

Physics

$w = 2\pi r f$

$t = \frac{s}{v}$

$v^2 = u^2 + 2as$

$PE = mgh$

$P = \frac{W}{t}$

$PE = m \times g \times h$

$I = \frac{C}{R}$

$S = vt$

$S = \left(\frac{u+v}{2}\right)t$

$E = mgz$

$s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$T = \frac{E}{v+r}$

The image is a hand-drawn collage of physics concepts. At the center is the word "Physics" in large, bold, black letters. Surrounding it are various diagrams and formulas:
 - Top left: A diagram of a rectangular block with a grid pattern on top and a hatched pattern on the side. A force vector F_L points upwards from the top surface. Below it is the formula $P = \frac{W}{t}$.
 - Top center: A diagram of a ball on a curved path with arrows indicating direction. Above it is the formula $t = \frac{s}{v}$.
 - Top right: A diagram of a pendulum with a mass and a string. The formula $PE = mgh$ is written next to it.
 - Middle left: A diagram of a central point with eight arrows radiating outwards. Below it is the formula $E = mgz$.
 - Middle center: A diagram of a lightbulb with rays emanating from it. Above it is the formula $PE = m \times g \times h$.
 - Middle right: A diagram of a fan with blades and arrows indicating rotation. Above it is the formula $I = \frac{C}{R}$.
 - Bottom left: A diagram of a spring-mass system with a mass hanging from a spring. Below it is the formula $s = ut + \frac{1}{2}at^2$.
 - Bottom center: A diagram of a right-angled triangle with a block on the hypotenuse. Below it is the formula $T = \frac{E}{v+r}$.
 - Bottom right: A diagram of a circuit with a battery, a voltmeter (V), and two points labeled A and B. Above it is the formula $S = vt$.
 - Other elements include a Bohr-style atomic model, a diagram of a piston or cylinder, and various geometric shapes and arrows representing motion and forces.

Reminder...

- ◉ Διαλέξεις

- ◉ Προαιρετική παρουσία!

- ◉ Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε

- ◉ Δεν υπάρχουν απουσίες

- ◉ Υπάρχει σεβασμός στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία

- ◉ Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά



Εικόνα: Η Όπερα του Σίδνεϊ είναι πολυχώρος τεχνών θεάματος στο Σίδνεϊ της Αυστραλίας, ένα από τα πιο διασημότερα κτίρια του 20ού αιώνα και αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους χώρους άσκησης τεχνών στον κόσμο. Σχεδιάστηκε από τον Δανό αρχιτέκτονα Γιερν Ούντσον και εγκαινιάστηκε επισήμως τις 20 Οκτωβρίου 1973. Στη σχεδιάσή του χρειάστηκαν πολλές διαφορεικές εξισώσεις, δηλ. εξισώσεις που περιλαμβάνουν παραγώγους πολλών μεταβλητών.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Μαθηματικό Υπόβαθρο:
Παραγωγή - ολοκλήρωση



Εικόνα: Η Όπερα του Σίδνεϊ είναι πολυχώρος τεχνών θεάματος στο Σίδνεϊ της Αυστραλίας, ένα από τα πιο διασημότερα κτίρια του 20ού αιώνα και αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους χώρους άσκησης τεχνών στον κόσμο. Σχεδιάστηκε από τον Δανό αρχιτέκτονα Γιερν Ούντσον και εγκαινιάστηκε επισήμως τις 20 Οκτωβρίου 1973. Στη σχεδιάσή του χρειάστηκαν πολλές διαφορετικές εξισώσεις, δηλ. εξισώσεις που περιλαμβάνουν παραγώγους πολλών μεταβλητών.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Μαθηματικό Υπόβαθρο:
Παραγωγή - ολοκλήρωση

Παράγωγος

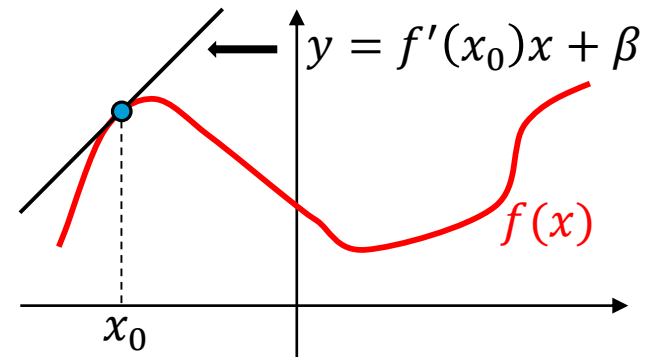
- Αν $f(x)$ συνεχής συνάρτηση του x τότε ορίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης ως

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Η παράγωγος εκφράζει πόσο γρήγορα (ρυθμός μεταβολής) μεταβάλλεται η συνάρτηση $f(x)$ συναρτήσει του x
- Η εφαπτομένη μιας συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο x_0 έχει «κλίση» (συντελεστή διεύθυνσης) $f'(x_0)$

- 2^η παράγωγος: $f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$

- 3^η παράγωγος: $f'''(x) = \frac{d^3}{dx^3} f(x)$



Παράγωγος

Κανόνες

$$\frac{d}{dx}(af(x) + bg(x)) = af'(x) + bg'(x)$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = g'(x)f'(g(x))$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx}c = 0, \forall c \in \mathfrak{R}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

Παράγωγοι

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}, \forall a \in \mathfrak{R}$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \forall n \in \mathfrak{R}$$

$$\frac{d}{dx}\log(f(x)) = f'(x)\frac{1}{f(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\sin(f(x)) = f'(x)\cos(f(x))$$

$$\frac{d}{dx}\cos(f(x)) = -f'(x)\sin(f(x))$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Ολοκλήρωμα

- Το ολοκλήρωμα είναι – σχεδόν – η αντίστροφη πράξη της παραγώγισης

- Για παράδειγμα, αν $\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$, τότε

$$\int 3x^2 dx = x^3$$

- Με άλλα λόγια, όταν θέλω να υπολογίσω το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $F(x)$, αναζητώ μια συνάρτηση $f(x)$, η οποία ονομάζεται *παράγουσα*, την οποία αν παραγωγίσω θα πάρω την $F(x)$
- Το παραπάνω ολοκλήρωμα ονομάζεται **αόριστο** ολοκλήρωμα
 - Το αόριστο ολοκλήρωμα είναι πάντα μια συνάρτηση κάποιας ανεξάρτητης μεταβλητής (όπως το x εδώ)
 - Το σύμβολο dx μας δηλώνει τη *μεταβλητή ολοκλήρωσης*

Ολοκλήρωμα

- Στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$$

Παρατηρήστε ότι ισχύει και

$$\frac{d}{dx} (x^3 + c) = 3x^2, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

και άρα το πιο σωστό θα ήταν να πούμε ότι

$$\int 3x^2 dx = x^3 + c, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

- Η πιο σημαντική ιδιότητα της ολοκλήρωσης είναι η **γραμμικότητα**:

$$\int (af(x) + bg(x))dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$$

Ολοκλήρωμα

- Πιο γενικά λοιπόν, αν $F(x) = f'(x)$ τότε

$$\int F(x)dx = f(x) + c, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

- Αντίθετα, ένα **ορισμένο** ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$\int_a^b F(x)dx$$

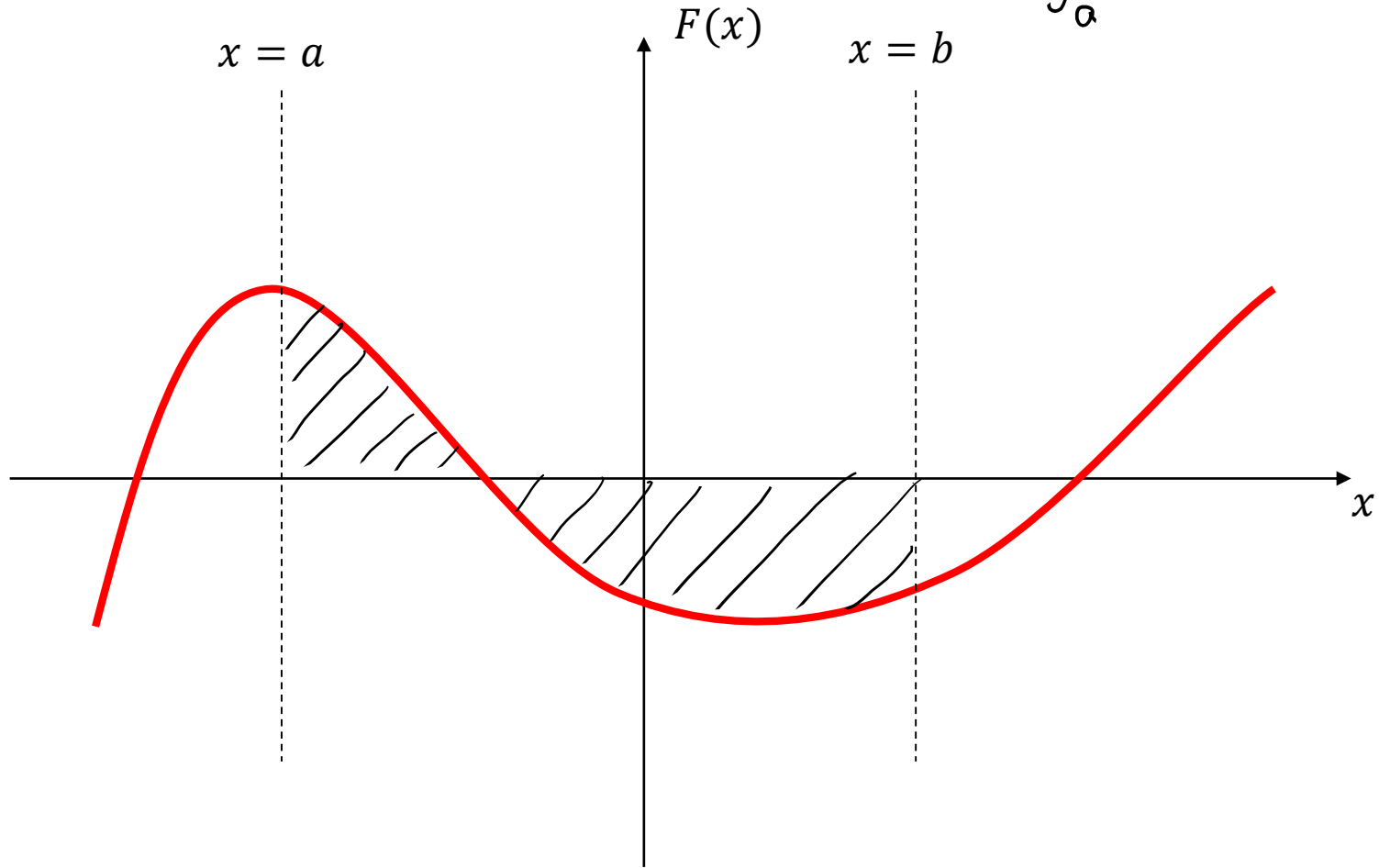
και υπολογίζεται ως

$$\int_a^b F(x)dx = f(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a)$$

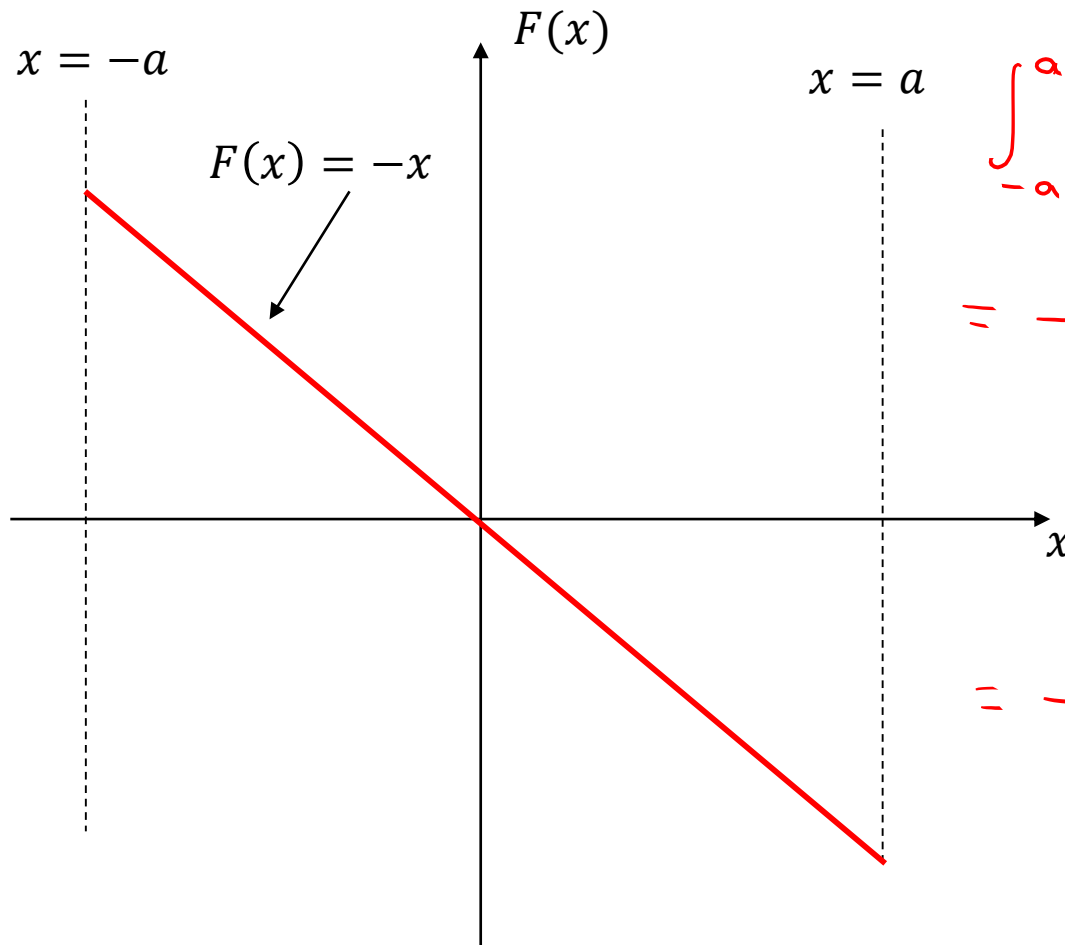
- Το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι πάντα ένας αριθμός – ΟΧΙ μια συνάρτηση (στα πλαίσια του μαθήματος)
 - ... και ποτέ δεν περιλαμβάνει σταθερά c στο αποτέλεσμα
 - Ερμηνεύεται ως η επιφάνεια μεταξύ της συνάρτησης $F(x)$ και του οριζόντιου άξονα, από την ευθεία $x = a$ ως την ευθεία $x = b$

Ολοκλήρωμα

$$\int_a^b F(x) dx$$



Ολοκλήρωμα



$$\int_{-a}^a F(x) dx = ? \quad \text{⊗}$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \widehat{F}(x) dx &= \int_{-a}^a (-x) dx \\ &= - \int_{-a}^a x dx = - \int_{-a}^a \left(\frac{x^2}{2} \right)' dx \\ &= - \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-a}^a = \\ &= - \left(\frac{a^2}{2} - \frac{(-a)^2}{2} \right) = \text{⊗} \end{aligned}$$

Ολοκλήρωμα

• Παραδείγματα:

$$\int (x^2 + 3x + 2) dx = ?$$

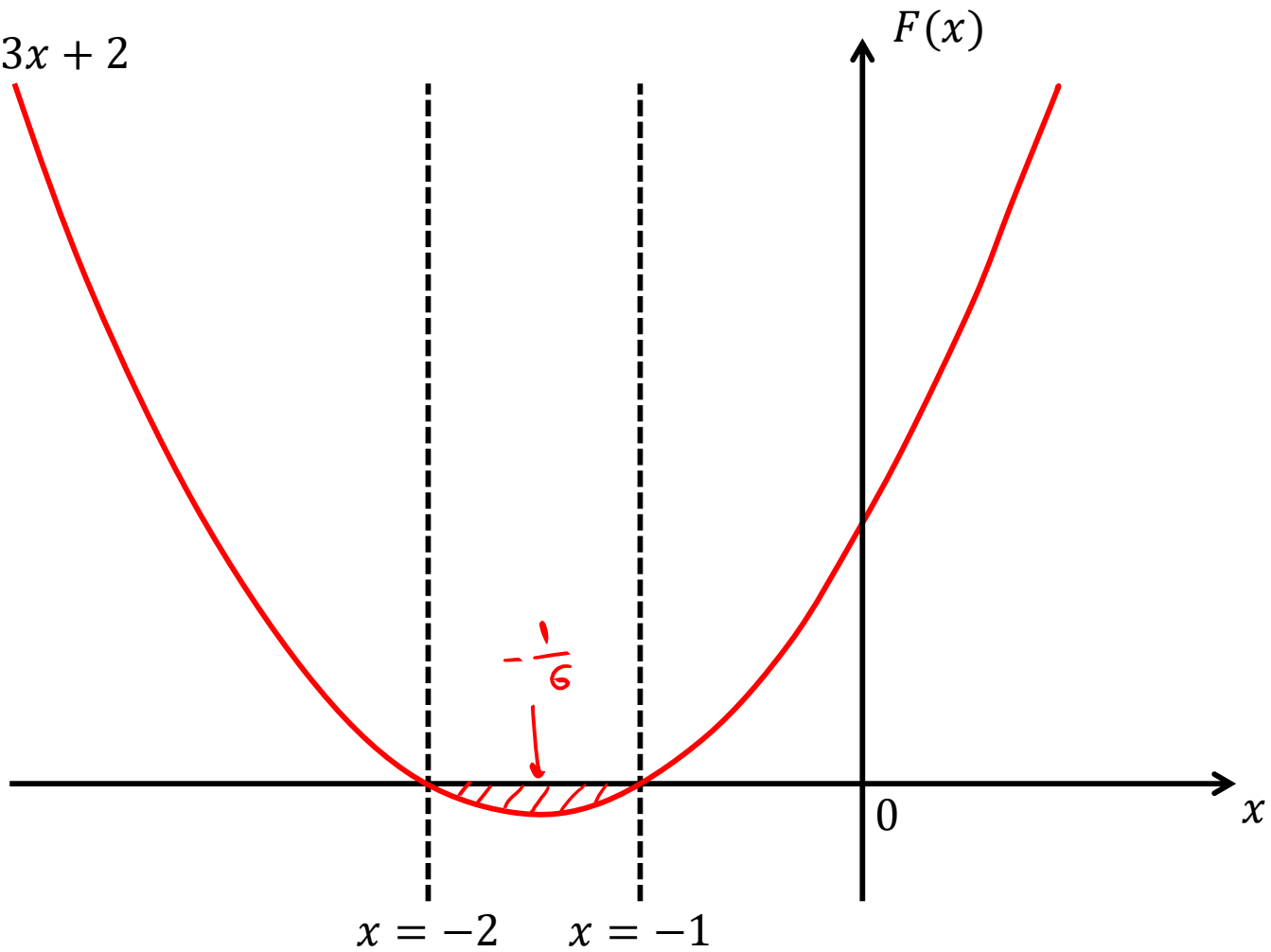
$$\int_{-2}^{-1} (x^2 + 3x + 2) dx = ?$$

$$\begin{aligned} \bullet \int (x^2 + 3x + 2) dx &= \int x^2 dx + 3 \int x dx + 2 \int dx \\ &= \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' dx + 3 \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx + 2 \int (x)' dx \quad \textcircled{1} \\ &= \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} + 2x + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Από } \textcircled{1} \Rightarrow \underbrace{\left. \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x \right|_{-2}^{-1}}_{f(x)} = f(-1) - f(-2) = -\frac{1}{6}$$

Ολοκλήρωμα

$$x^2 + 3x + 2$$



Ολοκλήρωμα

◦ Παραδείγματα:

$$\int e^{ax} dx = ?$$

$$\int_0^1 e^{ax} dx = ?$$

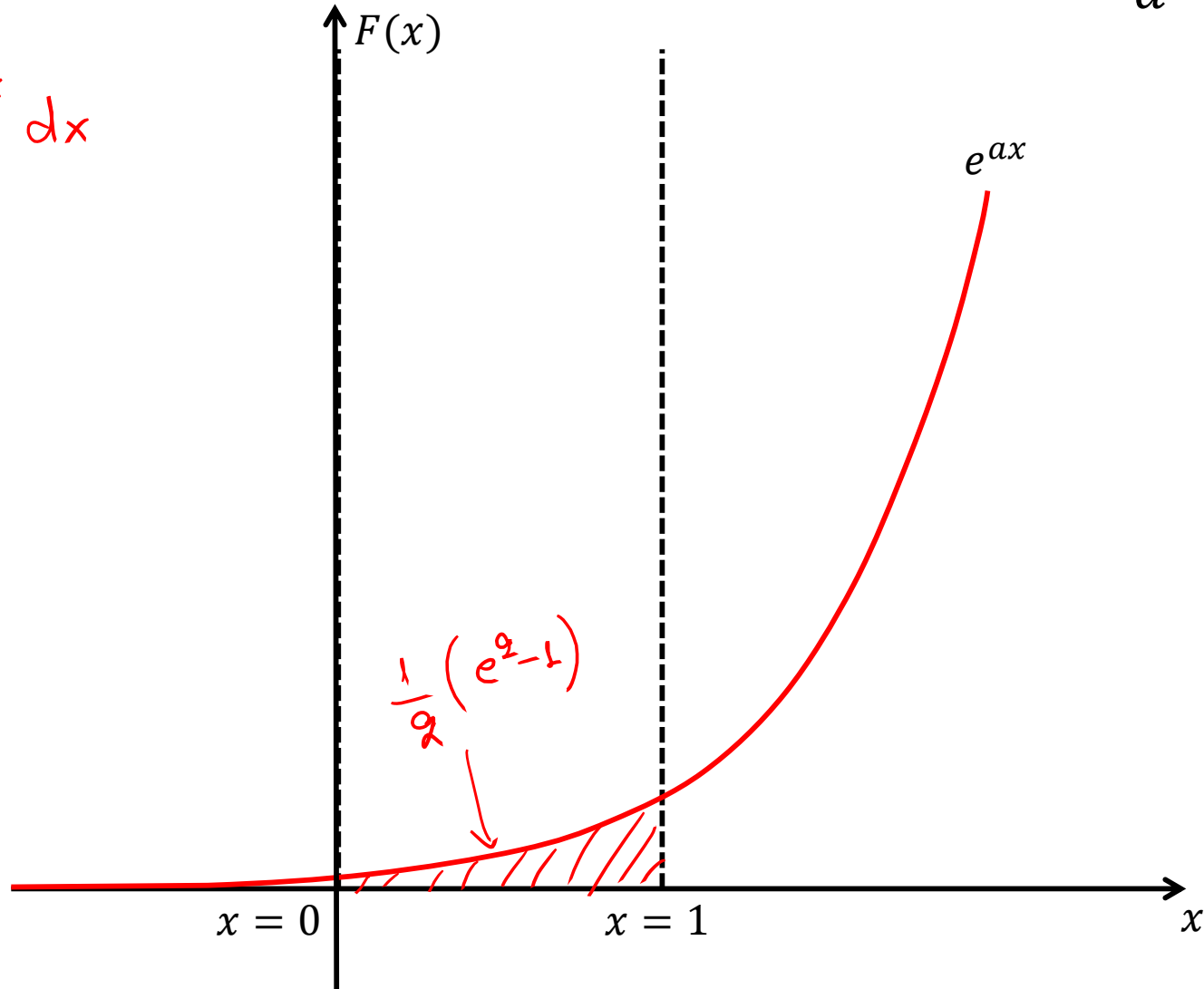
- $\int e^{ax} dx = \int \left(\frac{e^{ax}}{a} \right)' dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c, c \in \mathbb{R}$

- $\int_0^1 e^{ax} dx = \underbrace{\frac{1}{a} e^{ax}}_{f(x)} \Big|_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{e^a}{a} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} (e^a - 1).$

Ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 e^{2x} dx$$

$$a = 2$$





Τέλος Διάλεξης

