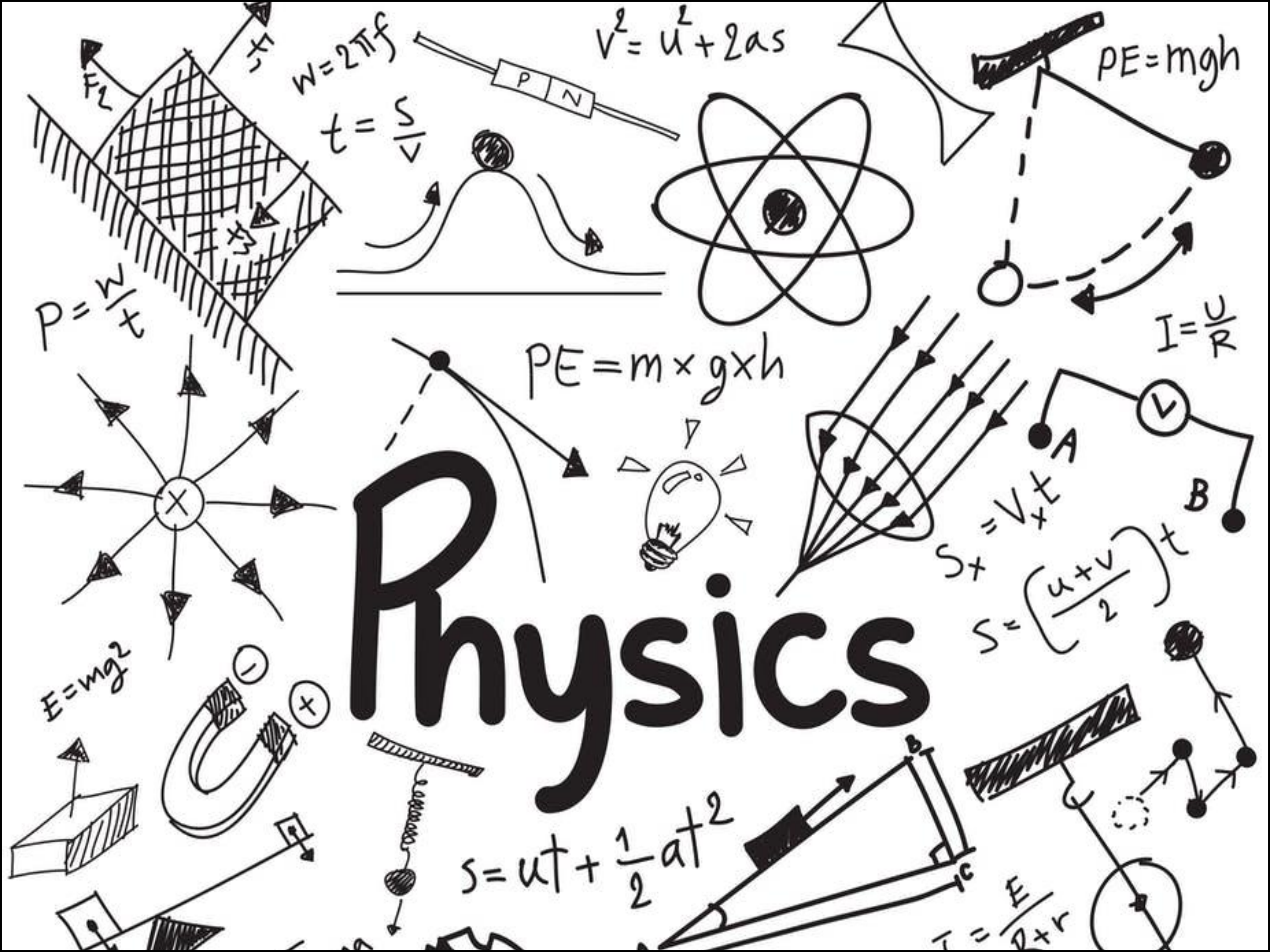


Physics
W=2πf
V² = u² + 2as
PE=mgh
P N
t = S/V
P = W/t
PE=m×g×h
I=U/R
A
B
S = (u+v/2) t
E=mg²
s=ut + 1/2 at²
B
C

Reminder…

- **Διαλέξεις**
  - **Προαιρετική** παρουσία!
  - Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
  - Δεν υπάρχουν απουσίες
  - Υπάρχει **σεβασμός** στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
  - **Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας**: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά

Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

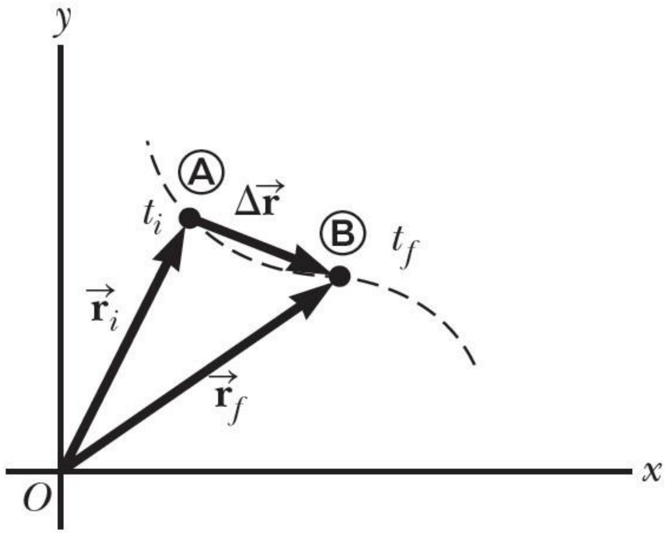
Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις (review…)

- **Διάνυσμα θέσης $\vec{r}$**
- **Μετατόπιση $\Delta\vec{r}$**
  - Διαφορά μεταξύ τελικής κι αρχικής θέσης
  - $\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_f - \vec{r}_i$
- **Μέση Ταχύτητα**
  - $\vec{v}_{avg} \equiv \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$
- **Στιγμιαία ταχύτητα**
  - $\boldsymbol{\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}}$



- **Μέση Επιτάχυνση**
  - $\boldsymbol{\vec{a}_{avg} \equiv \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}}$
- **Στιγμιαία Επιτάχυνση**
  - $\boldsymbol{\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2}{dt^2}\vec{r}}$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις (review...)

- Εξισώσεις κίνησης σε δυο διαστάσεις με <u>σταθερή επιτάχυνση</u>

- $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

$$u_{y_f} = u_{y_i} + a_y t$$

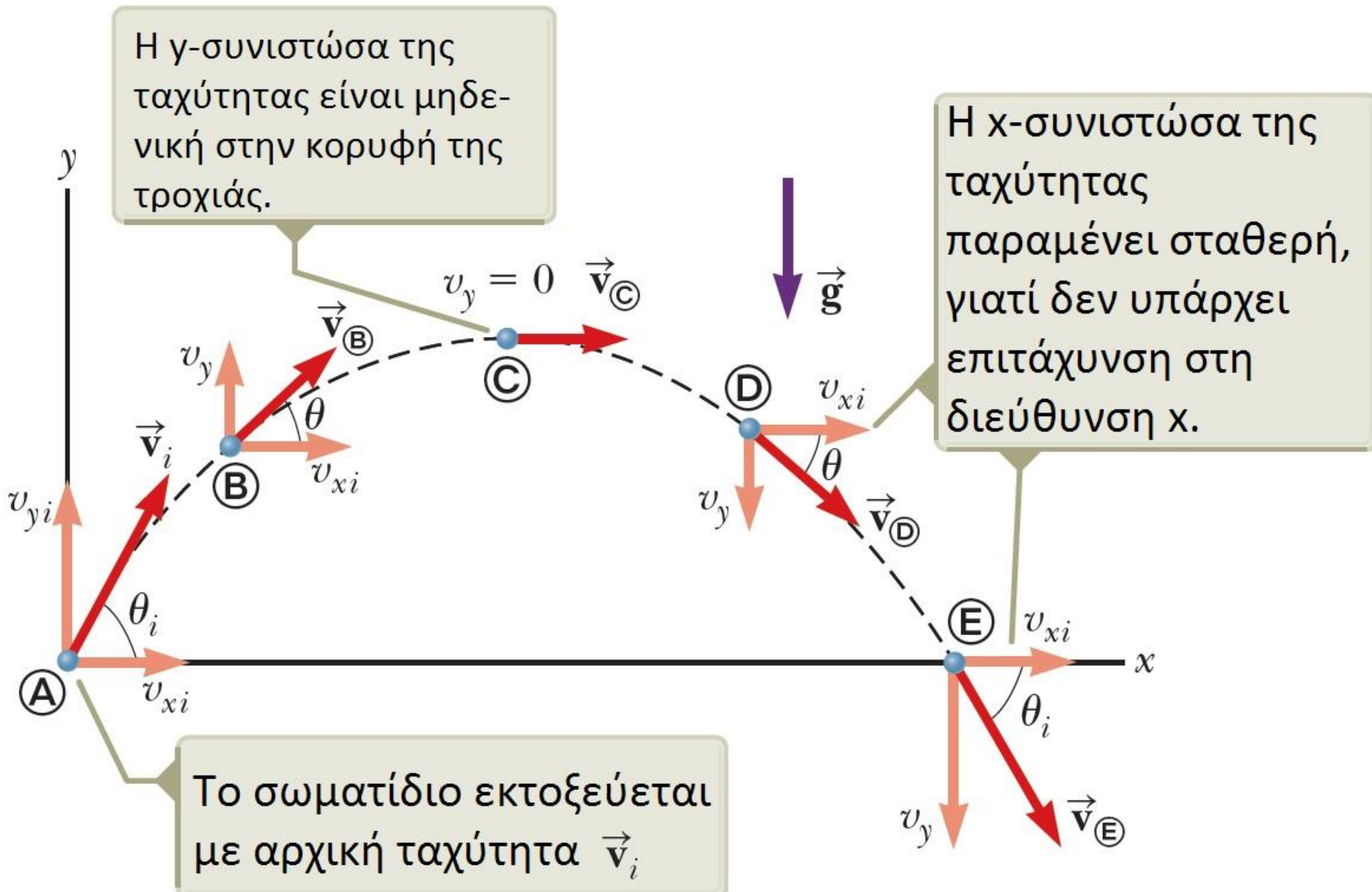
- $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

$$x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$y_f = y_i + u_{y_i} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

Ισχύουν και όλες οι υπόλοιπες εξισώσεις που περιγράφουν την μονοδιάστατη κίνηση υπό σταθερή (ή μηδενική) επιτάχυνση!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις (review…)



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Αλγεβρικές εξισώσεις**
- **1)** $x_f = x_i + u_{xi}t$
- **2)** $u_{yf} = u_{yi} - gt$

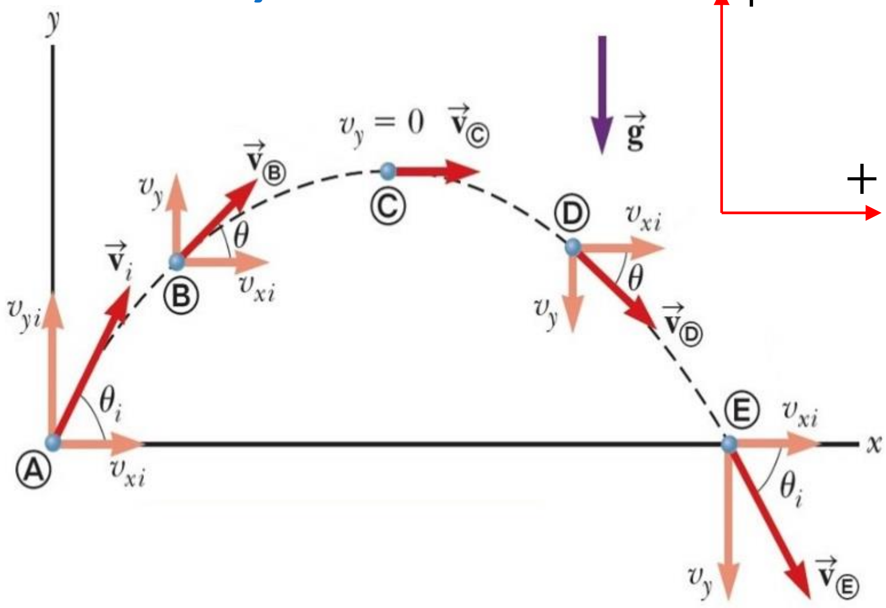
$$u_{y,avg} = \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})$$

$$y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$$

$$y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$$

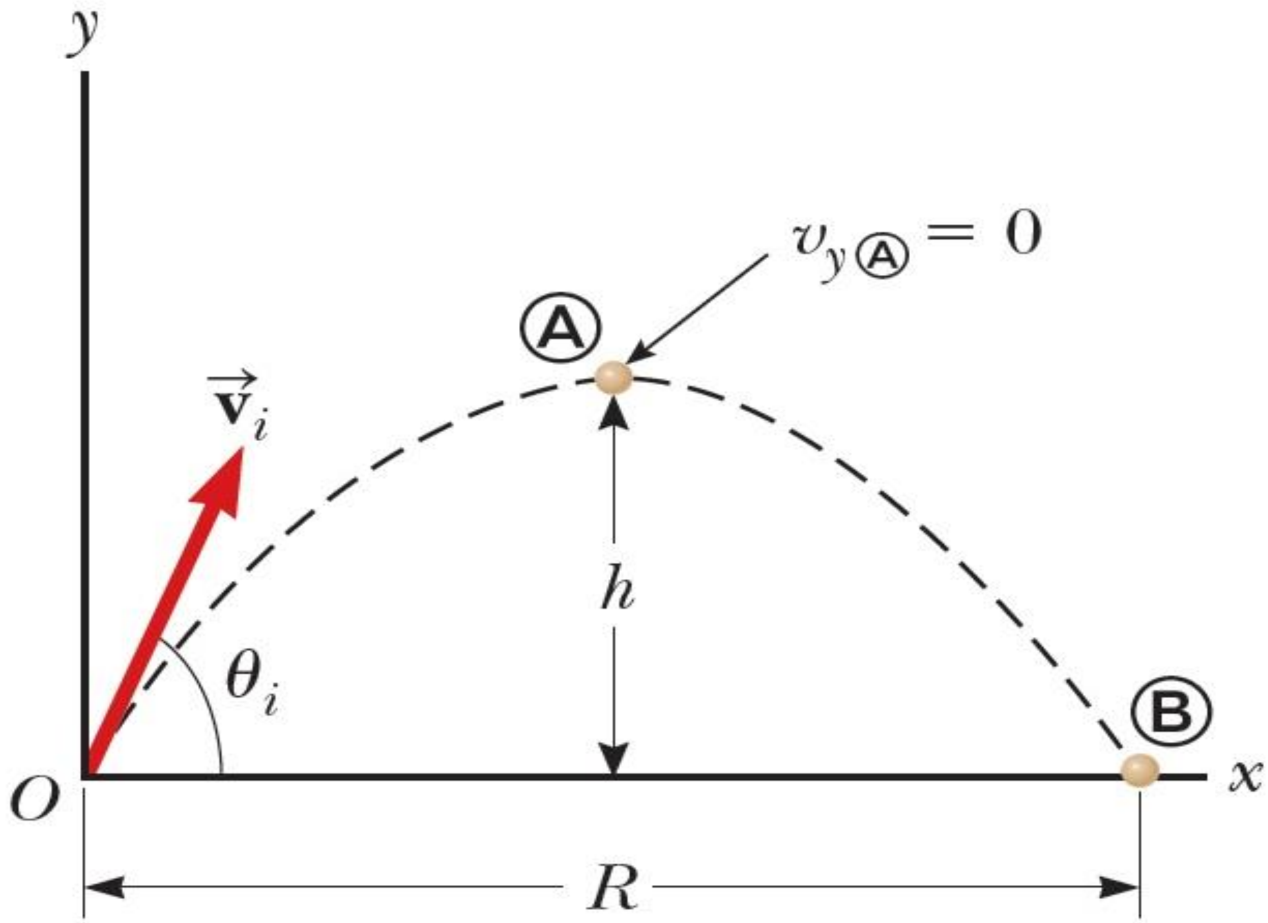
με $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$



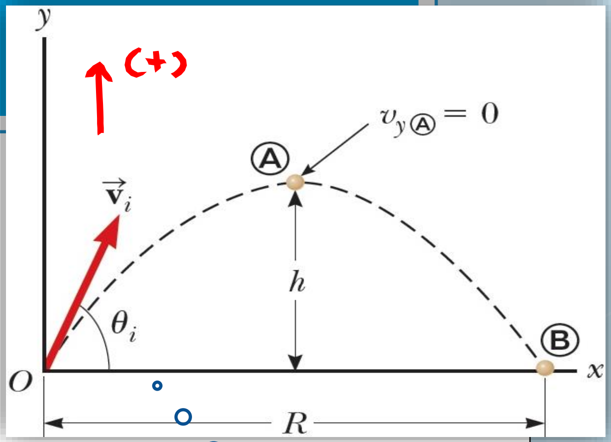
- **Εντελώς** ανεξάρτητες μεταξύ τους κινήσεις!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Εύρος (ή Βεληνεκές)** $\boldsymbol{R}$ και **Μέγιστο Ύψος** $\boldsymbol{h}$ βολής



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



- Ας βρούμε τα h, R συναρτήσει των δεδομένων:

Διαδρομή ΟΑ:

$$y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2 = h$$

$$y_f = y_A, y_i = y_O$$

$$h = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$= 0 + u_i \sin(\theta_i)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Επίσης,

$$u_{y_f} = u_{y_i} - gt \Leftrightarrow t = \frac{u_{y_i}}{g}$$

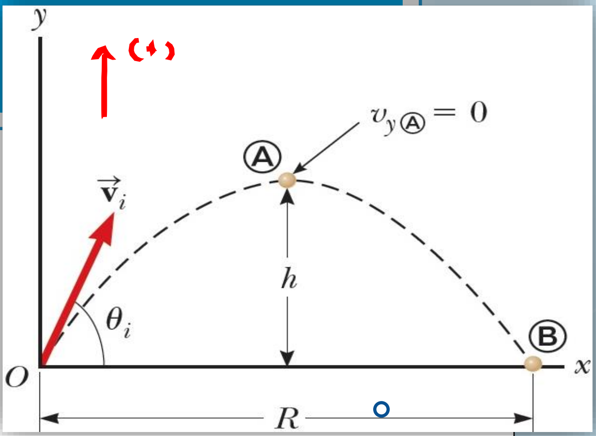
Από τις παραπάνω σχέσεις

$$h = u_i \sin(\theta_i)\left(\frac{u_{y_i}}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{u_{y_i}}{g}\right)^2$$

κι αφού $u_{y_i} = u_i \sin(\theta_i)$ έχουμε

$$\boxed{h = \frac{u_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g}}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



- Ας βρούμε τα h, R συναρτήσει των δεδομένων:

Διαδρομή OB:

Στον x-άξονα: $x_f = x_i + u_x t \Rightarrow R = x_i + u_x t = u_x t = u_i \cos\theta_i\, t$

Στον y-άξονα: $y_f = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 0 = 0 + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} g t^2 = u_{y_i} t \Rightarrow \frac{1}{2} g t = u_{y_i} = u_i \sin\theta_i \Rightarrow t = \frac{2u_i \sin\theta_i}{g}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις,

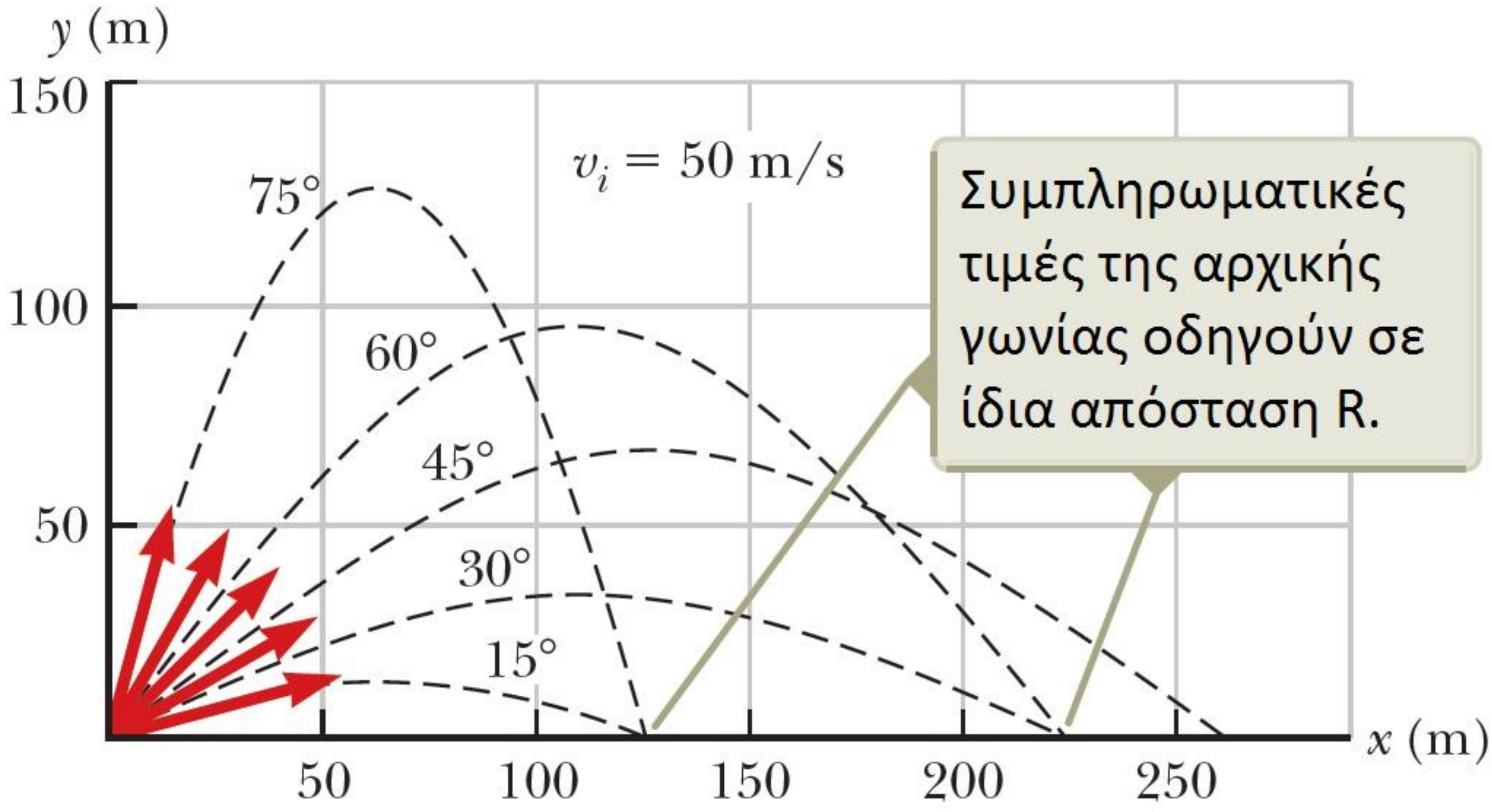
$$R = u_i \cos(\theta_i) \frac{2u_i \sin\theta_i}{g} = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g}$$

Έτσι

$$\boxed{R = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g}}$$

$y_f = y_B, x_f = x_B,$
$y_i = y_O, x_i = x_O$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Παράδειγμα:**
- Ο Γιάννης Αντετοκούνμπο σουτάρει την μπάλα υπό γωνία 40˚ με το οριζόντιο επίπεδο, σε απόσταση 10 m από το καλάθι (buzzer beater). Το ύψος του είναι 2.0 m ενώ το ύψος της μπασκέτας είναι 3.0 m.
  Α) Ποια είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της;
  Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

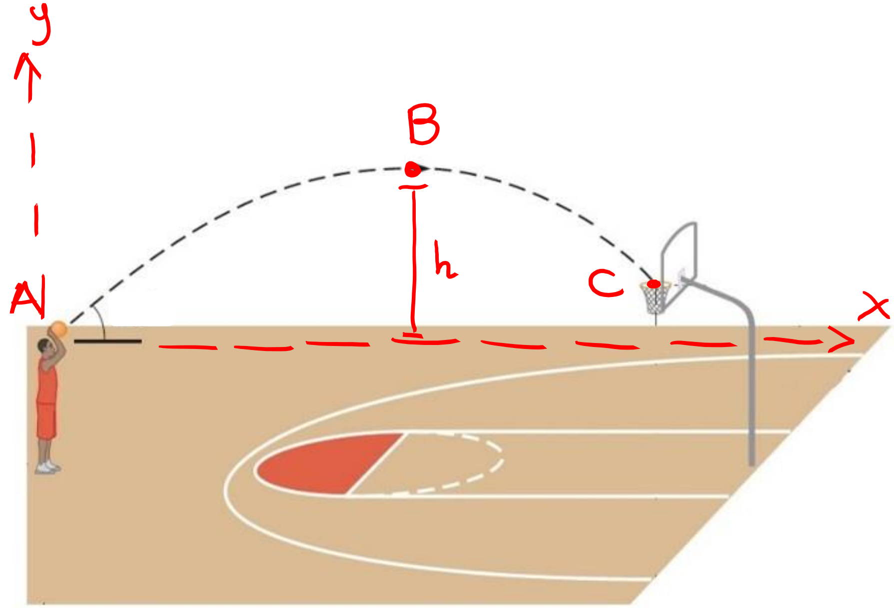
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Παράδειγμα – Λύση:
  - γωνία 40˚, απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.
    Α) Ποια είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της;

Η μπάλα δέχεται επιτάχυνση ίση με $\vec{g}$, δηλ. $\left(-9.8\ \frac{m}{s^2}\right)\vec{j}$

σε ΚΑΘΕ σημείο της

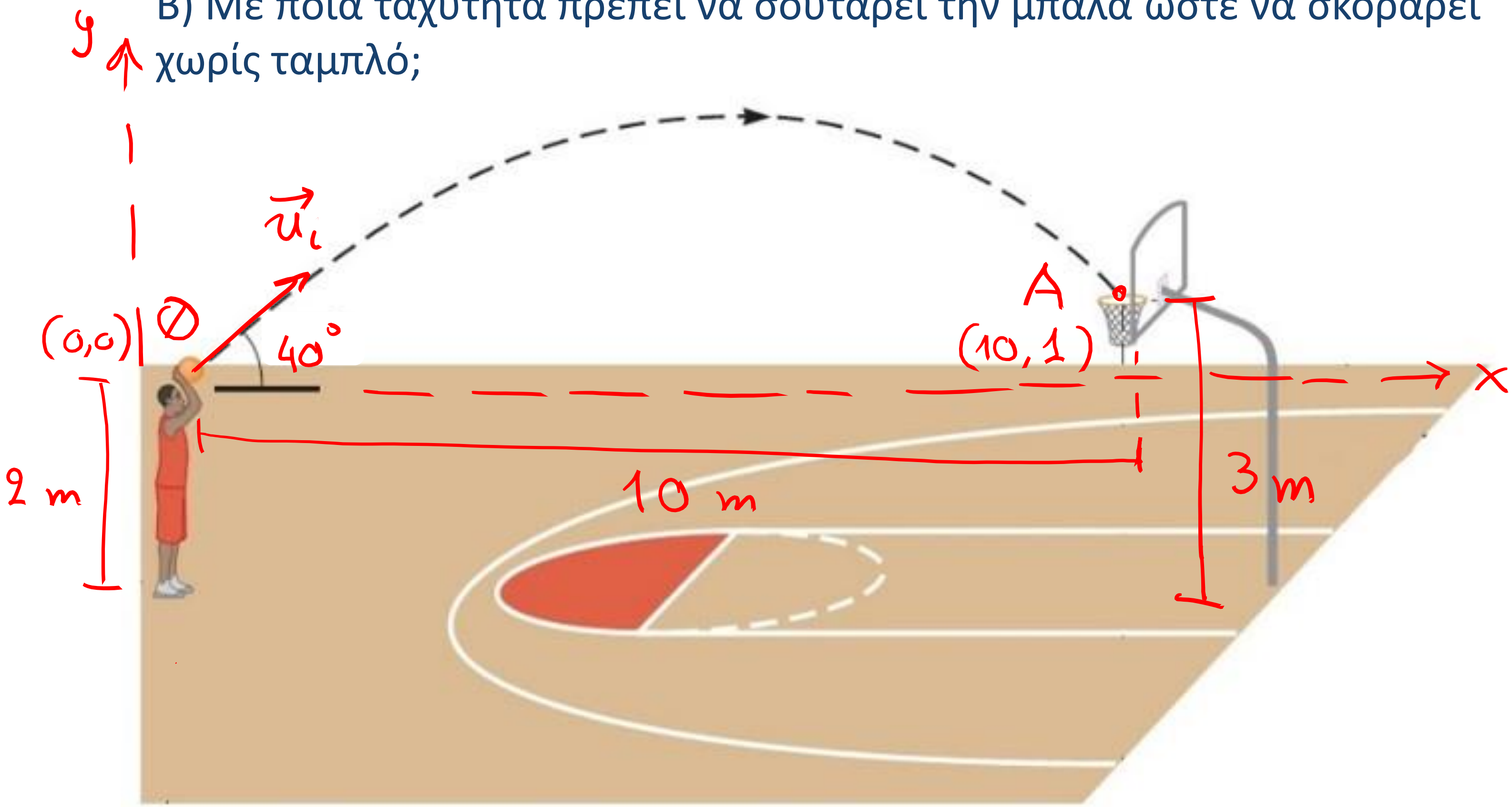
τροχιάς της!



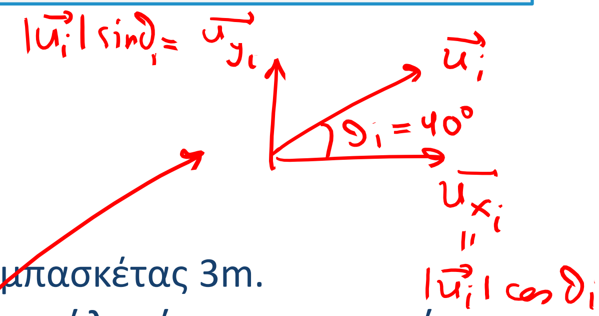
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

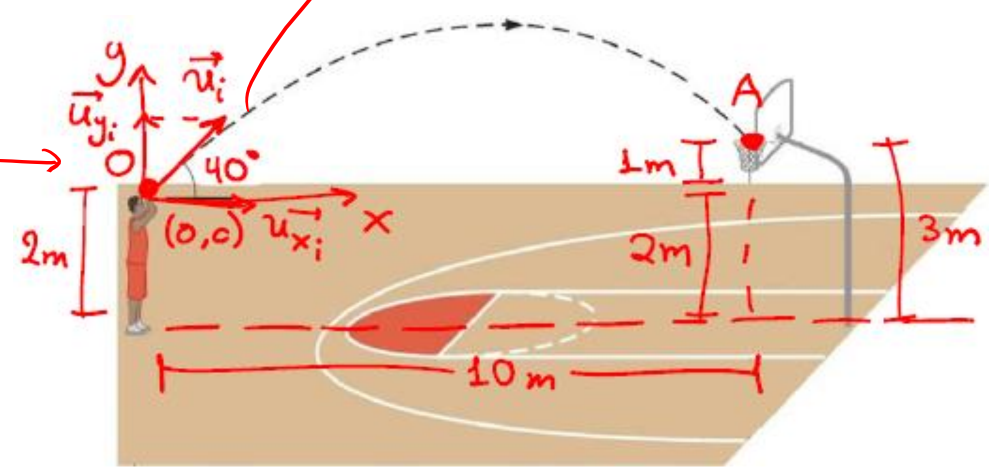
- Παράδειγμα – Λύση:
  - γωνία 40˚, απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.
    Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



- Παράδειγμα – Λύση:
  - γωνία 40˚, απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.
    Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;
    Δίνονται:
    $\tan(40^o) = 0.84$,
    $\cos(40^o) = 0.76$,
    $\cos^2(40^o) = 0.58$



Επιλέξαμε να τοποθετήσαμε στα χέρια του παίκτη τη συμβολή των αξόνων μας.

Η διαδρομή μας είναι η ΟΑ. ⇝ y'y : επιταχυνόμενη, x'x : με σταθ. ταχύτητα.

- Στον x'x : $x_A = x_0 + u_x \cdot t \Leftrightarrow 10 = 0 + u_i\cos(40^\circ)\cdot t \Rightarrow$

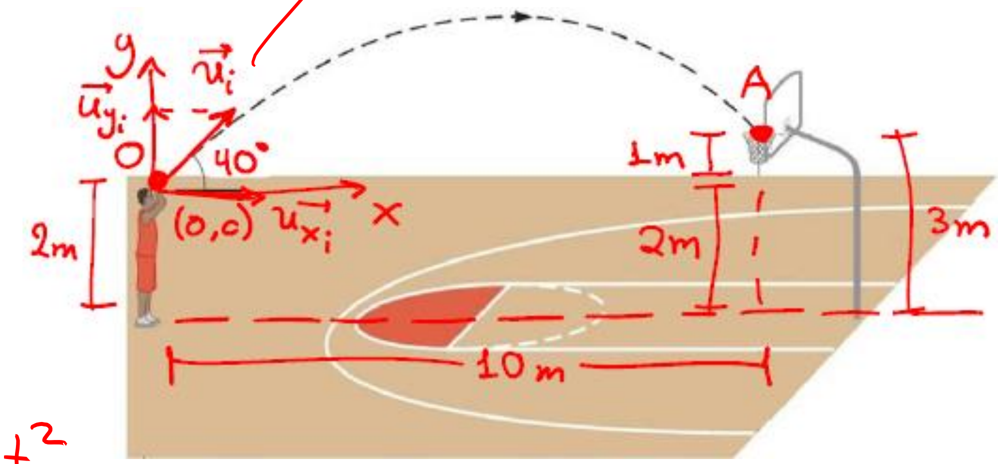
$$\Rightarrow t = \frac{10}{u_i \cdot \cos(40^\circ)} \quad (1)$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

$u_{y_0} = u_i \sin 40^\circ$

$u_{x_0} = u_i \cos 40^\circ$

- Παράδειγμα – Λύση:
  - γωνία 40˚, απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.
    Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;
    Δίνονται:
    $\tan(40^o) = 0.84,$
    $\cos(40^o) = 0.76,$
    $\cos^2(40^o) = 0.58$



• Στον y'y:

$y_A = y_0 + u_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2$

$1 = 0 + u_i \sin(40^\circ) t - \frac{1}{2} g t^2$

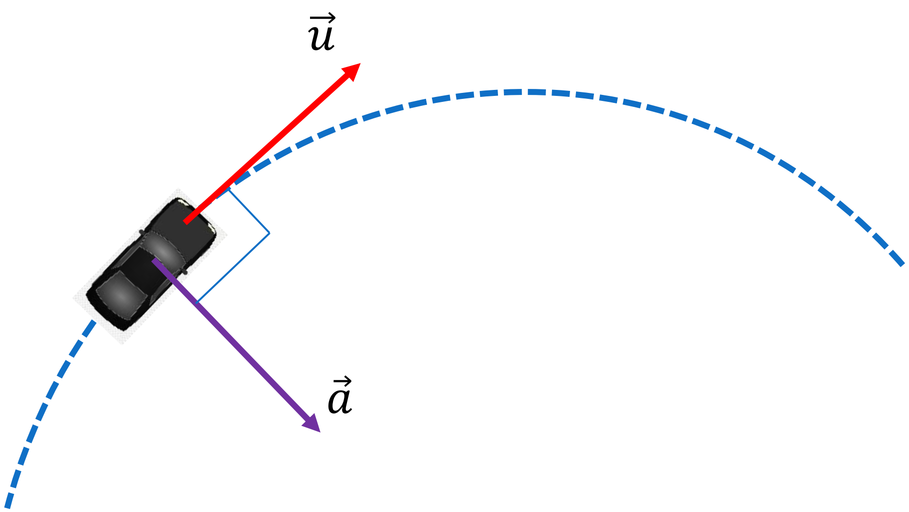
Λόγω (1), θα είναι: $1 = \cancel{u_i} \sin(40^\circ) \frac{10}{\cancel{u_i} \cos(40^\circ)} - \frac{1}{2} g \left(\frac{10}{u_i \cos(40^\circ)}\right)^2 \Leftrightarrow$

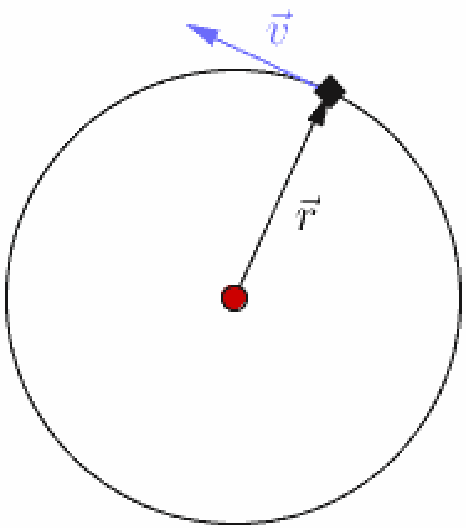
$\Leftrightarrow 1 = 10\tan(40^\circ) - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \left(\frac{10^2}{u_i^2 \cos^2(40^\circ)}\right) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow u_i \simeq 10.7 \frac{m}{s}$

Άρα η αρχική ταχύτητα έχει μέτρο $u_i \simeq 10.7 \frac{m}{s}$.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

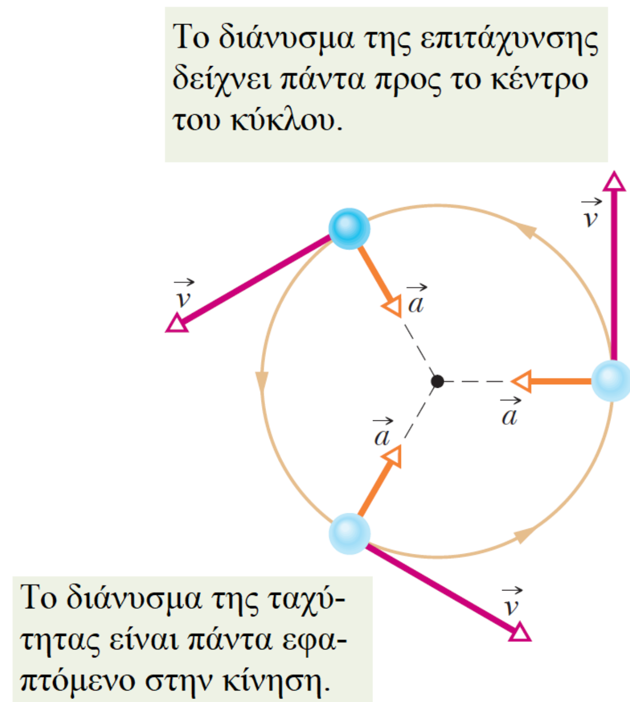
- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Σωματίδιο κινείται σε κύκλο ή σε κυκλικό τόξο
  - Σταθερή <u>αριθμητική</u> ταχύτητα σε απόσταση r
    - …προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα ταχύτητας
      - Ως εκ τούτου, το σώμα επιταχύνεται!





Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Σωματίδιο κινείται σε κύκλο ή σε κυκλικό τόξο
  - Σταθερή <u>αριθμητική</u> ταχύτητα σε απόσταση r
    - …προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα ταχύτητας
      - Ως εκ τούτου, το σώμα επιταχύνεται!
  - Σταθερή επιτάχυνση κατά μέτρο
    - …προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα επιτάχυνσης
    - Όμως κατευθύνεται πάντα ακτινικά προς τα «μέσα»!
      - **Κεντρομόλος επιτάχυνση**

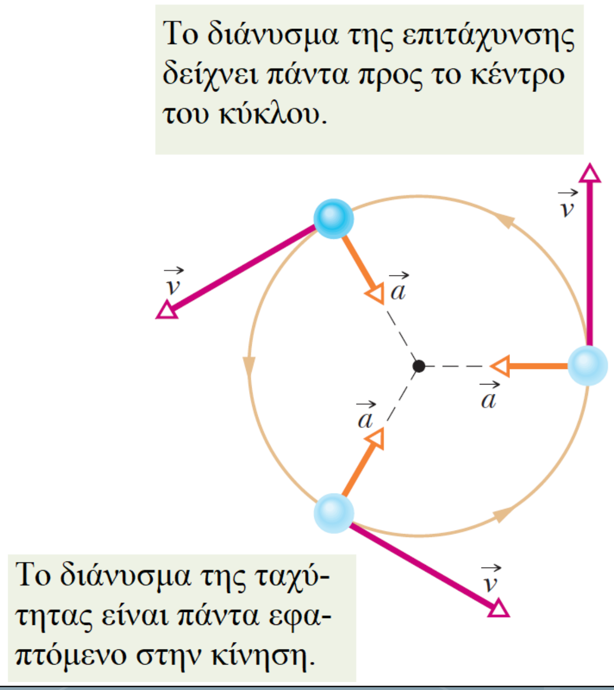


Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Ταχύτητα
    - Διάνυσμα εφαπτόμενο σε σημεία του κύκλου
    - Φορά προς την κατεύθυνση της κίνησης
  - Επιτάχυνση
    - Διάνυσμα με κατεύθυνση ακτινικά προς τα «μέσα»
    - Κεντρομόλος επιτάχυνση

$$a = \frac{u^2}{r}$$

με u το μέτρο της ταχύτητας
με r την ακτίνα του κύκλου



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Το σωματίδιο διατρέχει την περιφέρεια του κύκλου μια φορά σε χρόνο

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{u}$$

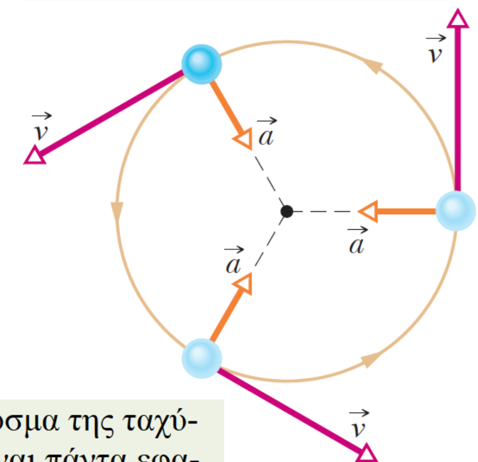
  - Η ποσότητα αυτή ονομάζεται **περίοδος**
  - Είδαμε επίσης ότι για την ταχύτητα ισχύει

$$u = \frac{2\pi r}{T}$$

και την επιτάχυνση

$$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

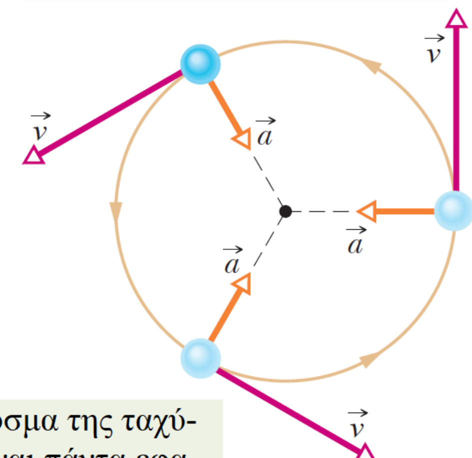
- **Ομαλή κυκλική κίνηση**
  - Εκτός της (γραμμικής) ταχύτητας, υπάρχει κι ένα ακόμα μέγεθος που μας πληροφορεί για το ρυθμό με τον οποίο η ακτίνα της κυκλικής κίνησης διαγράφει γωνίες
  - Ο λόγος

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

ονομάζεται **γωνιακή ταχύτητα ω**

- Ισούται με το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που διαγράφεται κατά την κίνηση

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

  - Μπορείτε εύκολα να δείξετε ότι

$$u = r\omega \qquad \text{και} \qquad \alpha = r\omega^2$$

1. $a = \frac{u^2}{r} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$

2. $u = \frac{2\pi r}{T} = r\omega$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Παράδειγμα:**
  - Η άκρη του λάστιχου του αυτοκινήτου σας, ακτίνας $r = 0.3\ \mathrm{m}$, περιστρέφεται με μια γωνιακή ταχύτητα ω. Πόση είναι αυτή όταν το αυτοκίνητο τρέχει με ταχύτητα $54\ \mathrm{km/h}$?

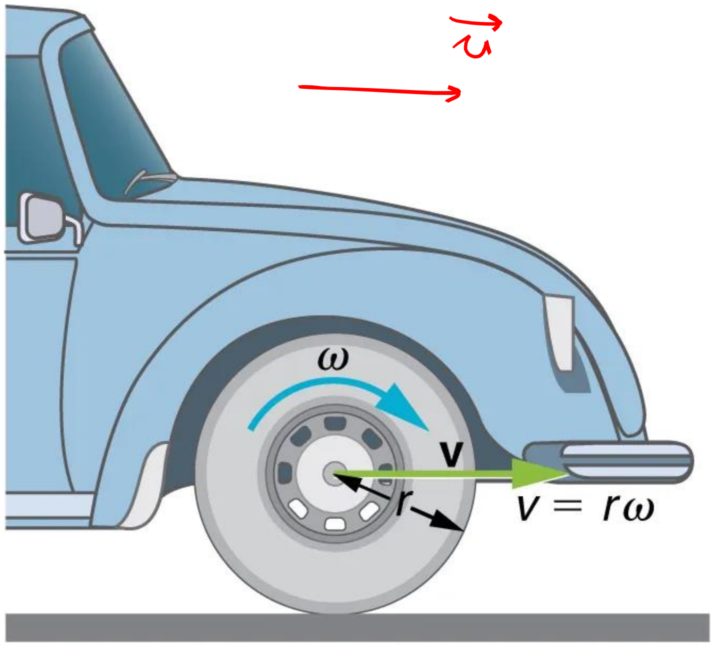
Μπορούμε να γράψουμε ότι

$$u = \frac{54.000\ m}{3600\ s} = 15\ \frac{m}{s}$$

Από εξ. 2, έχουμε $u = r\omega \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \omega = \frac{u}{r} = \frac{15}{0.3} = 50\ \frac{rad}{s}$$

(Θεωρούμε ότι η άκρη του λάστιχου εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση)

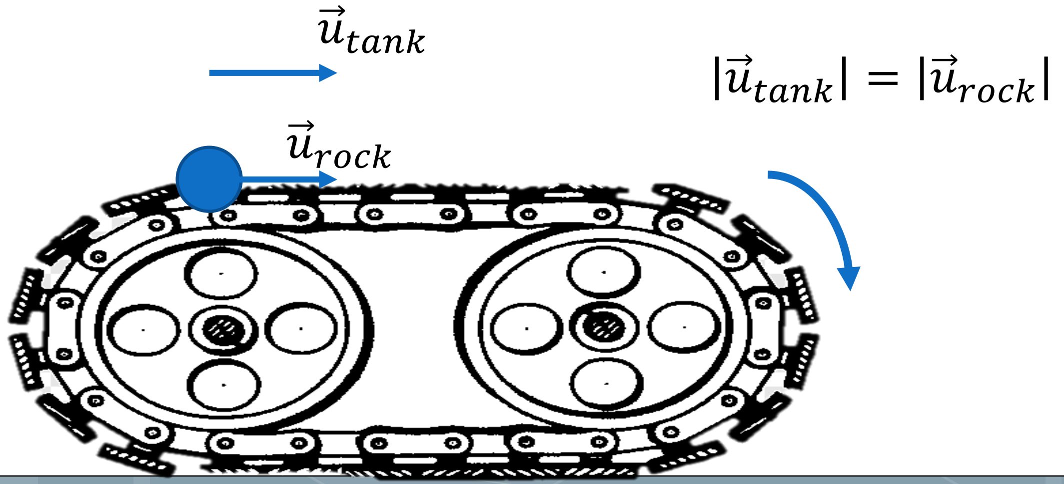


1. $a = \frac{u^2}{r} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$

2. $u = \frac{2\pi r}{T} = r\omega$

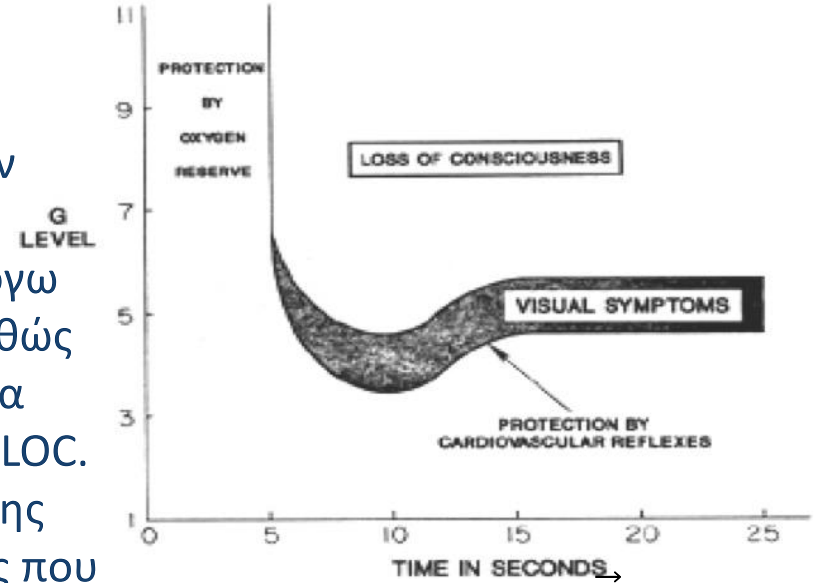
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

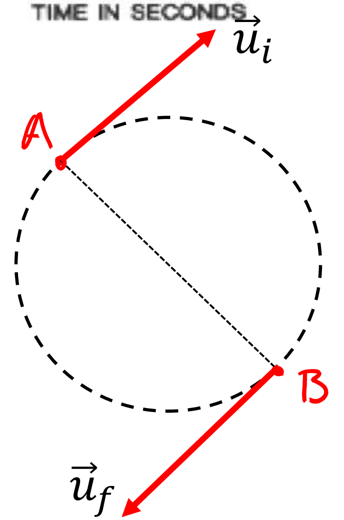
- **Παράδειγμα:**
- Σημείωση: γιατί υποθέσαμε νωρίτερα ότι η γραμμική ταχύτητα της άκρης της ρόδας είναι ίδια σε μέτρο με την ταχύτητα κινησης του οχήματος προς τα δεξιά? Σκεφτείτε ένα τανκ με αυτές της «πεπλατυσμένες» ρόδες (ερπύστριες). Θεωρείστε ένα «χαλίκι» επάνω τους και φανταστείτε τις να κινούν το όχημα προς τα δεξιά. Το χαλίκι και το όχημα δε θα έχουν την ίδια ταχύτητα κατά μέτρο? ☺



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **<u>Παράδειγμα:</u>**
  - Οι πιλότοι μαχητικών αεροσκαφών προβληματίζονται όταν έχουν να πάρουν πολύ κλειστές στροφές λόγω της κεντρομόλου επιτάχυνσης. Καθώς η επιτάχυνση αυξάνεται, μπορεί να συμβεί μια συνθήκη γνωστή ως g-LOC. Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης (σε μονάδες g) ενός αεροσκάφους που μπαίνει σε οριζόντια κυκλική στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_i = 400\vec{\imath} + 500\,\vec{\jmath}$ m/s για χρόνο $t = 24$ s και βγαίνει από τη στροφή (πριν «κλείσει» πλήρη κύκλο) με ταχύτητα $\vec{v}_f = -400\vec{\imath} - 500\,\vec{\jmath}$ m/s ?





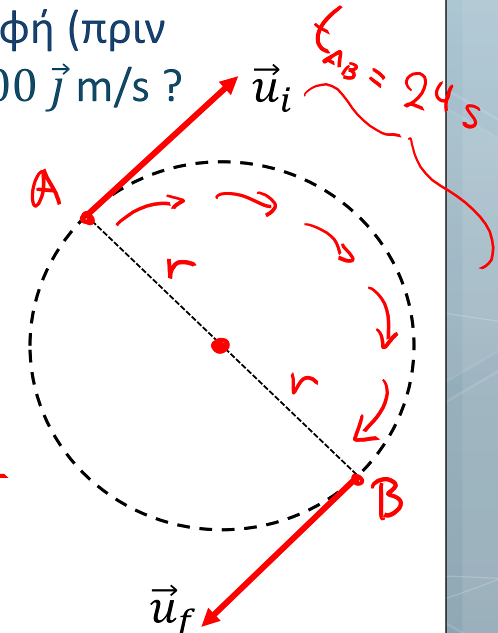
Θεωρούμε ότι το αεροσκάφος εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, δηλ. $|\vec{u}| = |\vec{u}_A| = |\vec{u}_B|$.

1. $a = \frac{u^2}{r} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$

2. $u = \frac{2\pi r}{T} = r\omega$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης (σε μονάδες g) ενός αεροσκάφους που μπαίνει σε οριζόντια κυκλική στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_i = 400\vec{\imath} + 500\,\vec{\jmath}$ m/s για χρόνο $t = 24$ s και βγαίνει από τη στροφή (πριν «κλείσει» πλήρη κύκλο) με ταχύτητα $\vec{v}_f = -400\vec{\imath} - 500\,\vec{\jmath}$ m/s ?



Καταλαβαίνουμε από το σχήμα ότι η περίοδος της κίνησης ισούται με $T = 48\text{ s} = 2 \cdot 24\text{ s}$.

Επίσης, $|\vec{u}| = \sqrt{400^2 + 500^2} \simeq 640.3\ \frac{m}{s}$

Από εξ. 2, έχουμε $r = \frac{uT}{2\pi}$, και αντικαθιστώντας στην εξ. 1, έχουμε:

$$a = \frac{u^2}{r} = \frac{u^2}{\frac{uT}{2\pi}} = \frac{u^{\cancel{2}}\, 2\pi}{\cancel{u}\, T} = \frac{2\pi u}{T} \simeq 83.8\ \frac{m}{s^2} \xrightarrow[:g]{} a \cong 8.6g$$

https://www.youtube.com/watch?v=XqckN5OchAI

Τέλος Διάλεξης