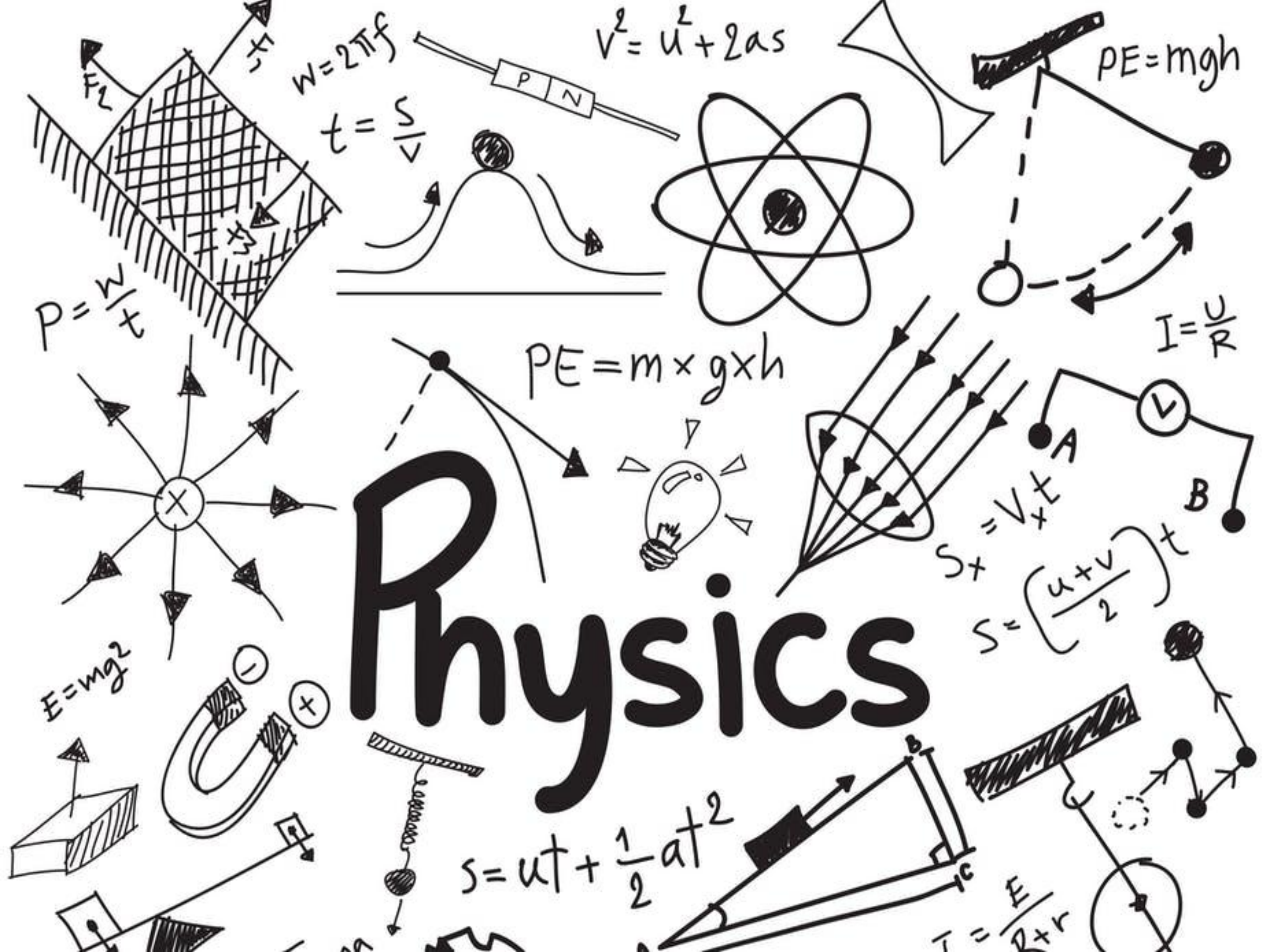

Physics
W=2πf
v²=u²+2as
PE=mgh
t = S/V
P = W/t
PE=m×g×h
I=U/R
S=V×t
S=((u+v)/2)t
E=mg²
s=ut+½at²
I = E/(R+r)
P
N
F2
F1
F3
A
B
C
V

Εικόνα: Η κίνηση μπορεί να είναι αναζωογονητική και όμορφη. Αυτά τα σκάφη ανταποκρίνονται σε δυνάμεις αέρα, νερού, και του βάρους του πληρώματος όσο προσπαθούν να ισορροπήσουν στην άκρη του.

1η Ενότητα Κλασική Μηχανική

Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση

Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Κίνηση σε έναν οριζόντιο/κατακόρυφο άξονα
  - Σώμα == σωματίδιο
    - Θεωρούμε απειροστά μικρό το μέγεθός του
    - Αδιαφορούμε **πλήρως** για τις διαστάσεις του
- Θα γνωρίσουμε τους βασικούς ορισμούς της κινητικής…
  - …αρχικά σε μια διάσταση και αργότερα σε δυο διαστάσεις
- Αυτοί είναι:
  - **Η Θέση**
  - **Η Ταχύτητα**
  - **Η Επιτάχυνση**

ενός σώματος

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Θέση $\vec{x}$** : διάνυσμα που ορίζει την τοποθεσία του σώματος σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς (όπως το 0)
  - Διανυσματικό μέγεθος
    - Θα θεωρήσουμε έναν βαθμονομημένο άξονα στον οποίο γίνεται η κίνηση – το μοναδιαίο του διάνυσμα είναι το $\vec{\imath}$ (οριζόντια κίνηση) ή το $\vec{\jmath}$ (κατακόρυφη κίνηση)
    - Το **πρόσημο** μας δηλώνει τη φορά του διανύσματος
      - $\vec{x}_1 = +3\vec{\imath}, \quad \vec{x}_2 = -12\vec{\imath}$

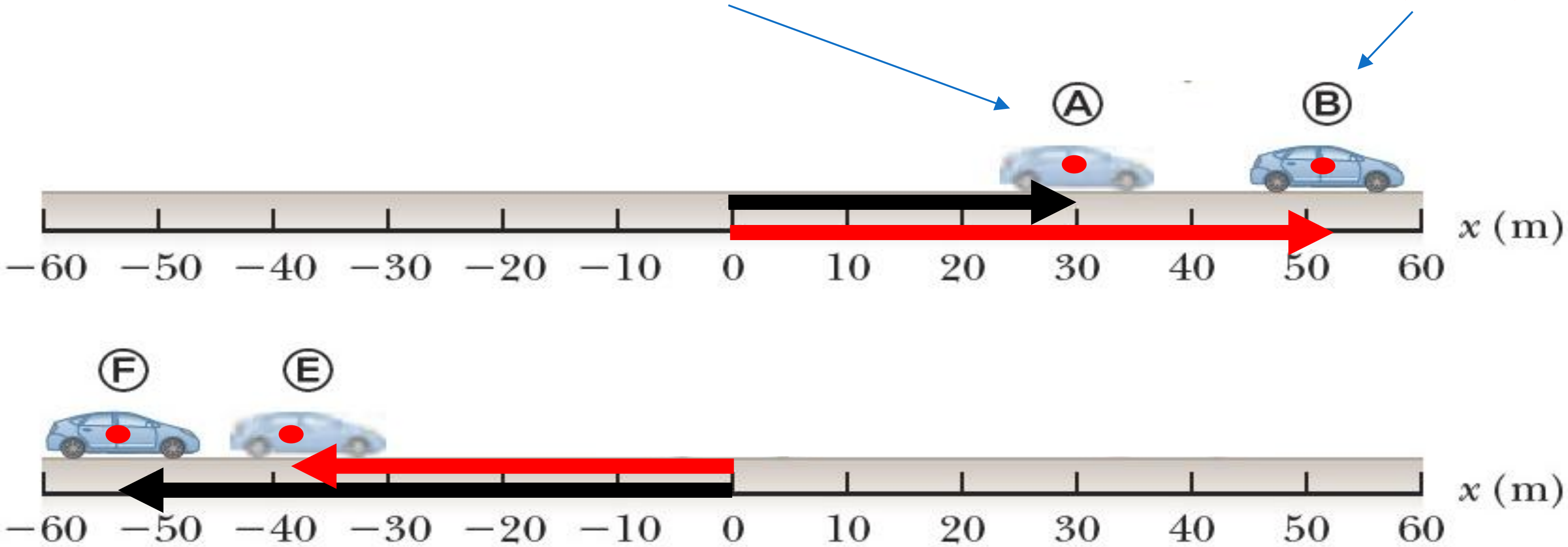
- Το πρόσημο μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό – ως πρόσημο τιμής στο βαθμονομημένο άξονα
  - Θετικό πρόσημο : το διάνυσμα ξεκινά από ένα σημείο αναφοράς (το 0) και καταλήγει σε κάποια θετική τιμή του άξονα
  - Αντίθετα για αρνητική τιμή

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Παράδειγμα:

$\vec{x_A} = (30\ m)\vec{i}$

$\vec{x_B} = (52\ m)\vec{i}$



$\vec{x_F} = (-55\ m)\vec{i}$ $\vec{x_E} = (-38\ m)\vec{i}$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ (displacement)**: η μεταβολή στη θέση ενός σωματιδίου
- <u>Ορισμός</u>:

$$\Delta\vec{x} \equiv \vec{x}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{x}_{\alpha\rho\chi}$$

  - με $\vec{x}_{\tau\varepsilon\lambda}, \vec{x}_{\alpha\rho\chi}$ την τελική και την αρχική θέση του σωματιδίου
  - Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό: $\vec{x}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow \vec{x}_f, \vec{x}_{\alpha\rho\chi} \rightarrow \vec{x}_i$
- Προσοχή: **απόσταση $d \neq$ μέτρο μετατόπισης** $|\Delta\vec{x}|$!
- Παράδειγμα:

Η απόσταση που διανύει ένας αθλητής μπάσκετ, αν απλουστευμένα υποθέσουμε ότι κινείται σε ευθεία γραμμή, είναι μερικά χιλιόμετρα, αλλά η μετατόπιση από την αρχική θέση του (κέντρο γηπέδου) ως την τελική (ξανά στην ίδια περίπου θέση) είναι πολύ μικρότερη (ως μέτρο)!

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μετατόπιση $\boldsymbol{\Delta\vec{x}}$** : διανυσματικό μέγεθος!
  - Έχει μέτρο, διεύθυνση, φορά

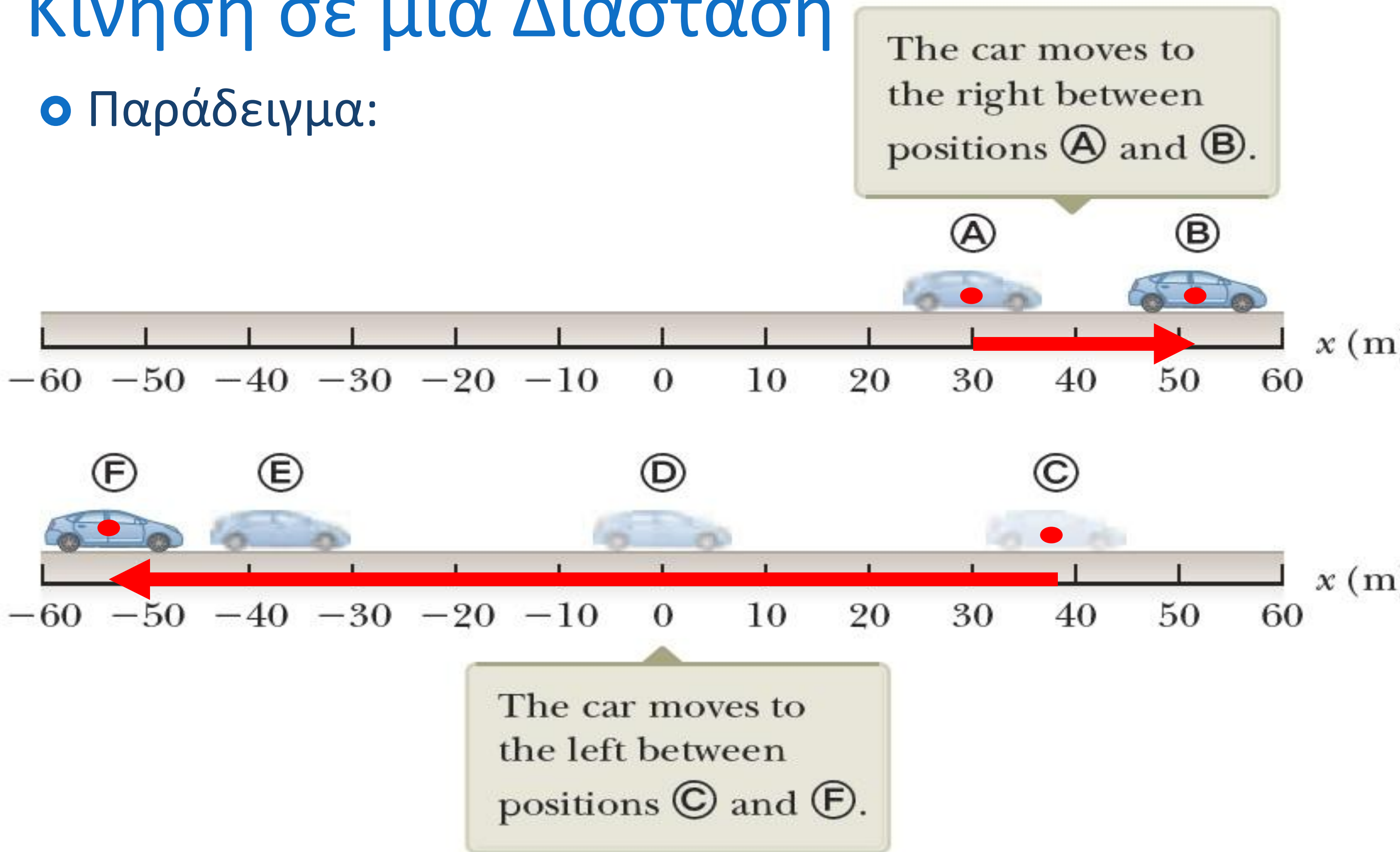
- Αν $\Delta\vec{\mathrm{x}} = \vec{x}_f - \vec{x}_i = (x_f - x_i)\vec{\imath} = \Delta\mathrm{x}\,\vec{\imath}$:
- $\Delta\mathrm{x} = x_f - x_i > 0 \Leftrightarrow$ κίνηση προς τα δεξιά
- $\Delta x = x_f - x_i < 0 \Leftrightarrow$ κίνηση προς τα αριστερά

- Στο Διεθνές Σύστημα, μονάδα μέτρησης της μετατόπισης (όπως και της θέσης) είναι το

1 μέτρο ($\boldsymbol{m}$)

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Παράδειγμα:



$$\Delta\vec{x}_{A\to B} = \vec{x}_{\mathrm{B}} - \vec{x}_{A} = 52\vec{\imath} - 30\vec{\imath} = (22\ m)\ \vec{\imath}$$
$$\Delta\vec{x}_{C\to F} = \vec{x}_{\mathrm{F}} - \vec{\mathrm{x}}_{\mathrm{C}} = -55\vec{\imath} - 38\vec{\mathrm{\imath}} = (-93\ m)\ \vec{\imath}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Hint:**
- Μπορούμε να κάνουμε **αλγεβρικές** πράξεις με τις ποσότητες των θέσεων και μετατοπίσεων
- Στο τέλος μπορούμε να προσθέσουμε την πληροφορία της κατεύθυνσης…
  - …με χρήση του διανύσματος $\vec{\imath}$ (ή του $\vec{\jmath}$ στην περίπτωση της κατακόρυφης κίνησης)

- **Παράδειγμα**:
- Για ένα σώμα που κινείται από τη θέση $\vec{x}_A = 3\vec{\imath}$ στη θέση $\vec{x}_B = -8\vec{\jmath}$, βρείτε τη μετατόπισή του.

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}_B - \vec{x}_A$$

$$\Delta x = x_B - x_A = -8 - 3 = -11\ \mathrm{m}$$

- Άρα

$$\Delta\vec{x} = (-11\ \mathrm{m})\vec{\imath}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μέση ταχύτητα (average velocity)**:

$$\vec{u}_{avg} \equiv \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

  - Διάνυσμα: έχει επίσης μέτρο, διεύθυνση και φορά!
  - Απαιτούνται δυο σημεία (αρχικό & τελικό)
  - Ίδιο πρόσημο με $\Delta\vec{x}$ – γιατί?

- **Μέση αριθμητική ταχύτητα (average speed):**
  - $s_{avg} \equiv \frac{d}{\Delta t}$, όπου d η απόσταση
  - Βαθμωτό μέγεθος – όχι διάνυσμα !

Μονάδα μέτρησης:

$$\boldsymbol{\frac{m}{s}}$$

(μέτρο ανά δευτ/το)

- Προσοχή στη διαφορά τους!

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Στιγμιαία Ταχύτητα (instantaneous velocity)**
  - Διάνυσμα: έχει μέτρο, διεύθυνση και φορά
  - Το διάνυσμα της ταχύτητας για κάθε χρονική στιγμή t !
  - Αλλιώς: η μέση ταχύτητα όταν μετριέται σε $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{u}_{avg} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

  - Όμως

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{u}_x(t)$$

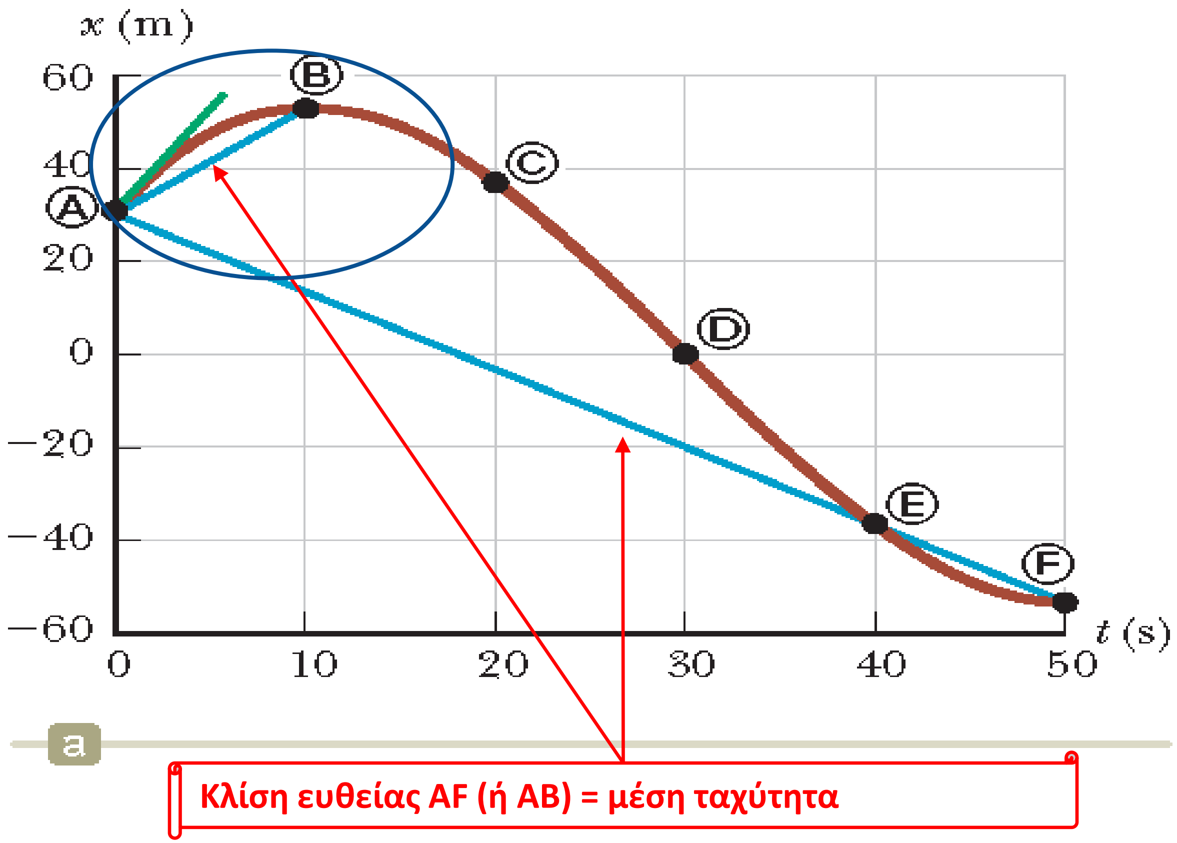
- Άρα: **η στιγμιαία ταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης θέσης ως προς το χρόνο**

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Στιγμιαία Ταχύτητα**

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{u}_{avg} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{u}_x(t)$$

- Παράδειγμα:

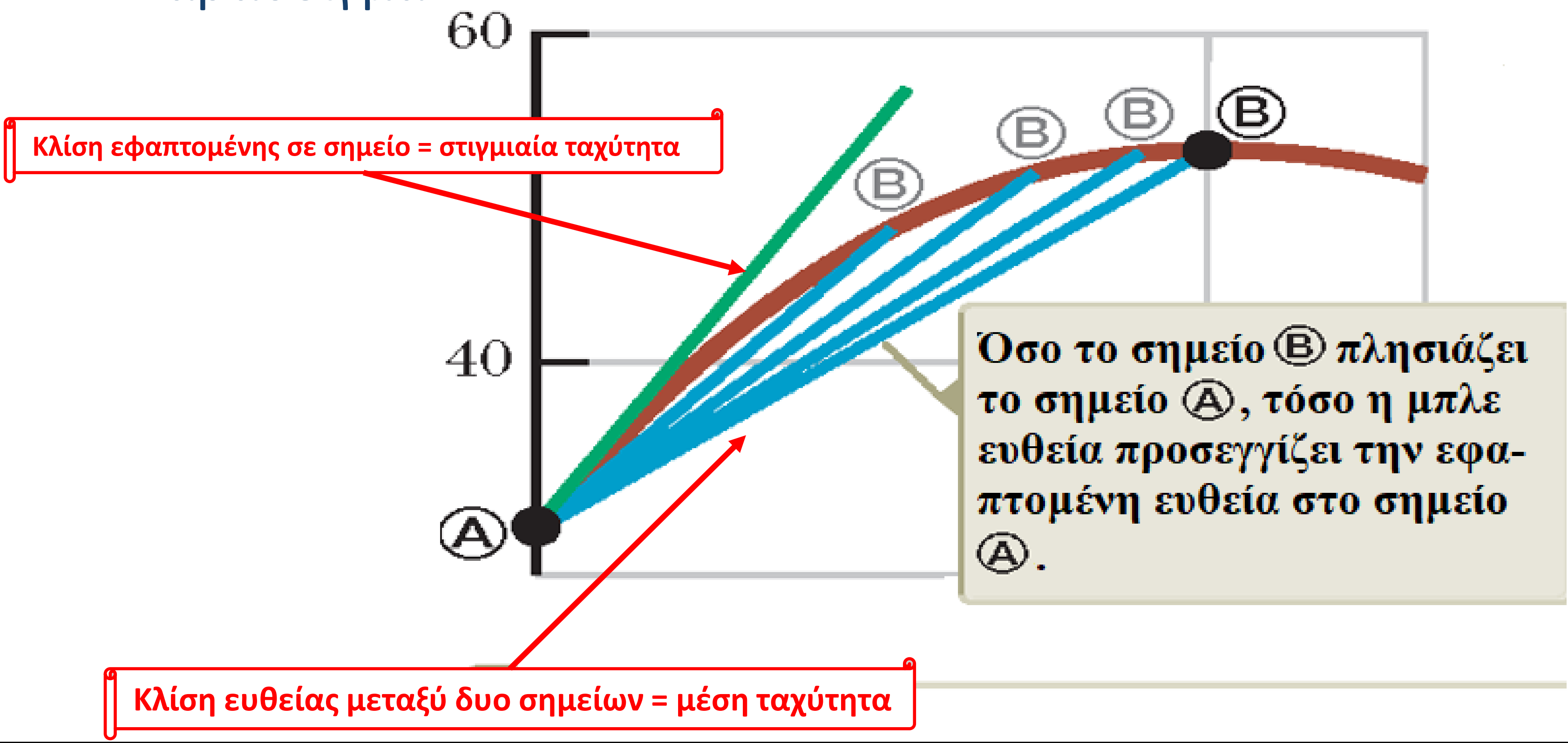


Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Στιγμιαία Ταχύτητα**

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{u}_{avg} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{u}_x(t)$$

- Παράδειγμα:



Κίνηση σε μια Διάσταση

- <u>**Hint:**</u>
- Μπορούμε να κάνουμε **αλγεβρικές** πράξεις με τις ποσότητες των ταχυτήτων, όπως ακριβώς κάναμε με τις θέσεις και μετατοπίσεις
- Στο τέλος μπορούμε να προσθέσουμε την πληροφορία της κατεύθυνσης…
  - …με χρήση του διανύσματος $\vec{\imath}$ (ή του $\vec{\jmath}$ στην περίπτωση της κατακόρυφης κίνησης)

- **Παράδειγμα**:
- Για ένα σώμα που κινείται από τη θέση $\vec{x}_A = 3\vec{\imath}$ στη θέση $\vec{x}_B = -8\vec{\jmath}$, σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 5.5$ δευτερόλεπτα, βρείτε τη μέση ταχύτητά του.

$$\Delta x = x_B - x_A = -8 - 3 = -11 \text{ m}$$

$$u_{\text{avg}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-11}{5.5} = -2 \text{ m/s}$$

- Άρα

$$\vec{u}_{\text{avg}} = (-2 \text{ m/s})\vec{\imath}$$

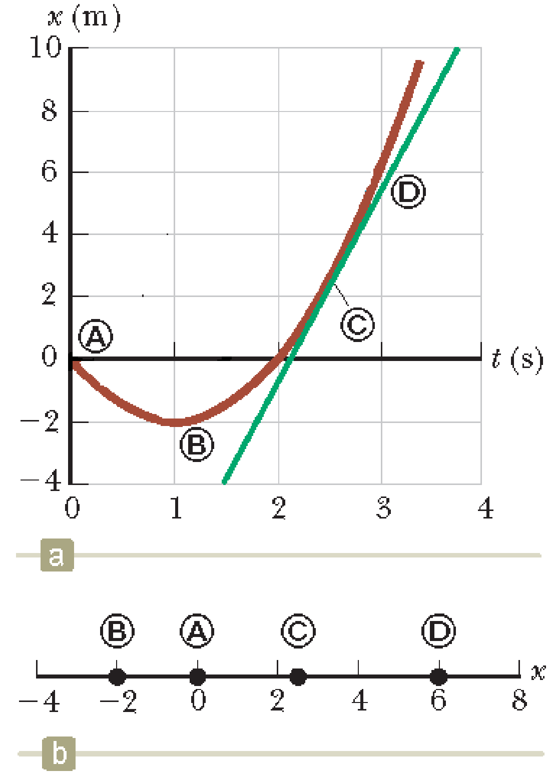
Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Παράδειγμα**:
- Σωματίδιο κινείται στον οριζόντιο άξονα, με τη θέση του να ορίζεται από τη σχέση

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

όπου x είναι η θέση σε m, και t είναι ο χρόνος σε s, όπως στο Σχήμα (α).

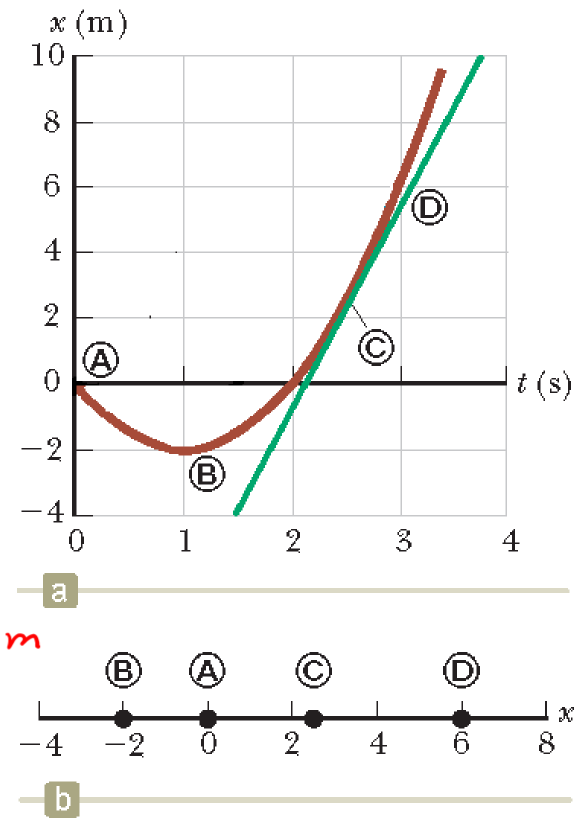
  - A. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.
  - B. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα.
  - C. Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.



Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Παράδειγμα – Λύση**:

$$x(t) = -4t + 2t^2$$



  - Α. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.

Η διαφορά $t=0 \to t=1$ είναι η $A \to B$.

Άρα $\Delta\vec{x}_{A\to B} = \vec{x}_B - \vec{x}_A = \Delta x_{A\to B}\cdot\vec{i}$

$\Delta x_{A\to B} = x(t=1) - x(t=0) = -2 - 0 = -2\ m$

δηλ. $\Delta\vec{x}_{A\to B} = (-2\ m)\,\vec{i}$

Η διαφορά $t=1 \to t=3$ είναι η $B \to D$

Άρα $\Delta\vec{x}_{B\to D} = \vec{x}_D - \vec{x}_B = \Delta x_{B\to D}\cdot\vec{i}$

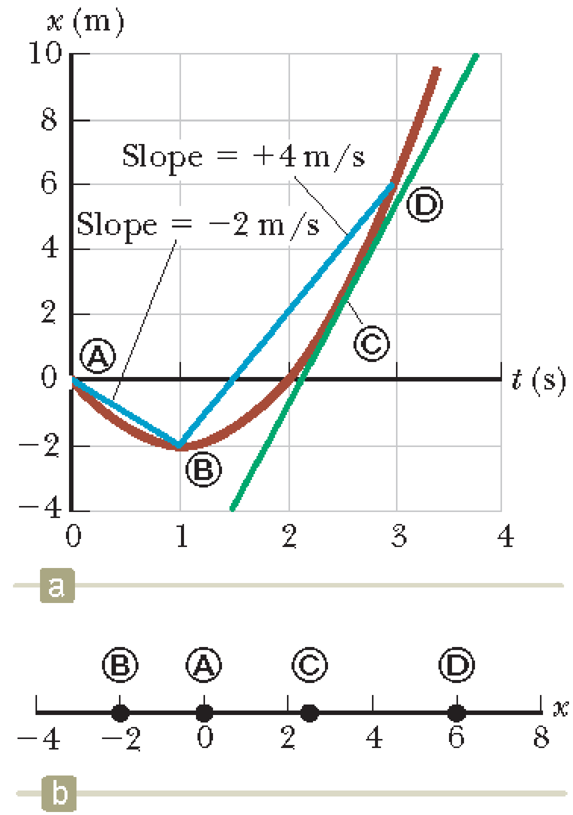
$\Delta x_{B\to D} = x(t=3) - x(t=1) = 6 - (-2) = 8\ m$, δηλ. $\Delta\vec{x}_{B\to D} = (8m)\,\vec{i}$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **<u>Παράδειγμα – Λύση</u>:**

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

  - Β. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα.



Απο προηγ. ερώτημα,

$$\Delta\vec{x}_{A\to B} = (-2\,m)\,\vec{i} \Rightarrow u_{avg}^{A\to B} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{(-2\,m)\vec{i}}{1-0} = \left(-2\,\frac{m}{s}\right)\vec{i}$$

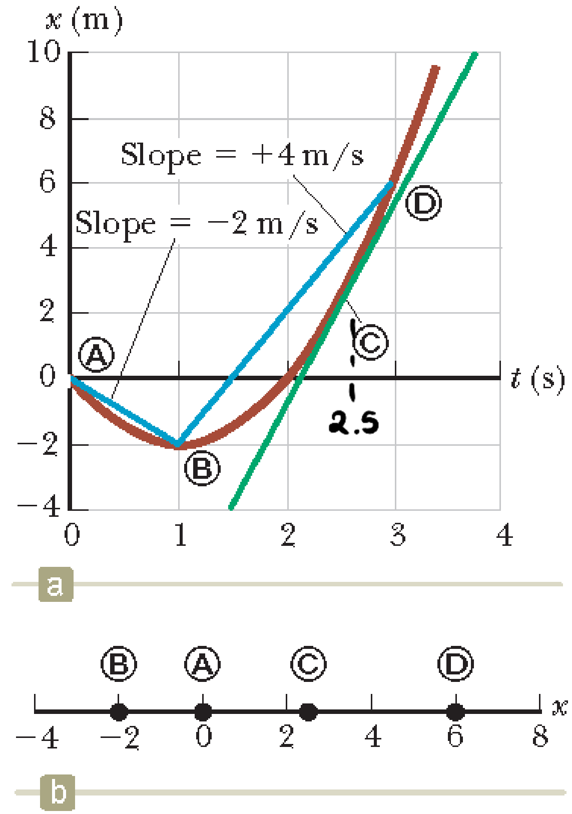
$$\Delta\vec{x}_{B\to D} = (8\,m)\,\vec{i} \Rightarrow u_{avg}^{B\to D} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{(8\,m)\vec{i}}{3-1} = \left(4\,\frac{m}{s}\right)\vec{i}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Παράδειγμα – Λύση**:

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

  - C. Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.



Ξέραμε ότι $\vec{v}(t) = x'(t)$

$= -4 + 4t$

Για $t = \frac{5}{2}$ s, $\vec{v}\left(\frac{5}{2}\right) = \left(6\ \frac{m}{s}\right)\vec{i}$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μοντέλο κίνησης:** υπό ***σταθερή ταχύτητα***

$$u_{avg} = u_x = \frac{\Delta \mathrm{x}}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta x = u_x \Delta \mathrm{t} \Leftrightarrow (x_f - x_i) = u_x \Delta \mathrm{t}$$

- Άρα

$$x_f = x_i + u_x \Delta \mathrm{t}$$

- Αν θεωρήσουμε ότι $t_i = 0$:

$$\Delta t = t_f - t_i = t_f = t$$

και τότε

$$\boxed{x_f = x_i + u_x t}$$

- Επίσης, το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό και ίσο με

$$u = \frac{d}{\Delta \mathrm{t}}$$

όπου d η απόσταση που διανύθηκε

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Επιτάχυνση (acceleration)**
  - Η μεταβολή της ταχύτητας προϊόντος του χρόνου

- **Μέση επιτάχυνση (average acceleration)**

$$\vec{a}_{x,avg} \equiv \frac{\Delta\vec{u}_x}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\vec{u}_{xf} - \vec{u}_{xi}}{t_f - t_i}$$

- **Στιγμιαία επιτάχυνση (inst. acceleration)**

$$\vec{a}_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{u}_x}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{d\vec{u}_x}{dt}$$

- Αφού όμως

$$\frac{d}{dt}\vec{u}_x = \frac{d}{dt}\frac{d\vec{x}}{dt}$$

είναι

$$\vec{a}_x = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

Μονάδα μέτρησης:

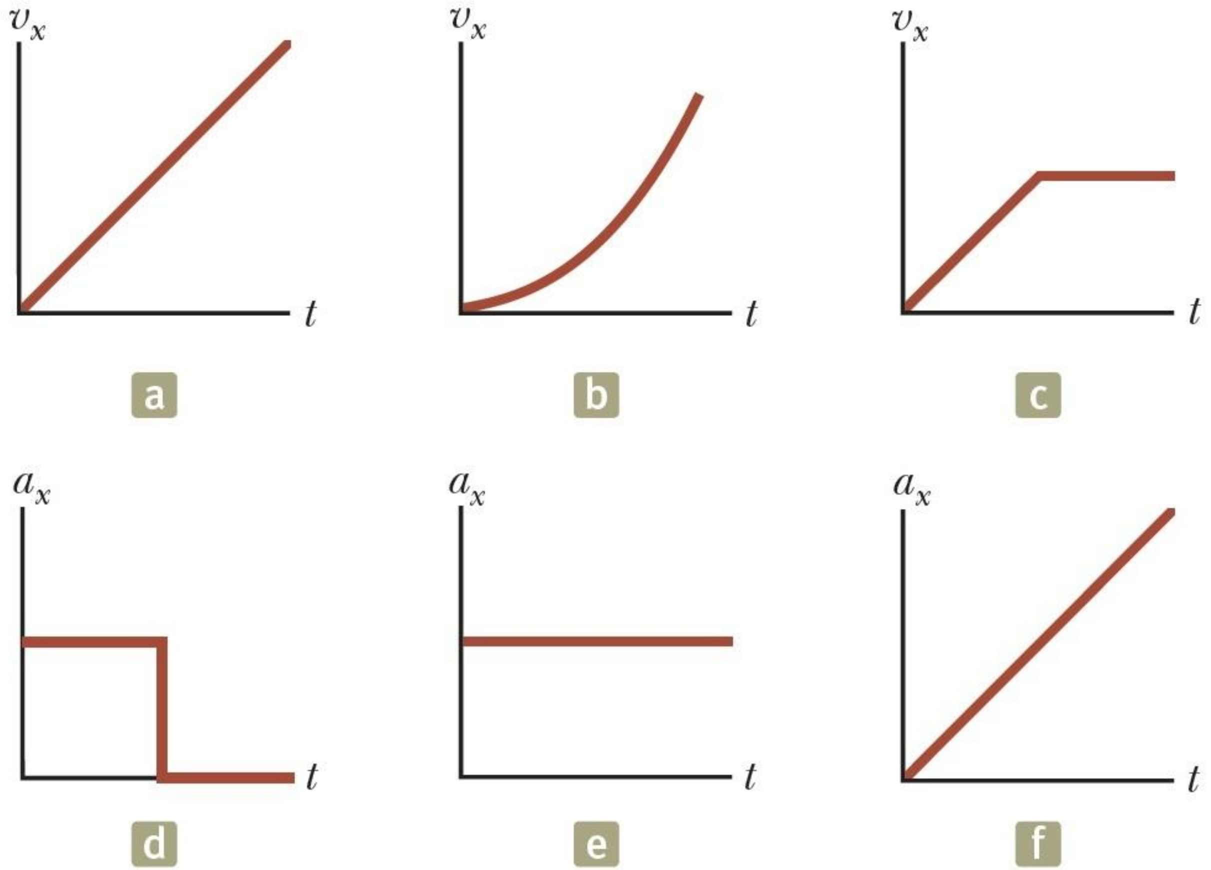
$$\boldsymbol{\frac{m}{s^2}}$$

(μέτρο ανά δευτερόλεπτο στο τετράγωνο)

Κίνηση σε μια Διάσταση

Hint: Η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν σχέση παραγώγου-παράγουσας

- **Quiz 1:**
  - Βρείτε τα ζεύγη ταχύτητας-επιτάχυνσης



a → e
b → f
c → d

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Quiz 2:**
  - Η θέση ενός σωματιδίου δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = 4 - 27t + t^3$$

    - A) Βρείτε τη συνάρτηση ταχύτητας ως προς το χρόνο
    - B) Βρείτε τη συνάρτηση επιτάχυνσης ως προς το χρόνο
    - Γ) Υπάρχει κάποια χρονική στιγμή t_0 που το σωματίδιο είχε $u(t_0) = 0$?

A) Είναι $u(t) = x'(t) = -27 + 3t^2 \ \frac{m}{s}$

B) —"— $a(t) = x''(t) = u'(t) = 6t \ \frac{m}{s^2}$

Γ) Είναι $u(t) = 0 \Leftrightarrow -27 + 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t_0 = \pm 3$ sec. Επιλέγουμε ως λύση την $t_0 = 3$ s.

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μοντέλο κίνησης:** υπό ***σταθερή επιτάχυνση***
  - **Ορίζουμε θετική φορά κίνησης προς τα δεξιά**
  - **Στις παρακάτω εξισώσεις, όλες οι διανυσματικές ποσότητες «δείχνουν» προς τα δεξιά, δηλ. γράφονται ως** $\vec{b} = c\vec{i}, c \in \mathbb{R}_+$

- <u>**Εξισώσεις Μονοδιάστατης Κίνησης υπό σταθερή επιτάχυνση:**</u>

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \dfrac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right)t$ ή $x_f = x_i + u_{x,avg}t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Οι δείκτες i και f δηλώνουν αρχική και τελική μέτρηση, ενώ ο δείκτης x δηλώνει μονοδιάστατη κίνηση σε έναν οριζόντιο άξονα $x'x$ (κάποιες φορές μπορούμε να παραλείπουμε το δείκτη x για απλοποίηση)

Κίνηση σε μια Διάσταση

$$\boxed{u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t}$$

- **Απόδειξη:**

Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή, τότε

$$a_{x,avg} = a_x$$

Από τον ορισμό έχουμε

$$a_x = \frac{\Delta u_x}{\Delta t} = \frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{t_f - t_i} \xRightarrow{t_i=0, t_f=t} u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

Άρα

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

$$u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$$

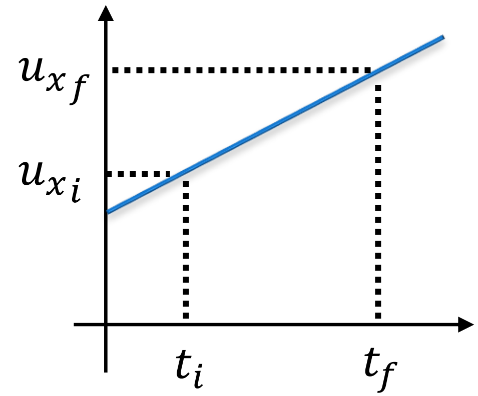
- **Απόδειξη:**

Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή, τότε η ταχύτητα (δηλ. το ολοκλήρωμά της) θα είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου

Έτσι η μέση ταχύτητα μπορεί να εκφραστεί ως ο αριθμητικός μέσος της αρχικής ταχύτητας u_{x_i} και της τελικής ταχύτητας u_{x_f}

Δηλ.

$$u_{x_{avg}} = \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Απόδειξη:**

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right)t \quad \text{ή} \quad x_f = x_i + u_{x,avg}t$$

Από την προηγούμενη σχέση, πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με t:

$$u_{x_{avg}}t = \frac{u_{x\,f} + u_{x_i}}{2}t$$

Όμως

$$u_{x_{avg}}t = \Delta x = x_f - x_i$$

οπότε

$$\left(x_f - x_i\right) = \frac{u_{x\,f} + u_{x_i}}{2}t$$

Λύνοντας ως προς x_f:

$$x_f = x_i + \frac{u_{x\,f} + u_{x_i}}{2}t$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

$$x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

- **Απόδειξη:**

Έχουμε ήδη

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

και

$$x_f = x_i + \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}t$$

Αντικαθιστώντας

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + a_x t + u_{x_i}\right)t$$

$$= x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

Άρα

$$x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

$$u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$$

- **Απόδειξη:**

Έχουμε

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t \Rightarrow t = \frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{a_x}$$

και

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_f} + u_{x_i}\right) t$$

Αντικαθιστώντας

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_f} + u_{x_i}\right)\left(\frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{a_x}\right)$$

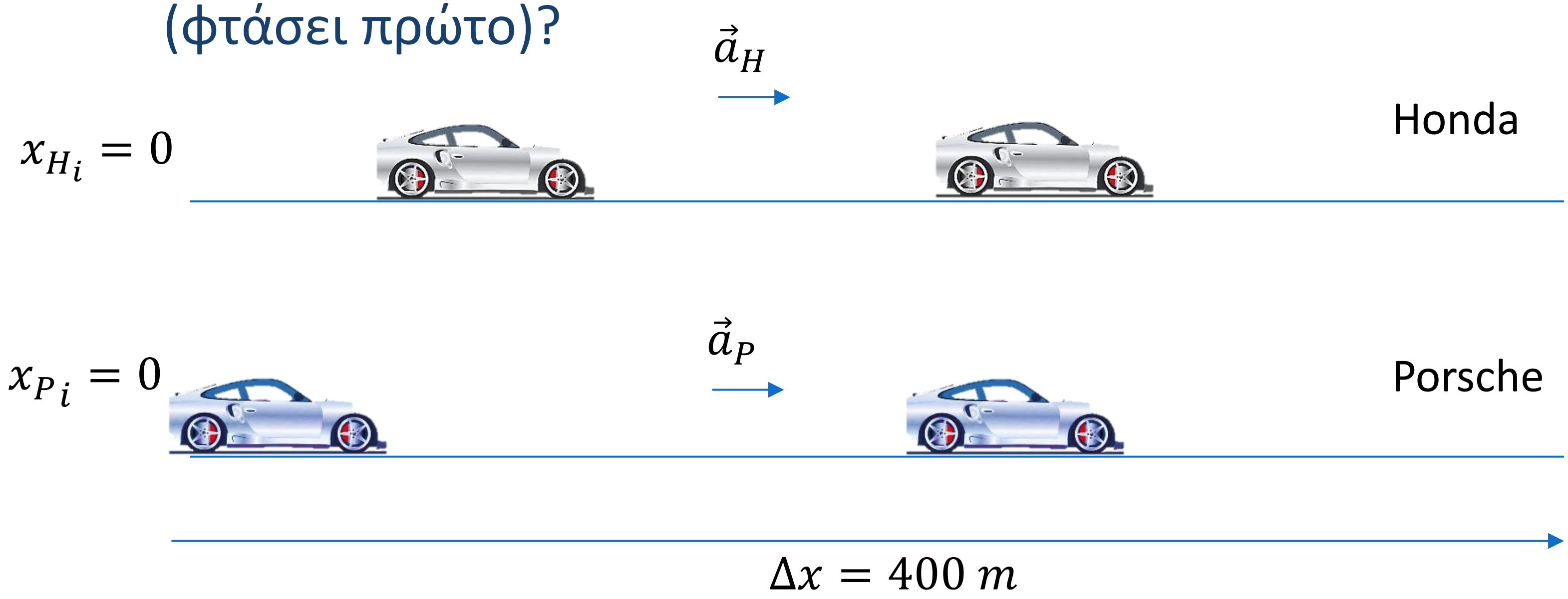
$$= x_i + \frac{u_{x_f}^2 - u_{x_i}^2}{2a_x}$$

και λύνοντας ως προς $u_{x_f}^2$

$$u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x\left(x_f - x_i\right)$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **<u>Παράδειγμα:</u>**
  - Μια Porsche (P) προκαλεί ένα Honda (H) σε έναν αγώνα ταχύτητας 400 μέτρων. Επειδή $a_P = 3.5\ \mathrm{m/s^2}$ και $a_H = 3.0\ \mathrm{m/s^2}$, το Honda παίρνει προβάδισμα στην αφετηρία κατά $1.0\ s$. Τα δυο οχήματα ξεκινούν από ακινησία. Περιγράψτε το μοντέλο κίνησης των οχημάτων. Ποιο αυτοκίνητο θα κερδίσει (φτάσει πρώτο)?



Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + at$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right)t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a(x_f - x_i)$

- **Παράδειγμα – Λύση:**

$\vec{a}_H = 3.0\frac{m}{s^2}\vec{i}$

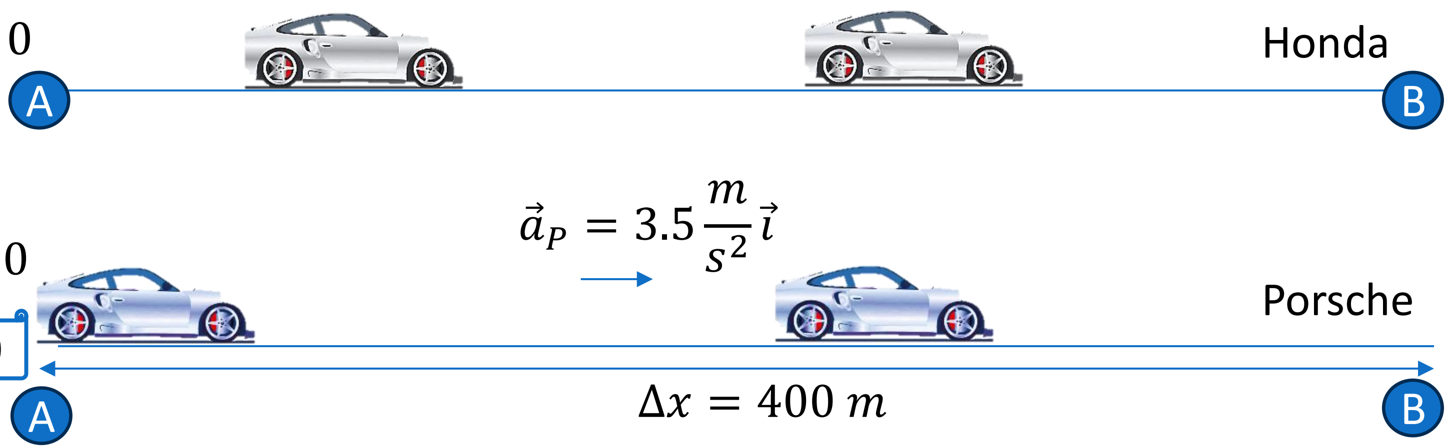
$x_{H_i} = 0$

$\vec{a}_P = 3.5\frac{m}{s^2}\vec{i}$

$x_{P_i} = 0$

$\boxed{t = 0}$

$\Delta x = 400\ m$

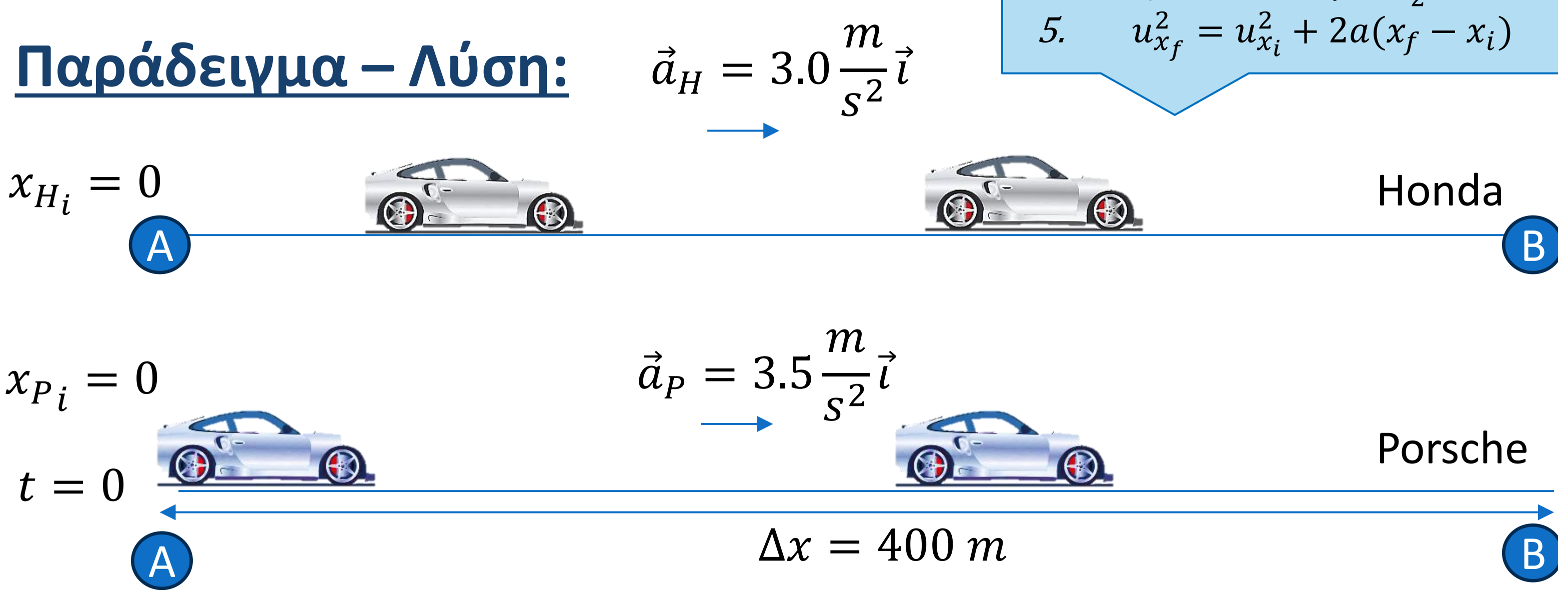


Το μοντέλο που περιγράφει την κίνηση είναι αυτό της κίνησης υπό σταθερή επιτάχυνση. Θεωρώ $x_A=0$ τη θέση εκκίνησης των δυο οχημάτων. Θεωρώ $t=0$, όταν ξεκινά η Porsche. Τότε τα δυο οχήματα περιγράφουν την κίνησή τους με το μοντέλο της ευθύγραμμης επιταχυνόμενης κίνησης με σταθερή ταχύτητα. Δουλεύουμε στη $A \to B$.

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + at$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right)t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a(x_f - x_i)$

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Για να βρούμε το χρόνο που απαιτείται για να καλύψει την απόσταση η Porsche, χρησιμοποιούμε την εξ. 4. στη διαδρομή A→B.

$$x_B = x_A + u_{x_A}t + \frac{1}{2}a_P t^2$$

$$400 = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2}3.5t^2$$

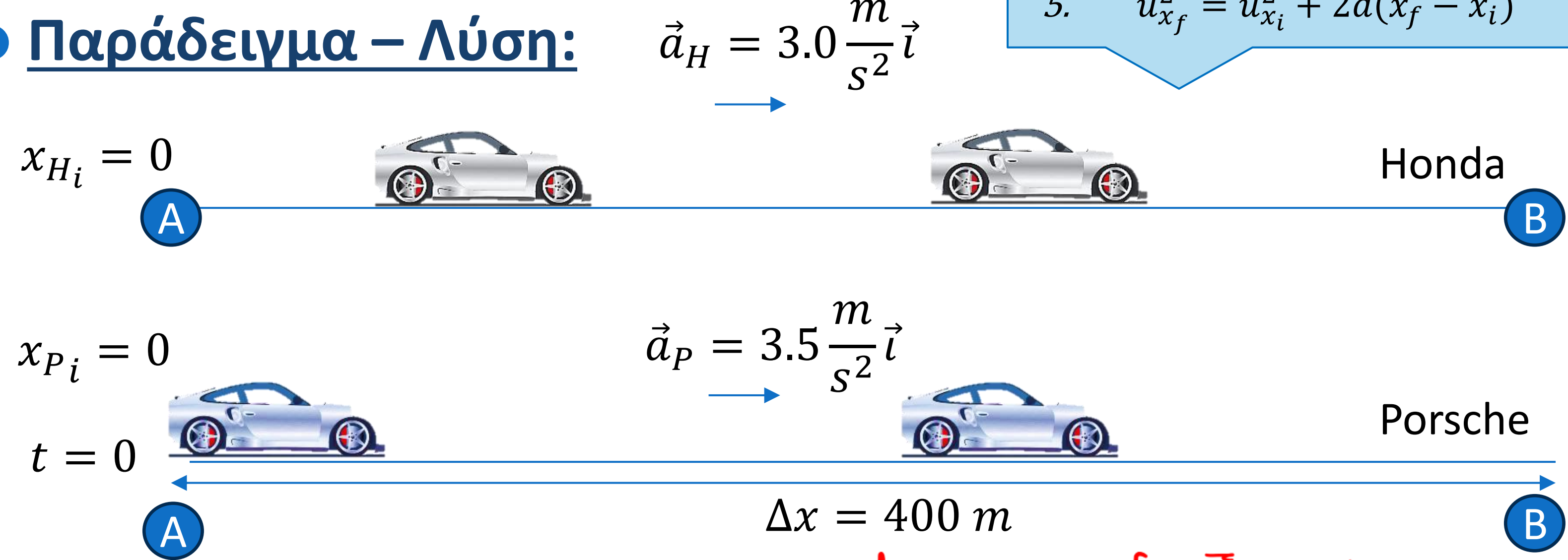
$$800 = 3.5t^2 \Rightarrow t^2 = 228.57 \Rightarrow t = 15.118\ s$$

Άρα η Porsche χρειάζεται 15.118 δευτερόλεπτα για τα 400 m.

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + at$
2. $u_{x,avg} = \dfrac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right)t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a(x_f - x_i)$

- **<u>Παράδειγμα – Λύση:</u>**



Όταν πατήσαμε το χρονόμετρο, η Honda είχε ήδη ξεκινήσει κατά 1 second, οπότε ο χρόνος της θα είναι t+1 ! Ξανά από την εξ. 4 στη διαδρομή A→B θα έχουμε:

$$x_B = x_A + u_{x_A}\cdot(t+1) + \frac{1}{2}a_H(t+1)^2$$
$$400 = 0 + 0\cdot(t+1) + \frac{1}{2}\cdot 3.0(t+1)^2$$
$$800 = 3(t+1)^2 \Rightarrow (t+1)^2 = 266.667 \Rightarrow t+1 = 16.329$$

Δηλ. $t = 15.329$ s

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + at$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right)t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a(x_f - x_i)$

- **Παράδειγμα – Λύση:**

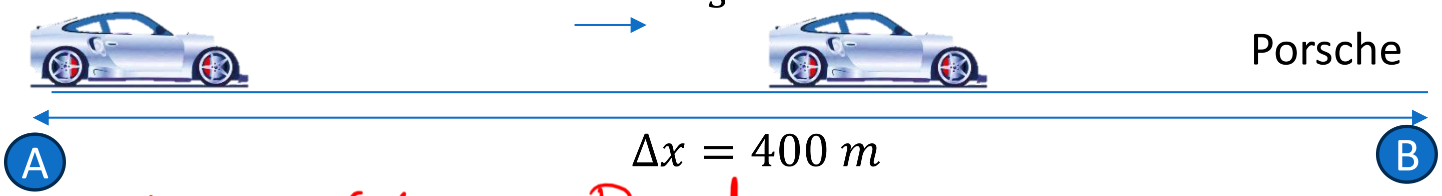
$\vec{a}_H = 3.0\,\frac{m}{s^2}\vec{i}$

$x_{H_i} = 0$

$\vec{a}_P = 3.5\,\frac{m}{s^2}\vec{i}$

$x_{P_i} = 0$

$t = 0$



$\Delta x = 400\ m$

Άρα τελικά κερδίζει η Porsche.

Παρατηρήστε ότι:

I) Επιλέξαμε τη διαδρομή Α→Β και για τα δυο οχήματα.

II) Πατήσαμε το χρονόμετρο (t=0) όταν ξεκίνησε η Porsche. Με τον τρόπο αυτό, και οι δυο κινήσεις περιγράφονται από τις εξισώσεις της ευθύγραμμης κίνησης με σταθερή επιτάχυνση (απλά ο χρόνος της Honda είναι t+1).

III) Υπάρχουν κι άλλες λύσεις, πιο περίπλοκες.

$x_f = x_i + u_x t$

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right) t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Δεν είναι απαραίτητη η χρήση διανυσμάτων στην 1D κίνηση
  - Είδατε ότι το τυπολόγιο της κίνησης ήταν αλγεβρικές εξισώσεις
  - Όμως τα αποτελέσματά σας πρέπει να γράφονται διανυσματικά
  - Προσοχή στην ερμηνεία των αρνητικών μεγεθών!
- Υπενθυμίζεται η σύμβαση ότι : ορίζουμε ως **θετική φορά αυτή προς τα δεξιά**
  - Αντίστοιχα, αρνητική προς τα αριστερά
  - Ορίζετε πάντα θέση και χρόνο αναφοράς σας ($x_i = 0, t_i = 0$)!
- **Κατακόρυφη κίνηση** (κίνηση σε μια διάσταση)
  - Συνήθως ορίζουμε **θετική φορά κίνησης προς τα επάνω**
  - Επιτάχυνση βαρύτητας $\vec{g} = (-9.8\ \mathrm{m/s^2})\vec{j}$ (φορά προς τα κάτω)
  - Ίδια μεθοδολογία και εξισώσεις ($x \rightarrow y$)

Κίνηση σε μια Διάσταση

<u>ΌΧΙ</u> $g = 10\, m/s^2$!!!

- Ελεύθερη πτώση: $\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{y}} = \vec{\boldsymbol{g}} = (-\mathbf{9.8\ m/s^2})\vec{\boldsymbol{j}}$ **σταθερή**
  - …αν ορίσουμε **θετική φορά κίνησης προς τα επάνω**

- **<u>Εξισώσεις Ελεύθερης Πτώσης:</u>**

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \dfrac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$

   ή

   $y_f = y_i + u_{y,avg}t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

Οι δείκτες i και f δηλώνουν αρχική και τελική κατάσταση, ενώ ο δείκτης $\boldsymbol{y}$ δηλώνει μονοδιάστατη κίνηση σε έναν κατακόρυφο άξονα $\boldsymbol{y'y}$ (συχνά ο δείκτης παραλείπεται)

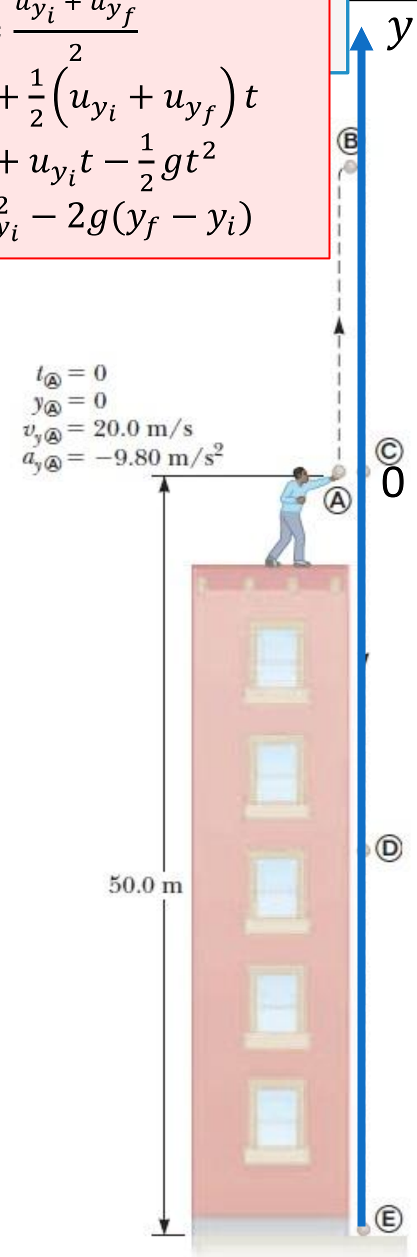
Στις διπλανές εξισώσεις, η επιτάχυνση της βαρύτητας χρησιμοποιείται ως $\boldsymbol{g} = |\vec{\boldsymbol{g}}| = \mathbf{9.8\ m/s^2}$

Αν ορίσετε θετική φορά κίνησης προς τα κάτω (δηλ. με ίδια φορά με το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας), τότε θέτουμε $g = -\,9.8\ \mathrm{m/s^2}$ στις διπλανές σχέσεις

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

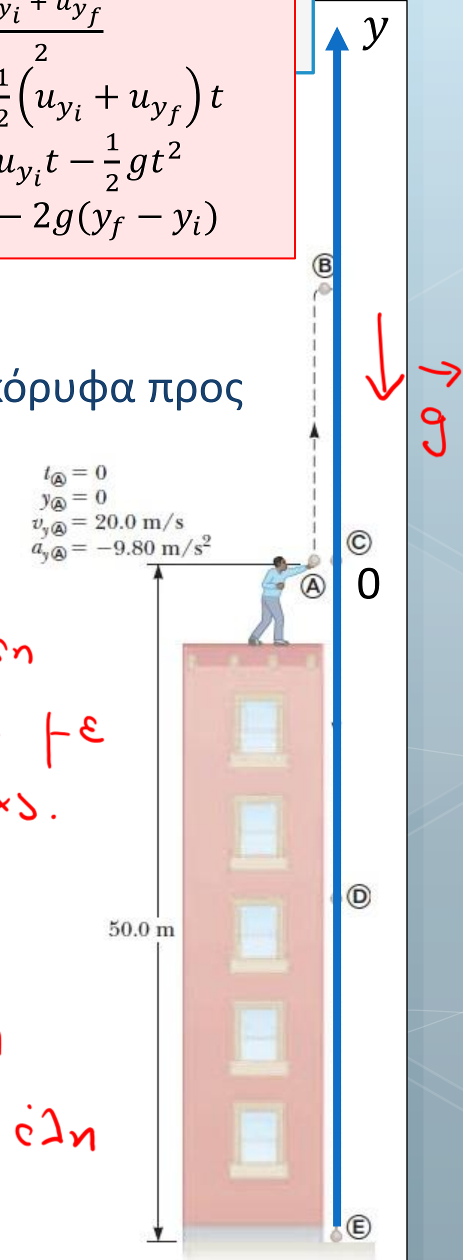
- **<u>Παράδειγμα:</u>**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m. Δεν υπάρχουν αντιστάσεις λόγω αέρα.
    - Α) Με ποιο μοντέλο μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση της μπάλας? Δώστε τις λεπτομέρειες.
    - Β) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.
    - Γ) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.
    - Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.
    - Ε) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν $t = 5$ s.



Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \dfrac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Α) Με ποιο μοντέλο μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση της μπάλας? Δώστε τις λεπτομέρειες.

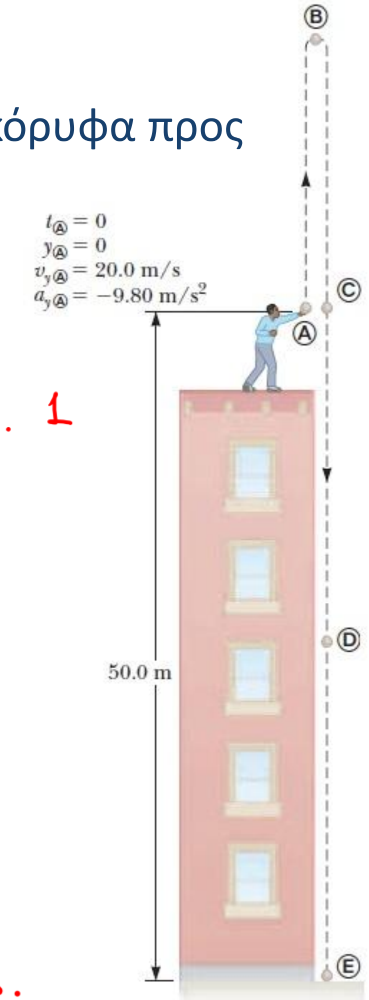


Θέτουμε τον άξονα y'y παράλληλα με την κίνηση της μπάλας. Το "μηδέν" του άξονα ταυτίζεται με το σημείο Α, το σημείο εκτόξευσης της μπάλας. Ο χρόνος αρχίζει να μετρά τη στιγμή που η μπάλα αφήνει το χέρι. Η κίνηση της μπάλας είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση $\vec{g} = \left(-9.8\,\frac{m}{s^2}\right)\vec{j}$, σε όλη της τη διαδρομή.

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Β) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.



Δουλεύουμε στη διαδρομή A→B. Από την εξ. 1 έχουμε

$$u_{y_f} = u_{y_i} - gt$$
$$u_B = u_A - gt$$
$$0 = 20 - 9.8t$$
$$t = \frac{20}{9.8} = 2.04 \text{ s}$$

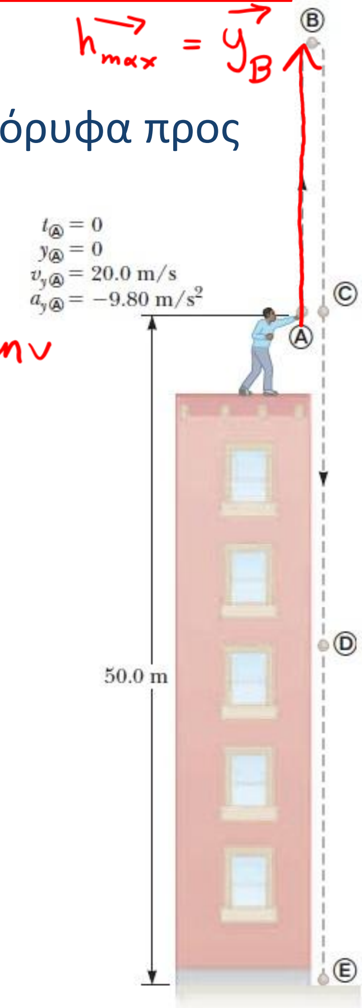
Άρα στο μέγιστο ύψος φθάνει σε χρόνο 2.04 s.

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \dfrac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right) t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Γ) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.

$\vec{h}_{max} = \vec{y}_B$



Δουλεύαμε ξανά στη διαδρομή A → B. Από την εξ. 3, έχουμε

$$y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right) t$$

$$y_B = y_A + \frac{1}{2}\left(u_A + u_B\right) t$$

$$h_{max} = 0 + \frac{1}{2}(20 + 0) \cdot 2.04$$

$$= 10 \cdot 2.04 = 20.4 \text{ m}$$

Δηλ. $\vec{y}_B = (20.4 \text{ m})\vec{j}$

Κίνηση σε μια Διάσταση

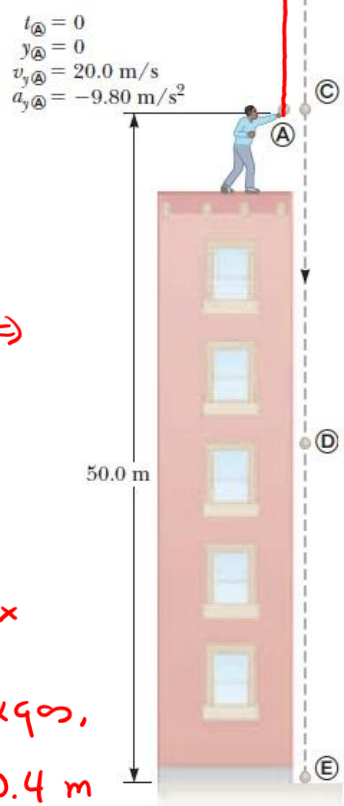
1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Γ) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.

+

$u_B = 0$!

$\vec{h}_{max} = \vec{y}_B$



Εναλλακτικά :

Εξίσου καλά δουλεύουν και οι σχέσεις 4, 5 :

4 • $h_{max} = y_A + u_{y_A}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 + 20t - 4.9t^2 \Big\} \Rightarrow$ $t = \frac{20}{9.8}$ s

$\Rightarrow h_{max} = 20\left(\frac{20}{9.8}\right) - 4.9\left(\frac{20}{9.8}\right)^2 \cong 20.4$ m

5 • $u_B^2 = u_A^2 - 2g(h_{max} - 0) \Leftrightarrow 0^2 = 20^2 - 19.6\,h_{max}$

δηλ. $h_{max} = \frac{400}{19.6} = 20.4$ m

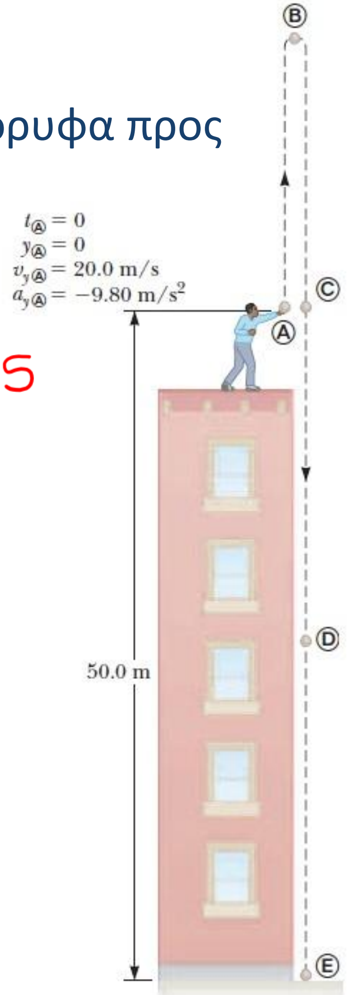
(Ενώ από το έδαφος, το ύψος είναι 70.4 m

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

$+ \uparrow$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.



Διαλέγουμε στη διαδρομή $A \to C$. Από την εξ. 5 έχουμε

$$u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$$

$$u_C^2 = u_A^2 - 2g(y_C - y_A)$$

$$u_C^2 = 20^2 - 19.6(0 - 0)$$

$$u_C^2 = 400 \Rightarrow u_C = \pm 20 \frac{m}{s}$$

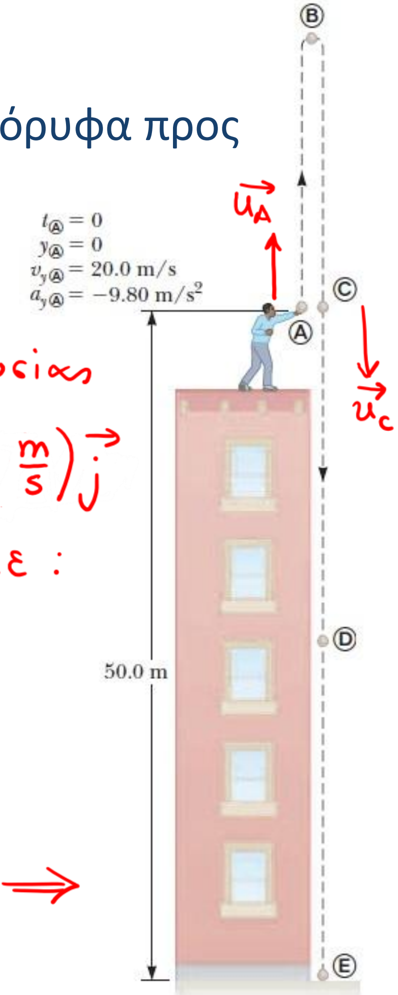
Άρα. $\vec{u}_C = \left(-20 \frac{m}{s}\right)\vec{j}$.

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

$+\uparrow$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.



Θα μπορούσαμε να πούμε ότι $t_{A\to B} = t_{B\to C}$, λόγω απουσίας αντιστάσεων του αέρα, και άρα $\vec{u}_C = -\vec{u}_A = \left(-20\ \frac{m}{s}\right)\vec{j}$

Πώς ξέρουμε όμως ότι $t_{A\to B} = t_{B\to C}$? Ας το δούμε:

Διαδρομή $A \to B$: δείξαμε ότι $t_{A\to B} = \frac{u_A}{g}$ (1)

Διαδρομή $B \to C$: $y_C = y_B + u_B t_{B\to C} - \frac{1}{2} g t_{B\to C}^2$

$$0 = h_{max} + 0 \cdot t_{B\to C} - \frac{1}{2} g t_{B\to C}^2$$

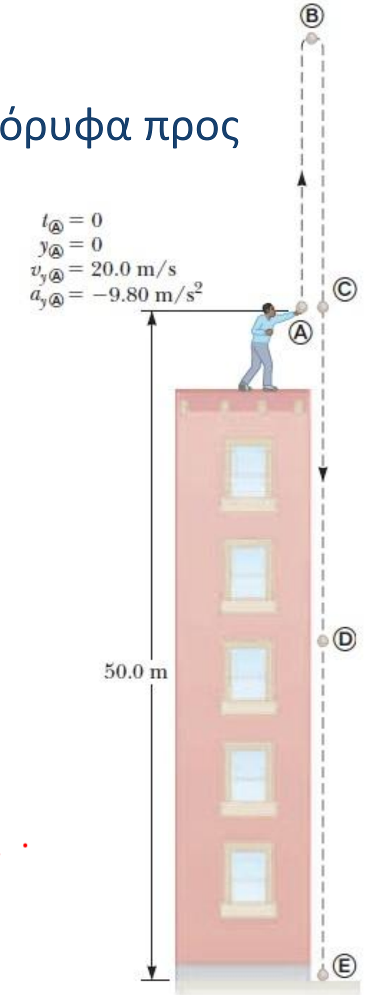
Όμως $h_{max} = \frac{u_A^2 - u_B^2}{2g}$, όπως δείξαμε πριν από 2 slides $\Rightarrow$

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

$+ \uparrow$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.



$$\Longrightarrow \emptyset = \frac{u_A^2 - u_B^2}{2g} - \frac{1}{2} g t_{B\to C}^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{u_A^2 - \emptyset}{2g} = \frac{1}{2} g t_{B\to C}^2 \Longleftrightarrow \frac{u_A^2}{g} = g t_{B\to C}^2 \Longleftrightarrow$$

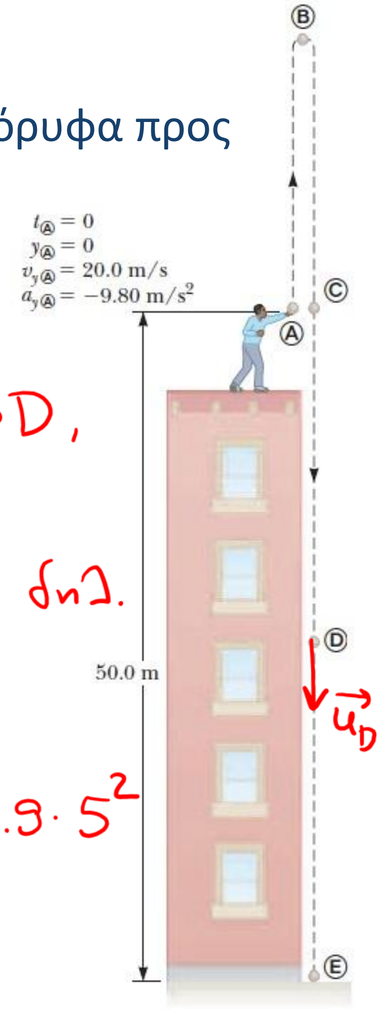
$$\Longleftrightarrow \frac{u_A^2}{g^2} = t_{B\to C}^2 \Longleftrightarrow t_{B\to C} = \sqrt{\frac{u_A^2}{g^2}} = \frac{u_A}{g} \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1), (2) μας δίνουν ότι $t_{A\to B} = t_{B\to C}$.

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

- **<u>Παράδειγμα – Λύση:</u>**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Ε) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν $t = 5\ s$.



Έστω D η θέση της μπάλας όταν t=5 από τη στιγμή της εκτόξευσης. Στη διαδρομή A→D, οι εξισώσεις 1 και 4 μας δίνουν

$u_D = u_A - gt \Leftrightarrow u_D = 20 - 9.8 \cdot 5 = -29\ \frac{m}{s}$, δηλ.

$$\vec{u}_D = \left(-29\ \tfrac{m}{s}\right)\vec{j}$$

$y_D = y_A + u_{y_A}t - \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow y_D = 0 + 20 \cdot 5 - 4.9 \cdot 5^2$

$\Leftrightarrow y_D = 100 - 122.5 \Leftrightarrow y_D = -22.5\ m$, άρα

$$\vec{y}_D = (-22.5\ m)\vec{j}$$

Τέλος Διάλεξης