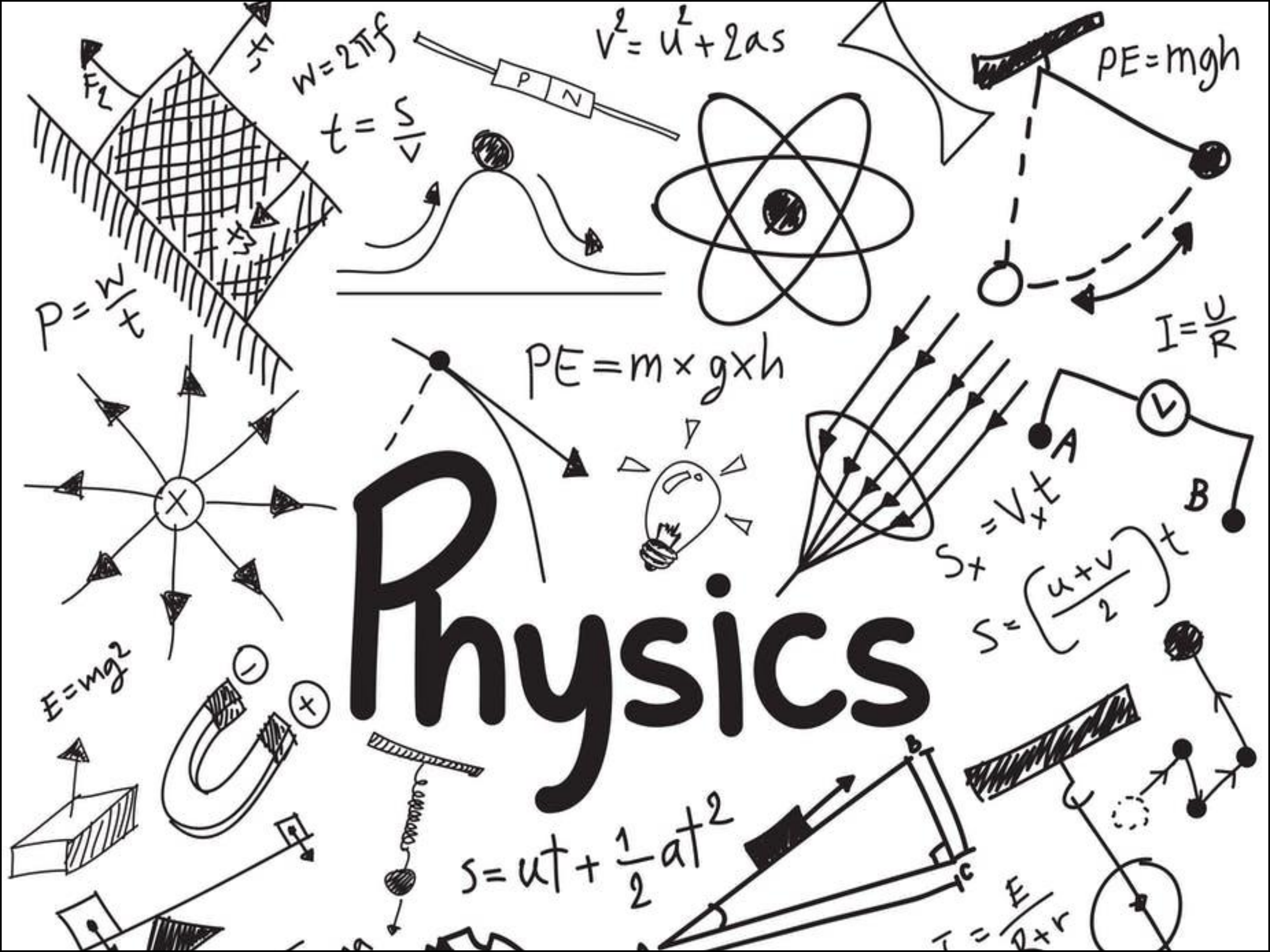


Physics
F_2
$W = 2\pi f$
P N
$v^2 = u^2 + 2as$
$PE = mgh$
$t = \frac{S}{V}$
$P = \frac{W}{t}$
$PE = m \times g \times h$
$I = \frac{U}{R}$
A
B
$S_x = V_x t$
$S = \left(\frac{u+v}{2}\right) t$
$E = mg^2$
$s = ut + \frac{1}{2} a t^2$

Reminder…

- **Διαλέξεις**
  - **Προαιρετική** παρουσία!
  - Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
  - Δεν υπάρχουν απουσίες
  - Υπάρχει **<u>σεβασμός</u>** στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
  - **Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας**: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά

Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

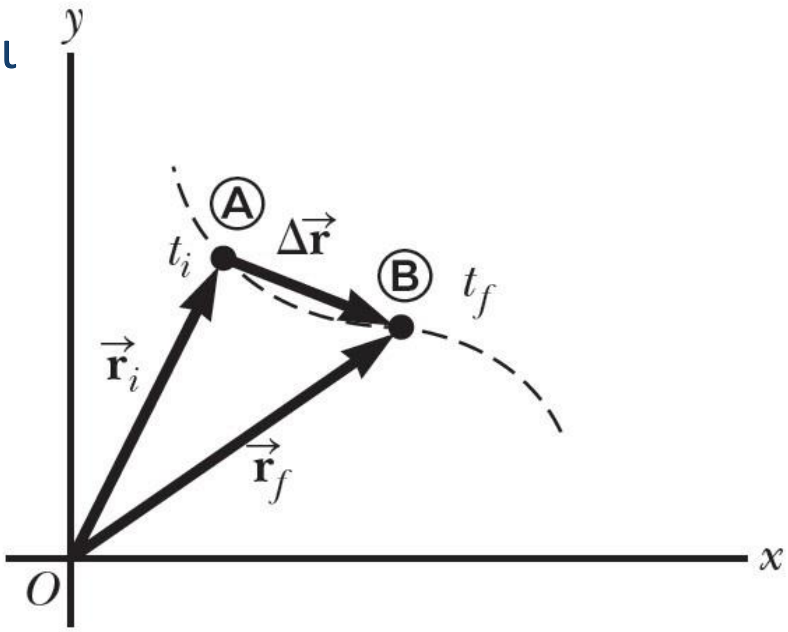
Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας επεκτείνουμε τις ιδέες που ήδη ξέρουμε στο χώρο xy
  - Χώρος επιπέδου
- Θα κάνουμε εκτεταμένη χρήση διανυσμάτων
  - …αλλά και ανάλυσης σε συνιστώσες
  - Δηλ. θα δουλεύουμε κυρίως κατά **άξονες της κίνησης**
- Η γνώση της μονοδιάστατης κίνησης θα είναι πολύτιμη!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Στη μια διάσταση, μας αρκούσε ένα μονόμετρο μέγεθος (αριθμ. τιμή) για να ορίσουμε τη θέση ενός σωματιδίου
  - …λόγω της σύμβασης που κάναμε με τα πρόσημα
- Στις δυο διαστάσεις, χρειαζόμαστε το **διάνυσμα θέσης $\vec{r}$**
  - Ξεκινά από το (0,0) και φτάνει ως τη θέση του σωματιδίου στο επίπεδο xy
- **Μετατόπιση $\Delta\vec{\mathrm{r}}$**
  - Διαφορά μεταξύ τελικής και αρχικής θέσης
  - $\Delta\vec{\mathrm{r}} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ορίζουμε τη **Μέση Ταχύτητα** σε ένα χρονικό διάστημα Δt:

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta \mathrm{t}}$$

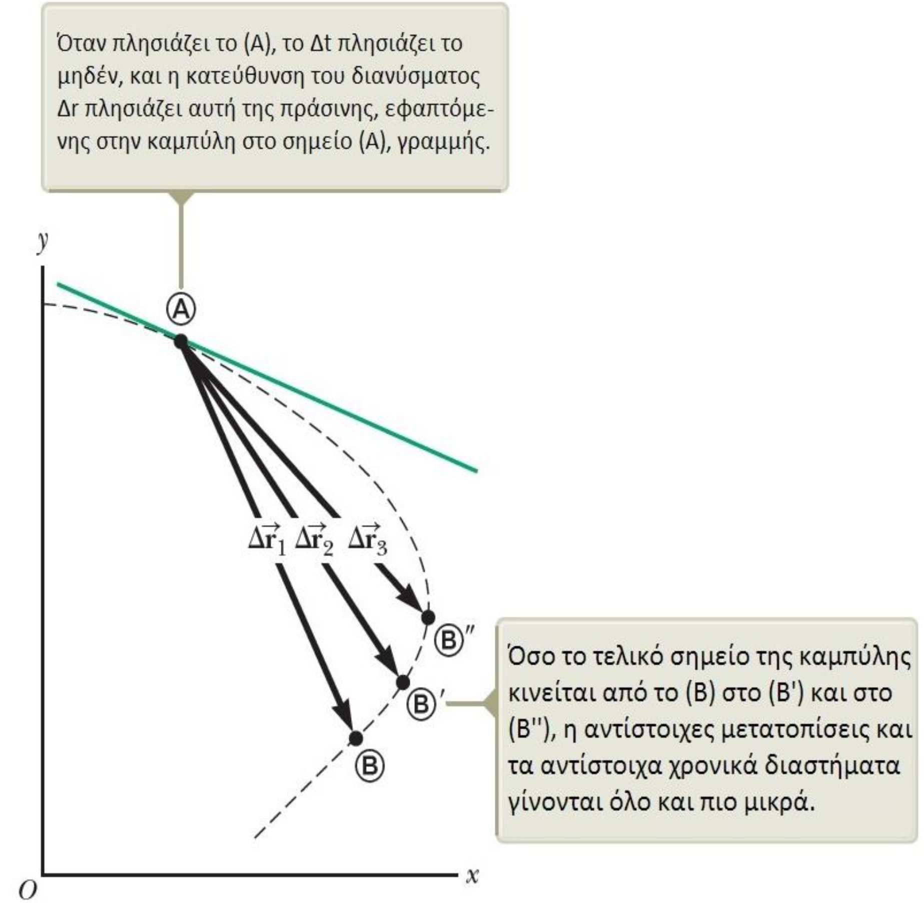
- Διάνυσμα με ίδια διεύθυνση και φορά με το $\Delta\vec{r}$
  - Θυμηθείτε από την κίνηση σε μια διάσταση:

$$\vec{u}_{avg} \equiv \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta \mathrm{t}}$$

- Διάνυσμα ανεξάρτητο της διαδρομής!
  - Γιατί; Εξαρτάται μόνο από το $\Delta\vec{r}$
    - Που εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση του σωματιδίου

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται ανάμεσα σε 2 σημεία, Α και Β.
- Παρατηρούμε το σωματίδιο σε όλο και μικρότερα χρονικά δια-στήματα (Β, Β’, Β’’)
- Η κατεύθυνση του $\Delta\vec{r}$ πλησιάζει αυτήν της εφαπτομένης της κα-μπύλης στο σημείο Α.



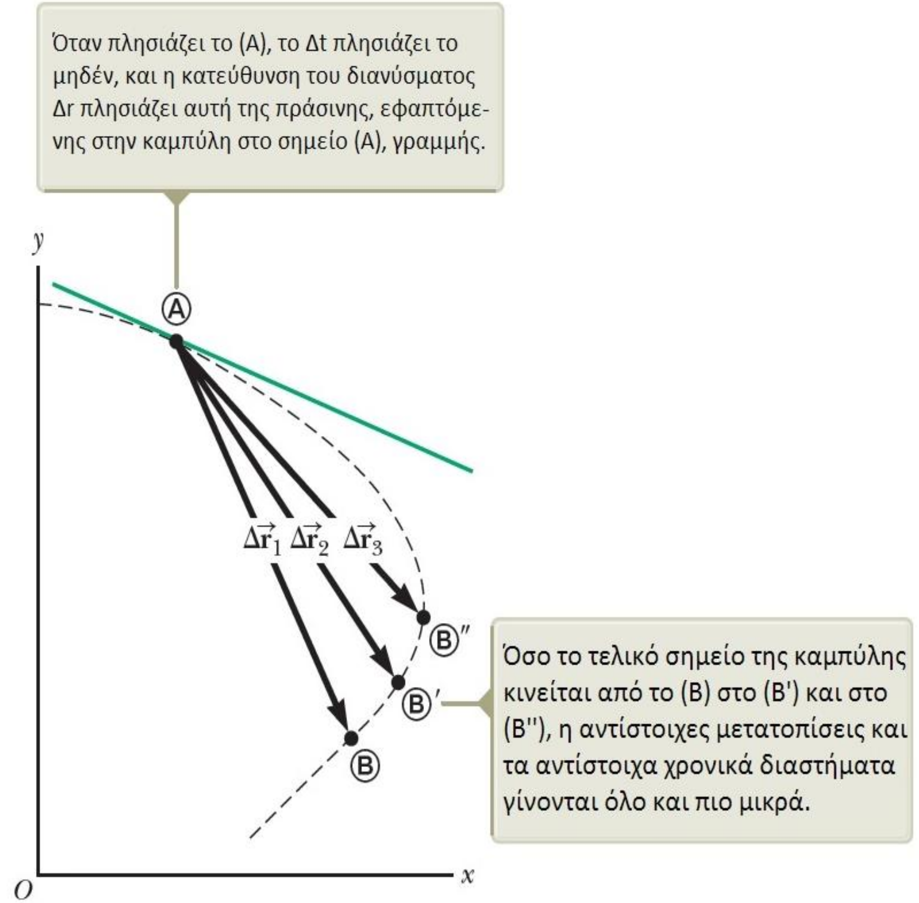
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Στιγμιαία Ταχύτητα**

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- Η κατεύθυνση της $\vec{v}$ βρίσκεται στην εφαπτο-μένη της καμπύλης στο εκάστοτε σημείο
- Μέτρο ταχύτητας $= |\vec{v}|$
- Θυμηθείτε:

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Μέση Επιτάχυνση**

$$\vec{a}_{avg} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$

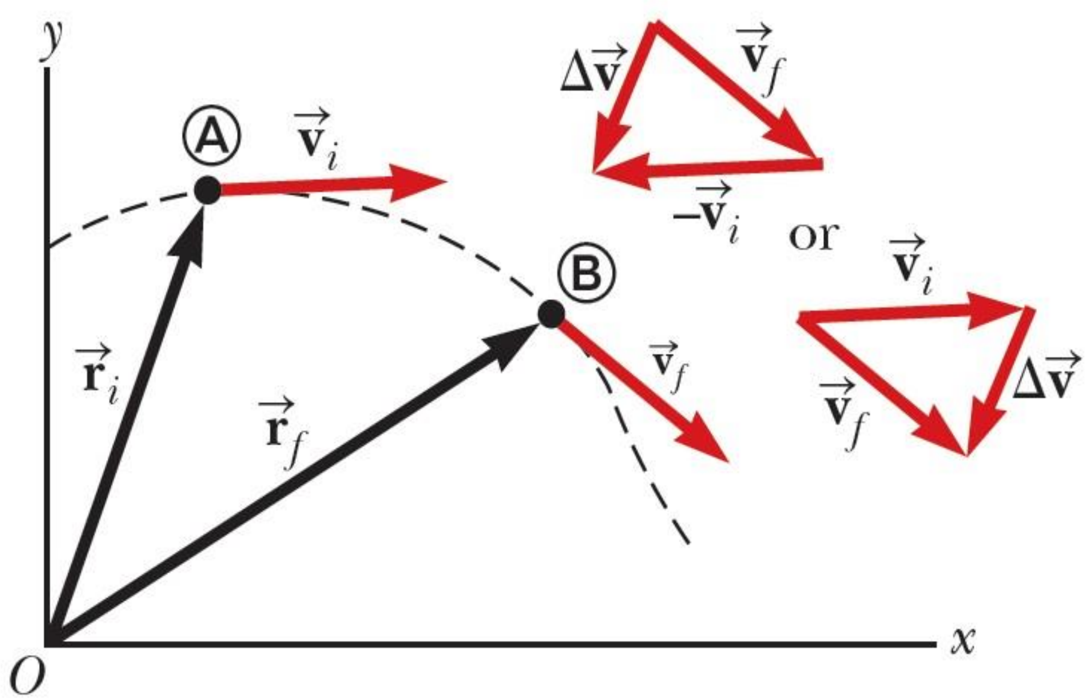
- Διάνυσμα: έχει την ίδια κατεύθυνση με την διανυσματική διαφορά ταχυτήτων $\Delta\vec{v}$

- Θυμηθείτε:

$$\vec{a}_{\mathrm{avg}} \equiv \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_f - \vec{u}_i}{t_f - t_i}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Μέση Επιτάχυνση**
- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{a}}_{avg}$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Στιγμιαία Επιτάχυνση $\vec{a}$**

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t)$$

- Θυμηθείτε:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Μοντέλο κίνησης**: με **<u>σταθερή</u>** επιτάχυνση
  - …όμοια με την κίνηση στη μια διάσταση

- Θα σκεφτόμαστε με βάση την παρακάτω «αρχή»:
  - **Η κίνηση σε δυο διαστάσεις μπορεί να μοντελοποιηθεί ως δυο ανεξάρτητες ευθύγραμμες κινήσεις σε δυο κάθετους άξονες:**
    - **Τον άξονα των x**
    - **Τον άξονα των y**

- Έτσι, η κίνηση στον έναν άξονα δεν επηρεάζει την κίνηση στον άλλο (και αντίστροφα)

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Διάνυσμα θέσης**

$$\vec{\boldsymbol{r}} = x\vec{\boldsymbol{\imath}} + y\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

με $\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}$ τα μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου

- Αν ξέρουμε το $\vec{\boldsymbol{r}}$, μπορούμε να βρούμε τη στιγμιαία ταχύτητα $\vec{\boldsymbol{v}}$, ως

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{\boldsymbol{\imath}} + y\vec{\boldsymbol{\jmath}}) = u_x\vec{\boldsymbol{\imath}} + u_y\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

- Επίσης,

$$u_x = u_{x_i} + a_x t \ , \qquad u_y = u_{y_i} + a_y t$$

- Αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned} u_x\vec{\boldsymbol{\imath}} + u_y\vec{\boldsymbol{\jmath}} &= \left(u_{x_i} + a_x t\right)\vec{\boldsymbol{\imath}} + \left(u_{y_i} + a_y t\right)\vec{\boldsymbol{\jmath}} \\ &= \left(u_{x_i}\vec{\boldsymbol{\imath}} + u_{y_i}\vec{\boldsymbol{\jmath}}\right) + \left(a_x\vec{\boldsymbol{\imath}} + a_y\vec{\boldsymbol{\jmath}}\right)t \end{aligned}$$

- Δηλ.

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{a}}t$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Διάνυσμα θέσης**

$$\vec{\boldsymbol{r}} = x\vec{\boldsymbol{\imath}} + y\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

με $\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}$ τα μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου

- Αναλύοντας

$$\vec{\boldsymbol{r}} = x\vec{\boldsymbol{\imath}} + y\vec{\boldsymbol{\jmath}} = \left(x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2\right)\vec{\boldsymbol{\imath}} + \left(y_i + u_{y_i}t + \frac{1}{2}a_y t^2\right)\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$= \left(x_i\vec{\boldsymbol{\imath}} + y_i\vec{\boldsymbol{\jmath}}\right) + \left(u_{x_i}\vec{\boldsymbol{\imath}} + u_{y_i}\vec{\boldsymbol{\jmath}}\right)t + \frac{1}{2}\left(a_x\vec{\boldsymbol{\imath}} + a_y\vec{\boldsymbol{\jmath}}\right)t^2$$

- Έτσι,

$$\vec{\boldsymbol{r}}_f = \vec{\boldsymbol{r}}_i + \vec{\boldsymbol{v}}_i t + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{a}}t^2$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Αυτές οι εξισώσεις κατασκευάστηκαν από ξεχωριστή μελέτη της κίνησης ΑΝΑ ΑΞΟΝΑ!

- Ας γράψουμε τις δυο *διανυσματικές* εξισώσεις κίνησης σε δυο διαστάσεις με <u>σταθερή επιτάχυνση</u>

- $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

$$u_{y_f} = u_{y_i} + a_y t$$

- $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

$$x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$y_f = y_i + u_{y_i} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

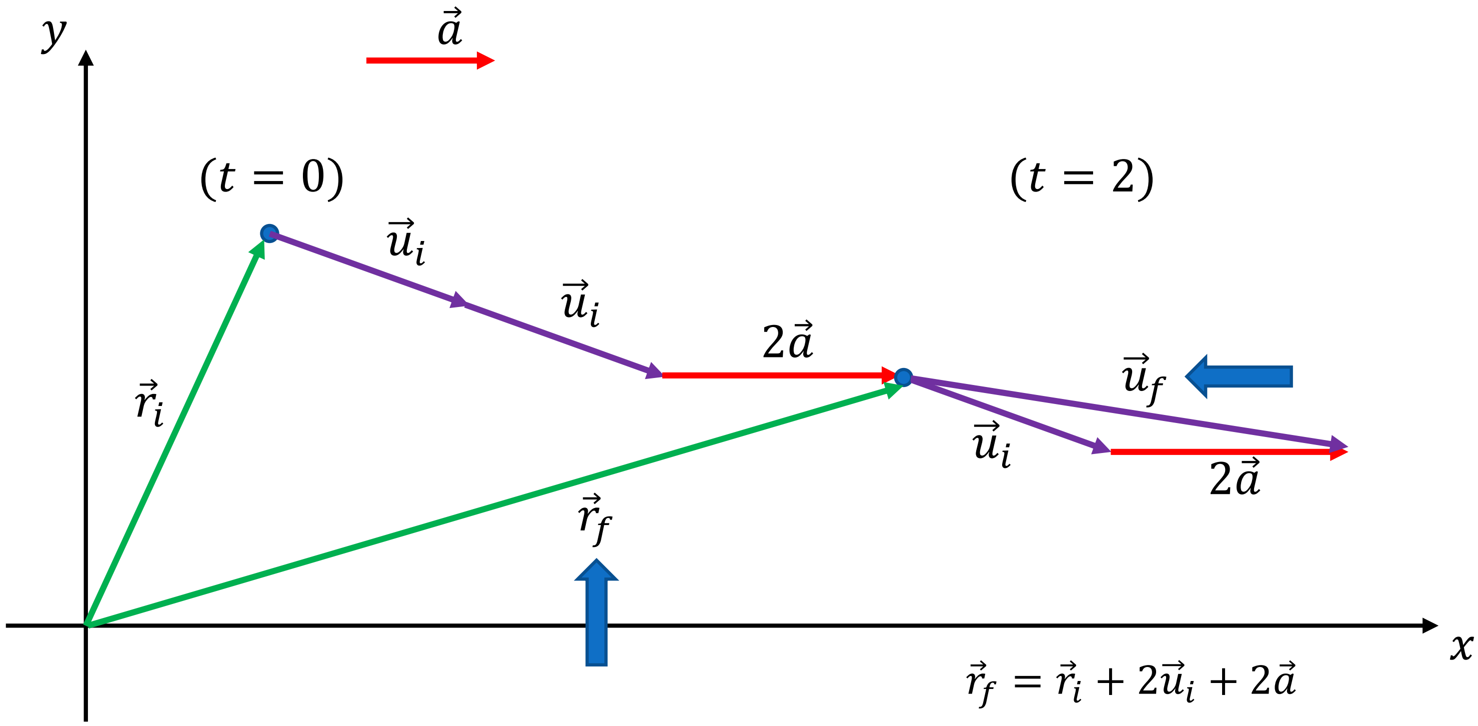
Ισχύουν και όλες οι υπόλοιπες εξισώσεις που περιγράφουν την μονοδιάστατη κίνηση υπό σταθερή ή μηδενική επιτάχυνση!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

- **Quiz:**
- Προβλέψτε τη θέση και την ταχύτητα του σώματος όταν $t = 2$



$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + 2\vec{u}_i + 2\vec{a}$$

$$\vec{u}_f = \vec{u}_i + 2\vec{a}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

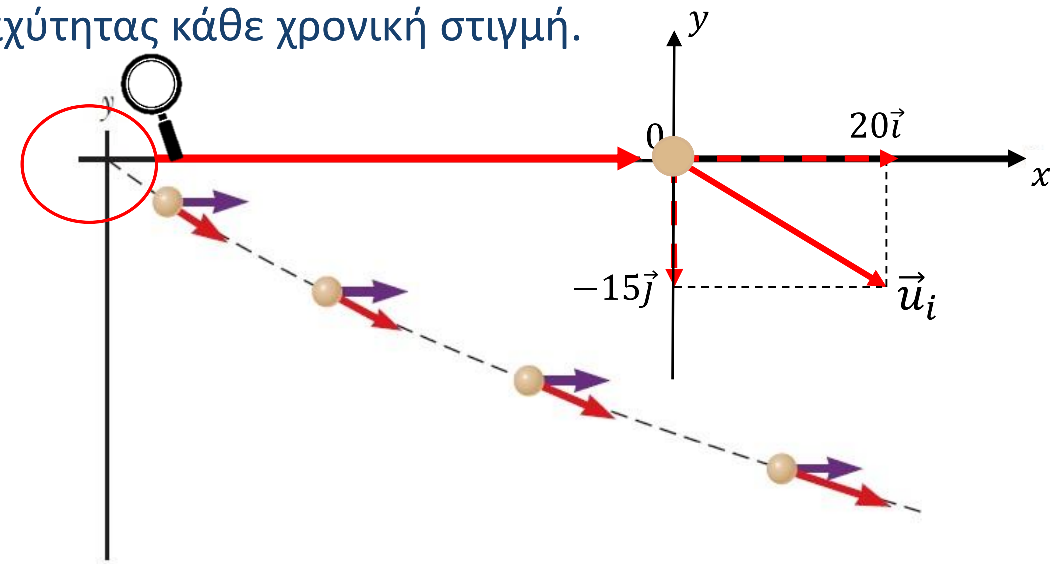
1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right) t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

- **<u>Παράδειγμα:</u>**
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\ \mathrm{m}/s$ στον x-άξονα, και $-15\ \mathrm{m}/s$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα ως $\vec{\boldsymbol{a}}_x = (4\ \mathrm{m}/s^2)\vec{\imath}$. **Με ποια μοντέλα κίνησης μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση του σωματιδίου;**

Α) Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή.

Β) Βρείτε την ταχύτητα σε μέτρο και κατεύθυνση όταν $t = 5s$, δηλ. τη γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον άξονα των x.

Γ) Βρείτε τις x, y συντεταγμένες του σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή t, και το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$.

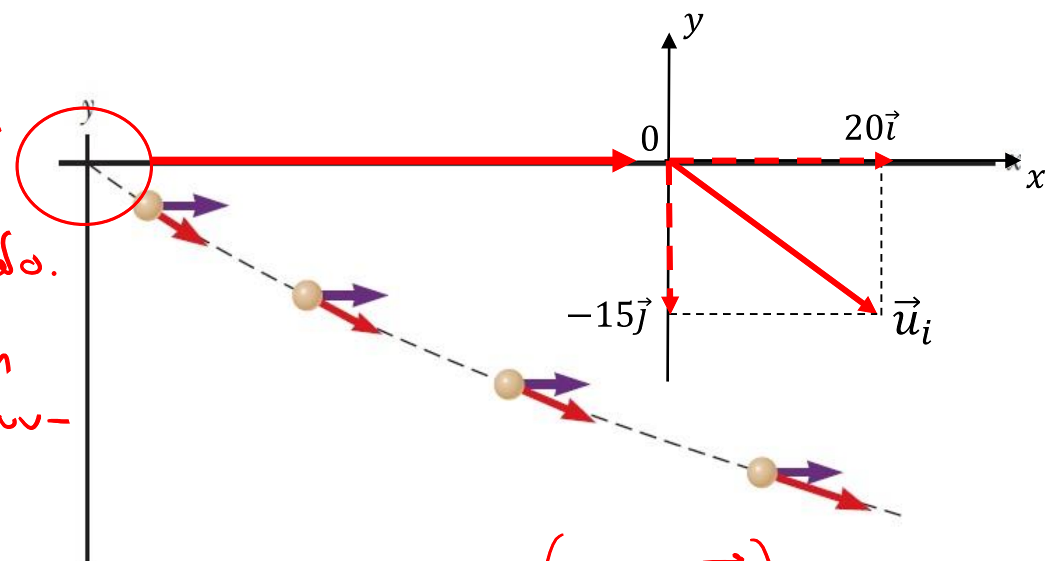


Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \dfrac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right)t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

- **Παράδειγμα – Λύση**:
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\mathrm{m/s}$ στον x-άξονα, και $-15\mathrm{m/s}$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα ως $\vec{\boldsymbol{a}}_x = (4\ \mathrm{m}/s^2)\vec{\imath}$. **Με ποια μοντέλα κίνησης μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση του σωματιδίου;**

Συνολικά, η κίνηση είναι επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση στο xy επίπεδο.



~x'x: κίνηση ευθύγραμμη με σταθερή επιτάχυνση ίση με $4\ \frac{m}{s^2}$

~y'y: κίνηση ευθύγραμμη με σταθερή ταχύτητα $(\vec{a_y} = \vec{0})$.

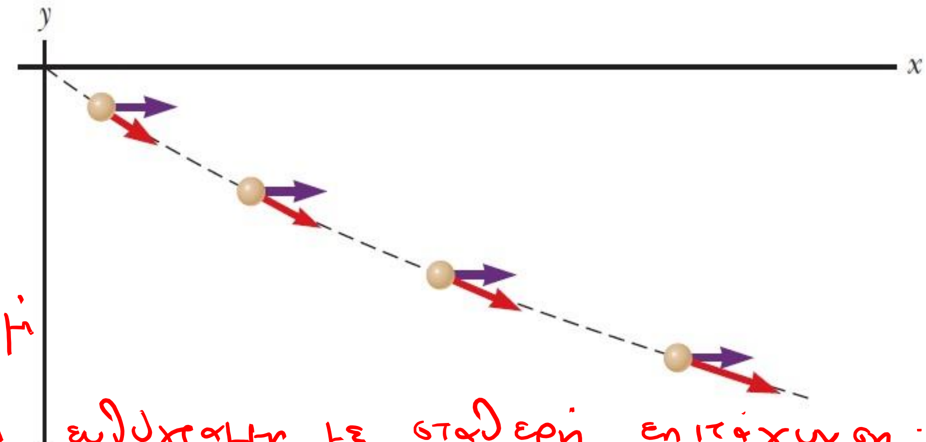
$x_f = x_i + u t$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right) t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

- **Παράδειγμα – Λύση**:
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\mathrm{m/s}$ στον x-άξονα, και $-15\mathrm{m/s}$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα ως $\vec{\boldsymbol{a}}_x = (4\ \mathrm{m}/s^2)\vec{\imath}$.
  Α) Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή.

• Στον άξονα y'y, η κίνηση είναι ευθύγραμμη με σταθερή ταχύτητα.



$u_y = -15\ \frac{m}{s}$ για κάθε χρονική στιγμή

• Στον άξονα x'x, η κίνηση είναι ευθύγραμμη με σταθερή επιτάχυνση.

$u_x = u_{x_i} + a_x t = 20 + 4t$

Άρα $\vec{u}(t) = u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j} = (20+4t)\,\vec{i} - 15\,\vec{j}$

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right) t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Παράδειγμα - Λύση**:
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\mathrm{m/s}$ στον x-άξονα, και $-15\mathrm{m/s}$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα ως $\vec{\boldsymbol{a}}_x = (4\ \mathrm{m}/s^2)\vec{\imath}$.
B) Βρείτε την ταχύτητα σε μέτρο και κατεύθυνση όταν $t = 5s$, δηλ. τη γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον άξονα των x.

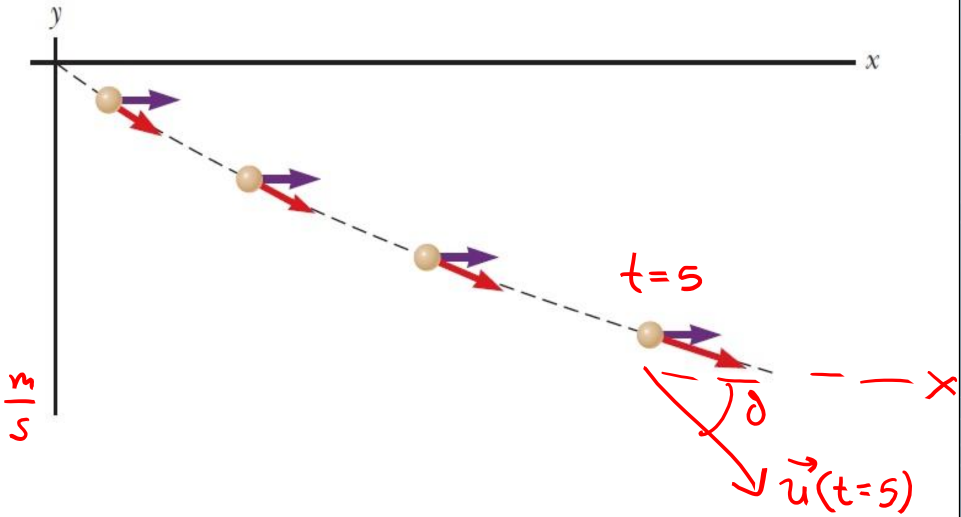
Για $t=5\ s$:

$\vec{u}(5) = (20+4\cdot 5)\vec{i} - 15\vec{j}$

$= 40\vec{i} - 15\vec{j}$

$|\vec{u}(5)| = \sqrt{40^2+(-15)^2} \simeq 43\,\frac{m}{s}$

$\vartheta = \tan^{-1}\frac{-15}{40} \simeq -21^\circ$

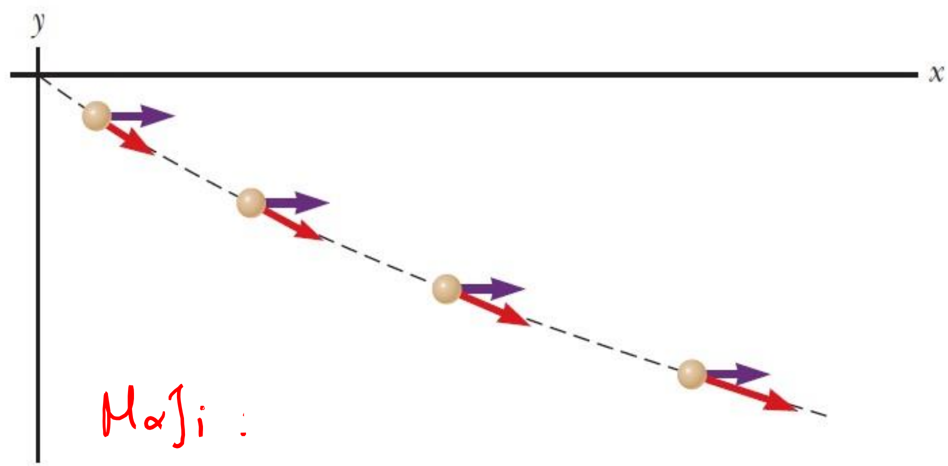


$y_f = y_i + u_y t$

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right) t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **<u>Παράδειγμα - Λύση</u>**:
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το (0,0) και με αρχική ταχύτητα $20\mathrm{m/s}$ στον x-άξονα, και $-15\mathrm{m/s}$ στον y-άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x-άξονα ως $\vec{\boldsymbol{a}}_x = (4\ \mathrm{m}/s^2)\vec{\imath}$. Γ) Βρείτε τις x, y συντεταγμένες του σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή t, και το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$.



- Στον άξονα x'x.

$x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
$= 0 + 20 \cdot t + 2t^2$
$= 20t + 2t^2$

- Στον άξονα y'y.

$y_f = y_i + u_y \cdot t$
$= 0 - 15t = -15t$

Μαζί:

$\vec{r}(t) = x_f \cdot \vec{\imath} + y_f \cdot \vec{j}$
$= (20t + 2t^2)\,\vec{\imath} - 15t \cdot \vec{j}$

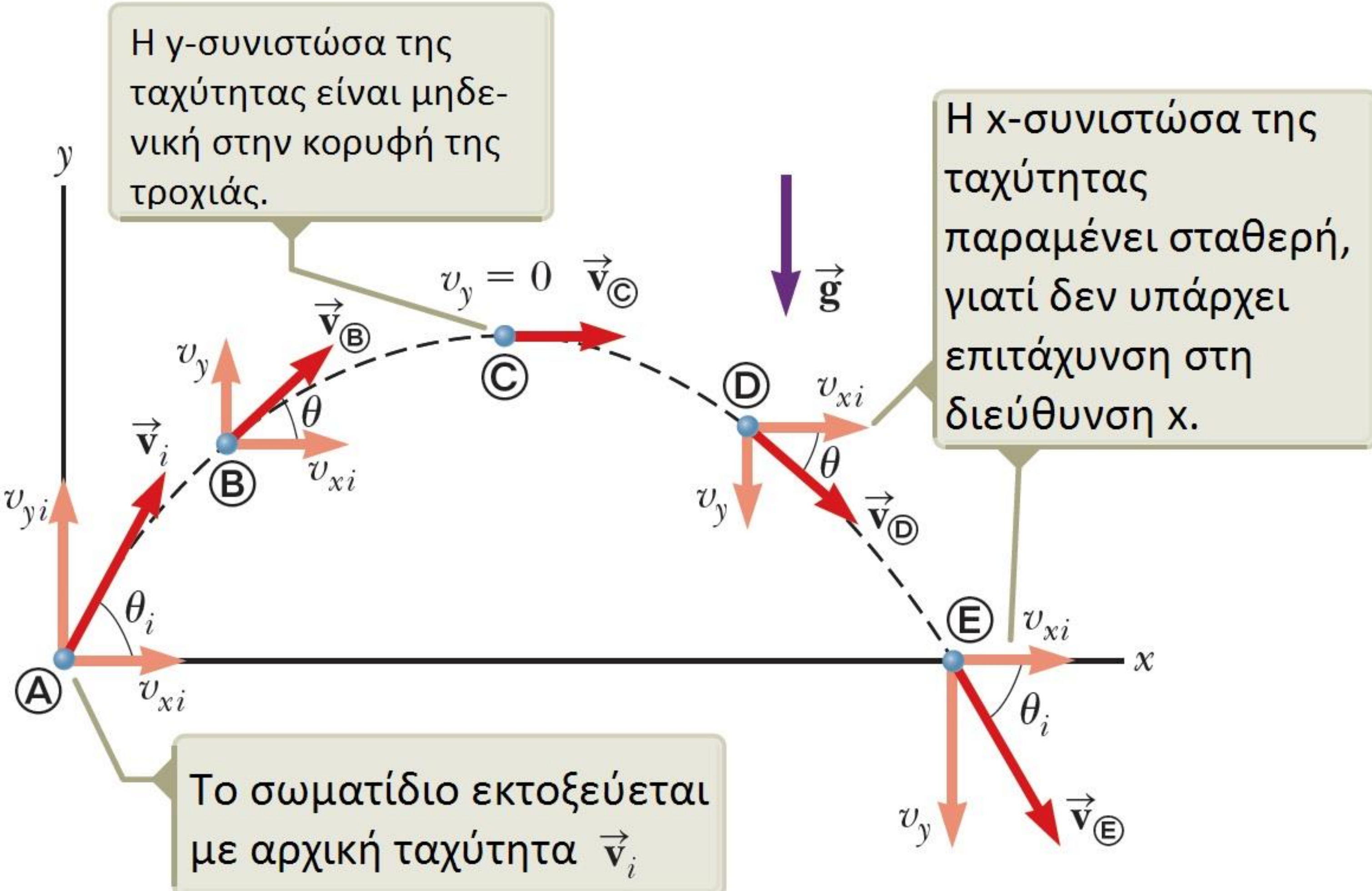
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Μια κλασική κίνηση σε δυο διαστάσεις είναι η **βολή.**

- Το μόνο που αλλάζει είναι
  A. Η **επιτάχυνση της βαρύτητας** $\vec{g}$, που θεωρείται σταθερή και κάθετη (με φορά προς τα κάτω) στον άξονα x.
  B. Επίσης, η **αντίσταση του αέρα** θεωρείται αμελητέα.

- Υπό αυτές τις συνθήκες, η ανάλυση τέτοιων προβλημάτων είναι απλή...

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

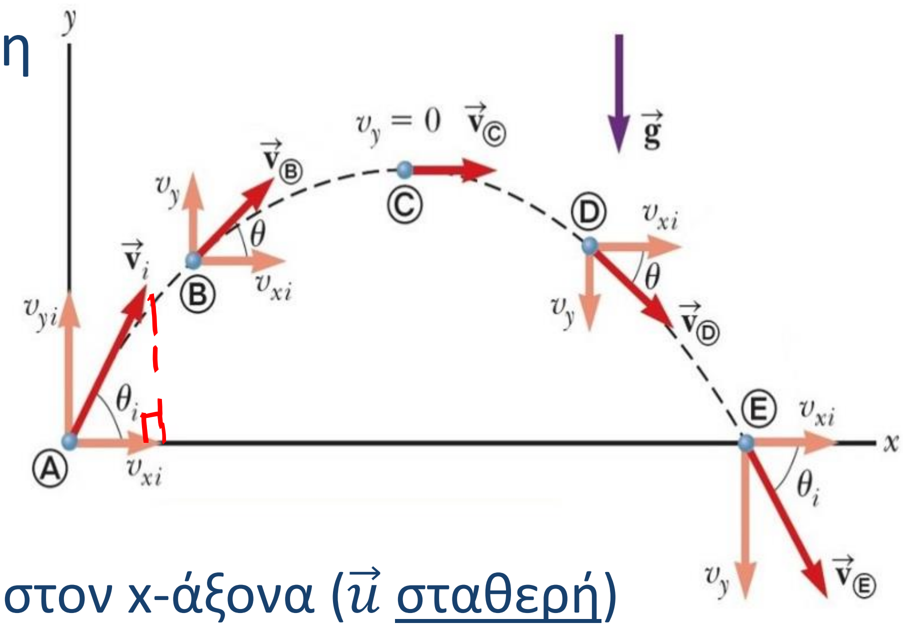


Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας γράψουμε τις δυο *διανυσματικές* εξισώσεις **βολής**
  - $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{f}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{g}}\boldsymbol{t}$
  - $\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{f}} = \vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{t} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\boldsymbol{g}}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}$
- Ίδιες με αυτές της Διαφ. 16 (10 slides πριν)!
- Προσοχή! Είναι διανυσματικές εξισώσεις!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας αναλύσουμε την κίνηση



- Αρχική θέση

$$u_{xi} = u_i \cos(\theta_i)$$
$$u_{yi} = u_i \sin(\theta_i)$$

- Δυο συνιστώσες:
  - Α) Μηδενική επιτάχυνση στον x-άξονα ($\vec{u}$ σταθερή)
  - Β) Σταθερή επιτάχυνση στον y-άξονα (g – βαρυτική επιτάχυνση)

- Γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης όπως τις ξέρουμε, θεωρώντας αυθαίρετα μια θετική φορά σε κάθε άξονα (συνήθως πάνω και δεξιά)

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- **Αλγεβρικές εξισώσεις**
- **1)** $x_f = x_i + u_{xi}t$
- **2)** $u_{yf} = u_{yi} - gt$

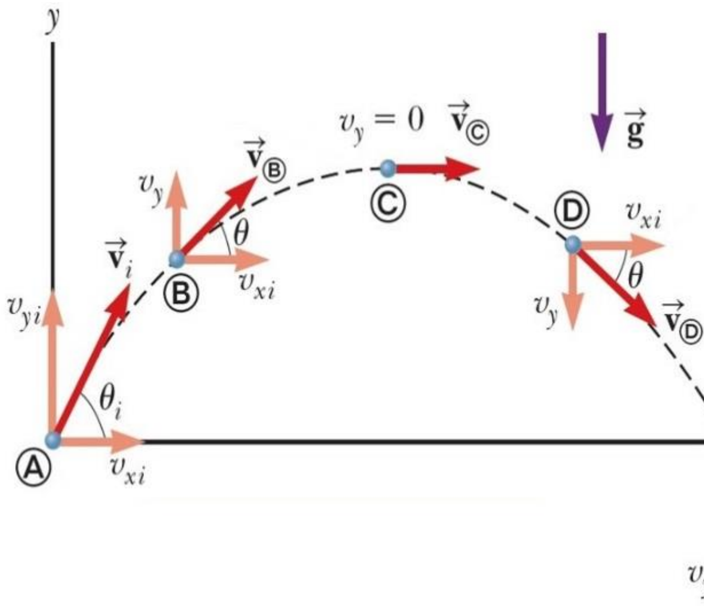
$$u_{y,avg} = \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})$$

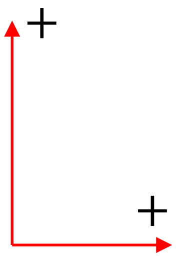
$$y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$$

$$y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$$

με $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$





- **Εντελώς** ανεξάρτητες μεταξύ τους κινήσεις!

Συνεχίζεται... ☺