

Reminder...

- Διαλέξεις

- Προαιρετική παρουσία!

- Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε

- Δεν υπάρχουν απουσίες

- Υπάρχει σεβασμός στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία

- Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά



Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος



Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος

Ενέργεια Συστήματος (review...)

- Σύστημα

- Ένα ή περισσότερα σώματα
- Μια περιοχή του χώρου

- Έργο

- Τρόπος μεταφοράς ενέργειας από ή προς το σύστημα
- Έργο σταθερής ή μεταβαλλόμενης δύναμης

$$W_F = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Ενέργεια Συστήματος (review...)

○ Κινητική Ενέργεια

$$K = \frac{1}{2} m u^2$$

- Σχετίζεται με την κίνηση ενός συστήματος (των μελών του)
 - Είδαμε μονομελή συστήματα ως τώρα

○ Έργο Δύναμης Ελατηρίου

$$W_s = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2$$

- Οι θέσεις x_i, x_f σχετίζονται με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου ($x = 0$)

Ενέργεια Συστήματος (review...)

- **Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου**

- 1^ο Ενεργειακό Θεώρημα

- Όταν σε ένα σύστημα ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, το **συνολικό** έργο που παράγεται από αυτές στο σύστημα ισούται με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος

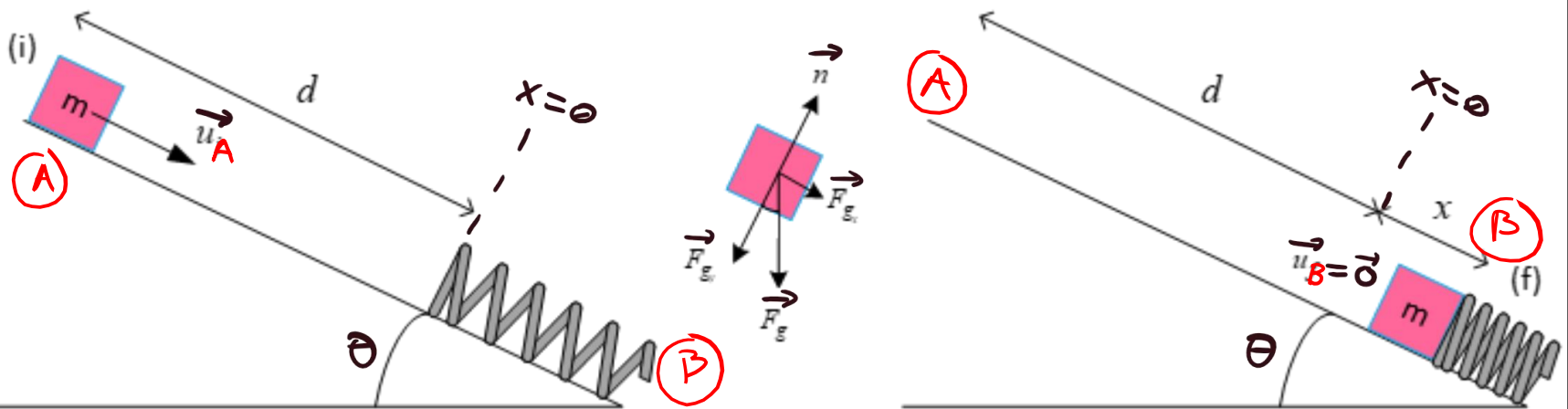
$$\Delta K = K_f - K_i = \sum W_{ext.forces}$$

- Ας το δούμε σε μια ακόμα άσκηση!

Ενέργεια Συστήματος

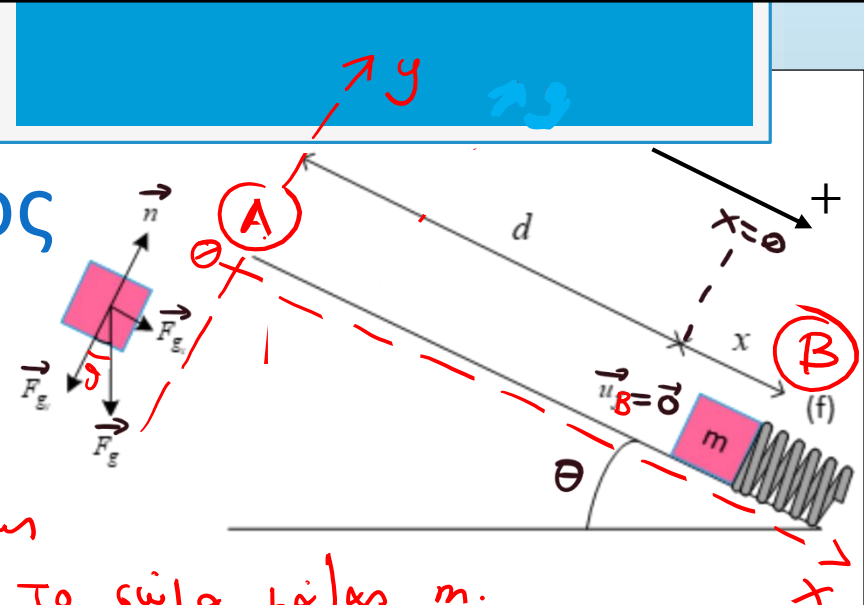
◉ Παράδειγμα:

- ◉ Λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ έχει ελατήριο σταθεράς k στερεωμένο στο κάτω μέρος του. Ένα κουτί μάζας m τοποθετείται πάνω στο κεκλιμένο σε απόσταση d από το ελατήριο. Από τη θέση αυτή, το κουτί βάλλεται προς το ελατήριο με ταχύτητα u_0 . Μπορείτε να προβλέψετε πόσο θα έχει συμπιεστεί το ελατήριο όταν το κουτί φτάνει στιγμιαία σε ηρεμία?



Ενέργεια Συστήματος

◉ Παράδειγμα – Λύση:



Δαθείαμε στη διαδρομή $A \rightarrow B$.

Τοποθετούμε τους άξονες x, y όπως στο σχήμα. Θεωρούμε ως σύστημα το σώμα μάζας m .

Σφαιρικόζουμε ΘΜΚΕ-Ε στη διαδρομή $A \rightarrow B$.

$$K_B - K_A = \sum W_{ext} = W_{\vec{n}} + W_{\vec{F}_{gx}} + W_{\vec{F}_{gy}} + W_s$$

$$0 - \frac{1}{2} m u_A^2 = W_{\vec{F}_{gx}} + W_s \Leftrightarrow -\frac{1}{2} m u_A^2 = m g \sin \theta \cdot (d+x) \cdot \cos(\theta) + 0 - \frac{1}{2} k x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} m u_A^2 = m g \sin \theta (d+x) - \frac{1}{2} k x^2$$

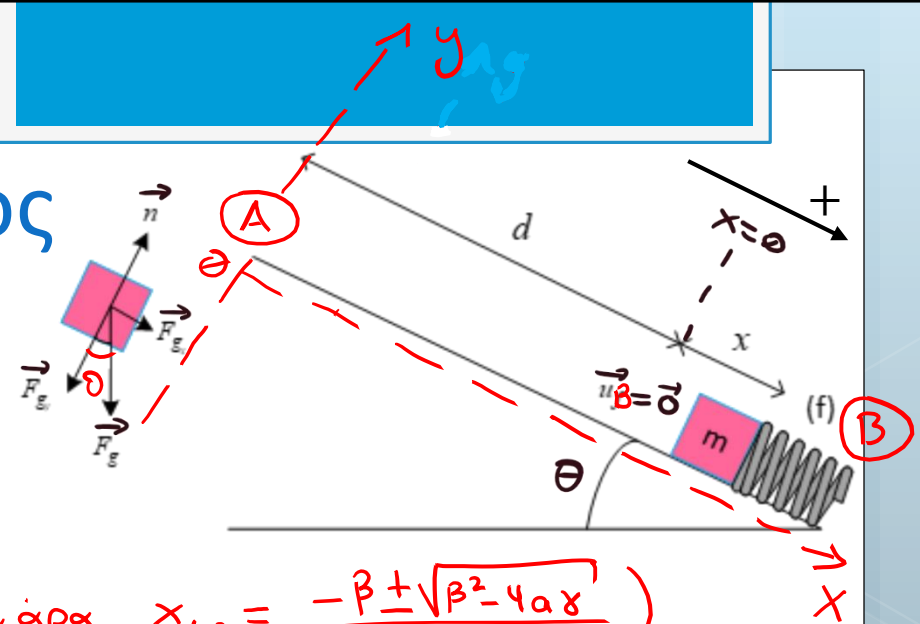
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} k x^2 - m g \sin \theta x - \frac{1}{2} m u_A^2 - m g \sin \theta \cdot d = 0$$

Ενέργεια Συστήματος

◦ Παράδειγμα – Λύση:

Λύνοντας το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο, έχουμε:

(είναι της μορφής $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, άρα $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$)



$$x_{1,2} = \frac{mgs\sin\theta \pm \sqrt{(mgs\sin\theta)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}k \left(\frac{1}{2}mu_A^2 + mgs\sin\theta \cdot d \right)}}{2 \cdot \frac{1}{2}k}$$

Από τις δύο ρίζες επιλέγουμε τη θετική λύση γιατί η θετική φορά του άξονα x είναι προς τη βάση του κεκλιμένου, ήτοι με τη φορά του διανύσματος επιτάξεως του ελαστικού, \vec{x} .

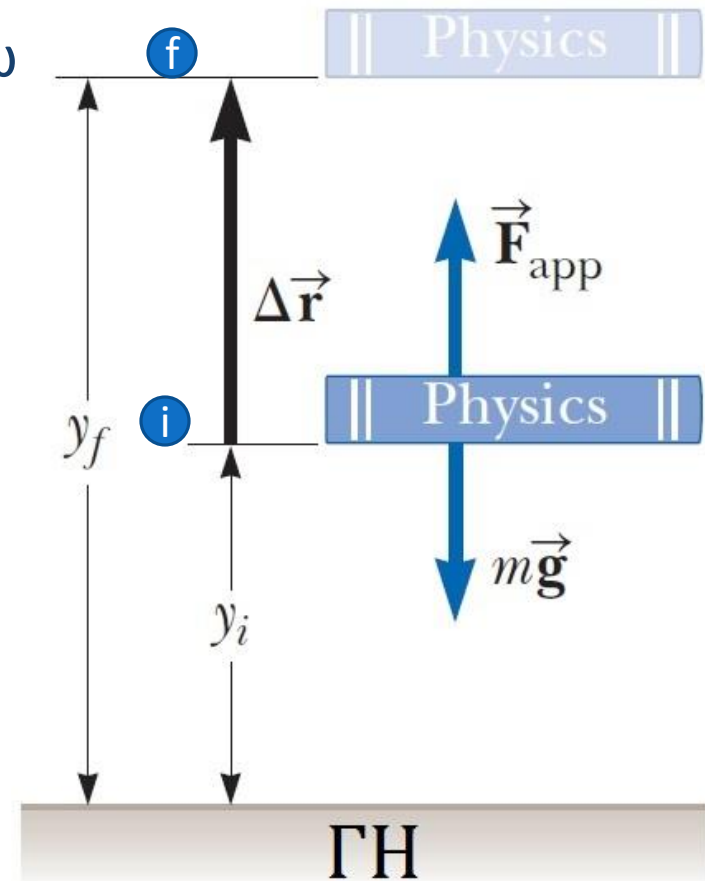
Ενέργεια Συστήματος

- Ως τώρα, είδαμε την επίδραση **εξωτερικών** δυνάμεων σε ένα σύστημα (κυρίως) **ενός** μόνο σώματος
- Ας δούμε συστήματα από **δυο ή περισσότερα** σώματα με δυνάμεις **εσωτερικές** στο σύστημα
 - Δηλ. δυνάμεις που **ΔΕΝ** ασκούνται από το εξωτερικό περιβάλλον
- Τι «ενεργειακό» νέο έχουν να μας πουν τέτοια συστήματα?

Ενέργεια Συστήματος

Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- Μετατοπίζουμε αργά (με σταθερή ταχύτητα) ένα βιβλίο από τη θέση y_i στη θέση y_f μέσω εξωτερικής δύναμης \vec{F}_{app}
- **Αύξηση** ενέργειας συστήματος λόγω έργου της \vec{F}_{app}
 - Μεταφέρουμε ενέργεια **στο** σύστημα
 - Υπάρχει δύναμη, υπάρχει μετατόπιση προς τα πάνω, άρα υπάρχει μη μηδενικό, **θετικό** έργο!



Ενέργεια Συστήματος

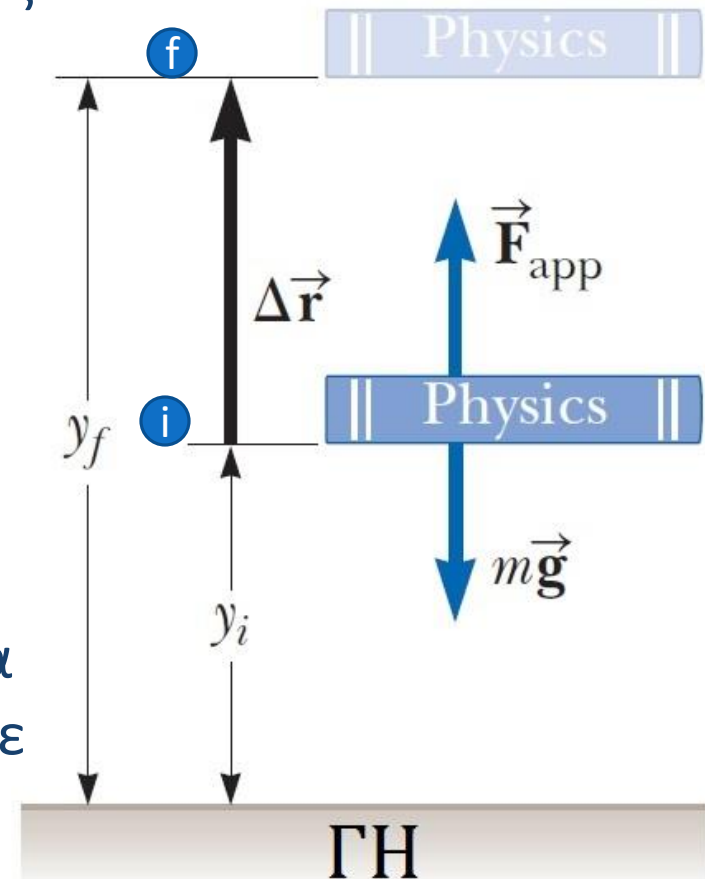
Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- Καμιά αλλαγή/μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσης! Γιατί; Υποθέσαμε

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0}$$

δηλ. η ταχύτητα ανόδου είναι σταθερή!

- Η ενέργεια που μεταφέρθηκε μέσω έργου στο βιβλίο πρέπει να έχει αποθηκευτεί στο σύστημα με **άλλη μορφή!**

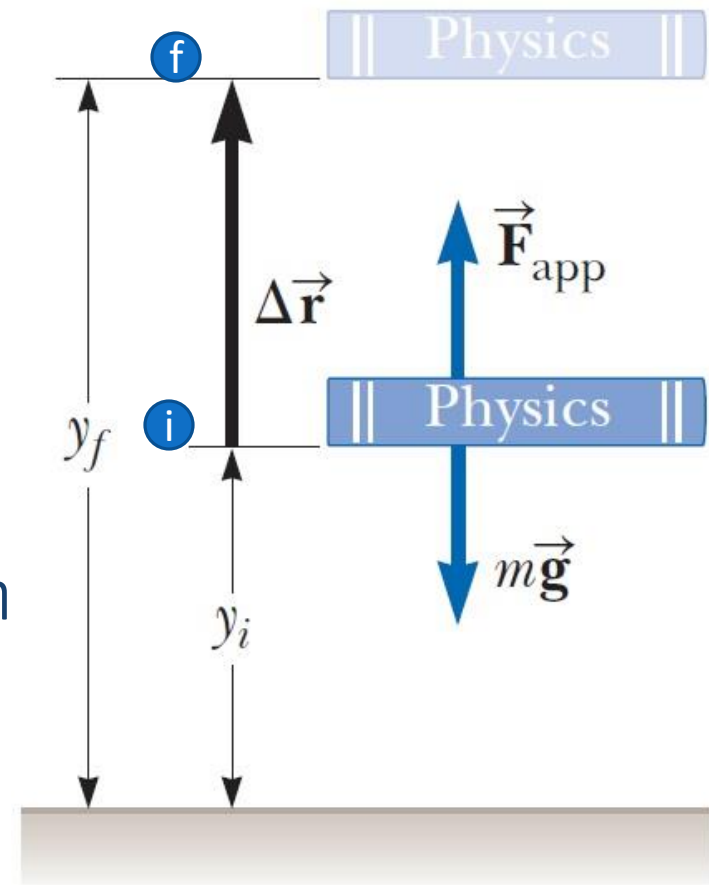


Ενέργεια Συστήματος

Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- Αν αφήσουμε όμως το βιβλίο, θα πέσει στο ύψος y_i
- Τώρα, το βιβλίο (και το σύστημα) έχει **κινητική ενέργεια!**
 - Πώς την απέκτησε; Από πού προήλθε?
 - Προέρχεται από το έργο της δύναμης \vec{F}_{app} κατά την ανύψωση του βιβλίου νωρίτερα
- Η ενέργεια που ήταν αποθηκευμένη στο βιβλίο πριν αυτό αφεθεί να πέσει λέγεται

βαρυτική δυναμική ενέργεια



Ενέργεια Συστήματος

Σύστημα: Βιβλίο + Γη

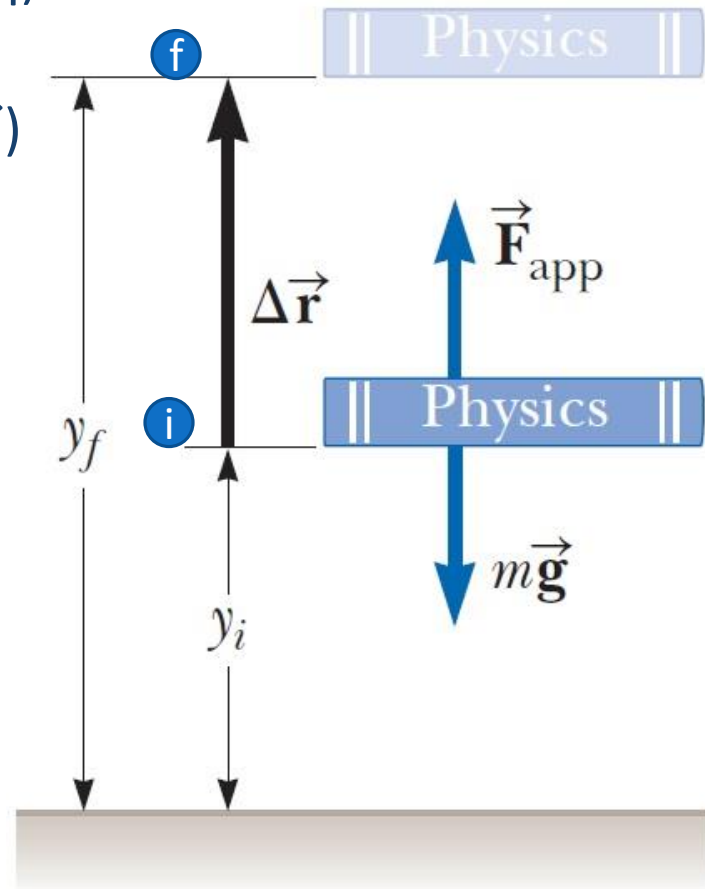
$$* \vec{F}_g + \vec{F}_{app} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_{app} = -\vec{F}_g$$

- Εφαρμόζουμε δύναμη για να ανυψώσουμε το βιβλίο με (σταθερή) πολύ αργή ταχύτητα (έτσι ώστε $\Sigma \vec{F}_y = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_{app} = -m\vec{g}$)

- $$\begin{aligned} W_{ext} &= \vec{F}_{app} \cdot \Delta\vec{r} = -m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r} \\ &= mg\vec{j} \cdot (y_f - y_i)\vec{j} \\ &= mgy_f - mgy_i \\ &= U_{gf} - U_{gi} = \Delta U_g \end{aligned}$$

- Βαρυτική Δυναμική ενέργεια

$$U_g = mgy$$



Ενέργεια Συστήματος

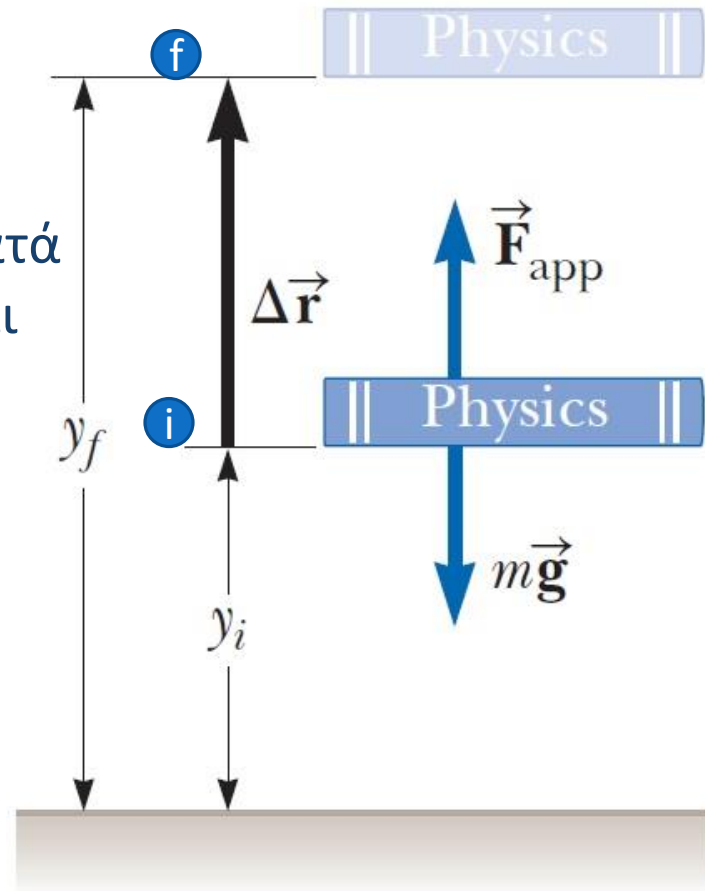
Σύστημα: Βιβλίο + Γη

$$W_{ext} = U_{gf} - U_{gi} = \Delta U_g$$

- Το έργο της εξωτερικής δύναμης κατά την ανύψωση ενός σώματος ισούται με τη μεταβολή στη

βαρυτική δυναμική ενέργεια

του συστήματος {Γη, βιβλίο}!

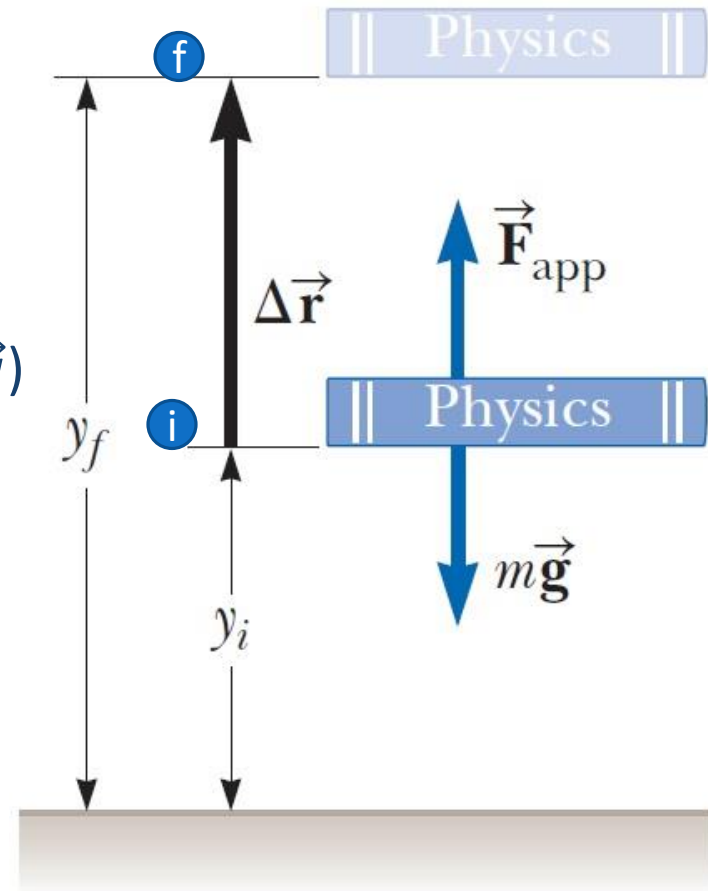


Ενέργεια Συστήματος

Σύστημα: Βιβλίο + Γη

- Ας κάνουμε το ίδιο για το **έργο** της δύναμης του **βάρους**!
- Εφαρμόζουμε δύναμη για να **ανυψώσουμε** το βιβλίο με (σταθερή) πολύ αργή ταχύτητα (έτσι ώστε $\Sigma \vec{F}_y = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_{app} = -m\vec{g}$)

- $$\begin{aligned} W_{F_g} &= \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{r} = m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r} \\ &= -mg\vec{j} \cdot (y_f - y_i)\vec{j} \\ &= mgy_i - mgy_f \\ &= U_{g_i} - U_{g_f} = -\Delta U_g \end{aligned}$$



Ενέργεια Συστήματος

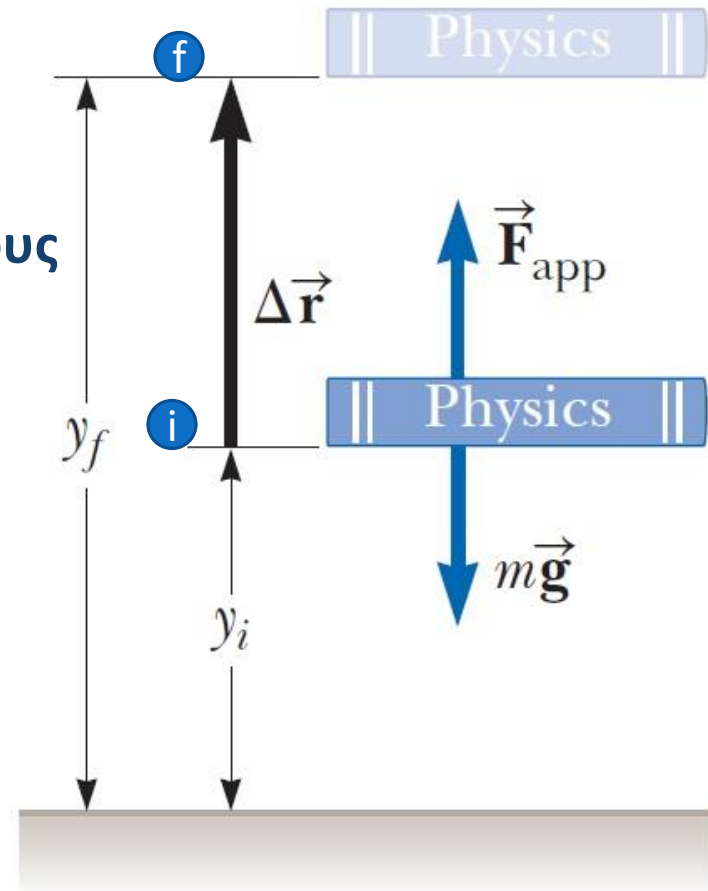
Σύστημα: Βιβλίο + Γη

$$W_{F_g} = U_{g_i} - U_{g_f} = -\Delta U_g$$

- Άρα το έργο της δύναμης του βάρους κατά την ανύψωση ενός σώματος ισούται με την αρνητική μεταβολή στη

βαρυτική δυναμική ενέργεια

του συστήματος {Γη, βιβλίο}!



Ενέργεια Συστήματος

- **Θυμηθείτε:**

- Είδαμε ότι το έργο που παράγεται σε ένα σύστημα μπορεί να ισοδυναμεί με **μεταβολή της κινητικής του ενέργειας**, που «μεταφράζεται» σε **κίνηση** των μελών του συστήματος
- Στην προηγούμενη περίπτωση, είδαμε ότι το έργο που παράγεται εμφανίζεται ως **μεταβολή της (βαρυτικής) δυναμικής ενέργειας** στο σύστημα, που «μεταφράζεται» ως αλλαγή στη

διάταξη / διαμόρφωση / σύνθεση

των **μελών** του συστήματος.

- Εν προκειμένω, το βιβλίο ανυψώθηκε σε σχέση με την επιφάνεια της Γης (άλλαξε η μεταξύ τους «διάταξη»)

Ενέργεια Συστήματος

- Σε πρακτικά προβλήματα, πρέπει να επιλέγουμε μια **διάταξη των μελών** του συστήματος (διάταξη αναφοράς) όπου η **βαρυτική δυναμική ενέργεια** θεωρείται **μηδενική**
- Για παράδειγμα, όταν τα σώματα βρίσκονται **ακριβώς πάνω** στην επιφάνεια της Γης.
 - Τότε θεωρούμε ότι η **βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος {Γη, σώματα}** είναι **μηδενική**
 - Οποιαδήποτε **μεταβολή** στο **ύψος** κάποιου σώματος σε σχέση με την επιφάνεια της Γης οδηγεί σε **μεταβολή** της **βαρυτικής δυναμικής ενέργειας** του συστήματος
- Πολλές φορές, το πρόβλημα «οδηγεί» στην κατάλληλη επιλογή της διάταξης

Ενέργεια Συστήματος

- Ας δούμε μια άλλης μορφής δυναμική ενέργεια που μπορεί να έχει ένα σύστημα
- Πίσω στο ελατήριο! ☺ Σύστημα: {ελατήριο, σώμα}
 - Διμελές σύστημα!
 - Δύναμη ελατηρίου: **εσωτερική** στο σύστημα
- Είδαμε στην προηγούμενη διάλεξη ότι

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2 = -W_{ext}$$

- Το **έργο** που παράγεται στο σύστημα **εξαρτάται από την αρχική και την τελική θέση του σώματος σε σχέση με τη θέση ισοροπίας του ελατηρίου**
 - Είναι κι αυτό μια **διάταξη** των μελών του συστήματος!

Ενέργεια Συστήματος

- Άρα αν θεωρήσουμε ότι

$$U_s = \frac{1}{2} kx^2$$

τότε

$$\begin{aligned} W_s &= \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2 \\ &= U_s^i - U_s^f = -\Delta U_s \end{aligned}$$

με U_s την

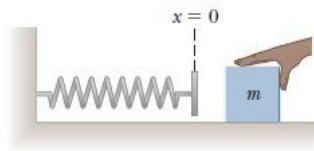
ελαστική δυναμική ενέργεια

που σχετίζεται με το σύστημα {σώματος, ελατηρίου}

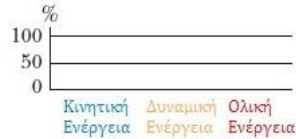
Ενέργεια Συστήματος

- Συνοψίζοντας:
- Σύστημα {σώμα, Γη}
 - Πολυμελές!
 - **Βαρυτική** δυναμική ενέργεια $U_g = mgy$
 - «Θέση» αναφοράς: συνήθως επίπεδο επιφάνειας Γης ($y = 0$)
- Σύστημα {ελατήριο, σώμα}
 - Πολυμελές!
 - **Ελαστική** δυναμική ενέργεια $U_s = \frac{1}{2}kx^2$
 - «Θέση» αναφοράς: θέση φυσικού μήκους ελατηρίου ($x = 0$)
- Και στις δυο περιπτώσεις, οι **διαφορές** δυναμικής ενέργειας έχουν σημασία!

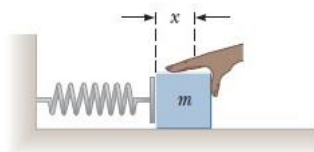
Ενέργεια Συστήματος



Πριν το ελατήριο συμπιεστεί, δεν υπάρχει ενέργεια στο σύστημα ελατηρίου-σώματος.



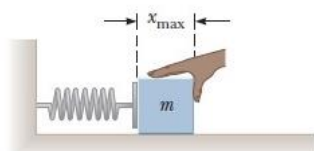
a



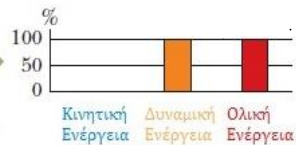
Όταν το ελατήριο συμπιέζεται μερικώς, η ολική ενέργεια του συστήματος είναι ελαστική δυναμική ενέργεια.



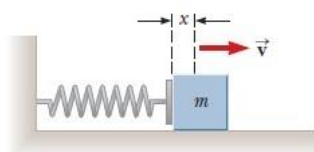
b



Το ελατήριο συμπιέζεται στο μέγιστο βαθμό, και το σώμα κρατείται σταθερό. Υπάρχει ελαστική δυναμική ενέργεια στο σύστημα και καθόλου κινητική ενέργεια.



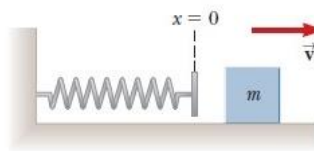
c



Αφού αφήνεται ελεύθερο το σώμα, η ελαστική δυναμική ενέργεια μειώνεται και η κινητική ενέργεια αυξάνεται.



d



Αφού το σώμα χάσει επαφή με το ελατήριο, η συνολική ενέργεια του συστήματος είναι κινητική ενέργεια.



e

Παράγεται έργο από το χέρι επάνω στο σύστημα ελατηρίου-σώματος, κι έτσι η συνολική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται.

Δεν παράγεται κανένα έργο στο σύστημα ελατηρίου-σώματος από εξωτερική δύναμη, κι έτσι η συνολική ενέργεια του συστήματος είναι σταθερή.

Ενέργεια Συστήματος

- Ας δούμε και μια ακόμη μορφή ενέργειας που μπορεί να έχει ένα σύστημα

- Σύστημα = {βιβλίο}

- Σταθερή δύναμη \vec{F}

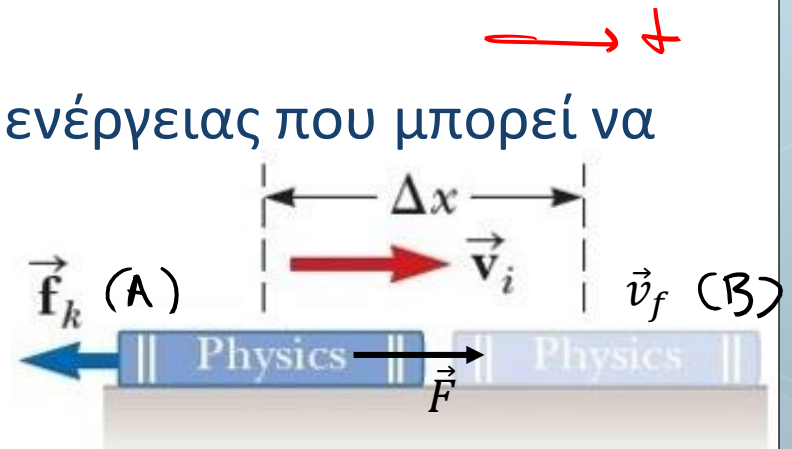
- Σταθερή επιτάχυνση: μετατόπιση κατά Δx

- Κίνηση υπό σταθερή δύναμη (Μοντέλο I) και κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση (Μοντέλο II):

$$\sum F_x = ma \Leftrightarrow F - f_k = ma$$

$$u_f^2 = u_i^2 + 2a\Delta x \Leftrightarrow a = \frac{1}{2\Delta x} (u_f^2 - u_i^2)$$

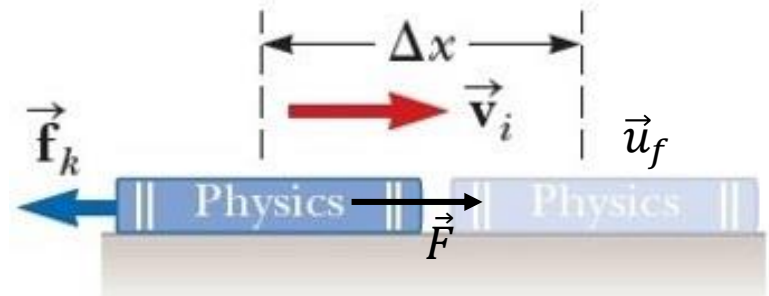
$$\Delta K = W_F + W_{f_k} \Rightarrow W_F = \Delta K + f_k \Delta x$$



$$\left. \begin{aligned} & \overbrace{(F - f_k) \Delta x}^{W_F + W_{f_k}} = \\ & \underbrace{\frac{1}{2} m (u_f^2 - u_i^2)}_{\Delta K} \end{aligned} \right\}$$

Ενέργεια Συστήματος

- Σύστημα = {βιβλίο}



$$W_F = \Delta K + f_k \Delta x$$

- Πού πήγε η ενέργεια μέσω του έργου της \vec{F} ??
- Μετατράπηκε τόσο σε αύξηση της **κινητικής ενέργειας** του σώματος όσο και σε αύξηση της θερμοκρασίας της επιφάνειας και του βιβλίου:

$$\Delta E_{th} = f_k \Delta x = -(-f_k \Delta x) = -W_{f_k}$$

$$W_{f_k} = f_k \Delta x \cos(\pi) \quad -1$$

- Μεταβολή στη θερμοκρασία του συστήματος **{βιβλίο, επιφάνεια}**

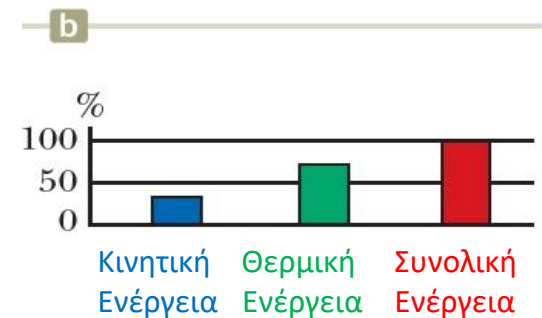
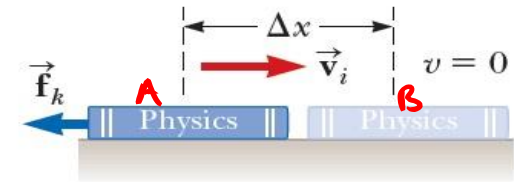
Ενέργεια Συστήματος

- Η ενέργεια αυτή μετατράπηκε σε **θερμική ενέργεια** του συστήματος {βιβλίο και επιφάνεια} (όχι μόνο βιβλίο!)
 - Η επιφάνεια και το βιβλίο θερμάνθηκαν!
- Θα ονομάζουμε την ενέργεια που σχετίζεται με τη θερμοκρασία ενός συστήματος ως **θερμική ενέργεια**, και θα τη συμβολίζουμε με

$$E_{th}$$

- Στο προηγούμενο παράδειγμα (και γενικότερα)

$$\Delta E_{th} = -W_{τριβης} = f_k \Delta x$$



Ενέργεια Συστήματος

○ Συνολικές παρατηρήσεις

- Για να μιλήσουμε για **δυναμικές** ενέργειες (κάθε μορφής) χρειαζόμαστε **πολυμελή (διμελή τουλάχιστον)** συστήματα
 - Η δύναμη που σχετίζεται με τη **δυναμική** ενέργεια πρέπει να είναι **εσωτερική** δύναμη στο σύστημα
 - Δύναμη **βάρους** στο σύστημα {**σώμα, Γη**}: εσωτερική στο σύστημα
 - Σχετίζεται με τη **βαρυτική** δυναμική ενέργεια (μέσω έργου του βάρους)
 - Δύναμη **ελατηρίου** στο σύστημα {**ελατήριο, σώμα**}: εσωτερική στο σύστημα
 - Σχετίζεται με την **ελαστική** δυναμική ενέργεια (μέσω έργου ελατηρίου)
 - Για να μιλήσουμε για **θερμική** ενέργεια χρειαζόμαστε ξανά **πολυμελή** συστήματα (**διμελή τουλάχιστον**), με το ένα μέλος να είναι κάποια **μη λεία επιφάνεια** που ολισθαίνει ένα άλλο μέλος του συστήματος
 - Η δύναμη που σχετίζεται με τη **θερμική** ενέργεια είναι εσωτερική του συστήματος
 - Δύναμη **τριβής ολισθήσεως** στο σύστημα {**σώμα, επιφάνεια**}: εσωτερική στο σύστημα

Ενέργεια Συστήματος

○ Συνολικές παρατηρήσεις

- Χρειαζόμαστε ένα «ενεργειακό πλαίσιο» για να εφαρμόζουμε τις νέες αυτές ενεργειακές μεταβολές
- Το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου αφορά **μονομελή** συστήματα και οι ενεργειακές μεταβολές που είδαμε εκφράζονται μέσω των **έργων** των αντίστοιχων δυνάμεων
- Για παράδειγμα, σε ένα **μονομελές** σύστημα, το ΘΜΚΕΕ δίνει:

$$\Delta K = W_F + W_{fk} + W_{Fg}$$

- Είδαμε πριν ότι

- $W_{fk} = -\Delta E_{th}$

- $W_{Fg} = U_{gi} - U_{gf} = -\Delta U_g$

- **ΔΕΝ** μπορούμε να κάνουμε αυτές τις αντικαταστάσεις στην παραπάνω εξίσωση, καθώς δεν ορίζονται σε μονομελή συστήματα!

Ενέργεια Συστήματος

- Συνολικές παρατηρήσεις

$$\Delta K = W_F + W_{f_k} + W_{F_g}$$

- Φυσικά μπορούμε να γράψουμε ότι

- $W_{f_k} = \vec{f}_k \cdot \Delta \vec{x} = f_k \Delta x \cos(\pi) = -f_k \Delta x$

- $W_{F_g} = \vec{F}_g \cdot \Delta \vec{y} = -mg(y_f - y_i) = mgy_i - mgy_f$

- ...και να λύσουμε το πρόβλημα, αλλά δεν μπορούμε να αναφερθούμε σε μεταβολές ενέργειας πέραν της κινητικής στο ΘΜΚΕΕ!

- Άραγε ποιό/ά ενεργειακό/ά θεώρημα/τα μπορεί να μας επιτρέψει να χρησιμοποιούμε κατευθείαν τις δυναμικές/θερμικές ενέργειες??!!

Ενέργεια Συστήματος

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων

Σύστημα

Μονομελές

Πολυμελές

Μη απομονωμένο

Μη απομονωμένο

Απομονωμένο

$$\Delta E_{sys} = \Sigma W_{ext}$$

$$\Delta K = \Sigma W_{ext}$$

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

Αρχή Διατήρησης Ενέργειας

Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου

Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας

$$\Delta E_{sys} = 0$$

Συνεχίζεται... 😊