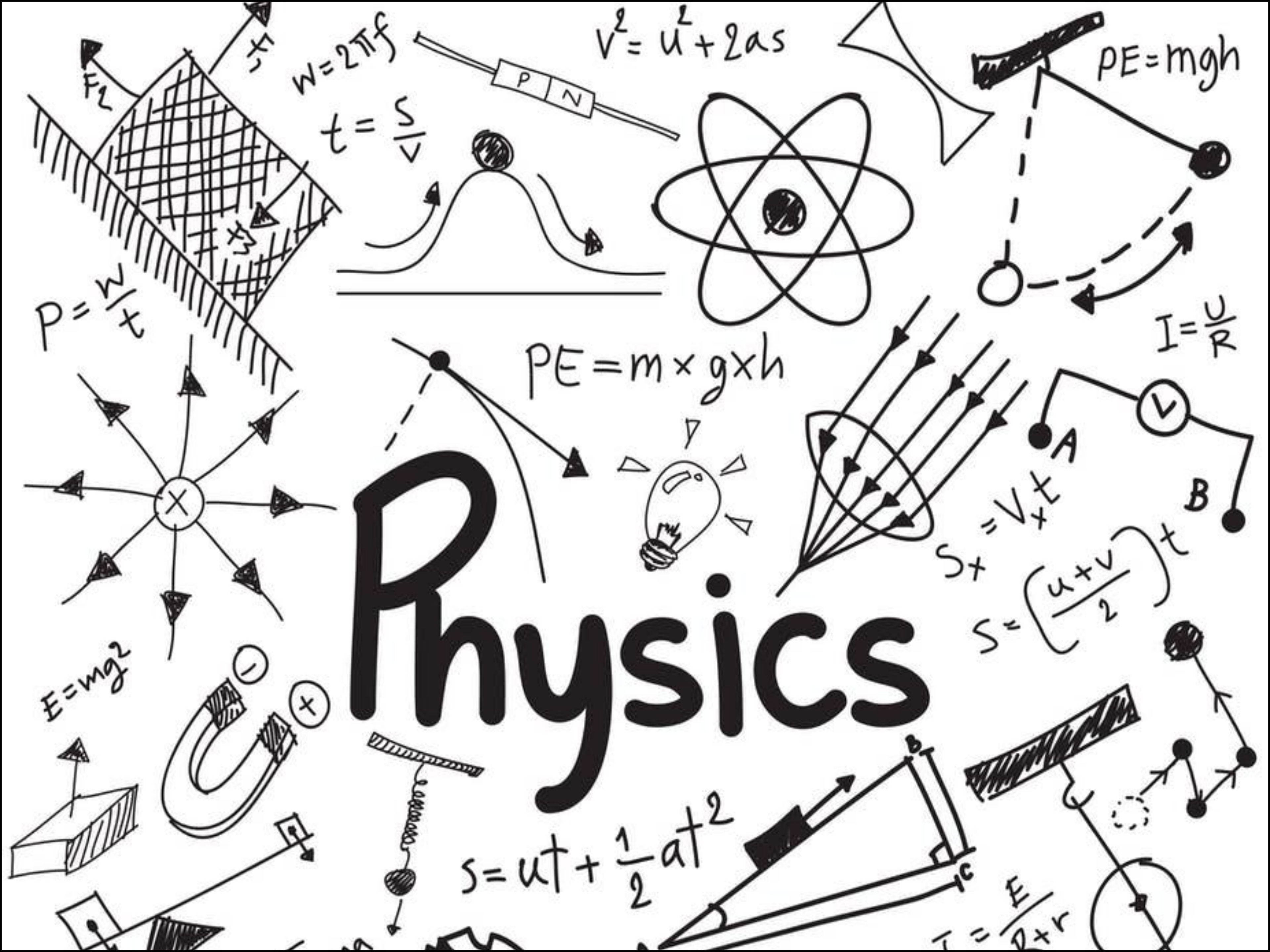


Physics
W=2πf
$v^2=u^2+2as$
PE=mgh
t = S/V
P = W/t
PE=m×g×h
I=U/R
$S_x=V_x t$
$S=\left(\frac{u+v}{2}\right)t$
E=mg²
$S=ut+\frac{1}{2}at^2$
P N
A
B
C
F_2

Reminder…

- **Διαλέξεις**
  - **Προαιρετική** παρουσία!
  - Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
  - Δεν υπάρχουν απουσίες
  - Υπάρχει <u>**σεβασμός**</u> στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
  - **Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας**: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά

Εικόνα: Η κίνηση μπορεί να είναι αναζωογονητική και όμορφη. Αυτά τα σκάφη ανταποκρίνονται σε δυνάμεις αέρα, νερού, και του βάρους του πληρώματος όσο προσπαθούν να ισορροπήσουν στην άκρη του.

1η Ενότητα Κλασική Μηχανική

Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση

Εικόνα: Στους αγώνες drag, ο οδηγός θέλει να επιτύχει όσο γίνεται μεγαλύτερη επιτάχυνση. Σε απόσταση περίπου μισού χιλιομέτρου, το όχημα αναπτύσσει ταχύτητες κοντά στα 515 km/h, καλύπτοντας την απαιτούμενη απόσταση σε λιγότερο από 5 sec.
(George Lepp/Stone/Getty Images)

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Μια Διάσταση

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Κίνηση σε έναν οριζόντιο/κατακόρυφο άξονα
  - Σώμα == σωματίδιο
    - Θεωρούμε απειροστά μικρό το μέγεθός του
    - Αδιαφορούμε **πλήρως** για τις διαστάσεις του
- Θα γνωρίσουμε τους βασικούς ορισμούς της κινητικής…
  - …αρχικά σε μια διάσταση και αργότερα σε δυο διαστάσεις
- Αυτοί είναι:
  - **Η Θέση**
  - **Η Ταχύτητα**
  - **Η Επιτάχυνση**

ενός σώματος

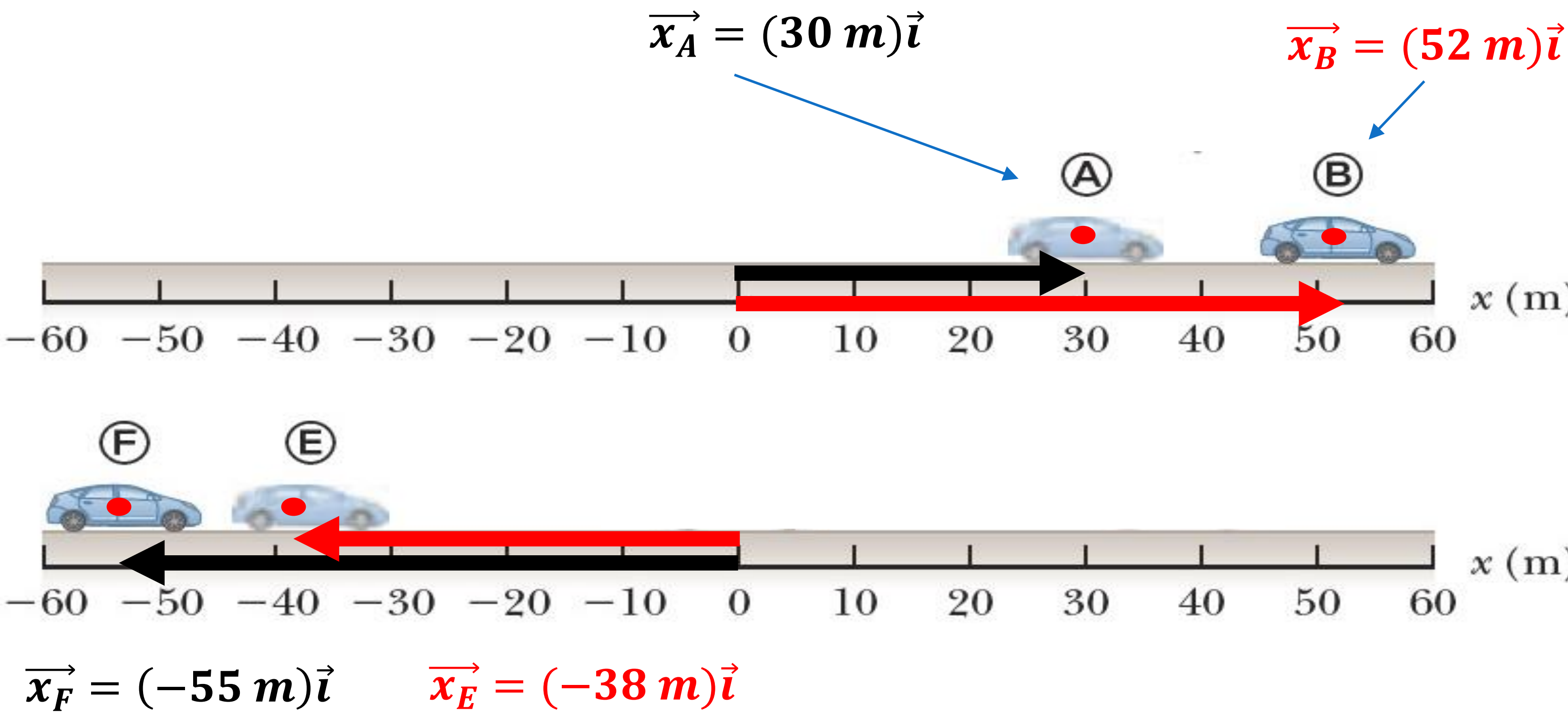
Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Θέση $\vec{x}$** : διάνυσμα που ορίζει την τοποθεσία του σώματος σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς (όπως το 0)
  - Διανυσματικό μέγεθος
    - Θα θεωρήσουμε έναν βαθμονομημένο άξονα στον οποίο γίνεται η κίνηση – το μοναδιαίο του διάνυσμα είναι το $\vec{\imath}$ (οριζόντια κίνηση) ή το $\vec{\jmath}$ (κατακόρυφη κίνηση)
    - Το **πρόσημο** μας δηλώνει τη φορά του διανύσματος
      - $\vec{x}_1 = +3\vec{\imath}, \quad \vec{x}_2 = -12\vec{\jmath}$

- Το πρόσημο μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό – ως πρόσημο τιμής στο βαθμονομημένο άξονα
  - Θετικό πρόσημο : το διάνυσμα ξεκινά από ένα σημείο αναφοράς (το 0) και καταλήγει σε κάποια θετική τιμή του άξονα
  - Αντίθετα για αρνητική τιμή

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Παράδειγμα:



Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μετατόπιση $\Delta\vec{x}$ (displacement)**: η αλλαγή στη θέση ενός σωματιδίου
- <u>Ορισμός</u>:

$$\Delta\vec{x} \equiv \vec{x}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{x}_{\alpha\rho\chi}$$

  - με $\vec{x}_{\tau\varepsilon\lambda}, \vec{x}_{\alpha\rho\chi}$ την τελική και την αρχική θέση του σωματιδίου
  - Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό: $\vec{x}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow \vec{x}_f, \vec{x}_{\alpha\rho\chi} \rightarrow \vec{x}_i$
- Προσοχή: **απόσταση d ≠ μέτρο μετατόπισης** $|\Delta\vec{x}|$!
- Παράδειγμα:

Η απόσταση που διανύει ένας αθλητής μπάσκετ, αν απλουστευμένα υποθέσουμε ότι κινείται σε ευθεία γραμμή, είναι μερικά χιλιόμετρα, αλλά η μετατόπιση από την αρχική θέση του (κέντρο γηπέδου) ως την τελική (ξανά στην ίδια περίπου θέση) είναι πολύ μικρότερη (ως μέτρο)!

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μετατόπιση $\Delta\vec{x}$** : διανυσματικό μέγεθος!
  - Έχει μέτρο, διεύθυνση, φορά

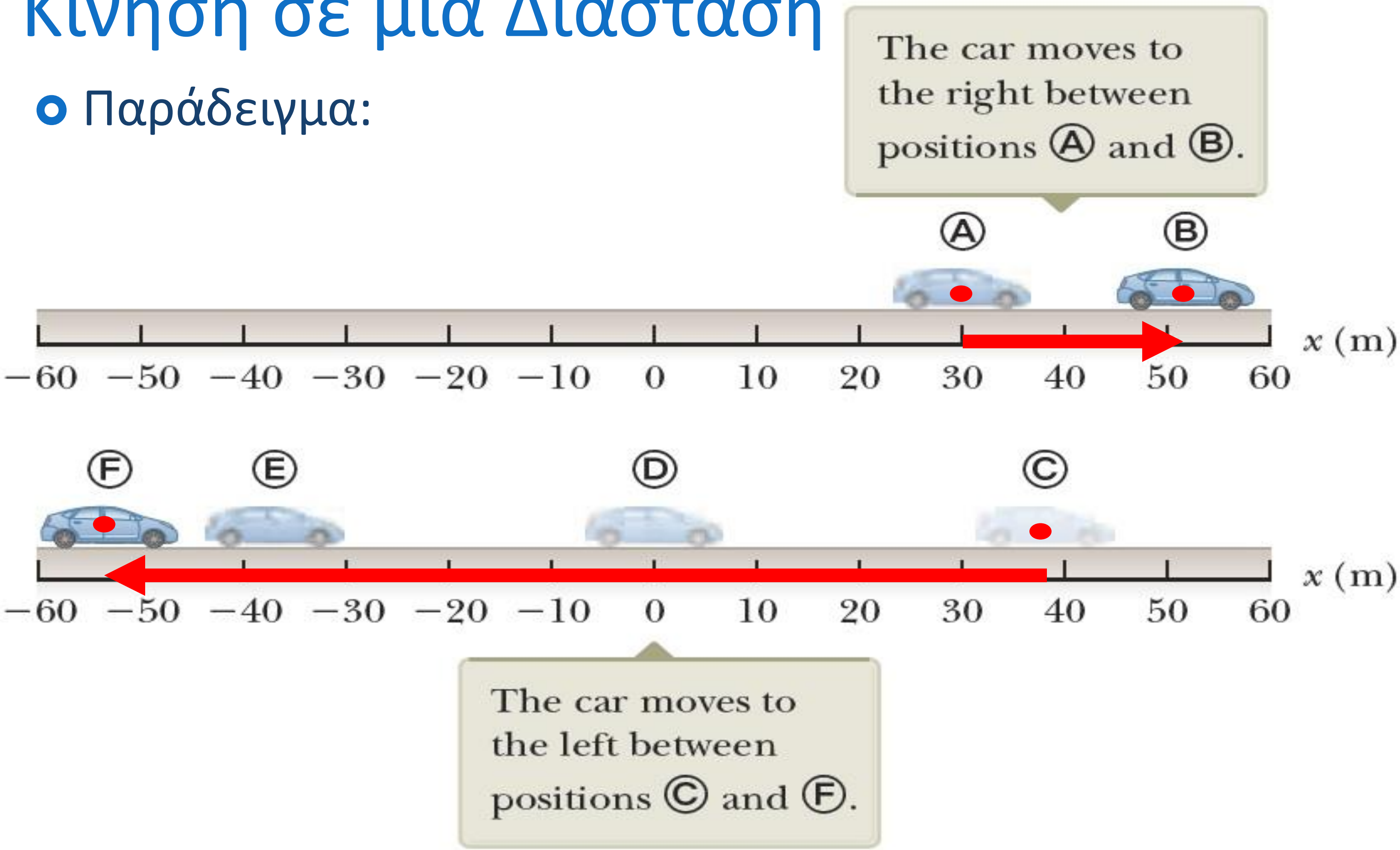
- Αν $\Delta\vec{\mathrm{x}} = \vec{x}_f - \vec{x}_i = (x_f - x_i)\vec{\imath} = \Delta\mathrm{x}\,\vec{\imath}$:
- $\Delta\mathrm{x} = x_f - x_i > 0 \Leftrightarrow$ κίνηση προς τα δεξιά
- $\Delta x = x_f - x_i < 0 \Leftrightarrow$ κίνηση προς τα αριστερά

- Στο Διεθνές Σύστημα, μονάδα μέτρησης της μετατόπισης (όπως και της θέσης) είναι το

1 μέτρο (m)

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Παράδειγμα:



$$\Delta\vec{x}_{A\rightarrow B} = \vec{x}_{\mathrm{B}} - \vec{x}_{A} = 52\vec{\imath} - 30\vec{\imath} = (22\ m)\ \vec{\imath}$$
$$\Delta\vec{x}_{C\rightarrow F} = \vec{x}_{\mathrm{F}} - \vec{\mathrm{x}}_{\mathrm{C}} = -55\vec{\imath} - 38\vec{\imath} = (-97\ m)\ \vec{\imath}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μέση ταχύτητα (average velocity)**:

$$\vec{u}_{avg} \equiv \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

  - Διάνυσμα: έχει επίσης μέτρο, διεύθυνση και φορά!
  - Απαιτούνται δυο σημεία (αρχικό & τελικό)
  - Ίδιο πρόσημο με $\Delta\vec{x}$ – γιατί?

- **Μέση αριθμητική ταχύτητα (average speed):**
  - $s_{avg} \equiv \frac{d}{\Delta t}$, όπου d η απόσταση
  - Βαθμωτό μέγεθος – όχι διάνυσμα !

Μονάδα μέτρησης:

$$\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}}$$

(μέτρο ανά δευτ/πτο)

- Προσοχή στη διαφορά τους!

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Στιγμιαία Ταχύτητα (instantaneous velocity)**
  - Διάνυσμα: έχει μέτρο, διεύθυνση και φορά
  - Το διάνυσμα της ταχύτητας για κάθε χρονική στιγμή t !
  - Αλλιώς: η μέση ταχύτητα όταν μετριέται σε Δt → 0

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta\mathrm{t}\to 0} \vec{u}_{avg} = \lim_{\Delta\mathrm{t}\to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta\mathrm{t}}$$

  - Όμως

$$\lim_{\Delta\mathrm{t}\to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta\mathrm{t}} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{u}_x(t)$$

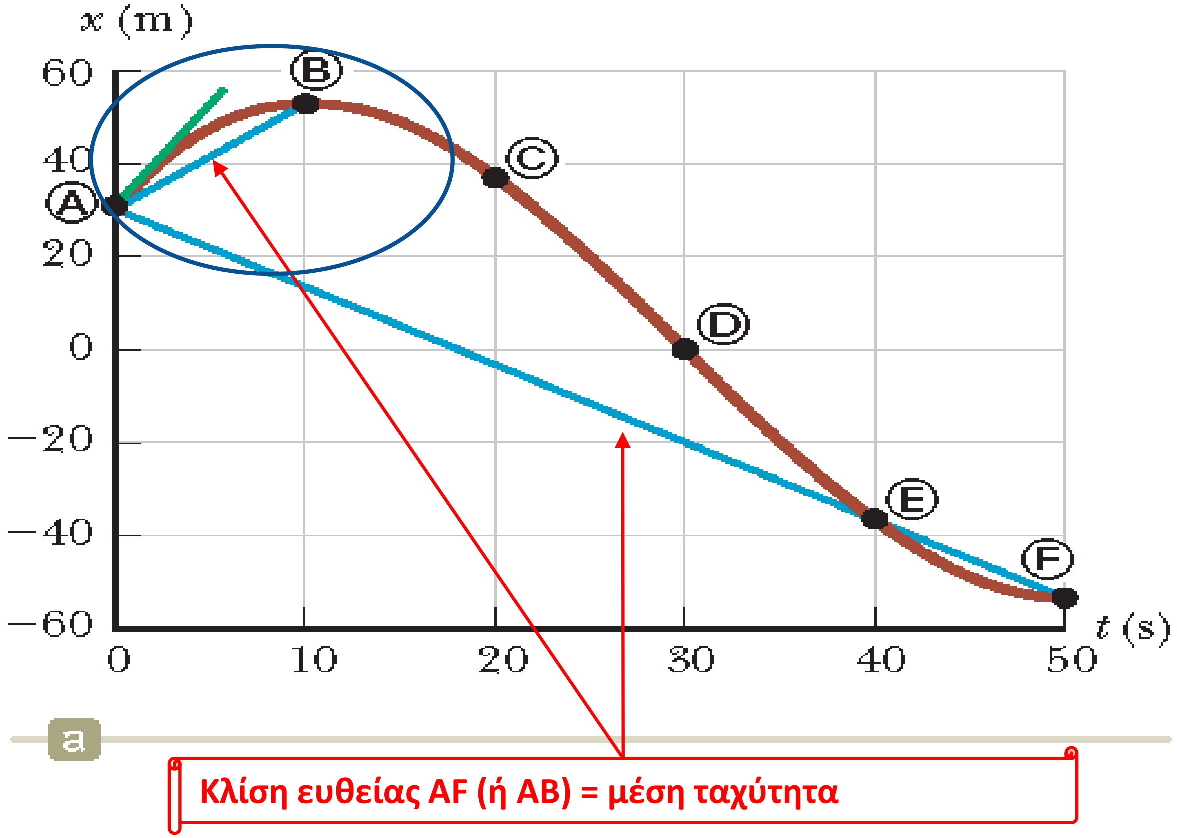
- Άρα: η στιγμιαία ταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης θέσης ως προς το χρόνο

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Στιγμιαία Ταχύτητα**

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{u}_{avg} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{u}_x(t)$$

- Παράδειγμα:

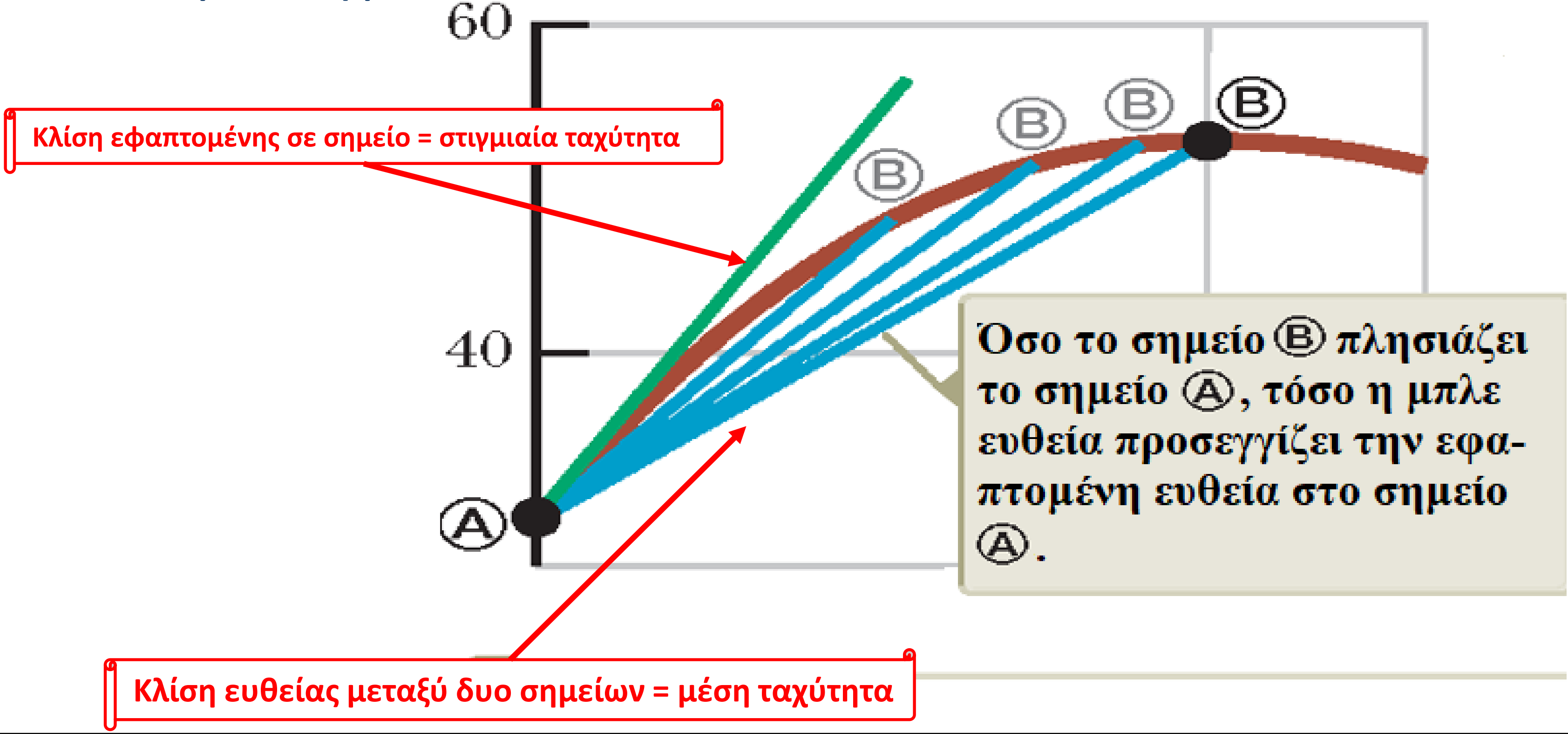


Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Στιγμιαία Ταχύτητα**

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\vec{u}_{avg} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{u}_x(t)$$

- Παράδειγμα:



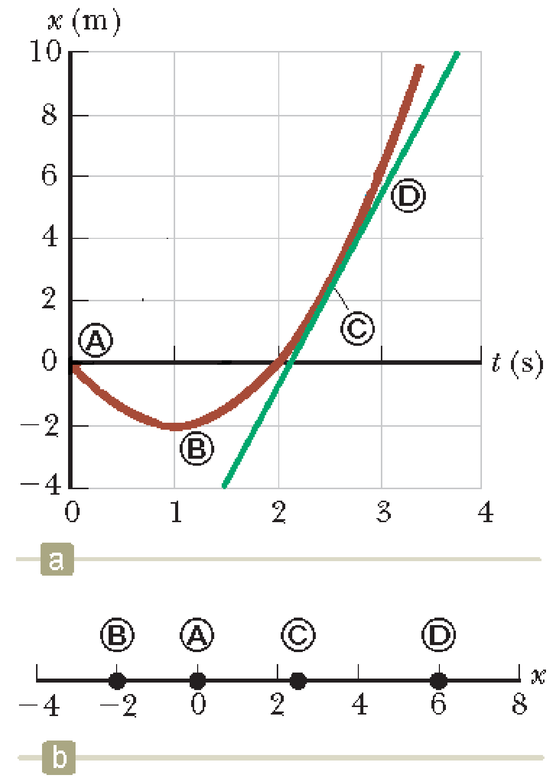
Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Παράδειγμα**:
- Σωματίδιο κινείται στον οριζόντιο άξονα, με τη θέση του να ορίζεται από τη σχέση

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

όπου x είναι η θέση σε m, και t είναι ο χρόνος σε s, όπως στο Σχήμα (α).

  - A. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.
  - B. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα.
  - C. Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.

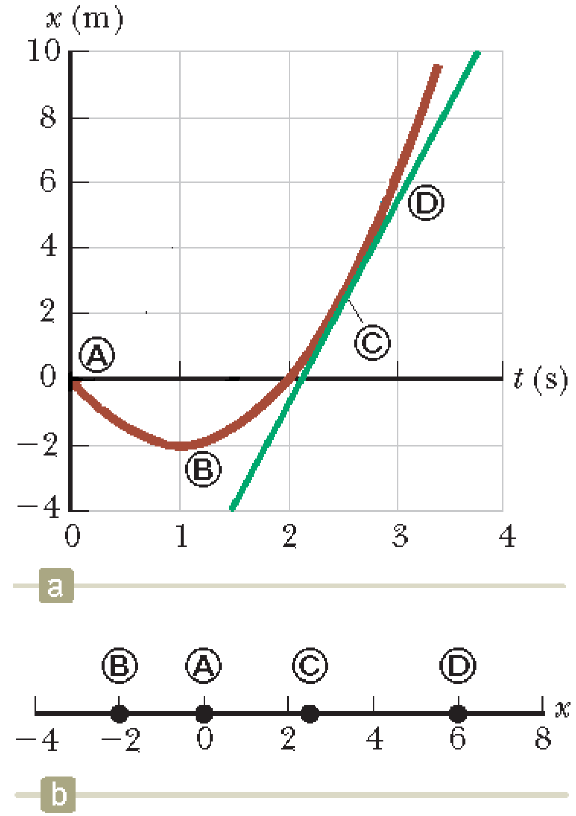


Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Παράδειγμα – Λύση:**

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

- Α. Βρείτε τη μετατόπιση του σωματιδίου στα χρονικά διαστήματα $t = 0$ ως $t = 1$ και από $t = 1$ έως $t = 3$ s.



- $\Delta\vec{x}_{A\to B} = \vec{x}_B - \vec{x}_A = \vec{x}(t=1) - \vec{x}(t=0)$

  $= -2\vec{i} - 0\cdot\vec{i} = (-2\ m)\,\vec{i}$

- $\Delta\vec{x}_{B\to D} = \vec{x}_D - \vec{x}_B = \vec{x}(t=3) - \vec{x}(t=1)$

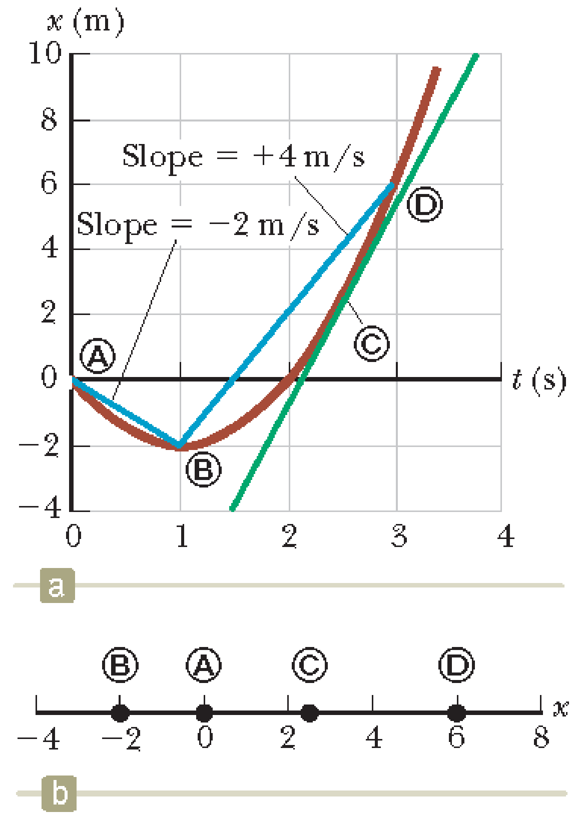
  $= 6\vec{i} - (-2\vec{i}) = (8\ m)\,\vec{i}$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Παράδειγμα – Λύση:**

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

- Β. Υπολογίστε τη μέση ταχύτητα σε αυτά τα δυο διαστήματα.



- $\vec{u}^{A\to B}_{avg} = \dfrac{\Delta \vec{x}_{A\to B}}{\Delta t_{A\to B}} = \dfrac{(-2\,m)\,\vec{i}}{(1-0)\,s} = \left(-2\,\dfrac{m}{s}\right)\vec{i}$

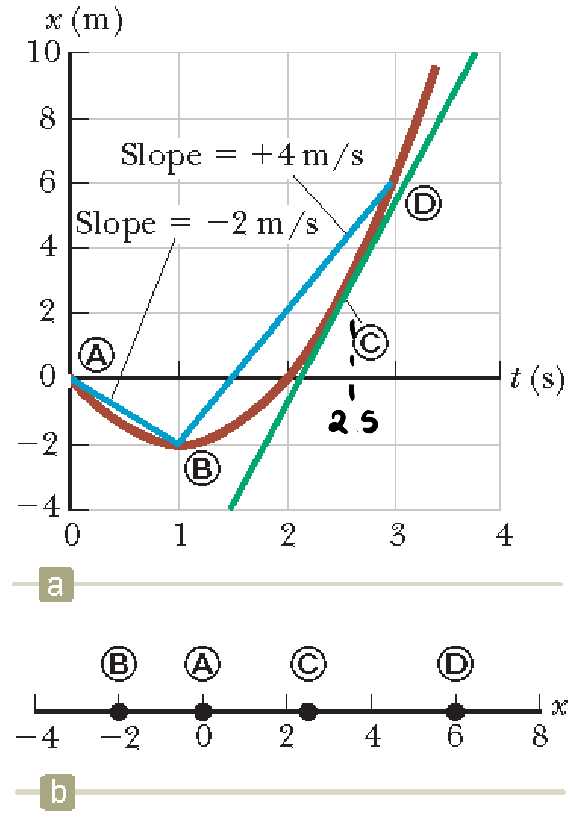
- $\vec{u}^{B\to D}_{avg} = \dfrac{\Delta \vec{x}_{B\to D}}{\Delta t_{B\to D}} = \dfrac{(8\,m)\,\vec{i}}{(3-1)\,s} = \left(4\,\dfrac{m}{s}\right)\vec{i}$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Παράδειγμα – Λύση:**

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

- C. Βρείτε τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t = 2.5$ s.



Γνωρίζαμε ότι η 1η παράγωγος του $x(t)$ μας δίνει τη στιγμιαία ταχύτητα, $u_x(t)$.

Άρα

$$u_x(t) = \frac{d}{dt}x(t) = (-4t + 2t^2)'$$

$$= -4 + 4t \Rightarrow \vec{u}_x(t) = (-4+4t)\vec{i}$$

Θέλαμε

$$\vec{u}_x(2.5) = (-4 + 4 \cdot 2.5)\vec{i} = \left(6\ \frac{m}{s}\right)\vec{i}$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μοντέλο κίνησης:** υπό ***σταθερή ταχύτητα***

$$u_{avg} = u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta x = u_x \Delta t \Leftrightarrow (x_f - x_i) = u_x \Delta t$$

- Άρα

$$x_f = x_i + u_x \Delta t$$

- Αν θεωρήσουμε ότι $t_i = 0$:

$$\Delta t = t_f - t_i = t_f = t$$

και τότε

$$\boxed{x_f = x_i + u_x t}$$

- Επίσης, το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό και ίσο με

$$u = \frac{d}{\Delta t}$$

όπου d η απόσταση που διανύθηκε

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Επιτάχυνση (acceleration)**
  - Η μεταβολή της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου

- **Μέση επιτάχυνση (average acceleration)**

$$\vec{a}_{x,avg} \equiv \frac{\Delta \vec{u}_x}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\vec{u}_{xf} - \vec{u}_{xi}}{t_f - t_i}$$

- **Στιγμιαία επιτάχυνση (inst. acceleration)**

$$\vec{a}_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{u}_x}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{d\vec{u}_x}{dt}$$

- Αφού όμως

$$\frac{d}{dt}\vec{u}_x = \frac{d}{dt}\frac{d\vec{x}}{dt}$$

είναι

$$\vec{a}_x = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

Μονάδα μέτρησης:

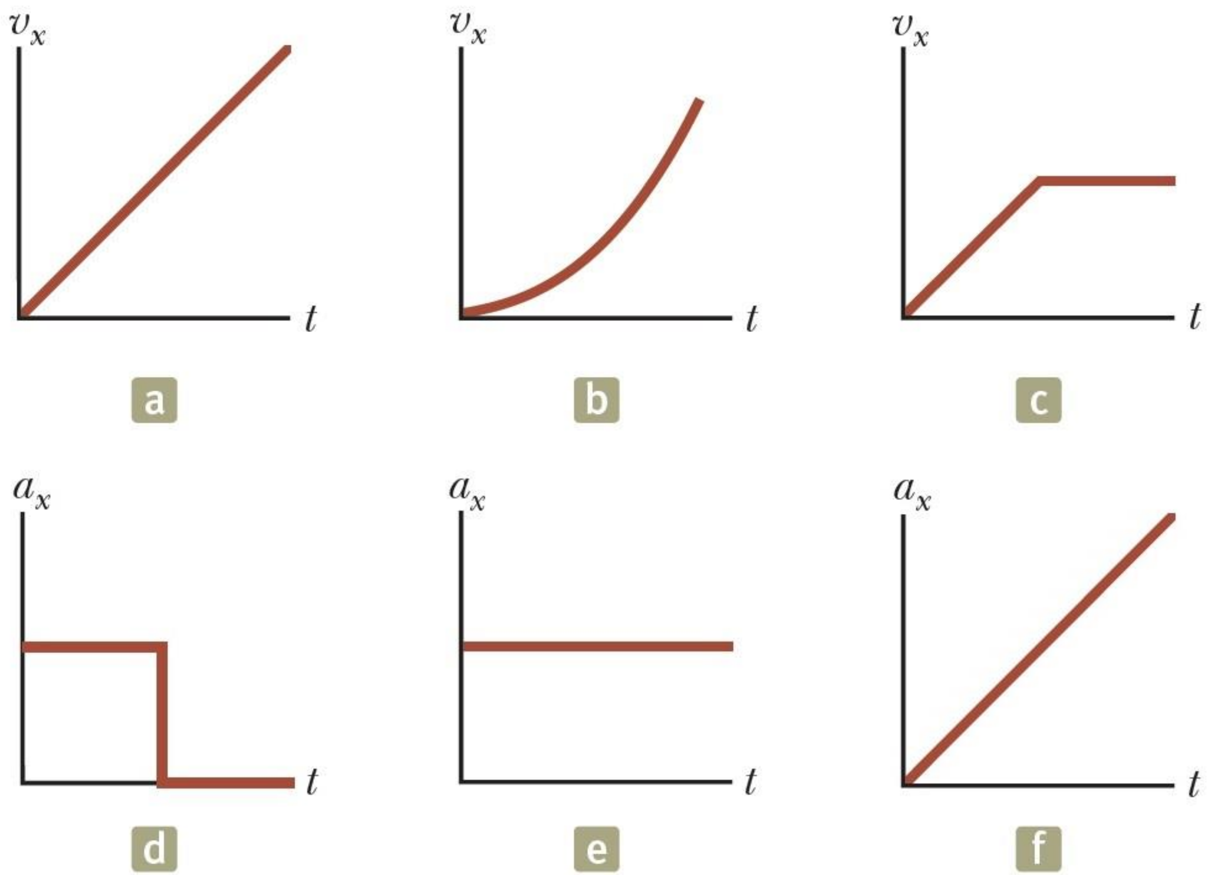
$$\boldsymbol{\frac{m}{s^2}}$$

(μέτρο ανά δευτερόλεπτο στο τετράγωνο)

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Quiz 1:**
  - Βρείτε τα ζεύγη ταχύτητας-επιτάχυνσης

Hint: Η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν σχέση παραγώγου-παράγουσας



a → e

b → f

c → d

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Quiz 2:**
  - Η θέση ενός σωματιδίου δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = 4 - 27t + t^3$$

    - Α) Βρείτε τη συνάρτηση ταχύτητας ως προς το χρόνο
    - Β) Βρείτε τη συνάρτηση επιτάχυνσης ως προς το χρόνο
    - Γ) Υπάρχει κάποια χρονική στιγμή t_0 που το σωματίδιο είχε $u(t_0) = 0$?

Α) Είναι $u_x(t) = \frac{d}{dt}x(t) = -27 + 3t^2 \rightsquigarrow \vec{u_x}(t) = \left(-27 + 3t^2 \ \frac{m}{s}\right)\vec{i}$

Β) Είναι $a_x(t) = \frac{d}{dt}u_x(t) = 6t \rightsquigarrow \vec{a_x}(t) = \left(6t \ \frac{m}{s^2}\right)\vec{i}$

Γ) Θα πρέπει $u_x(t) = 0 \Leftrightarrow -27 + 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow (t-3)(t+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \ ✓ \\ t = -3 \ \times \ (\text{δεν υπάρχει } t<0) \end{cases}$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Μοντέλο κίνησης:** υπό ***σταθερή επιτάχυνση***
  - **Ορίζουμε θετική φορά κίνησης προς τα δεξιά**

- **<u>Εξισώσεις Μονοδιάστατης Κίνησης υπό σταθερή επιτάχυνση:</u>**

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \dfrac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right)t$ ή $x_f = x_i + u_{x,avg}t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Οι δείκτες i και f δηλώνουν αρχική και τελική κατάσταση, ενώ ο δείκτης x δηλώνει μονοδιάστατη κίνηση σε έναν οριζόντιο άξονα $x'x$ (κάποιες φορές μπορούμε να παραλείπουμε το δείκτη x για απλοποίηση)

Κίνηση σε μια Διάσταση

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

- **Απόδειξη:**

Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή, τότε

$$a_{x,avg} = a_x$$

Από τον ορισμό έχουμε

$$a_x = \frac{\Delta u_x}{\Delta t} = \frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{t_f - t_i} \xRightarrow{t_i=0, t_f=t} u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

Άρα

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

$$u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$$

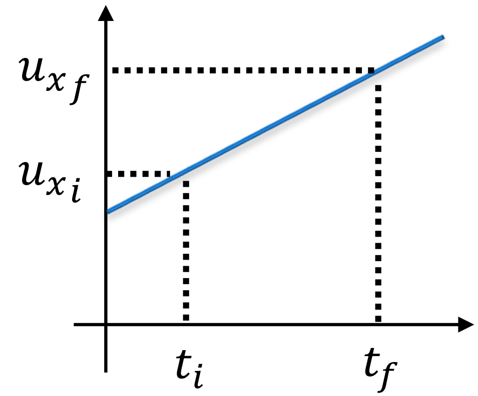
- **Απόδειξη:**

Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή, τότε η ταχύτητα (δηλ. το ολοκλήρωμά της) θα είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου

Έτσι η μέση ταχύτητα μπορεί να εκφραστεί ως ο αριθμητικός μέσος της αρχικής ταχύτητας $u_{x\,i}$ και της τελικής ταχύτητας $u_{x\,f}$

Δηλ.

$$u_{x\,avg} = \frac{u_{x\,f} + u_{x_i}}{2}$$



Κίνηση σε μια Διάσταση

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right)t \quad \text{ή} \quad x_f = x_i + u_{x,avg}t$$

- **Απόδειξη:**

Από την προηγούμενη σχέση, πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με t:

$$u_{x_{avg}}t = \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}t$$

Όμως

$$u_{x_{avg}}t = \Delta x = x_f - x_i$$

οπότε

$$\left(x_f - x_i\right) = \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}t$$

Λύνοντας ως προς x_f:

$$x_f = x_i + \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}t$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

$$x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

- **Απόδειξη:**

Έχουμε ήδη

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

και

$$x_f = x_i + \frac{u_{x_f} + u_{x_i}}{2}t$$

Αντικαθιστώντας

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + a_x t + u_{x_i}\right)t$$

$$= x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

Άρα

$$x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

$$u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$$

- **Απόδειξη:**

Έχουμε

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t \Rightarrow t = \frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{a_x}$$

και

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_f} + u_{x_i}\right) t$$

Αντικαθιστώντας

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_f} + u_{x_i}\right)\left(\frac{u_{x_f} - u_{x_i}}{a_x}\right)$$

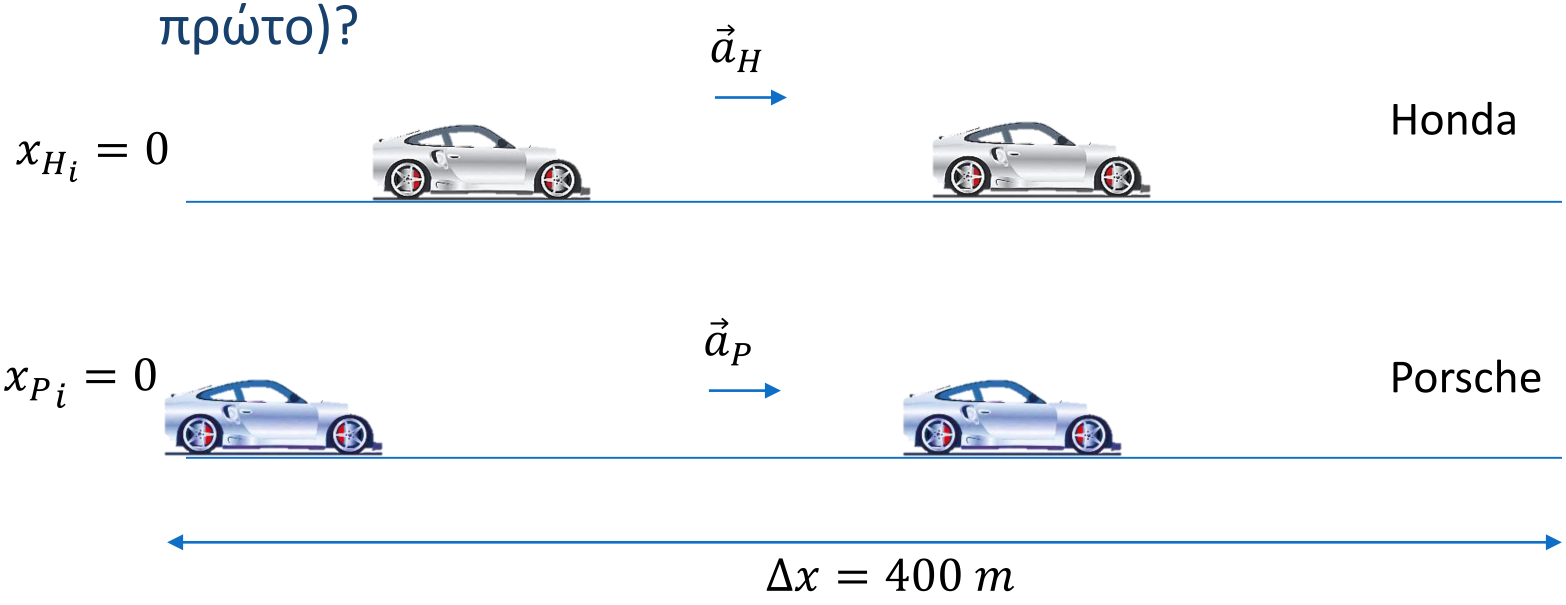
$$= x_i + \frac{u_{x_f}^2 - u_{x_i}^2}{2a_x}$$

και λύνοντας ως προς $u_{x_f}^2$

$$u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$$

Κίνηση σε μια Διάσταση

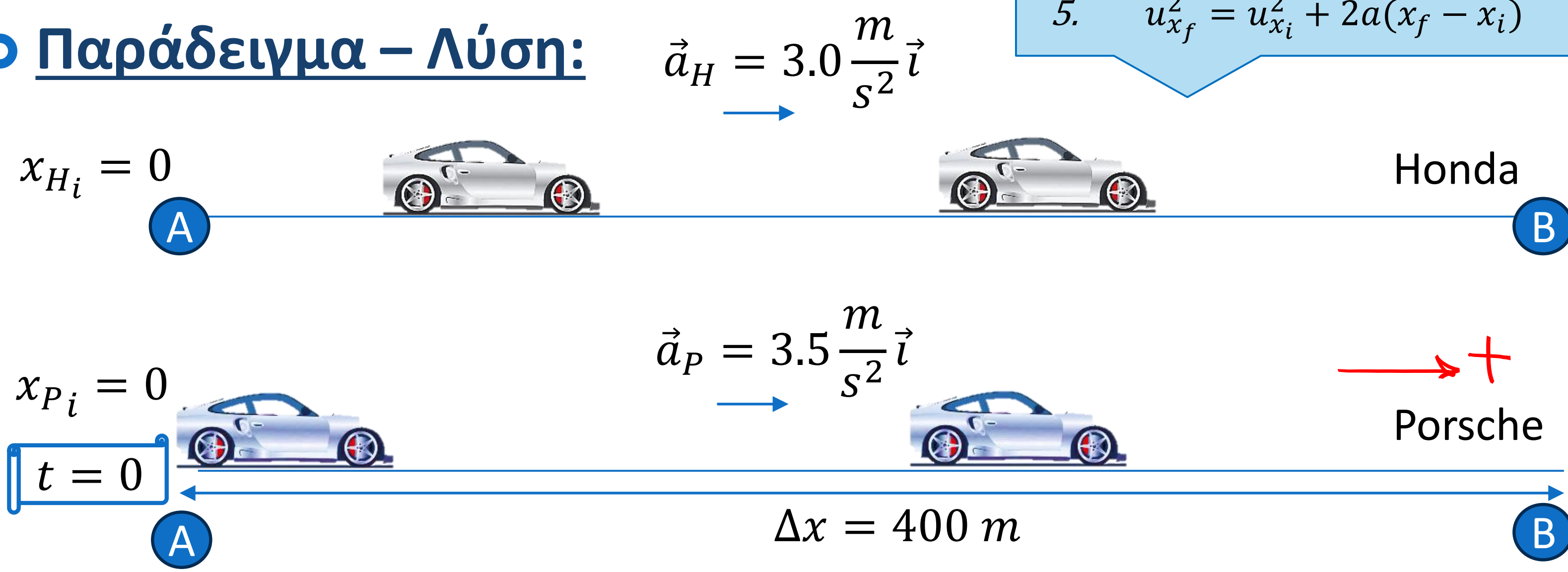
- **Παράδειγμα:**
  - Μια Porsche προκαλεί ένα Honda σε έναν αγώνα ταχύτητας 400 μέτρων. Επειδή $a_P = 3.5\ m/s^2$ και $a_H = 3.0\ m/s^2$, το Honda παίρνει προβάδισμα στην αφετηρία κατά $1.0\ s$. Τα δυο οχήματα ξεκινούν από ακινησία. Περιγράψτε το μοντέλο κίνησης των οχημάτων. Ποιο αυτοκίνητο θα κερδίσει (φτάσει πρώτο)?



Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + at$
2. $u_{x,avg} = \dfrac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right)t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a(x_f - x_i)$

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Θεωρώ $x_A = 0$ τη θέση εκκίνησης των οχημάτων. Θεωρώ $t = 0$ όταν ξεκινά η Porsche, δηλ. +1 s μετά το Honda. Τα οχήματα εκτελούν ευθύγραμμη, με σταθερή επιτάχυνση, κίνηση.

Θα δουλέψουμε στη διαδρομή $A \to B$ και για τα δυο οχήματα, με $t_A = 0$ όταν ξεκινά η Porsche.

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + at$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right)t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a(x_f - x_i)$

- **Παράδειγμα – Λύση:**

$\vec{a}_H = 3.0\,\frac{m}{s^2}\vec{i}$

$x_{H_i} = 0$

Honda

A — B

$+$

$x_{P_i} = 0$

$\vec{a}_P = 3.5\,\frac{m}{s^2}\vec{i}$

$t = 0$

Porsche

$\Delta x = 400\ m$

A — B

Για την Porsche: (εξ 4)

$x_B = x_A + u_A \cdot t + \frac{1}{2} a_P t^2$

$400 = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 3.5t^2$

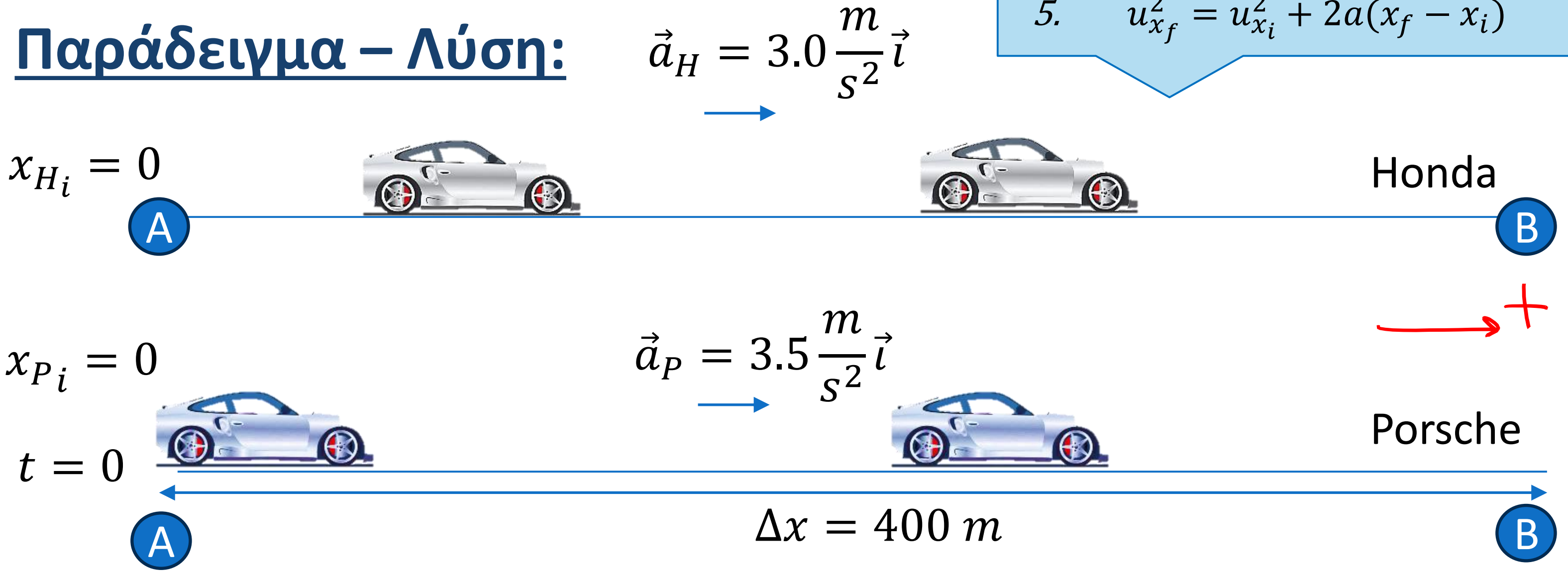
$800 = 3.5t^2$

$t^2 = \frac{800}{3.5} \Rightarrow t \cong 15.1\ s$

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + at$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right)t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a(x_f - x_i)$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Για το Honda:

$$x_B = x_A + u_A \cdot (t+1) + \frac{1}{2} a_H \cdot (t+1)^2$$

$$400 = 0 + 0 \cdot (t+1) + \frac{1}{2}\, 3.0 (t+1)^2$$

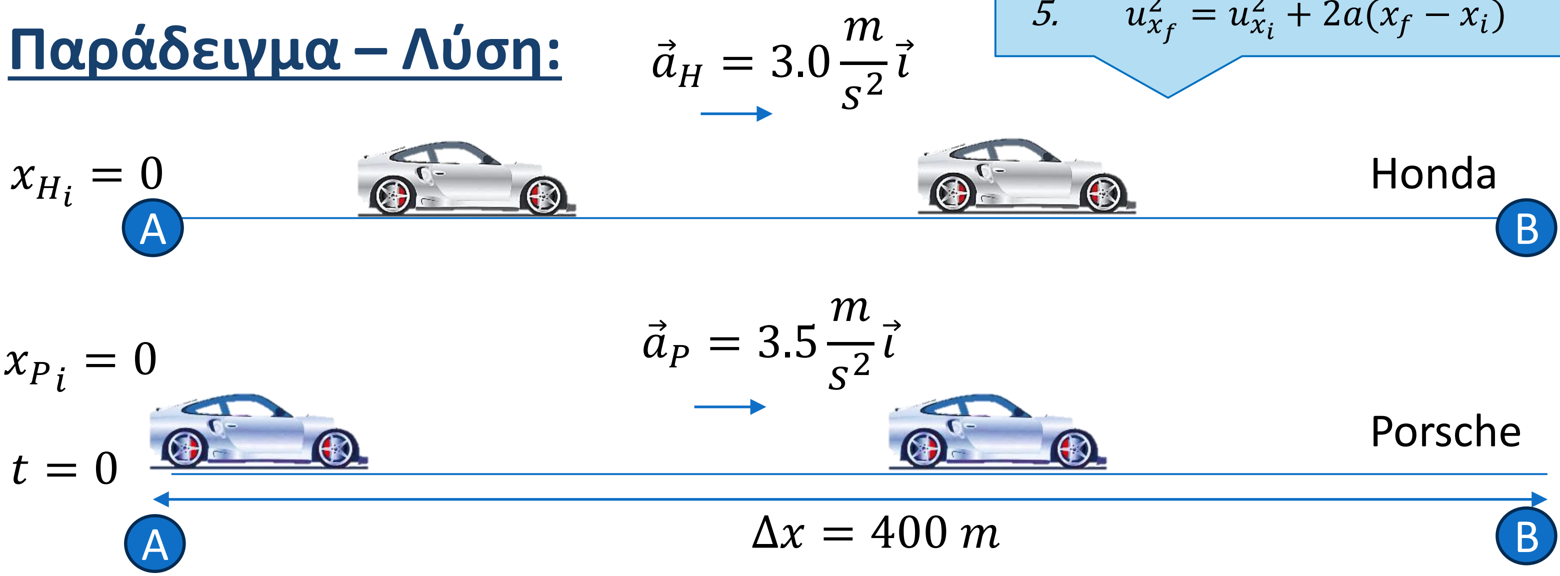
$$800 = 3(t+1)^2 = 3t^2 + 6t + 3$$

$$3t^2 + 6t - 797 = 0 \Rightarrow t \cong 15.3\ s$$

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + at$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(u_{x_i} + u_{x_f}\right)t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}at^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a(x_f - x_i)$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Άρα τελικά $t_P \cong 15.1\ s < t_H \cong 15.3\ s$. Άρα κερδίζει τον αγώνα η Porsche.

Κίνηση σε μια Διάσταση

- Δεν είναι απαραίτητη η χρήση διανυσμάτων στην κίνηση αυτή
  - Είδατε ότι το τυπολόγιο της κίνησης ήταν αλγεβρικές εξισώσεις
  - Όμως τα αποτελέσματά σας πρέπει να γράφονται διανυσματικά!
  - Προσοχή στην ερμηνεία των αρνητικών μεγεθών!

- Υπενθυμίζεται η σύμβαση ότι : ορίζουμε ως θετική φορά αυτή προς τα δεξιά
  - Αντίστοιχα, αρνητική προς τα αριστερά
  - Ορίζετε πάντα θέση και χρόνο αναφοράς σας ($x_i = 0, t_i = 0$)!

- **Ελεύθερη πτώση** (κίνηση σε μια διάσταση – κατακόρυφη)
  - Συνήθως ορίζουμε θετική φορά κίνησης προς τα επάνω
  - Επιτάχυνση βαρύτητας $\vec{g} = -9.8\vec{j}$ m/s^2 (φορά προς τα κάτω)
  - Ίδια μεθοδολογία και εξισώσεις ($x \rightarrow y$)

Κίνηση σε μια Διάσταση

ΌΧΙ $g = 10\, m/s^2$!!!

- Ελεύθερη πτώση: $\vec{\boldsymbol{a}}_y = \vec{\boldsymbol{g}} = -\mathbf{9.8}\vec{\boldsymbol{j}}\, \boldsymbol{m/s^2}$ **σταθερή**
  - Ορίζουμε **θετική φορά κίνησης προς τα επάνω**

- **Εξισώσεις Ελεύθερης Πτώσης:**

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \dfrac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$

   ή

   $y_f = y_i + u_{y,avg}t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

Οι δείκτες i και f δηλώνουν αρχική και τελική κατάσταση, ενώ ο δείκτης $\boldsymbol{y}$ δηλώνει μονοδιάστατη κίνηση σε έναν κατακόρυφο άξονα $\boldsymbol{y'y}$ (συχνά ο δείκτης παραλείπεται)

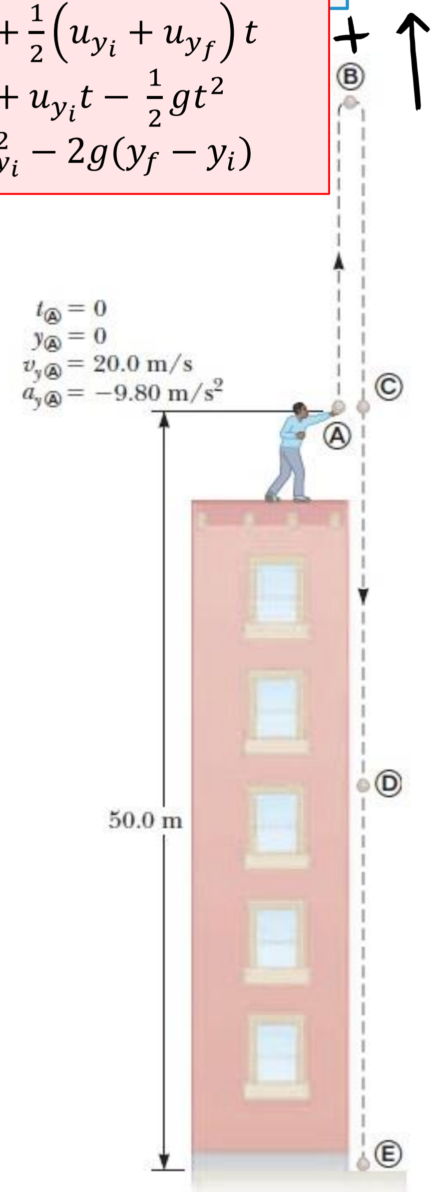
Στις διπλανές εξισώσεις, η επιτάχυνση της βαρύτητας χρησιμοποιείται κατά μέτρο, $g = |\vec{g}| = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$

Αν ορίσετε θετική φορά κίνησης προς τα κάτω (δηλ. με ίδια φορά με το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας), τότε όπου $-g$ θέτουμε g

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \dfrac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

- **<u>Παράδειγμα:</u>**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m. Δεν υπάρχουν αντιστάσεις λόγω αέρα.
    - Α) Με ποιο μοντέλο μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση της μπάλας? Δώστε τις λεπτομέρειες.
    - Β) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.
    - Γ) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.
    - Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.
    - Ε) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν $t = 5$ s.



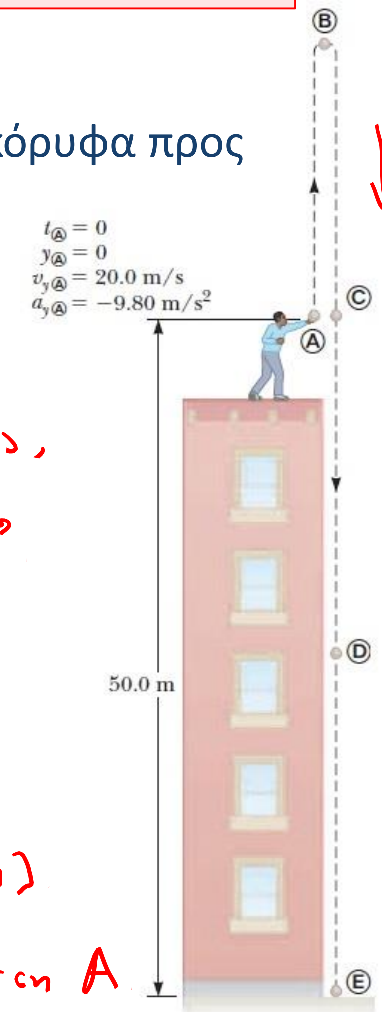
Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

$+ \uparrow$

- **<u>Παράδειγμα – Λύση:</u>**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Α) Με ποιο μοντέλο μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση της μπάλας? Δώστε τις λεπτομέρειες.

$\downarrow \vec{g}$



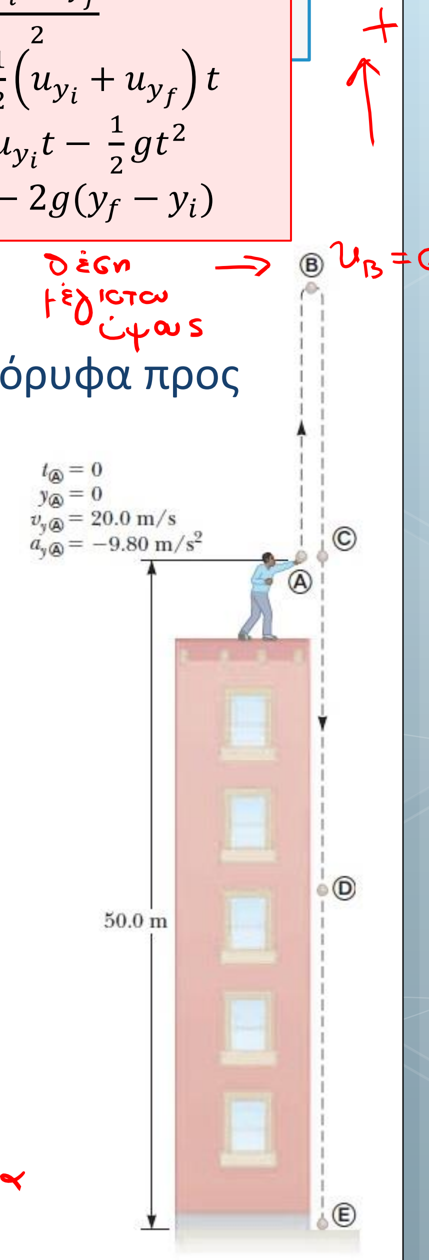
Η κίνηση της μπάλας είναι, σε κάθε διάστημά της, ευθύγραμμη με σταθερή επιτάχυνση $\vec{g} = \left(-9.8\,\frac{m}{s^2}\right)\vec{j}$

Άρα θα μοντελοποιήσαμε την κίνηση με τις εξισώσεις της επιταχυνόμενης κίνησης, στον άξονα y'y. Επιλέξαμε ότι $t_A = 0$, $y_A = 0$, δηλ. χρονική αναφορά και σημείο αναφοράς είναι η θέση A

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \dfrac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Β) Θεωρώντας ότι αρχίζουμε να μετράμε όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια μας, βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.



Στη διαδρομή $A \rightarrow B$, θα ισχύει: (εξ 1)

$$u_B = u_A - gt$$

$$0 = 20 - 9.8t$$

$$t \cong 2.04 \text{ s}$$

Άρα η μπάλα χρειάζεται χρόνο $t \cong 2.04$ s για να φτάσει στο μέγιστο ύψος.

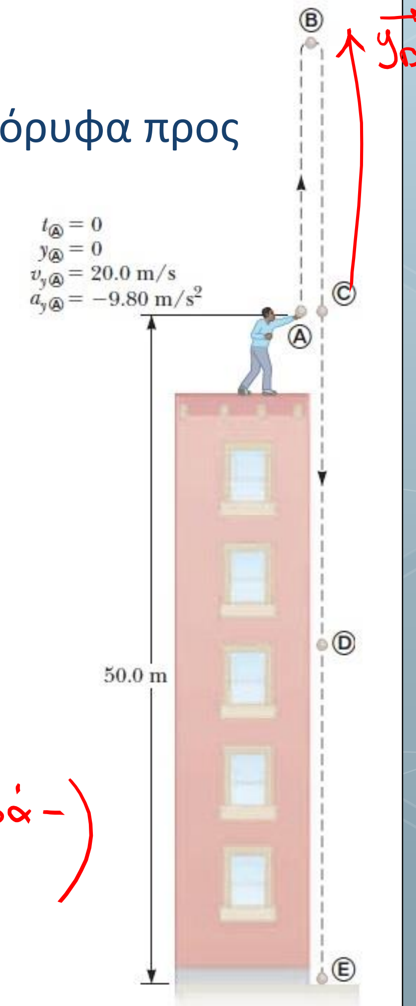
1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

$+ \uparrow$

Κίνηση σε μια Διάσταση

Παράδειγμα – Λύση:

- Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
  - Γ) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.



Στη διαδρομή A → B, ισχύει: (εξ. 3)

$$y_B = y_A + \frac{1}{2}(u_A + u_B)\cdot t$$

$$y_B = 0 + \frac{1}{2}(20 + 0)\ 2.04$$

$$= \frac{1}{2}\ 20 \cdot 2.04$$

$$\simeq 20.4\ m$$

(πολλές φορές το γράφαμε και h_{max})

Άρα $\vec{y_B} = (20.4\ m)\vec{j}$

Κίνηση σε μια Διάσταση

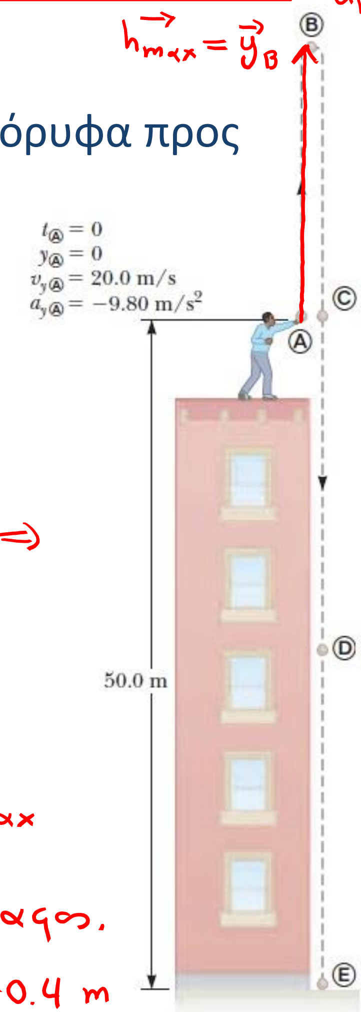
1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \dfrac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Γ) Βρείτε αυτό το μέγιστο ύψος.

$+\uparrow$

$u_B = 0$

$\vec{h}_{max} = \vec{y}_B$



Εναλλακτικά :

Εξίσου καλά δουλεύουν και οι σχέσεις 4, 5 :

4 • $h_{max} = y_A + u_{y_A}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 + 20t - 4.9t^2 \left.\right\}$ $\Rightarrow$ $t = \frac{20}{9.8}$ s

$\Rightarrow h_{max} = 20\left(\frac{20}{9.8}\right) - 4.9\left(\frac{20}{9.8}\right)^2 \cong 20.4$ m

5 • $u_B^2 = u_A^2 - 2g(h_{max} - 0) \Leftrightarrow 0^2 = 20^2 - 19.6\,h_{max}$

δηλ. $h_{max} = \frac{400}{19.6} = 20.4$ m

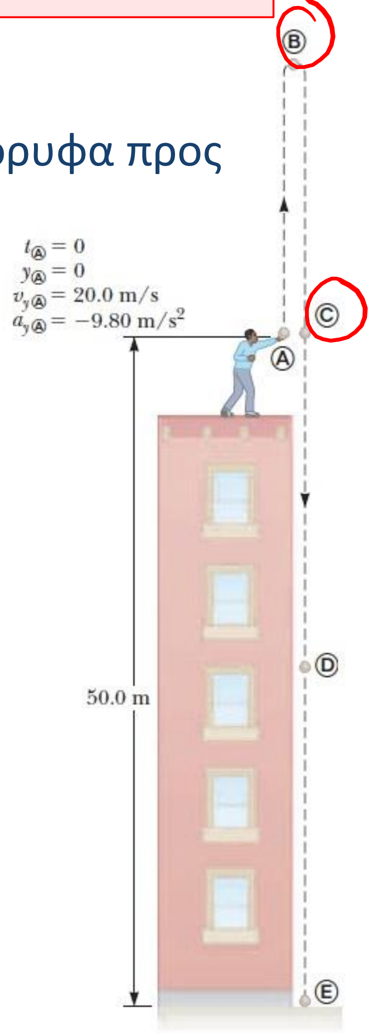
(Ενώ από το έδαφος, το ύψος είναι 70.4 m

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

+

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.



Στη διαδρομή B→C, ισχύει: (εξ. 5)

$$u_C^2 = u_B^2 - 2g(y_C - y_B)$$

$$= 0^2 - 2\cdot 9.8\,(0 - 20.4)$$

$$= 400$$

Άρα $u_C = \pm 20 \frac{m}{s} \rightsquigarrow u_C = -20 \frac{m}{s}$

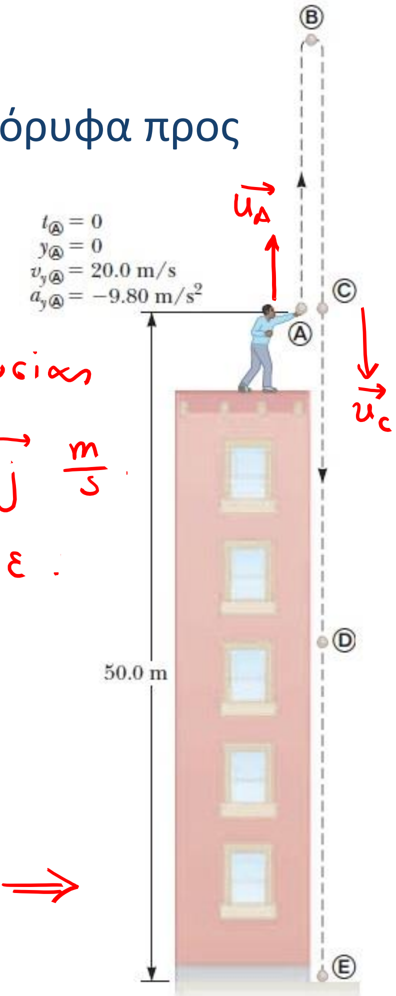
και άρα $\vec{u}_C = \left(-20 \frac{m}{s}\right)\vec{j}$.

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \dfrac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

$+ \uparrow$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.



Θα μπορούσαμε να πούμε ότι $t_{A\to B} = t_{B\to C}$, λόγω απουσίας αντιστάσεων του αέρα, και άρα $\vec{u}_C = -\vec{u}_A = -20\vec{j}\ \frac{m}{s}$.

Πώς ξέρουμε όμως ότι $t_{A\to B} = t_{B\to C}$? Ας το δούμε.

Διαδρομή A → B: δείξαμε ότι $t_{A\to B} = \dfrac{u_A}{g}$ (1)

Διαδρομή B → C: $y_C = y_B + u_B t_{B\to C} - \frac{1}{2} g t_{B\to C}^2$

$$0 = h_{max} + 0 \cdot t_{B\to C} - \frac{1}{2} g t_{B\to C}^2$$

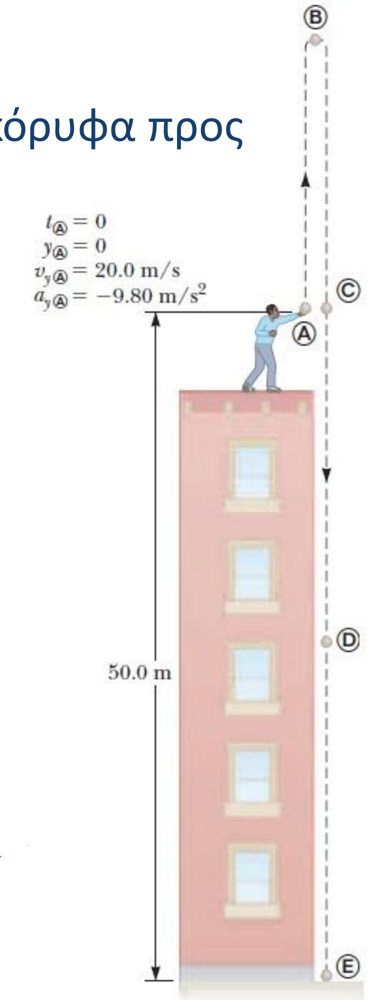
Όμως $h_{max} = \dfrac{u_A^2 - u_B^2}{2g}$, όπως δείξαμε πριν από 2 slides $\Rightarrow$

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

$+ \uparrow$

Κίνηση σε μια Διάσταση

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Δ) Βρείτε την ταχύτητα της μπάλας όταν επιστρέφει στο ύψος που έφυγε από τα χέρια μας.



$$\Longrightarrow 0 = \frac{u_A^2 - u_B^2}{2g} - \frac{1}{2} g t_{B\to C}^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{u_A^2 - 0}{2g} = \frac{1}{2} g t_{B\to C}^2 \Longleftrightarrow \frac{u_A^2}{g} = g t_{B\to C}^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{u_A^2}{g^2} = t_{B\to C}^2 \Longleftrightarrow t_{B\to C} = \sqrt{\frac{u_A^2}{g^2}} = \frac{u_A}{g} \quad (2)$$

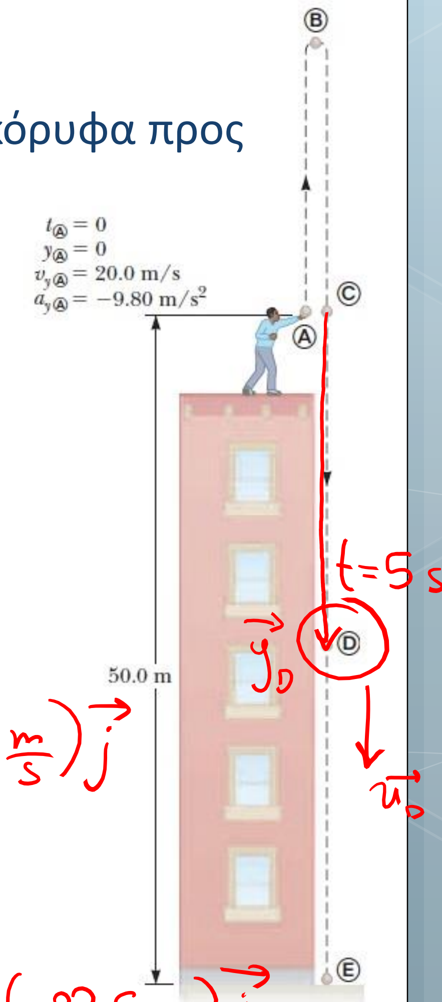
Οι σχέσεις (1), (2) μας δίνουν ότι $t_{A\to B} = t_{B\to C}$

Κίνηση σε μια Διάσταση

1. $u_{y_f} = u_{y_i} - gt$
2. $u_{y,avg} = \frac{u_{y_i} + u_{y_f}}{2}$
3. $y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(u_{y_i} + u_{y_f}\right)t$
4. $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$
5. $u_{y_f}^2 = u_{y_i}^2 - 2g(y_f - y_i)$

$+ \uparrow$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Πετάμε μια μπάλα από την κορυφή ενός κτηρίου με αρχική ταχύτητα 20 m/s και φορά κατακόρυφα προς τα επάνω. Το ύψος του κτηρίου είναι 50 m.
    - Ε) Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση της μπάλας όταν $t = 5\ s$.



Στη διαδρομή A→D, ισχύει (εξ. 1):

$$u_D = u_A - gt$$
$$= 20 - 9.8 \cdot 5$$
$$= 20 - 49 = -29\ \frac{m}{s} \rightsquigarrow \vec{u}_D = \left(-29\ \frac{m}{s}\right)\vec{j}$$

Επίσης, (εξ. 5), $u_D^2 = u_A^2 - 2g(y_D - y_A)$

$$(-29)^2 = 20^2 - 2 \cdot 9.8\,(y_D - 0)$$
$$y_D = -22.5\ m \rightsquigarrow \vec{y}_D = (-22.5\ m)\vec{j}$$

Τέλος Διάλεξης