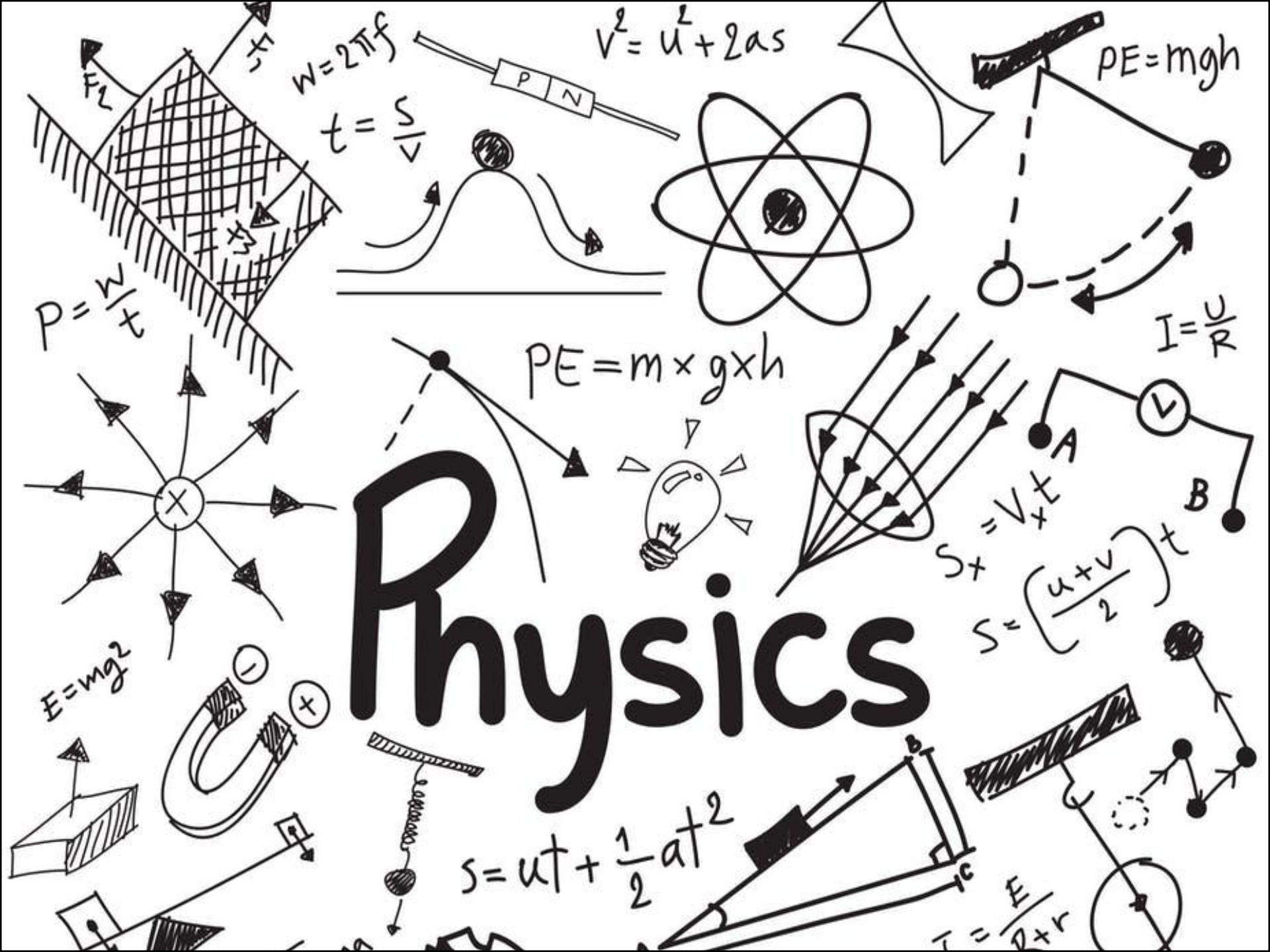

Physics
w=2πf
P N
v² = u² + 2as
PE=mgh
t = s/v
P = w/t
PE = m × g × h
I = U/R
A
B
V
Sx = Vx t
S = ((u+v)/2) t
E=mg²
s = ut + ½at²
I = E/(R+r)

Reminder…

- **Διαλέξεις**
  - **Προαιρετική** παρουσία!
  - Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
  - Δεν υπάρχουν απουσίες
  - Υπάρχει **σεβασμός** στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
  - **Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας**: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά

Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος

Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος

Ενέργεια Συστήματος

- Με όσα έχουμε δει ως τώρα
  - **Θέση**
  - **Ταχύτητα**
  - **Επιτάχυνση**
  - **Δύναμη**

και με αρχές όπως οι **νόμοι του Newton**, μπορούμε να λύσουμε πολλά προβλήματα…

- Όμως σε πιο σύνθετα προβλήματα αντιμετωπίζουμε δυσκολίες…
  - Π.χ. αν η δύναμη είναι μεταβαλλόμενη κατά μέτρο ή αν η διαδρομή κίνησης δεν είναι ευθύγραμμη
- Χρειαζόμαστε μια διαφορετική/συμπληρωματική προσέγγιση, που θα κάνει τα προβλήματα πιο απλά…

Ενέργεια Συστήματος

- Κάποιες έννοιες ίσως σας φανούν οικείες, αλλά στη Φυσική απαιτείται λίγο μεγαλύτερη ακρίβεια…
- Ας ξεκινήσουμε με την έννοια της **ενέργειας**
- Ιδέες που έχουμε από την καθημερινότητά μας για την ενέργεια
  - Βενζίνη και πετρέλαιο για μεταφορές και θέρμανση
  - Ηλεκτρισμός για φωτισμό και συσκευές
  - Φαγητό για κατανάλωση
- «Έχεις ενέργεια να πάμε για τρέξιμο?»
  - Ικανότητα να κάνεις κάποια δουλειά, κάποιο… **έργο**

Ενέργεια Συστήματος

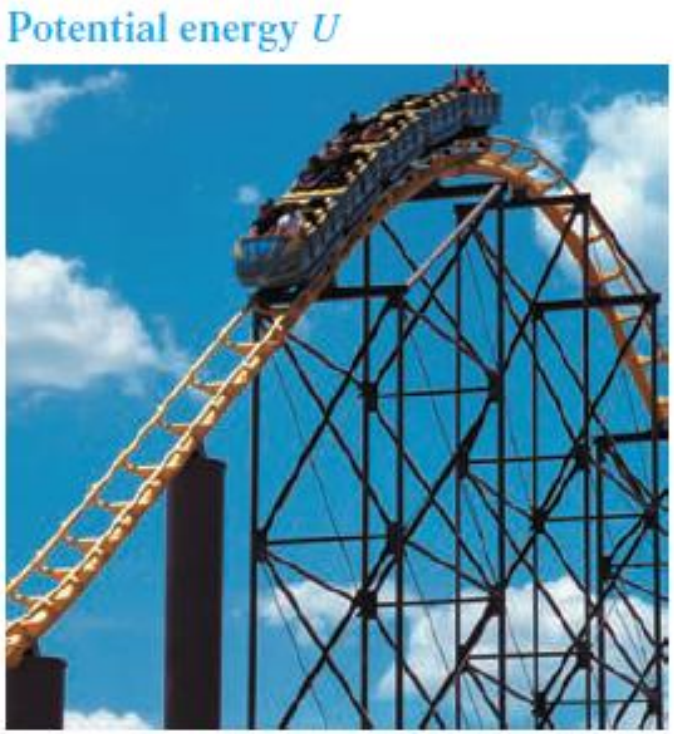
- Θα μας απασχολήσουν τρία είδη ενέργειας:
  - **Κινητική, Δυναμική, και Θερμική**

Kinetic energy K

- **Η κινητική ενέργεια είναι η ενέργεια της κίνησης.**
- **Όλα τα κινούμενα αντικείμενα έχουν κινητική ενέργεια.**
- **Όσο μεγαλύτερη μάζα ή όσο πιο γρήγορα κινείται ένα αντικείμενο, τόσο μεγαλύτερη η κινητική του ενέργεια.**

Ενέργεια Συστήματος

- Θα μας απασχολήσουν τρία είδη ενέργειας:
  - **Κινητική, Δυναμική, και Θερμική**



- **Η δυναμική ενέργεια είναι αποθηκευμένη ενέργεια που σχετίζεται με τη θέση ενός αντικειμένου.**
- **Το τρενάκι της εικόνας έχει βαρυτική δυναμική ενέργεια που εξαρτάται από τη θέση του (ύψος) πάνω από το έδαφος.**
- **Θα τη σχετίσουμε με τη δύναμη του βάρους (αλλά και με άλλες που θα δούμε).**

Ενέργεια Συστήματος

- Θα μας απασχολήσουν τρία είδη ενέργειας:
  - **Κινητική, Δυναμική, και Θερμική**

Thermal energy E_{th}

- **Η θερμική ενέργεια είναι το άθροισμα όλων των μικροσκοπικών κινητικών και δυναμικών ενεργειών των ατόμων και δεσμών που συνιστούν ένα σώμα.**
- **Ένα σώμα έχει μεγαλύτερη θερμική ενέργεια όταν είναι ζεστό παρά όταν είναι κρύο.**
- **Θα τη σχετίσουμε με δυνάμεις τριβής.**

Ενέργεια Συστήματος

- Τα παραπάνω δεν αποτελούν ορισμό της ενέργειας
  - …είναι απλά **παραδείγματα**
- Γενικότερα, είναι δύσκολο να οριστεί με ακρίβεια η ενέργεια
  - Είναι περισσότερο… «αφηρημένη» έννοια
  - Θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελεί **έναν αριθμό που σχετίζεται με την κατάσταση ενός… συστήματος**
  - **Αν η χρήση αυτών των αριθμών γίνει σωστά, μπορούμε να προβλέψουμε αποτελέσματα πειραμάτων και να κατασκευάσουμε μηχανές!**
- Κάθε διαδικασία στη φύση αφορά ενέργεια και μεταφορές/ μετασχηματισμούς αυτής

Ενέργεια Συστήματος

- Ξεκινάμε τη συζήτηση θεωρώντας ένα νέο μοντέλο, το **σύστημα**

- Προς το παρόν, ας δούμε τι είναι ένα **σύστημα** και πώς σχετίζεται με την ενέργεια
  - **Συστήματα** μπορεί να είναι:
    - **Ένα ή περισσότερα σώματα**
    - **Μια περιοχή του χώρου**
    - Κάτι που αλλάζει σχήμα και μέγεθος
    - **Συνδυασμός των παραπάνω**

Προς εξέταση

- Αργότερα, θα μιλήσουμε για **μοντέλα ανάλυσης** ενός συστήματος
  - …αντί ενός μόνο σώματος, που είχαμε ως τώρα

Ενέργεια Συστήματος

- Πρώτο βήμα είναι η **αναγνώριση** του συστήματος
- Όταν συζητάμε για ένα σύστημα, είτε αγνοούμε (**απομονωμένο** σύστημα) είτε ενδιαφερόμαστε (**μη απομονωμένο** σύστημα) για τις **ενεργειακές** αλληλεπιδράσεις του περιβάλλοντος με το σύστημα
  - Ακόμα δε γνωρίζουμε ποιές είναι αυτές, με τι σχετίζονται, και πώς τις βρίσκουμε... (απλώς υποθέτουμε – υπομονή ☺)
  - Επίσης υποθέτουμε ότι κάποιες **δυνάμεις** δρουν στο σύστημα και του **μεταβάλλουν την ενεργειακή κατάσταση**
- Ανεξαρτήτως του συστήματος που επιλέγουμε πάντα υπάρχει το **όριο/σύνορο συστήματος**:
  - Μια (συνήθως) φανταστική επιφάνεια που χωρίζει το σύστημα με το περιβάλλον του
  - Π.χ. σε ένα κιβώτιο, η επιφάνειες του κιβωτίου

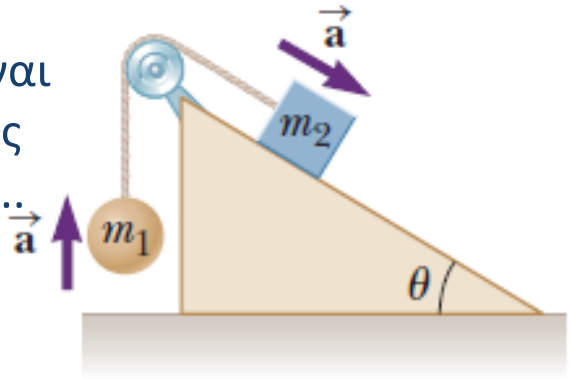
Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα 1:**
  - Σύστημα {σπόγγος} : **μονομελές**
  - **Μη απομονωμένο** (ασκείται **εξωτερική** δύναμη που το κινεί – **μεταβάλλει την κινητική του ενέργεια**, καθώς υπάρχει και η δύναμη **τριβής** με την επιφάνεια που ολισθαίνει, η οποία αυξάνει τη **θερμική ενέργεια** του συστήματος – και της επιφάνειας)
    - Επιφάνεια σπόγγου = σύνορο συστήματος
    - Η δύναμη (μέσω του χεριού) και η τριβή είναι μια ενεργειακή επιρροή στο σύστημα από το περιβάλλον του, και οι οποίες ασκούνται επάνω στο σύνορο (επιφάνεια) του συστήματος

- **Παράδειγμα 2:**
  - Σύστημα {σπόγγος, τραπέζι} : **πολυμελές**
  - **Μη απομονωμένο** (ασκείται **εξωτερική** δύναμη που το κινεί – μεταβάλλει την κινητική του ενέργεια, αλλά πλέον η **τριβή** αποτελεί **εσωτερική** δύναμη του συστήματος)
    - Ασκείται από ένα μέλος του συστήματος σε ένα άλλο

Ενέργεια Συστήματος

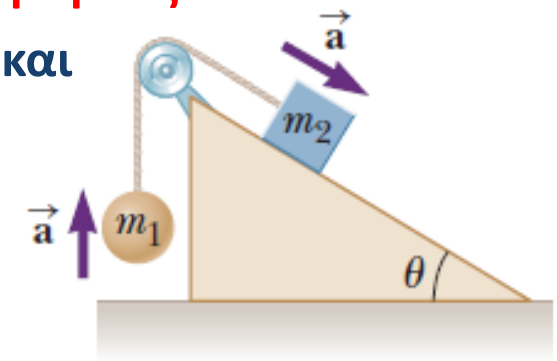
- **Παράδειγμα 3:**
  - Σύστημα {σώματα, σχοινί} : **πολυμελές και μη απομονωμένο**!
    - Οι δυνάμεις από το σχοινί επιταχύνουν τα σώματα (άρα αλλάζουν την **κινητική** τους ενέργεια) και είναι **εσωτερικές**, **δεν** ανήκουν στο περιβάλλον του
    - Αντίθετα, οι **δυνάμεις του βάρους** τους είναι **εξωτερικές**! Θα δούμε αργότερα πως αυτές αλλάζουν κάτι «ενεργειακό» στο σύστημα...
    - Το ίδιο και η **δύναμη τριβής** από το κεκλιμένο...



- **Παράδειγμα 4:**
  - Σύστημα {σώματα, σχοινί, Γη} : **πολυμελές και μη απομονωμένο**!
    - Όλες οι δυνάμεις που πιθανόν μεταβάλλουν την ενέργειά του είναι **εσωτερικές, πλην της δύναμης τριβής!**
    - **Μόνο αυτή** ανήκει στο περιβάλλον του

Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα 5:**
  - Σύστημα {σώματα, σχοινί, κεκλιμένο} : **πολυμελές και μη απομονωμένο**!
    - Όλες οι δυνάμεις που πιθανόν μεταβάλλουν την ενέργειά του είναι **εσωτερικές, πλην της δύναμης του βάρους**
    - **Μόνο αυτή ανήκει στο περιβάλλον (Γη) και θα δούμε αργότερα ότι πράγματι μεταβάλλει ενεργειακά το σύστημα**

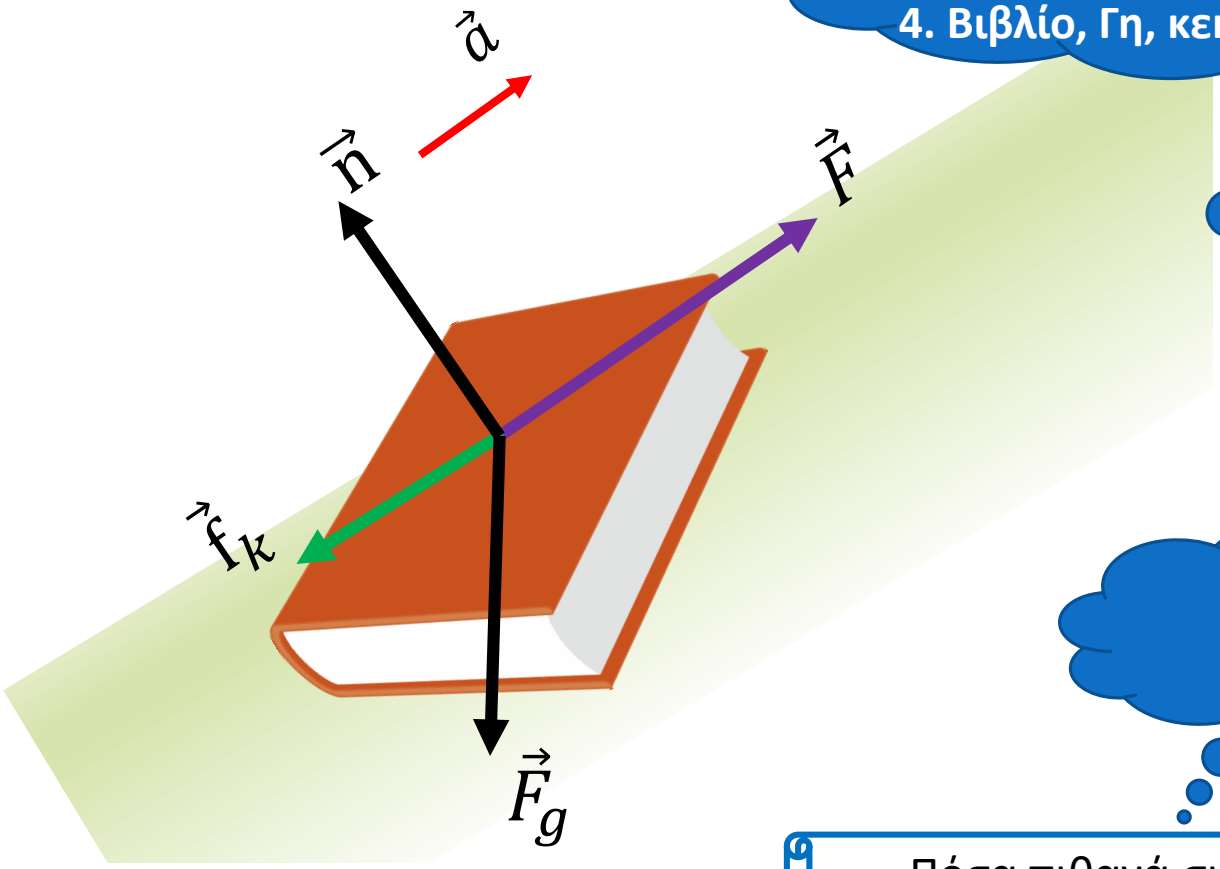


- **Παράδειγμα 6:**
  - Σύστημα {σώματα, σχοινί, Γη, κεκλιμένο} : **πολυμελές κι απομονωμένο**!
  - Όλες οι δυνάμεις που πιθανόν μεταβάλλουν την ενέργειά του είναι **εσωτερικές : καμιά** δεν ανήκει στο περιβάλλον του

Ενέργεια Συστήματος

- **Quiz:**

1.Βιβλίο
2. Βιβλίο, Γη
3. Βιβλίο, κεκλιμένο
4. Βιβλίο, Γη, κεκλιμένο



4

Πόσα πιθανά συστήματα μπορείτε να διαλέξετε?

Ενέργεια Συστήματος

Ταξινόμηση Δυνάμεων και Συστημάτων

Ένα σύστημα μπορεί να ανήκει σε μια από δυο κατηγορίες:

- **Απομονωμένο**: όταν το σύστημα **δεν** "επικοινωνεί" ενεργειακά με το περιβάλλον του.
- **Μη απομονωμένο**: όταν το σύστημα "επικοινωνεί" ενεργειακά με το περιβάλλον του.

Οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σύστημα διακρίνονται σε μια από δυο κατηγορίες:

- **Εξωτερικές**: όταν δρουν πάνω σε ένα ή περισσότερα μέλη ενός συστήματος και η προέλευση της δύναμης ανήκει στο περιβάλλον του συστήματος.
- **Εσωτερικές**: όταν δρουν μεταξύ των μελών του συστήματος, δηλ. από ένα μέλος του σε ένα άλλο.

Επίσης, τα συστήματα μπορεί να είναι **μονομελή** ή **πολυμελή**, αν στο σύστημα υπάρχει ένα ή περισσότερα μέλη, αντίστοιχα.

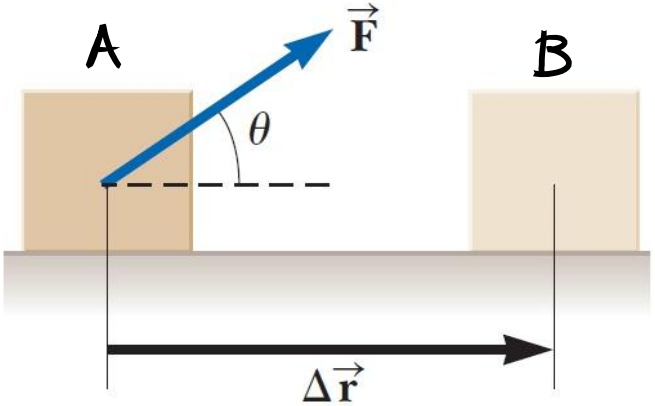
Ενέργεια Συστήματος

© Cengage Learning/Charles D. Winters

- Ας ξεκινήσουμε από **μονομελή** συστήματα
- Αναγνωρίζουμε το σύστημα: {σπόγγος}, μη απομονωμένο
  - Η εξωτερική δυναμη που ασκείται από το χέρι επιταχύνει το σύστημα, δηλ. του μεταβάλλει την κινητική του ενέργεια
- Ερώτημα: **πόσο αποτελεσματικοί είμαστε με την εξωτερική δύναμη που βάζουμε (όμοια σε μέτρο σε όλες τις περιπτώσεις) στο να κινήσουμε το σπόγγο (χωρίς τριβές);**
  - **Δηλ. να του αλλάξουμε την κινητική του κατάσταση!**
- Σε ποια περίπτωση τα καταφέρνουμε καλύτερα;
  - Μέτρο δύναμης – Κατεύθυνση – Μετατόπιση

Ενέργεια Συστήματος

- Ας μείνουμε σε ένα τέτοιο απλό παράδειγμα
  - Ένα σύστημα ενός σώματος μετατοπίζεται σε ευθεία γραμμή από μια **σταθερή** δύναμη $\vec{F}$ που του ασκείται υπό γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο



- Το **έργο (Work) W** που **παράγεται στο σύστημα από τη δύναμη** που ασκείται εξωτερικά στο σύστημα ορίζεται ως
  - το γινόμενο του μέτρου της σταθερής **δύναμης** $\vec{F}$, του μέτρου της **μετατόπισης** $\Delta\vec{r}$ του σημείου εφαρμογής της δύναμης, και του **συνημιτόνου** της **γωνίας** θ ανάμεσα στα δυο προηγούμενα:

$$W \equiv |\vec{F}||\Delta\vec{\mathrm{r}}|\cos(\theta) = \mathrm{F}\,\Delta\mathrm{r}\cos(\theta)$$

Ενέργεια Συστήματος

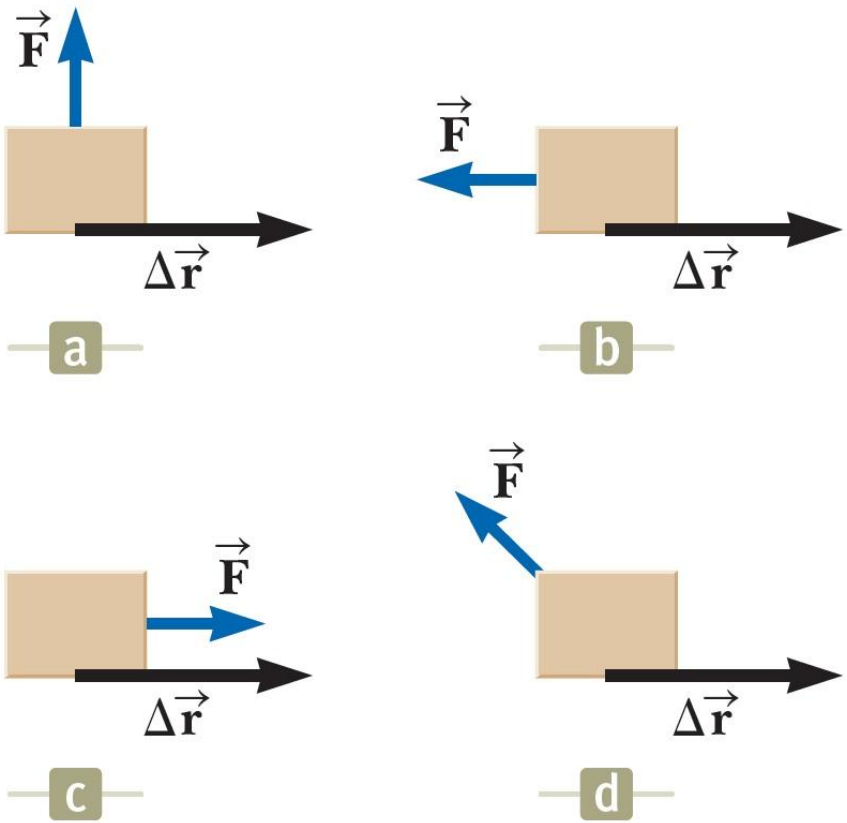
$$W \equiv F\,\Delta r\cos(\theta)$$

- **Quiz:** Κατατάξτε τις παρακάτω περιπτώσεις σε αύξουσα τιμή έργου

$W = 0$ $W > 0$

b, d, a, c

$W < 0$



Ενέργεια Συστήματος

- Διακρίνετε μια διαφορά με την καθημερινή σας εμπειρία για το έργο;
  - Κρατήστε μια βαριά μπάλα στο ύψος των ώμων σας για 2’
  - Στο τέλος, θα έχετε κουραστεί και θα θεωρείτε ότι «παράξατε αρκετό έργο» επάνω στην μπάλα
  - Η αλήθεια είναι ότι ο ορισμός που μόλις είδαμε θα σας πει ότι $W = 0$
    - Γιατί απλά υποστηρίζατε την μπάλα, δεν τη μετακινήσατε
- Επίσης, δείτε ξανά την (c) εικόνα με το σπόγγο.

Ενέργεια Συστήματος

- Η μαθηματική έκφραση

$$\boldsymbol{W} \equiv \boldsymbol{F}\,\mathbf{\Delta r}\,\mathbf{cos(\theta)}$$

μοιάζει γνωστή…

- Προκύπτει από το μαθηματικό εργαλείο που λέγεται

εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

- Έστω δυο διανύσματα $\vec{A}, \vec{B}$. Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μια βαθμωτή ποσότητα (= αριθμός) που ισούται με

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = |\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{B}}|\,\mathbf{cos(\theta)}$$

- Άρα το έργο $\boldsymbol{W}$ που παράγεται σε ένα σώμα από μια δύναμη $\vec{\mathbf{F}}$ για μετατόπιση $\mathbf{\Delta}\vec{\boldsymbol{r}}$ μπορεί να γραφεί ως $\vec{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{\Delta}\vec{\boldsymbol{r}}$!

Ενέργεια Συστήματος

- Θυμηθείτε από τις **ιδιότητες** του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων ότι:

  - $\vec{F} \perp \Delta\vec{r} \Rightarrow \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \mathrm{W} = 0$
  - $\vec{F} \uparrow\uparrow \Delta\vec{r} \Rightarrow \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \left|\vec{F}\right||\Delta\vec{r}| = F\Delta r \Rightarrow \mathrm{W} = F\Delta r$
  - $\vec{F} \uparrow\downarrow \Delta\vec{r} \Rightarrow \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = -\left|\vec{F}\right||\Delta\vec{r}| = -F\Delta r \Rightarrow \mathrm{W} = -F\Delta r$

- Αυτές οι ιδιότητες θα φανούν πολύ χρήσιμες, καθώς αναλύουμε δυνάμεις σε $x -$ και $y -$ συνιστώσες!
  - Με αυτόν τον τρόπο, όλες οι συνιστώσες θα είναι παράλληλες ή κάθετες στη μετατόπιση $\Delta\vec{r}$

Ενέργεια Συστήματος

- Μονάδα μέτρησης έργου

$$N \cdot m = J \text{ (Joule)}$$

- Μπορούμε να πούμε ότι «**το έργο W αποτελεί ενέργεια που μεταφέρεται προς ή από ένα σύστημα μέσω μιας δύναμης που δρα στο σύστημα**»

$$\textbf{\textit{έργο}} = \textbf{\textit{ενέργεια}}$$

$$\textbf{\textit{παραγωγή έργου}} = \textbf{\textit{μεταφορά ενέργειας}}$$

- Αν W είναι το έργο που παράγεται σε ένα σύστημα, τότε
  - $\boldsymbol{W > 0}$**: Έργο θετικό** → Μεταφορά ενέργειας <u>προς</u> το σύστημα
  - $\boldsymbol{W < 0}$**: Έργο αρνητικό** → Μεταφορά ενέργειας <u>από</u> το σύστημα

Ενέργεια Συστήματος

- **Έργο θετικό** → Μεταφορά ενέργειας <u>προς</u> το σύστημα
  - Σπρώχνουμε και επιταχύνουμε οριζόντια ένα κιβώτιο
  - Σηκώνουμε ένα βιβλίο από το τραπέζι σε ένα ράφι
  - Το έργο που παράγουμε πάνω στο (κιβώτιο/βιβλίο) είναι θετικό
  - Δύναμη στο (κιβώτιο/βιβλίο) παράλληλη με τη μετατόπιση
- **Έργο αρνητικό** → Μεταφορά ενέργειας <u>από</u> το σύστημα
  - Προσπαθούμε να συγκρατήσουμε ένα άλογο με το λάσο
  - Επιστρέφουμε ένα βιβλίο από το ράφι στο τραπέζι
  - Το έργο που παράγουμε πάνω στο (κιβώτιο/βιβλίο) είναι αρνητικό
  - Δύναμη στο (άλογο/βιβλίο) αντίθετη στη μετατόπιση

Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα**
- Ένα σωματίδιο στο xy επίπεδο υπόκειται σε μετατόπιση $\Delta\vec{r} = (2.0\ m)\ \vec{\boldsymbol{\imath}} + (3.0\ m)\ \vec{\boldsymbol{\jmath}}$ m λόγω μιας **σταθερής** δύναμης $\vec{F} = (5.0\ N)\ \vec{\boldsymbol{\imath}} + (2.0\ N)\ \vec{\boldsymbol{\jmath}}$ που ασκείται στο σωματίδιο. Βρείτε το έργο που παράγεται από τη δύναμη στο σωματίδιο.

Είναι $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = (5\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j})$

$= 10\vec{i}\cdot\vec{i} + 15\vec{i}\cdot\vec{j} + 4\vec{i}\cdot\vec{j} + 6\vec{j}\cdot\vec{j}$

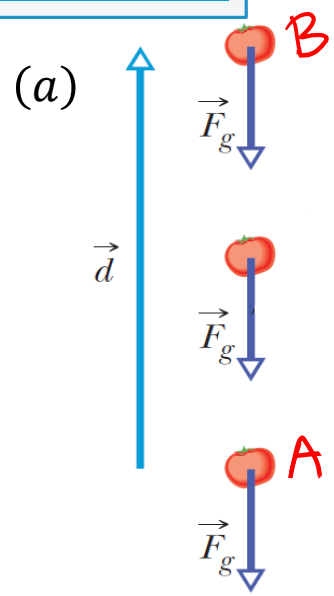
$= 10 \cdot 1 + 15 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1$

$= 16\ J$

Ενέργεια Συστήματος

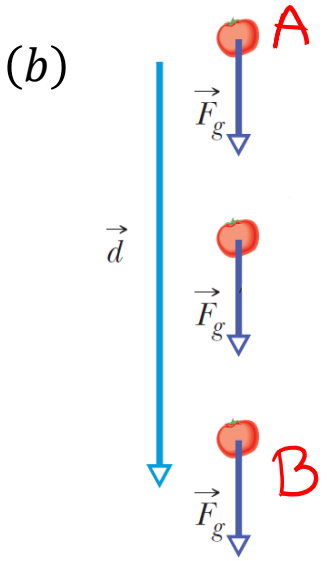
- **Έργο δύναμης βάρους**
  - Όταν ένα σώμα ανέρχεται κατακόρυφα (α):

$$W_{F_g} = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = F_g d \cos(\pi)$$
$$= -F_g d = -mgd$$



  - Όταν ένα σώμα κατέρχεται κατακόρυφα (b):

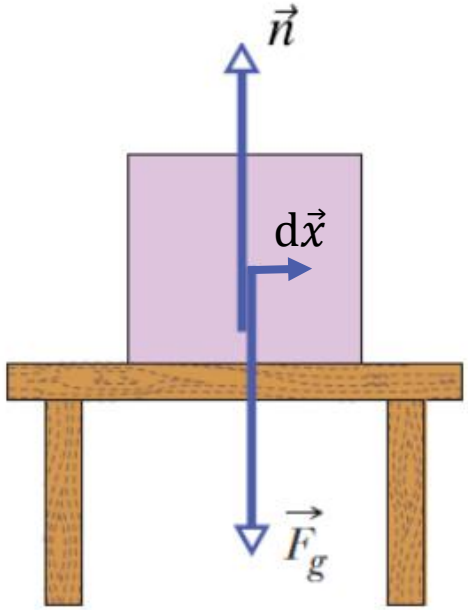
$$W_{F_g} = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = F_g d \cos(0)$$
$$= F_g d = mgd$$



  - Παρατηρήστε τα πρόσημα. «Βγάζουν» νόημα?

Οι Νόμοι της Κίνησης

- **Έργο κάθετης δύναμης** από επιφάνεια
  - Για μια οποιαδήποτε μετατόπιση $d\vec{x}$ σε οποιαδήποτε επιφάνεια, το έργο της κάθετης δύναμης $\vec{\boldsymbol{n}}$ θα ισούται με μηδέν!

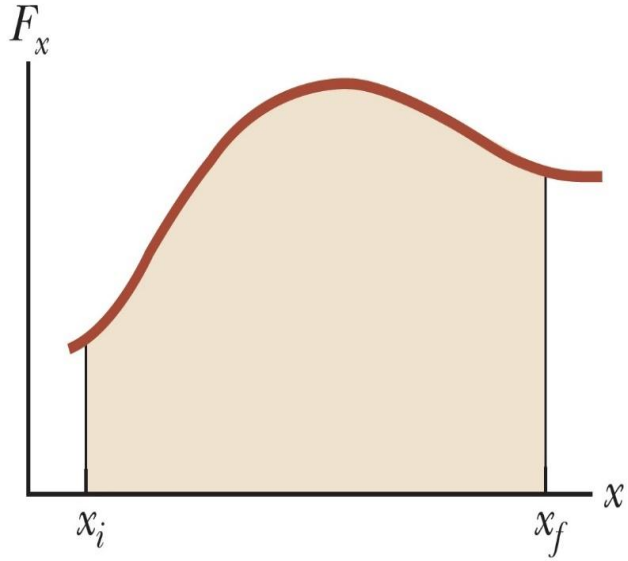


$$dW_n = \vec{n} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = n\, dx \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

  - Άρα το έργο της κάθετης δύναμης ισούται με μηδέν!
    - …όταν το σώμα κινείται σε ακίνητη, άκαμπτη επιφάνεια

Ενέργεια Συστήματος

- Η συζήτησή μας αφορούσε έργο υπό **σταθερή δύναμη**
  - Τι γίνεται όταν η δύναμη είναι **μεταβαλλόμενη** αλλά η κίνηση εξακολουθεί να είναι ευθύγραμμη;
  - Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις που είδαμε!
  - Ας πούμε ότι μεταβάλλεται μόνο το μέτρο της – τι συμβαίνει τότε?



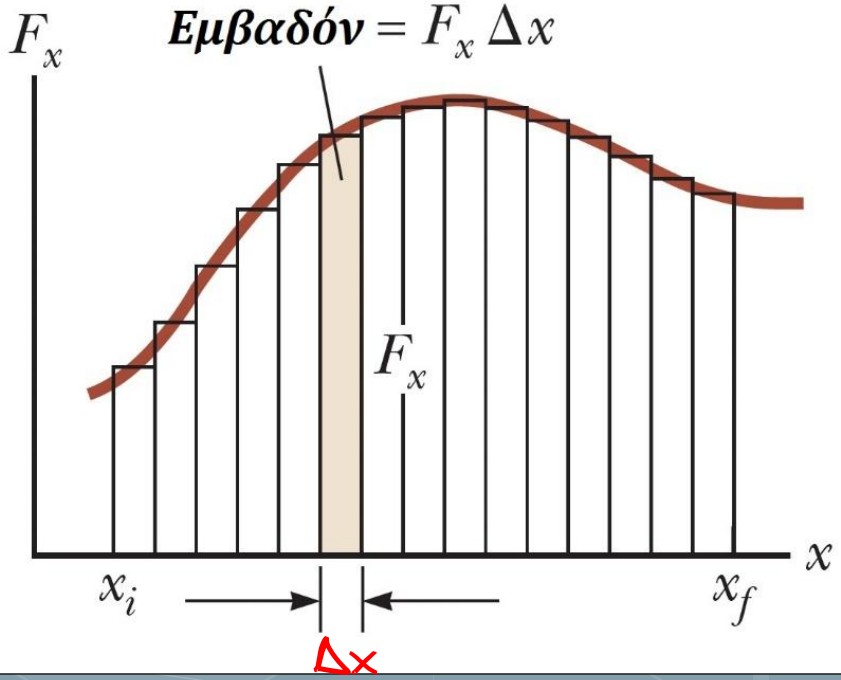
- Παράδειγμα:
  - Η x-συνιστώσα της δύναμης μεταβάλλεται κατά την κίνηση σε νοητό άξονα $x'x$

Ενέργεια Συστήματος

- Μπορούμε να θεωρήσουμε τη δύναμη ως **τμηματικά** (για πολύ μικρά διαστήματα Δx) **σταθερή**!

- Προσέγγιση:
  - Χωρίζουμε το διάστημα σε μικρά διαστήματα Δx
  - Σε κάθε τέτοιο διάστημα έχουμε έργο W_j, που ισούται με το εμβαδόν του αντίστοιχου παρα-ληλλογράμμου

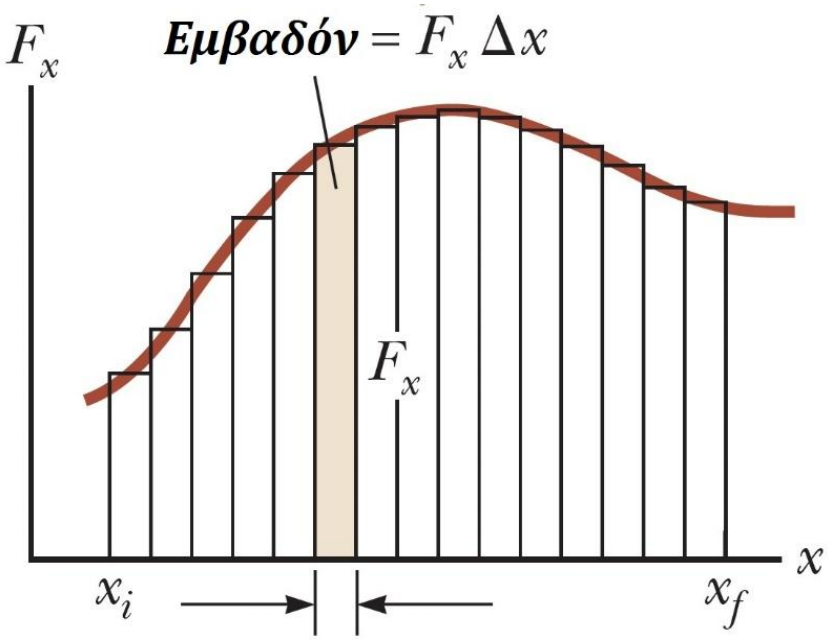
$$W_j = F_x \Delta x$$



Ενέργεια Συστήματος

- Μπορούμε να θεωρήσουμε τη δύναμη ως **τμηματικά** (για πολύ μικρά διαστήματα Δx) **σταθερή**!

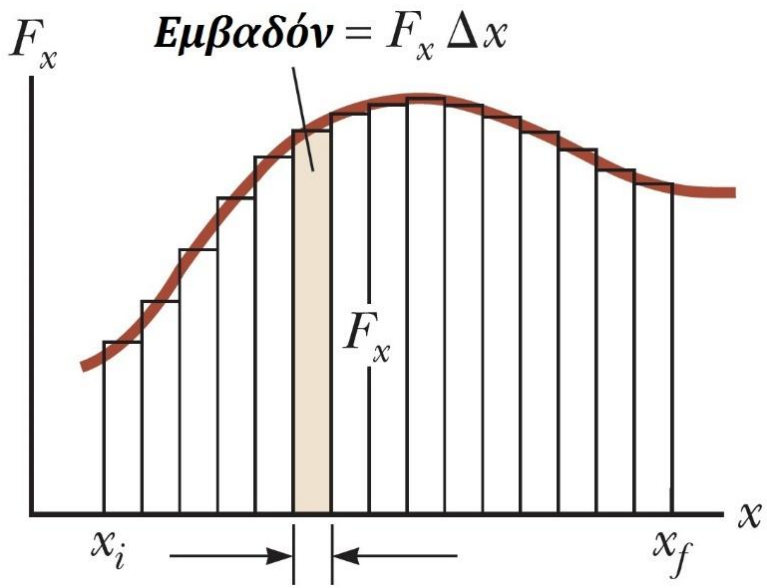
- Παράδειγμα:
  - Το συνολικό έργο είναι $\approx \sum_j W_j$
  - Όταν τα διαστήματα γίνονται απειροστά μικρά ($\Delta x \to 0$), τότε το συνολικό έργο ισούται με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη!

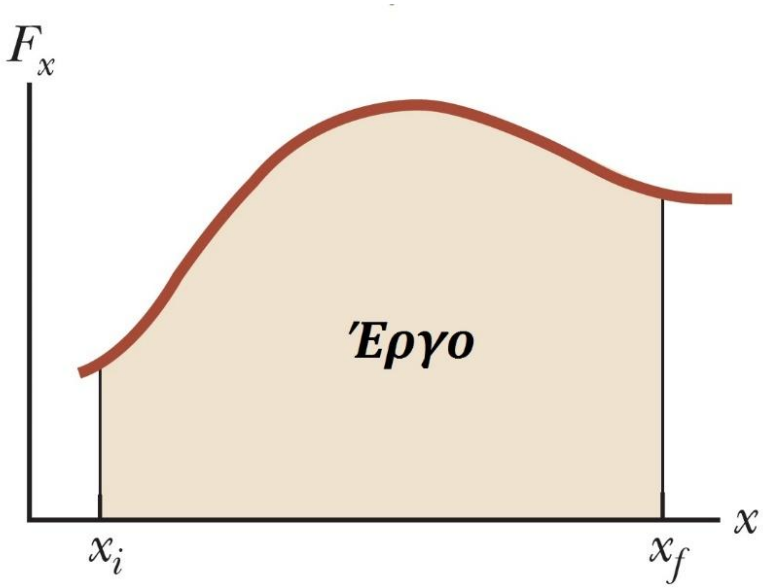


Ενέργεια Συστήματος

- Με μαθηματικά,

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} F_x \cos(0)\, dx = \int \vec{F}_x \cdot d\vec{x}$$





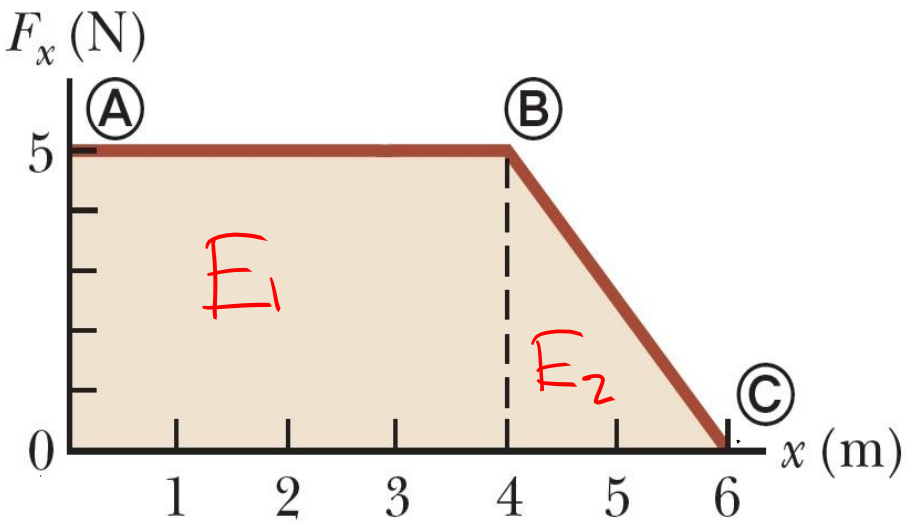
Ενέργεια Συστήματος

- **<u>Παράδειγμα:</u>**
- Μια δύναμη ασκείται σε ένα σωματίδιο, η οποία μεταβάλλεται με την απόσταση, όπως στο Σχήμα. Υπολογίστε το έργο που παράγεται από τη δύναμη στο σωματίδιο όταν αυτό κινείται από $x = 0$ ως $x = 6$ m.

$E_1 = 20$ J

$E_2 = 5$ J

$W = E_1 + E_2 = 25$ J



Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**

Άλλη λύση: ("κακή")

$$W = \int_0^6 F_x\,dx = \int_0^4 5\,dx + \int_4^6 \left(-\frac{5}{2}x + 15\right)dx$$

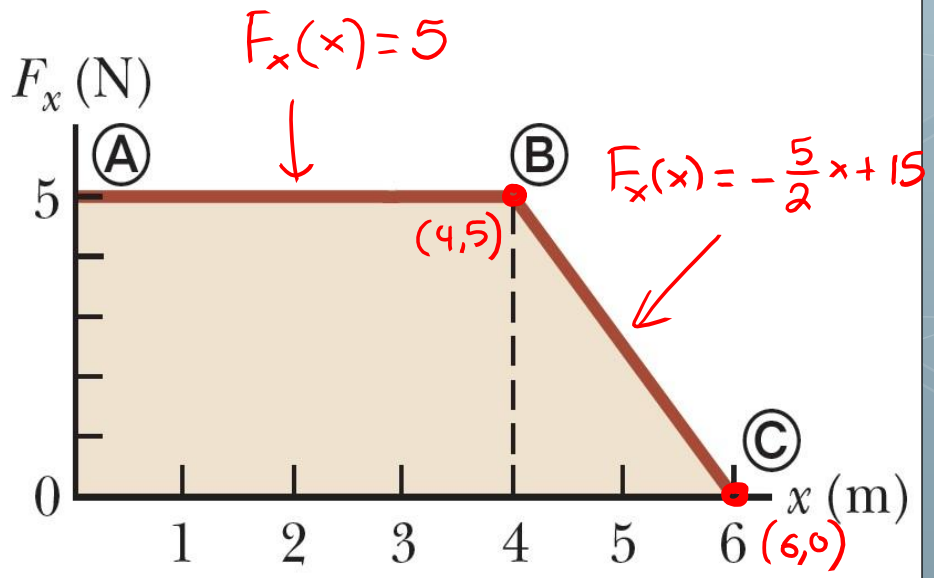
$$= 5x\Big|_0^4 + \left(-\frac{5}{4}x^2 + 15x\right)\Big|_4^6$$

$$= 20 - 0 + \left(-45 + 90 - (-20 + 60)\right)$$

$$= 20 + (45 - 40)$$

$$= 20 + 5$$

$$= 25\ \text{J}$$



Ενέργεια Συστήματος

- Ας μελετήσουμε μια πολύ… δημοφιλή δύναμη **<u>μεταβαλλόμενου μέτρου</u>**

- Θα κατανοήσουμε τη λειτουργία της και θα υπολογίσουμε το έργο που **παράγει** πάνω σε ένα σύστημα...
  - …που θα καθορίσουμε **εμείς** ποιο θα είναι

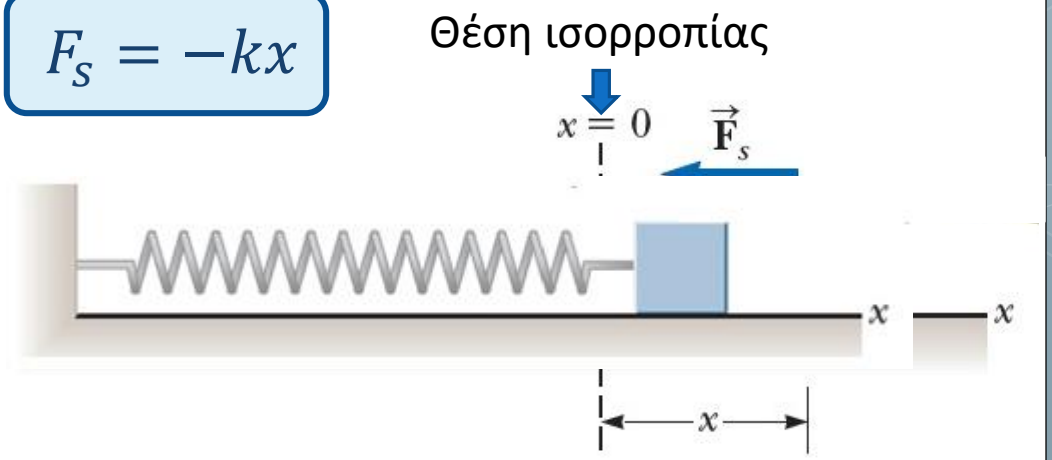
- Ταυτόχρονα, θα διατυπώσουμε κλειστούς τύπους για το έργο που σχετίζεται με αυτή τη δύναμη

- Τέλος, θα δούμε τη σχέση του έργου με τις αντίστοιχες ενέργειες που θα ορίσουμε

Ενέργεια Συστήματος

- **Δύναμη ελατηρίου**
  - Σύστημα = {σώμα} – δεμένο στο ελατήριο
  - Δύναμη $\vec{F}_s$ εγείρεται επάνω στο σώμα από το ελατήριο όταν το τελευταίο εκτείνεται ή συμπιέζεται
  - Η δύναμη μεταβάλλεται ανάλογα με τη απομάκρυνση από τη **θέση ισορροπίας (θέση φυσικού μήκους)**
  - Δύναμη ελατηρίου στο σώμα: ***Νόμος του Hooke***

$$\boxed{F_s = -kx}$$



  - Ελατήρια: **Αποθηκεύουν** ή **απορροφούν** ενέργεια!

Ενέργεια Συστήματος

$$F_s = -kx$$

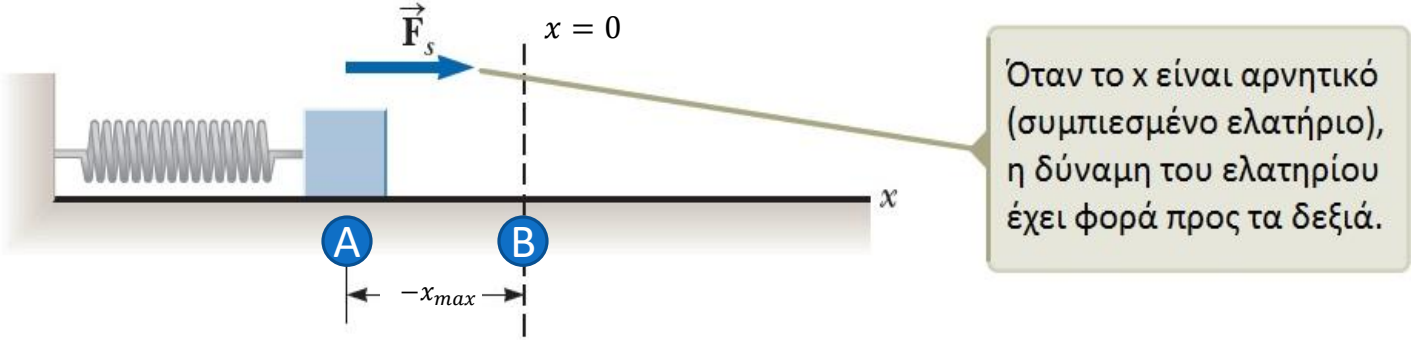
- **Δύναμη ελατηρίου**
  - Η τιμή της σταθεράς k είναι μια ένδειξη της σκληρότητας του ελατηρίου
    - Μεγάλο k → σκληρό ελατήριο
    - Μικρό k → μαλακό ελατήριο
  - Μονάδες της σταθεράς k είναι $\mathbf{N/m}$
  - Διανυσματική μορφή για οριζόντια κίνηση

$$\vec{F}_s = F_s\vec{\boldsymbol{\imath}} = -kx\vec{\boldsymbol{\imath}}$$

Ενέργεια Συστήματος

$$F_s = -kx$$

- Ας θεωρήσουμε ότι το ελατήριο συμπιέζεται στη μέγιστη τιμή (θέση $x_i = x_A = -x_{max}$) και αφήνεται ελεύθερο.



- Έστω η τελική θέση $x_f = x_B = 0$ (θέση ισορροπίας)

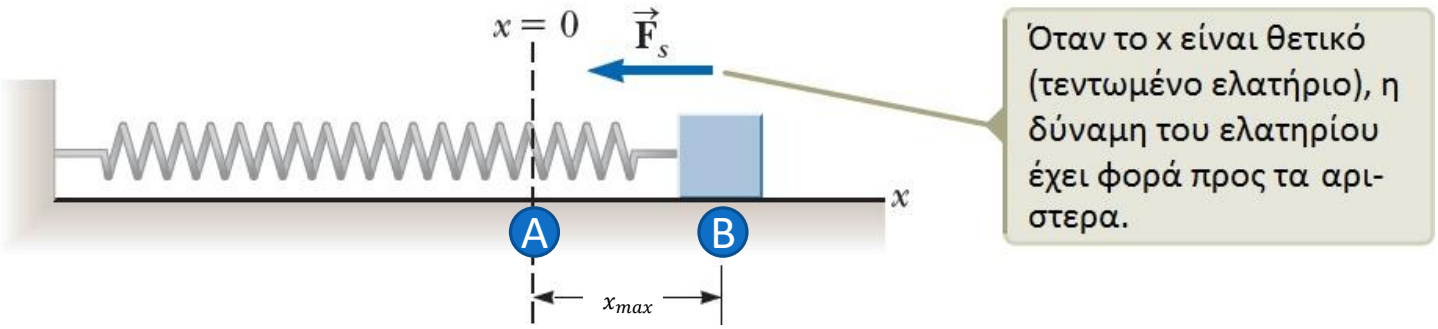
- Το έργο της δύναμης του ελατηρίου επάνω στο σώμα ισούται με

$$W_s = \int \vec{F}_s \cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\vec{\imath}) \cdot (dx\vec{\imath}) = \int_{-x_{max}}^{0} (-kx)dx = -\frac{kx^2}{2}\Big|_{-x_{max}}^{0} = \frac{1}{2}kx_{max}^2$$

Ενέργεια Συστήματος

$$F_s = -kx$$

- Ας θεωρήσουμε ότι το ελατήριο συνεχίζει την πορεία του, περνώντας από τη θέση ισορροπίας (θέση $x_i = x_A = 0$)



- Έστω η τελική θέση $x_f = x_B = x_{max}$

- Το έργο της δύναμης του ελατηρίου επάνω στο σώμα ισούται με

$$W_s = \int \vec{F}_s \cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\vec{\boldsymbol{\imath}}) \cdot (dx\vec{\boldsymbol{\imath}}) = \int_{0}^{x_{max}} (-kx)dx = -\frac{1}{2}kx_{max}^2$$

Ενέργεια Συστήματος

$$F_s = -kx$$

- Άρα το συνολικό έργο της δύναμης ελατηρίου επάνω στο σώμα **για μετατόπιση από $-x_{max}$ ως x_{max}** είναι μηδέν!!
  - Το ίδιο ισχύει για οποιεσδήποτε συμμετρικές ως προς το μηδέν θέσεις

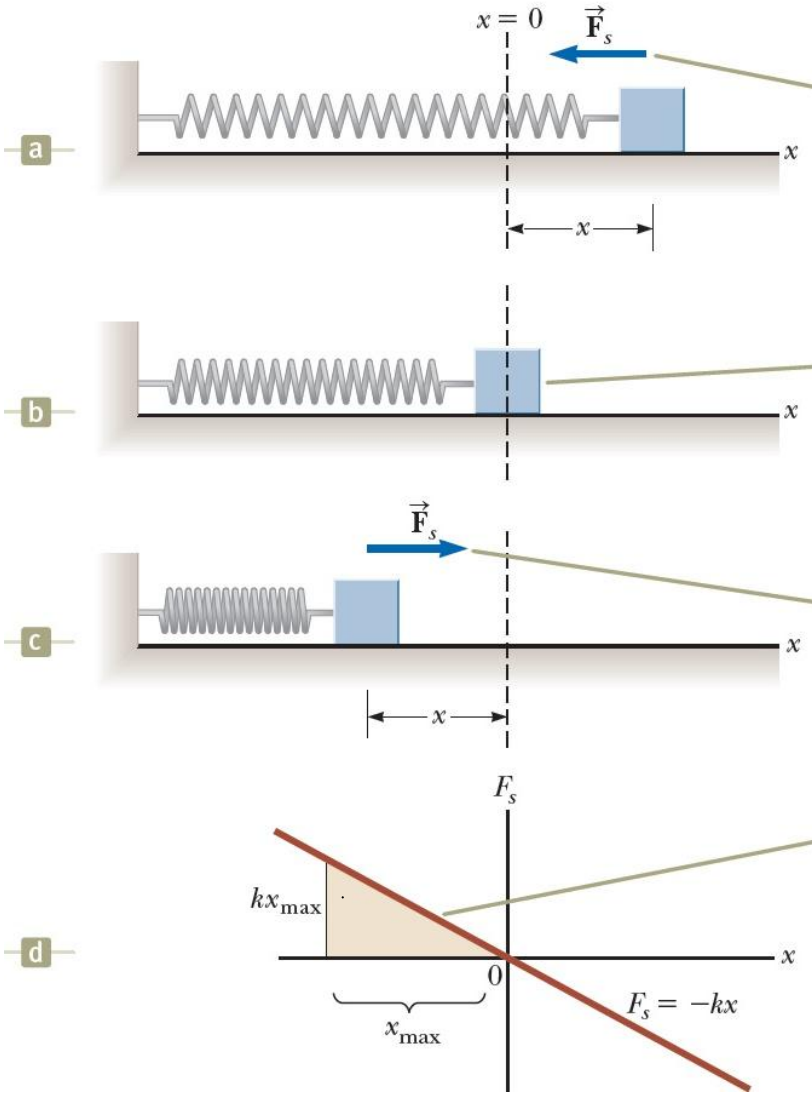
- Όμως για μια **οποιαδήποτε** μετατόπιση από μια θέση x_i σε μια θέση x_f, ισχύει:

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

που δεν είναι απαραίτητα ίσο με το μηδέν…

- Η παραπάνω σχέση δίνει το **έργο της δύναμης του ελατηρίου από μια οποιαδήποτε θέση ως μια οποιαδήποτε άλλη**

Ενέργεια Συστήματος



Όταν το x είναι θετικό (τεντωμένο ελατήριο), η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά προς τα αρι-στερα.

Όταν το x είναι μηδέν (στο φυσικό μήκος του ελατηρίου), η δύναμη του ελατηρίου είναι μηδέν.

Όταν το x είναι αρνητικό (συμπιεσμένο ελατήριο), η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά προς τα δεξιά.

Το έργο που παράγεται από τη δύναμη του ελατηρίου επάνω στο σώμα, όσο αυτό κινείται από $-x_{max}$ στο 0, είναι το εμβαδόν της γραμμοσκι-ασμένης περιοχής: $\frac{1}{2}kx_{max}^2$

Ενέργεια Συστήματος

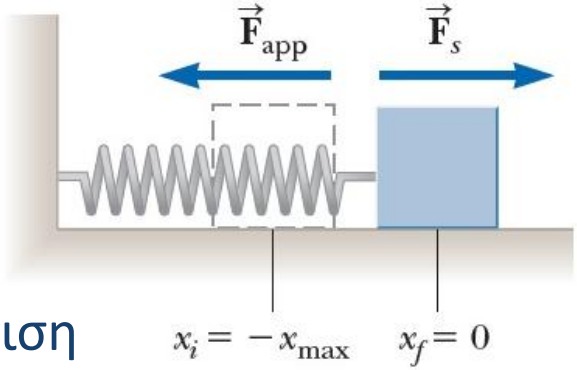
$\vec{F}_{app} = -\vec{F}_s$

- Έστω μια <u>εξωτερική</u> δύναμη $\vec{F}_{app}$ που εφαρμόζεται στο σύστημα-σώμα, όπως στο σχήμα
  - Κίνηση από το $-x_{max}$ στο 0
- $W_{ext} = \int \vec{F}_{app} \cdot d\vec{x} = \int -\vec{F}_s \cdot d\vec{x}$

$$= \int_{x_i}^{x_f} -(-kx\vec{\imath}) \cdot (dx\,\vec{\imath})$$

$$= \int_{-x_{max}}^{0} kxdx = -\frac{1}{2}kx_{max}^2$$

Αν η διαδικασία της κίνησης του σώματος γίνεται ΠΟΛΥ αργά, τότε η $\vec{F}_{app}$ είναι ίση σε μέτρο και αντίθετης φοράς με την $\vec{F}_s$, για κάθε χρονική στιγμή.



- Όμοια με πριν, για οποιαδήποτε μετατόπιση

$$W_{ext} = \int_{x_i}^{x_f} kxdx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 = -W_s$$

Συνεχίζεται... ☺