

Physics

Reminder...

- ◉ Διαλέξεις
 - ◉ Προαιρετική παρουσία!
- ◉ Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
- ◉ Δεν υπάρχουν απουσίες
- ◉ Υπάρχει σεβασμός στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
- ◉ Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά



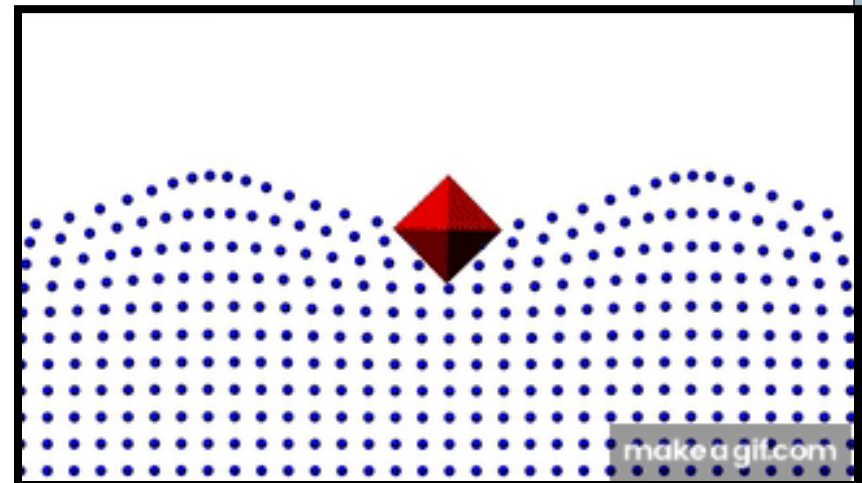
Εικόνα: Ναυαγοσώστες στην Αυστραλία εκπαιδεύονται στην αντιμετώπιση μεγάλων κυμάτων. Τα κύματα που κινούνται στην επιφάνεια του νερού αποτελούν ένα παράδειγμα μηχανικών κυμάτων.

Φυσική για Μηχανικούς

Κύματα

Κύματα

- Ο κόσμος είναι γεμάτος από κύματα!
 - Μηχανικά & Ηλεκτρομαγνητικά
- Στα μηχανικά κύματα, απαιτείται ένα **μέσο διάδοσης**
- Χαρακτηριστικό γνώρισμα μηχανικών κυμάτων
 - Έστω μια σημαδούρα που επιπλέει σε μια λίμνη
 - Αν ρίξουμε κοντά της μια πέτρα, η σημαδούρα θα μετακινηθεί πάνω-κάτω/δεξιά-αριστερά αλλά δε θα μετακινηθεί σε σχέση με το σημείο πτώσης της πέτρας
 - Κυματική κίνηση: μεταφέρεται ενέργεια αλλά όχι ύλη!



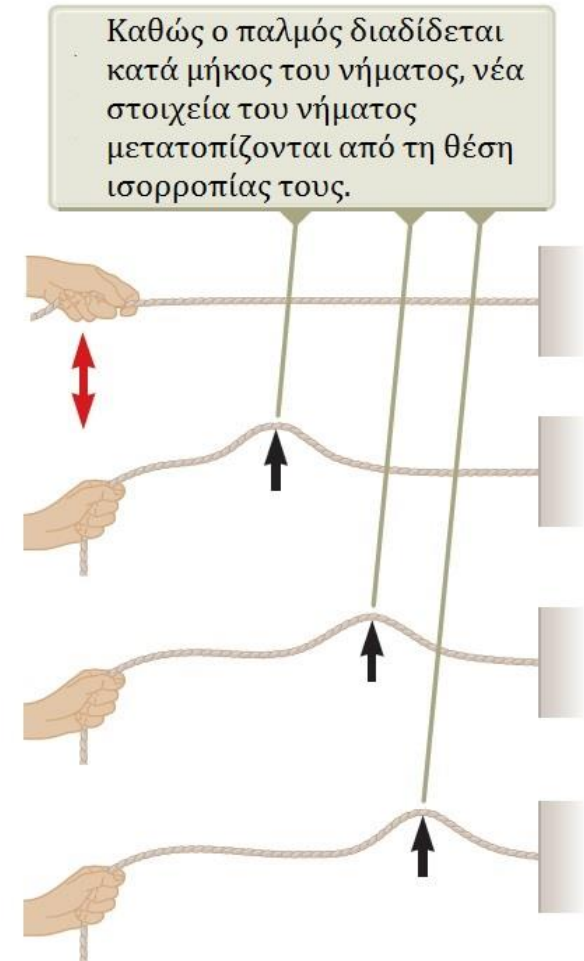
Κύματα

- Όλα τα μηχανικά κύματα προϋποθέτουν

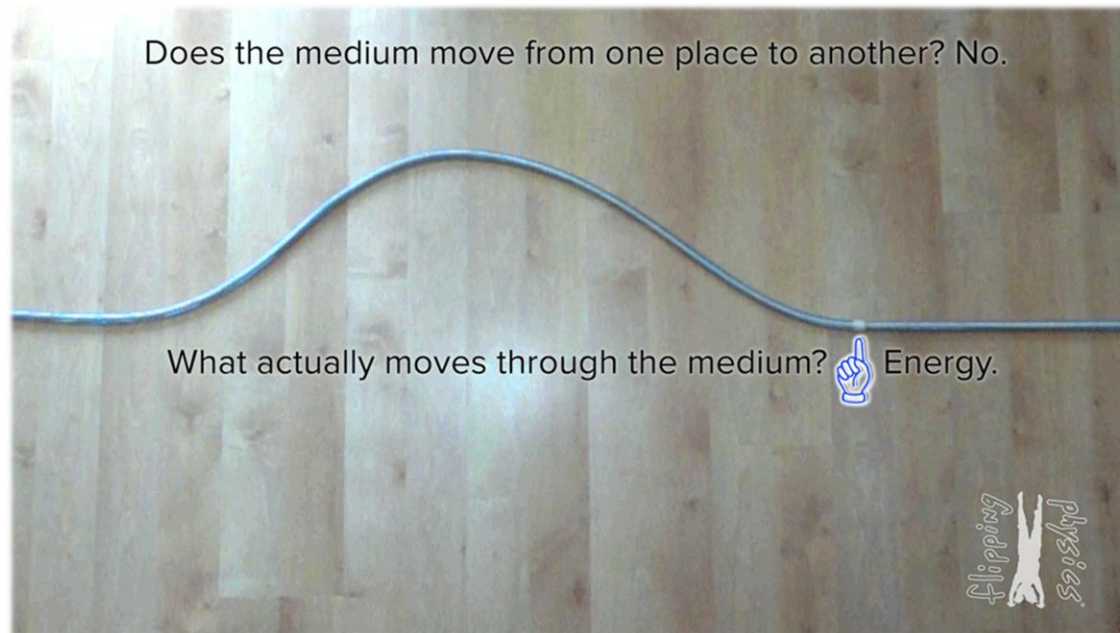
- A) Κάποια πηγή διαταραχής
- B) Ένα μέσο με στοιχεία που μπορούν να διαταραχθούν
- Γ) Κάποιο μηχανισμό με τον οποίο τα στοιχεία του μέσου αλληλεπιδρούν μεταξύ τους

- Κίνηση κύματος

- Παλμός = διαταραχή
- Σχήμα σχεδόν απaráλλαχτο
- Ύψος και ταχύτητα παλμού
 - Ύψος == κατακόρυφη μετατόπιση



Κύματα



Κύματα

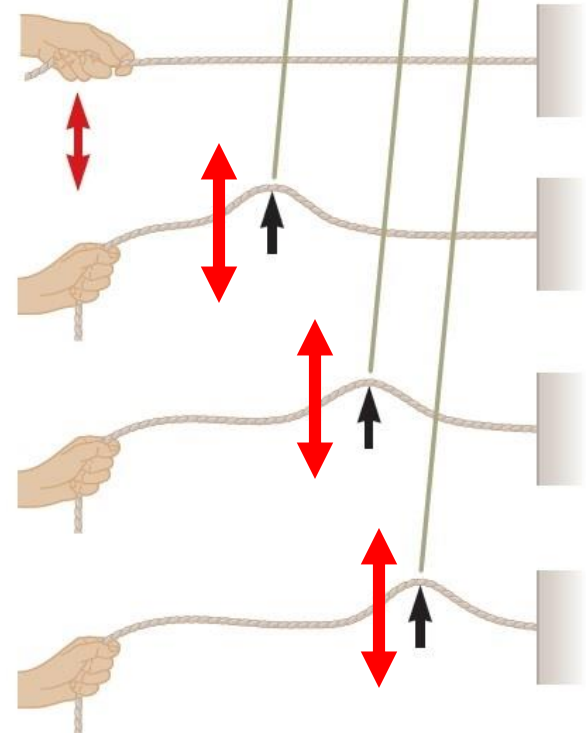
- Προσέξτε την κίνηση των στοιχείων του νήματος
 - Είναι κάθετη προς τη διεύθυνση διάδοσης: **Εγκάρσιο κύμα**
- Προσέξτε την αντίστοιχη του ελατηρίου
 - Είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσης: **Διάμηκες κύμα**

Το χέρι κινείται γρήγορα μπρος-πίσω μια φορά και δημιουργεί έναν διαμήκη παλμό.

Κατά τη διάδοση του παλμού, οι σπείρες μετατοπίζονται παράλληλα προς τη διεύθυνση διάδοσης.

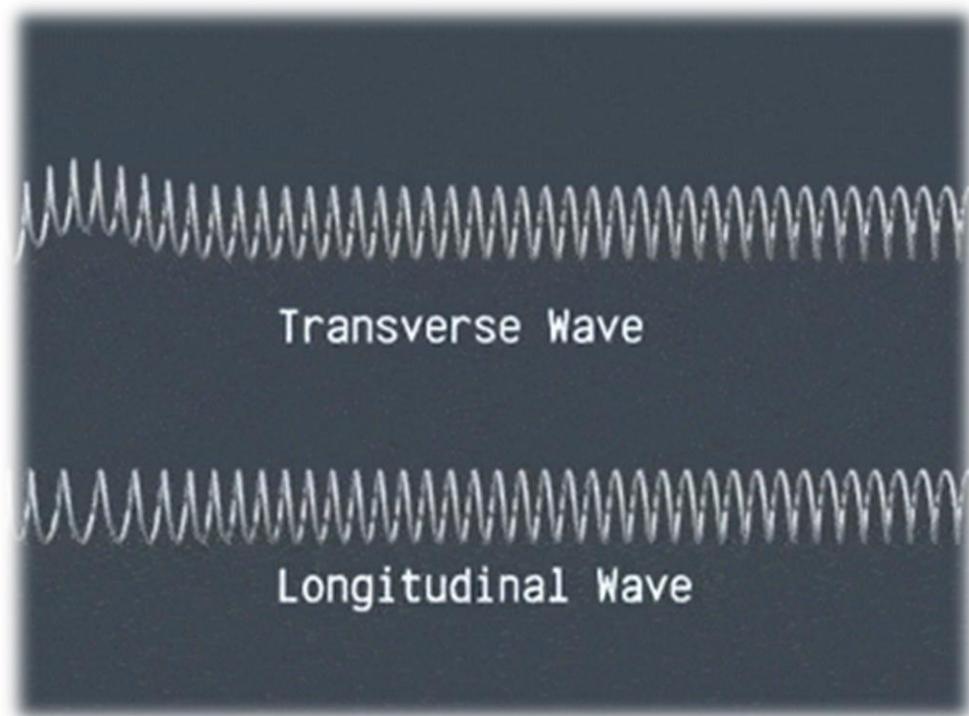


Καθώς ο παλμός διαδίδεται κατά μήκος του νήματος, νέα στοιχεία του νήματος μετατοπίζονται από τη θέση ισορροπίας τους.



Κύματα

Εγκάρσιο κύμα



Διάμηκες κύμα

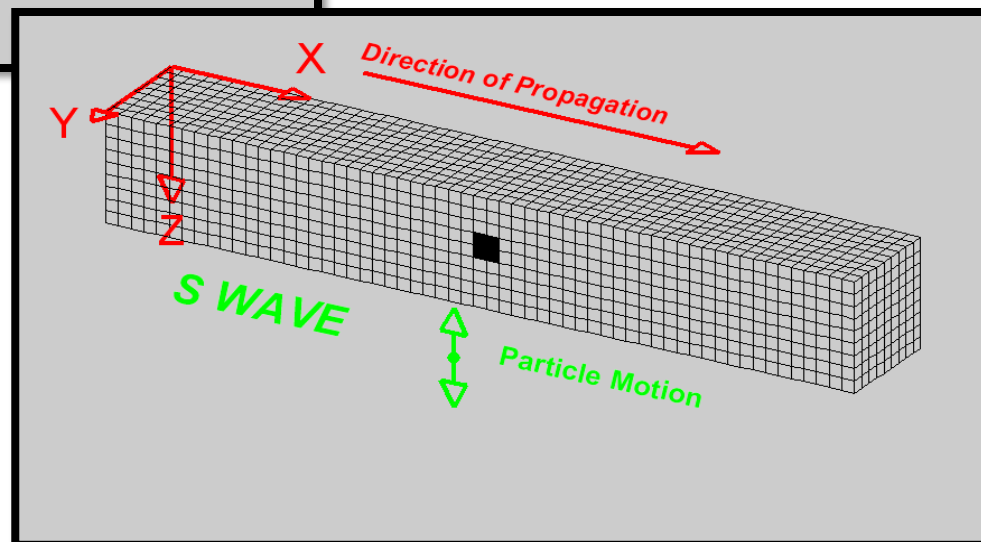
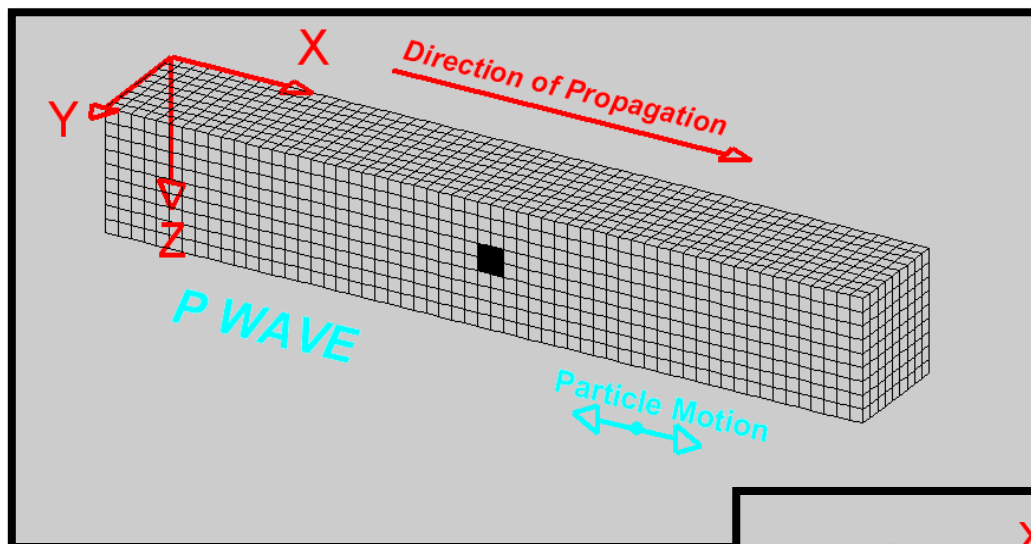
Κύματα

Σεισμικά Κύματα (εκτός ύλης)

- Υπάρχουν τριών ειδών σεισμικά κύματα: **P-κύματα, S-κύματα και Κύματα Επιφάνειας**
- **P-κύματα (Primary/Pressure Waves)**
 - Ταξιδεύουν με τη μεγαλύτερη ταχύτητα απ'όλα
 - Είναι τα πρώτα κύματα που καταγράφονται από έναν σειсмоγράφο
 - Διαφέρουν από τα S-κύματα στον τρόπο διάδοσης (διαμήκη)
- **S-κύματα (Secondary Waves)**
 - Δεν ταξιδεύουν στο νερό ή στον αέρα
 - Πιο καταστροφικά από τα κύματα P λόγω του μεγαλύτερου πλάτους τους
 - Διαφέρουν από τα P-κύματα στον τρόπο διάδοσης (εγκάρσια)

Κύματα

Σεισμικά Κύματα



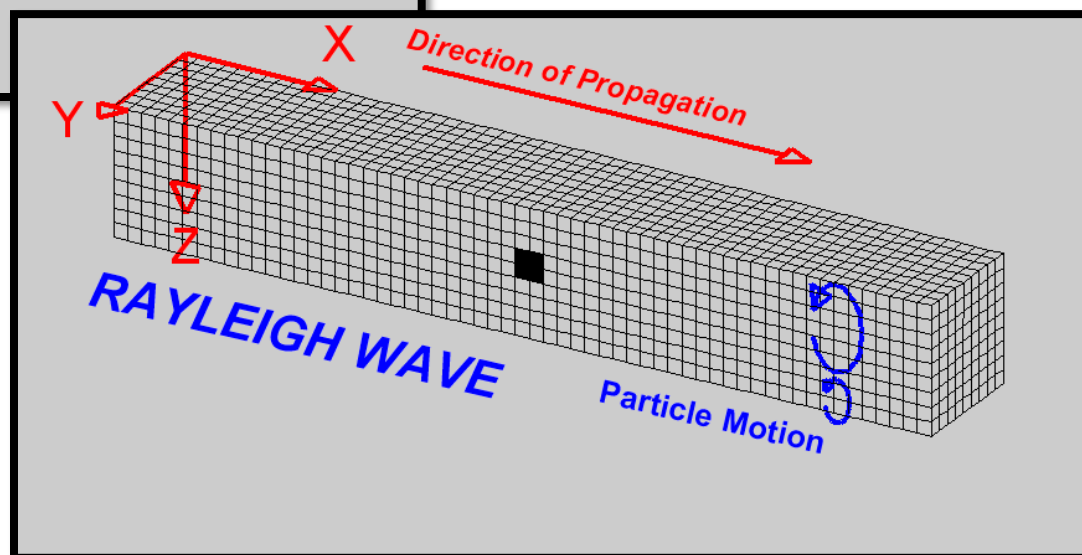
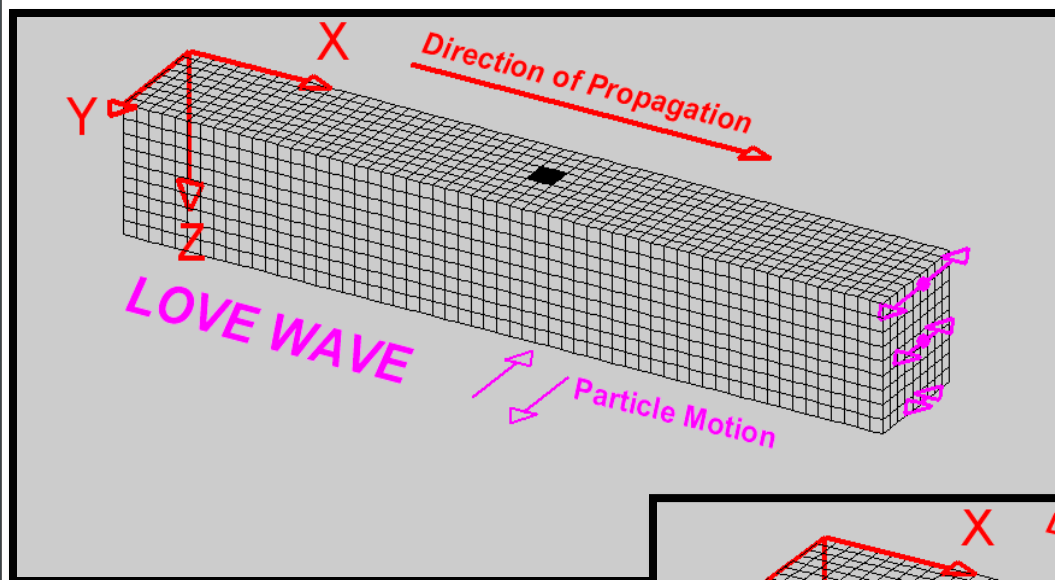
Κύματα

Σεισμικά Κύματα (εκτός ύλης)

- Υπάρχουν τριών ειδών σεισμικά κύματα: **P-κύματα, S-κύματα και Κύματα Επιφάνειας**
- **Κύματα Επιφάνειας**
 - Μοιάζουν με κύματα στο νερό και ταξιδεύουν ακριβώς κάτω από την επιφάνεια της Γης
 - Παράγονται όταν το επίκεντρο είναι σχετικά κοντά στην επιφάνεια
 - Ταξιδεύουν πιο αργά από τα S-κύματα, αλλά μπορεί να έχουν πολύ μεγαλύτερο πλάτος και να είναι το πιο καταστροφικό είδος σεισμικών κυμάτων
- Υπάρχουν δυο ειδών κύματα επιφάνειας
 - **Κύματα Rayleigh**
 - **Κύματα Love**

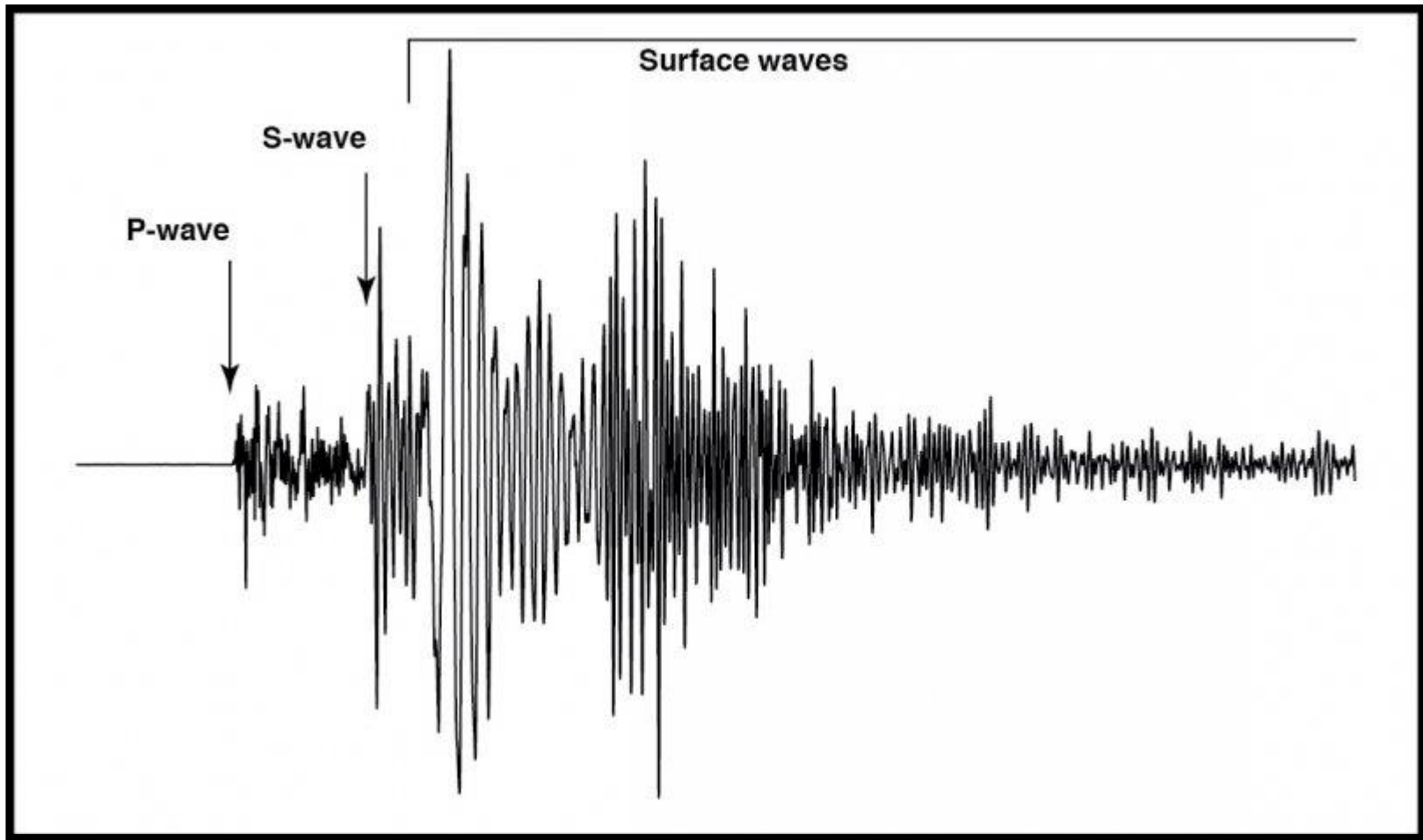
Κύματα

Σεισμικά Κύματα



Κύματα

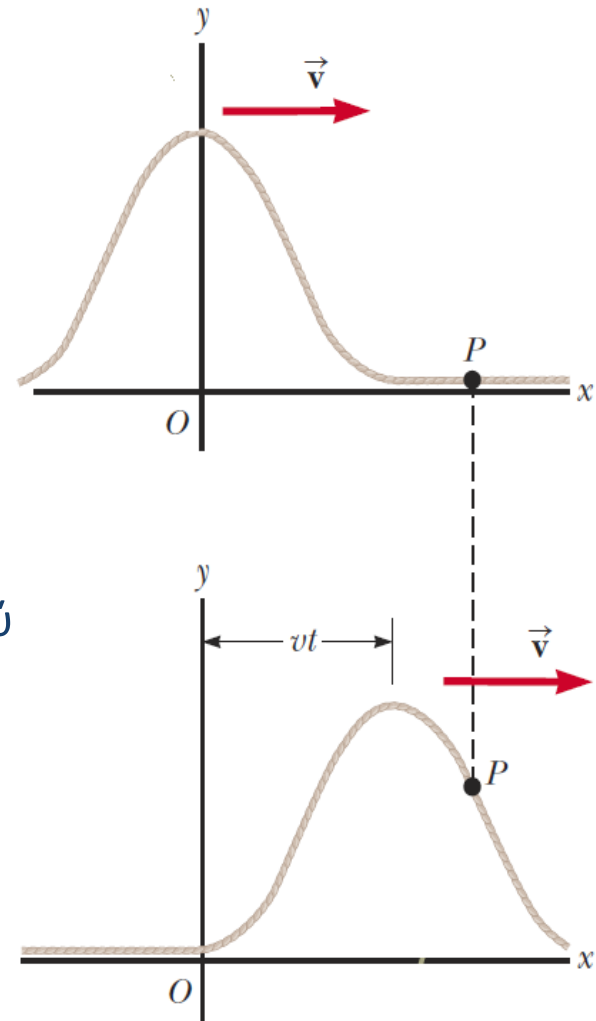
Σεισμικά Κύματα



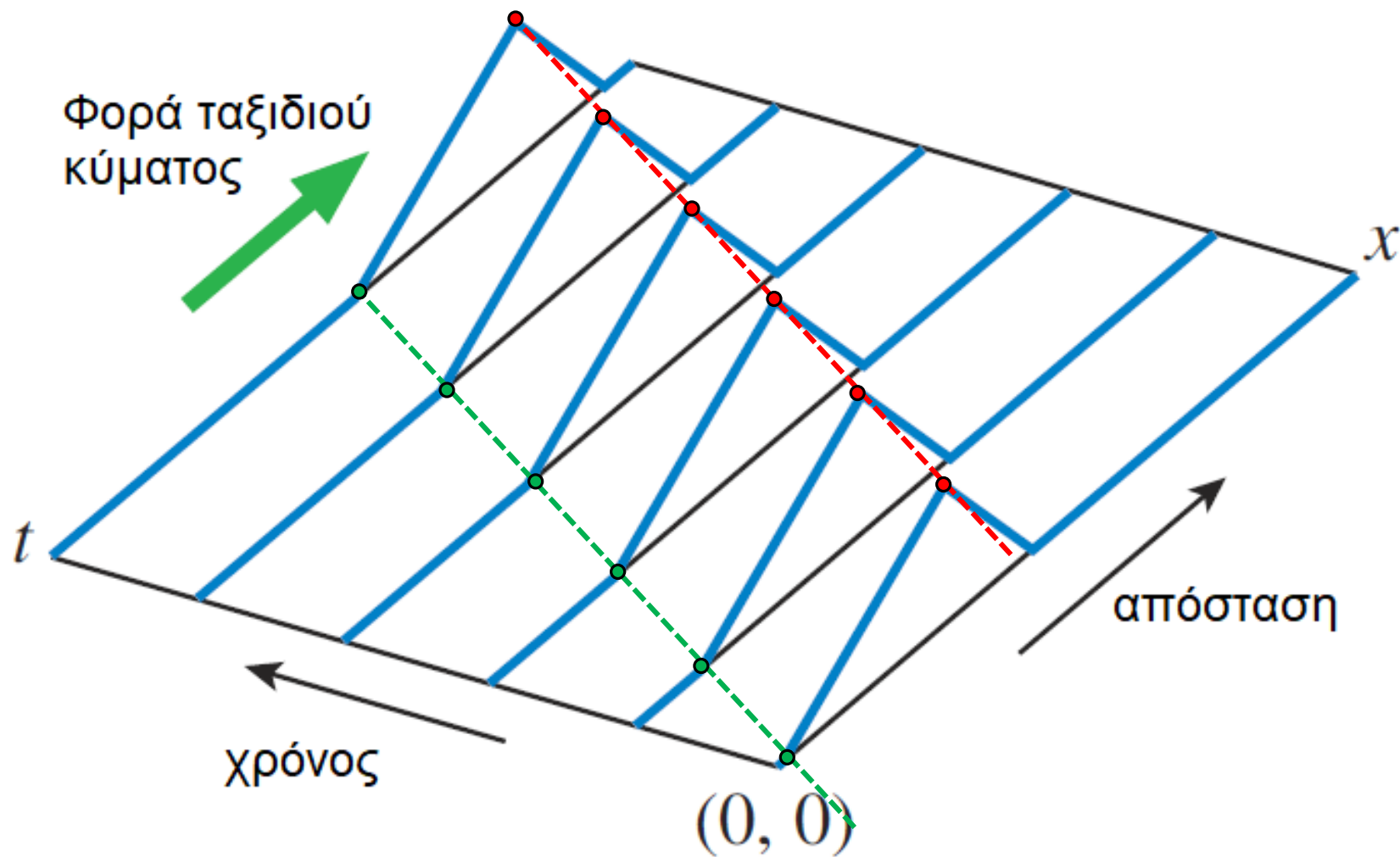
<https://www.exploratorium.edu/faultline/basics/waves.html>

Κύματα

- Κυματοσυνάρτηση – Συνάρτηση Κύματος $y(x, t)$
- Μετατόπιση y του στοιχείου x ενός κύματος τη χρονική στιγμή t
 - $y(x, t) = f(x - ut, t) \longrightarrow$ κίνηση προς τα δεξιά
 - $y(x, t) = f(x + ut, t) \longrightarrow$ κίνηση προς τα αριστερά
 - όπου u η ταχύτητα διάδοσης του παλμού
- Για $t = \text{σταθερό}$, παρατηρούμε μια «**φωτογραφία**» του **όλου** κύματος για μια χρονική στιγμή
- Για $x = \text{σταθερό}$, παρατηρούμε την κίνηση **ενός στοιχείου** του κύματος με την πάροδο του χρόνου



Κύματα



Κύματα

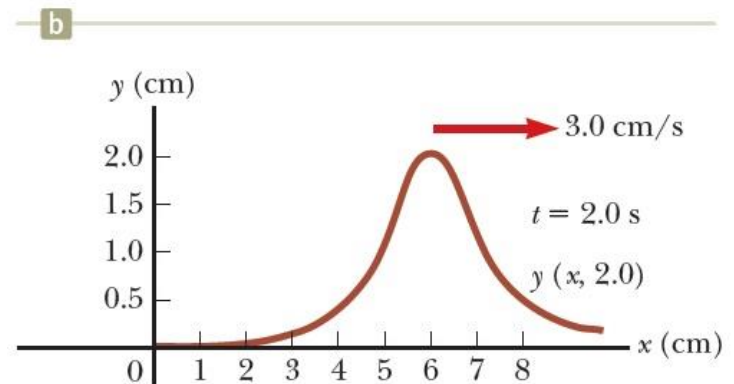
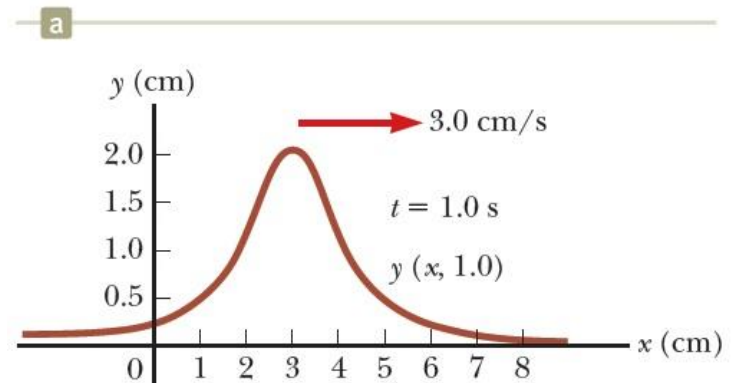
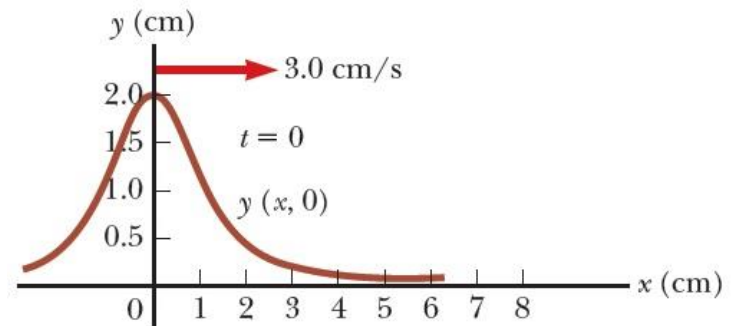
- Παράδειγμα:

- Έστω ένας παλμός που κινείται προς τα δεξιά κατά μήκος του άξονα x και περιγράφεται ως

$$y(x, t) = \frac{2}{(x - 3t)^2 + 1}$$

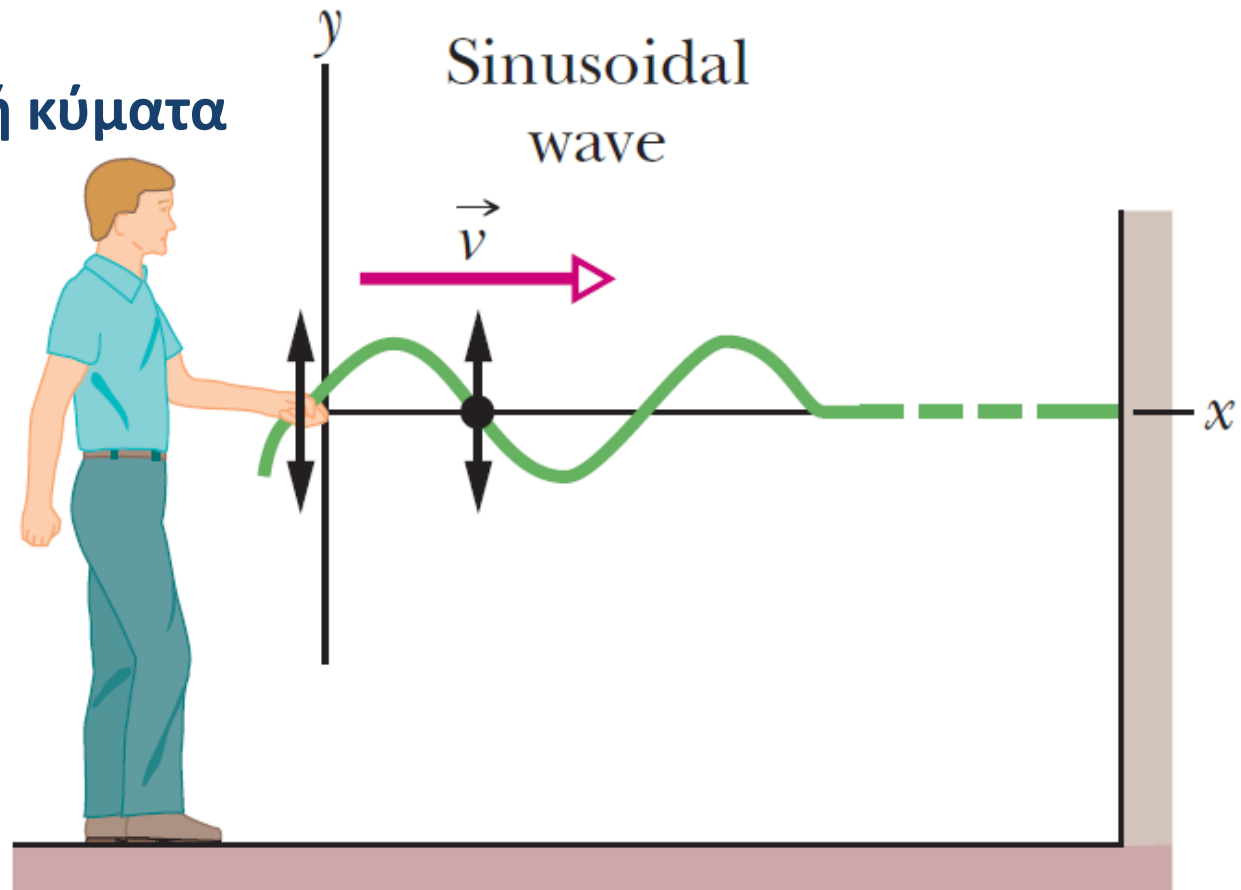
όπου x, y σε εκατοστά και το t σε δευτερόλεπτα.

- Παλμοί για $t = 0, 1, 2$ s



Κύματα

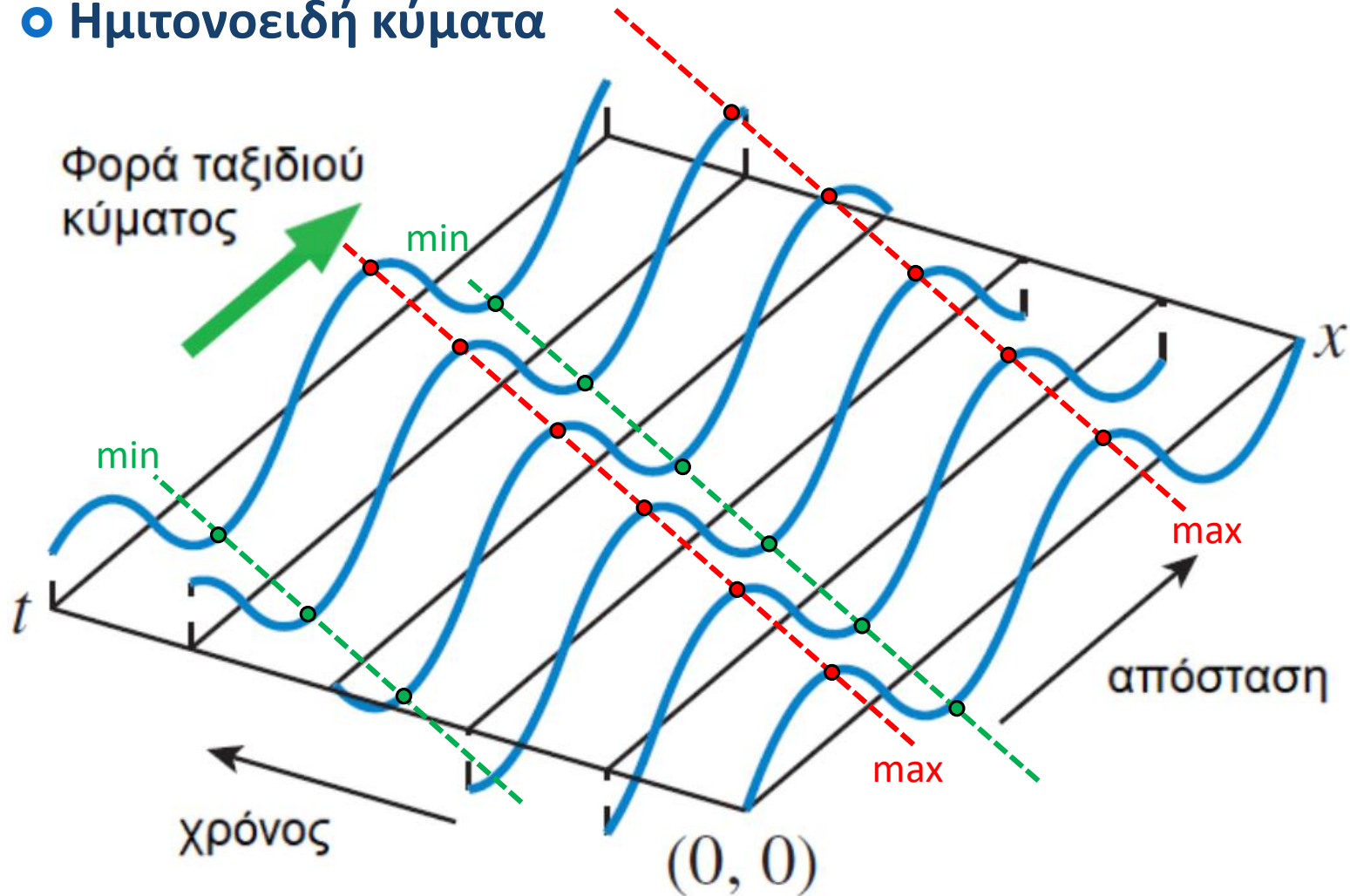
- Ημιτονοειδή κύματα



Όταν ένα ημιτονοειδές κύμα δημιουργείται σε ένα μέσο διάδοσης, κάθε στοιχείο του μέσου διάδοσης εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση!

Κύματα

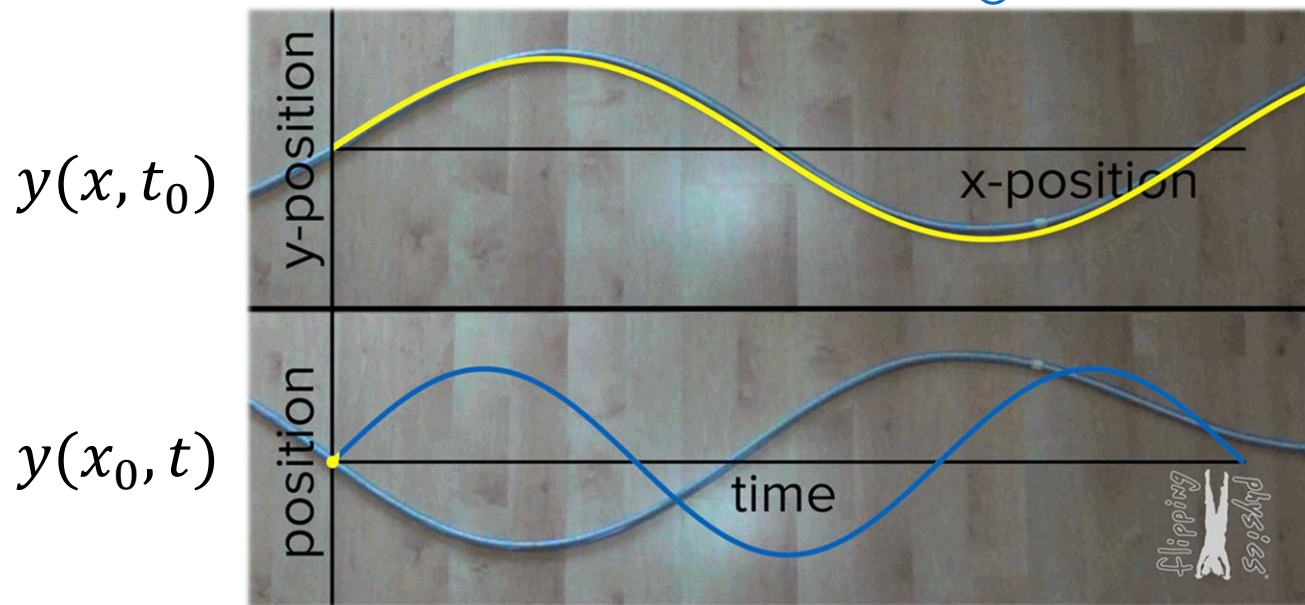
• Ημιτονοειδή κύματα



Κύματα

• Ημιτονοειδή κύματα

t σταθερό:
βλέπουμε όλα τα στοιχεία
για αυτό το t



x σταθερό:
βλέπουμε ένα στοιχείο
για κάθε t

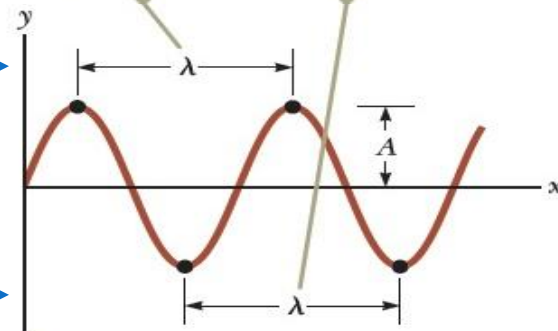
Κύματα

- Ημιτονοειδή κύματα

- Μήκος κύματος λ

- Απόσταση!

Το μήκος κύματος λ ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ διαδοχικών κορυφών ή κοιλάδων.

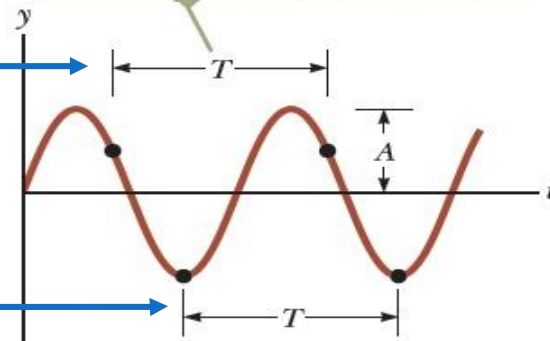


a

- Περίοδος T

- Χρονικό διάστημα!

Η περίοδος T ενός κύματος είναι το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το στοιχείο για να εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση ή το κύμα για να διατρέξει ένα μήκος κύματος.



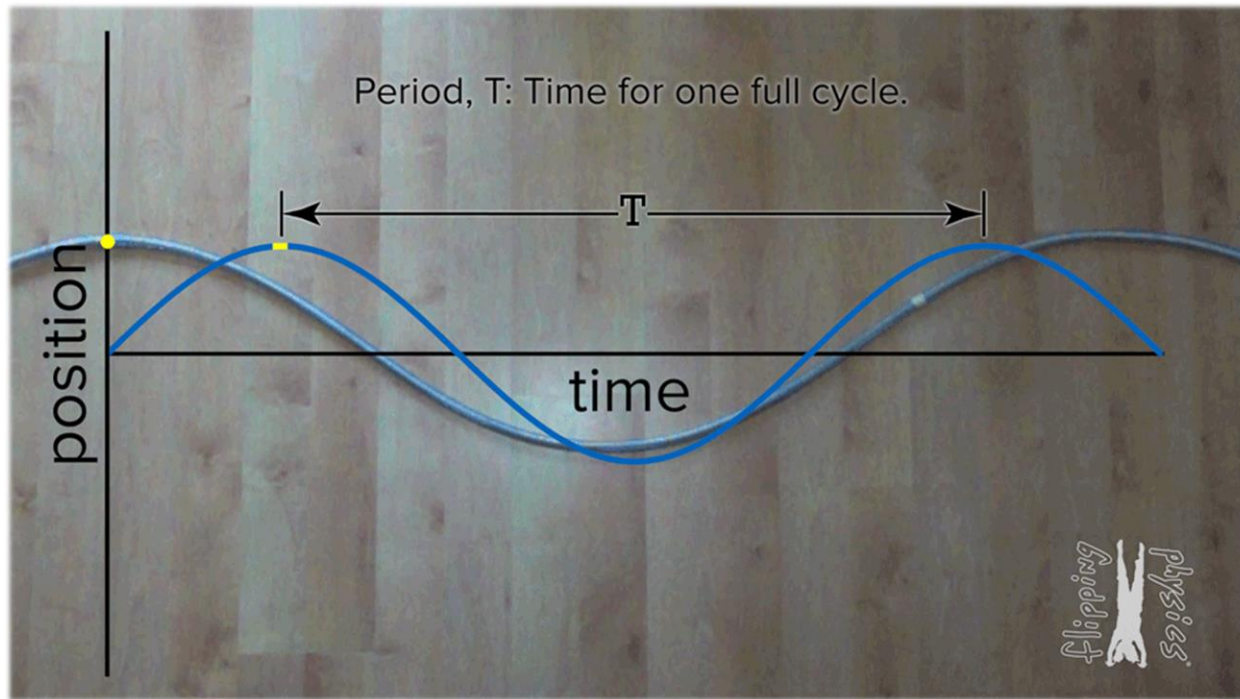
b

- Συχνότητα f

- Αριθμός κορυφών ανά μονάδα χρόνου
- $f = 1/T$
- Μετρείται σε Hertz (Hz)

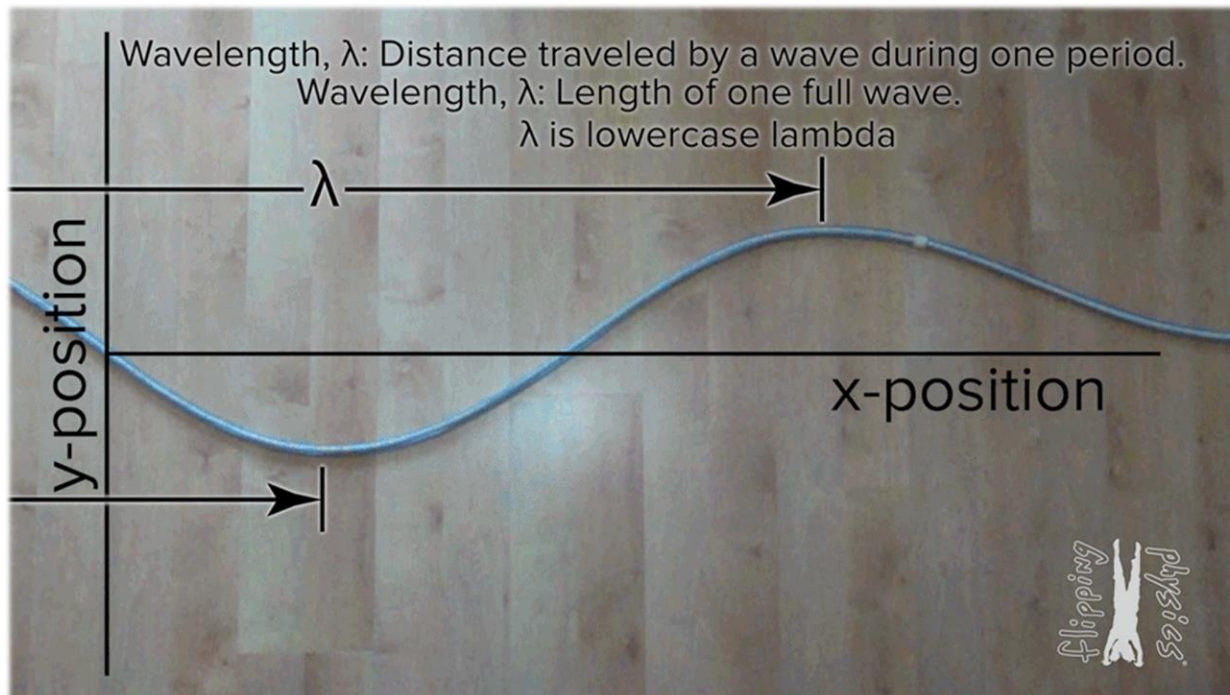
Κύματα

◉ Ημιτονοειδή κύματα



Κύματα

◉ Ημιτονοειδή κύματα



Κύματα

- Χρειαζόμαστε μια 3Δ συνάρτηση για την περιγραφή κύματος
- Κυματοσυνάρτηση

$$y(x, t) = A \sin \left(2\pi \frac{(x \pm ut)}{\lambda} + \varphi \right)$$

- Ταχύτητα διάδοσης

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

- Κυματαριθμός

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

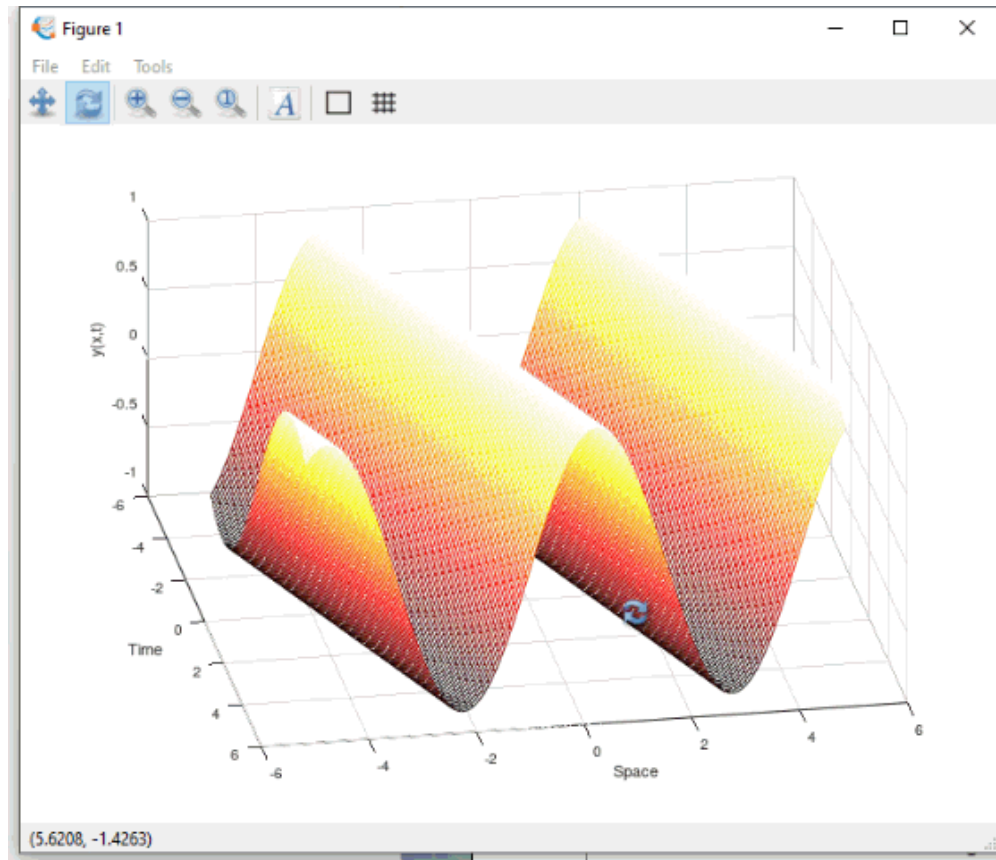
- Γωνιακή συχνότητα

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

- Οπότε

$$y(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$$

Κύματα



Κύματα

- Κυματοσυνάρτηση

$$y(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$$

- Φωτογραφία για κάποια χρονική στιγμή t (έστω $t = 0$)

$$y(x, 0) = A \sin(kx + \varphi)$$

- Περιγράφει όλο το κύμα – κάθε στοιχείο x
- Κόβουμε μια «φέτα» της 3Δ αναπαράστασης για κάποιο t_0

- «Κλειδώνουμε» ένα στοιχείο x (έστω $x = 0$)

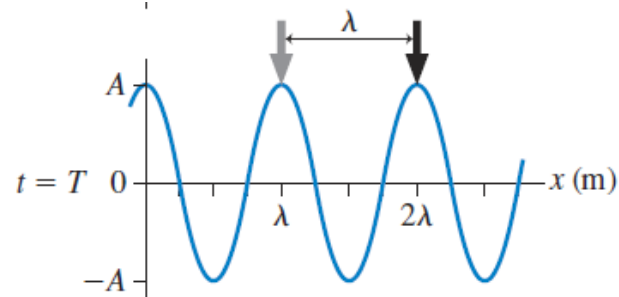
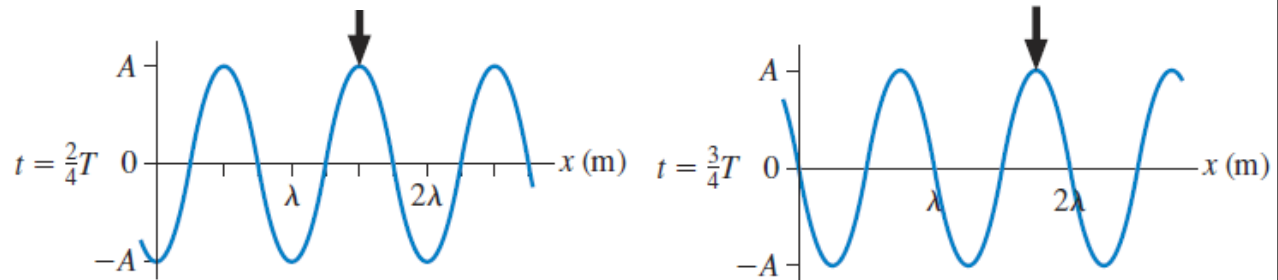
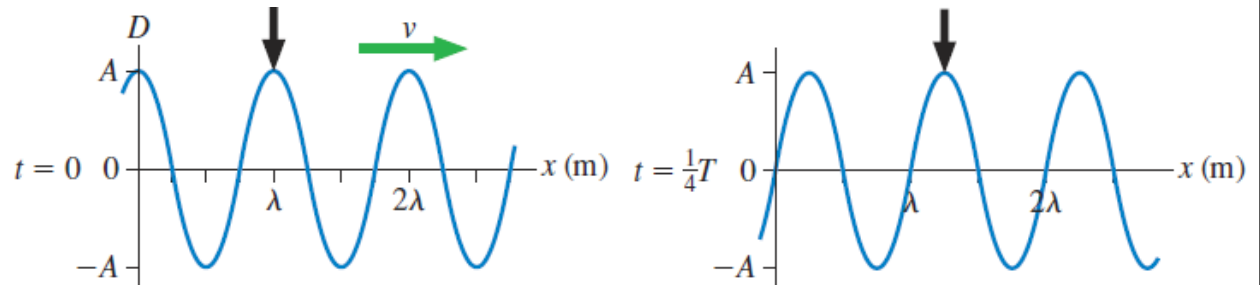
$$y(0, t) = A \sin(\pm \omega t + \varphi)$$

- Περιγράφει ένα στοιχείο του κύματος για κάθε t !
- Απλός αρμονικός ταλαντωτής
- Κόβουμε μια «φέτα» της 3Δ αναπαράστασης για κάποιο x_0

Κύματα

- Ταχύτητα διάδοσης

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$



Το μήκος κύματος αποτελεί «συνέπεια» ενός κύματος συχνότητας f που ταξιδεύει σε μέσο στο οποίο η ταχύτητα του κύματος ισούται με u

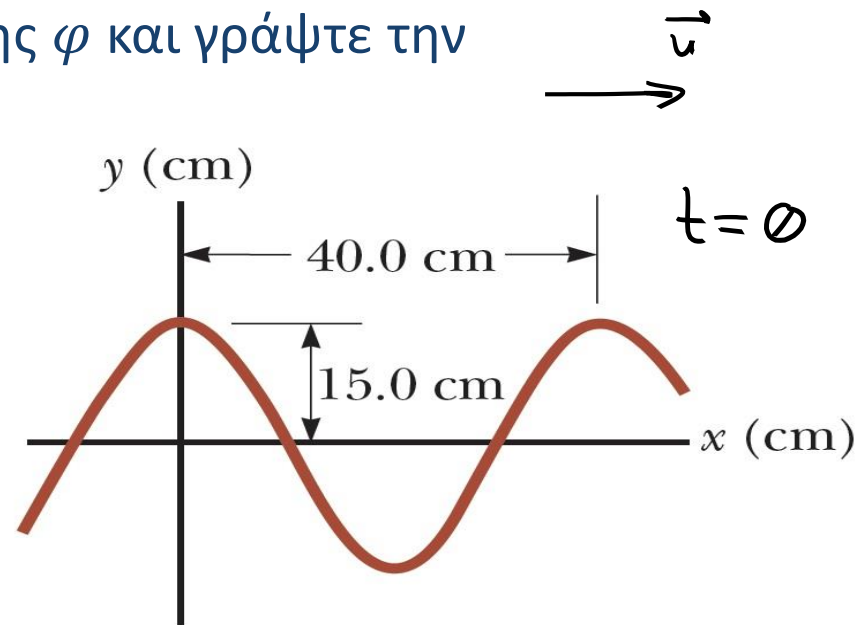
Κύματα

- Παράδειγμα:

- Ημιτονοειδές κύμα που διαδίδεται στην θετική κατεύθυνση του x -άξονα έχει πλάτος 15 cm , μήκος 40 cm , και συχνότητα $f = 8\text{ Hz}$. Η χρονική στιγμή $t = 0$ φαίνεται στο σχήμα.

- A) Βρείτε τα k , T , ω , u .

- B) Βρείτε τη σταθερά φάσης φ και γράψτε την κυματοσυνάρτηση.



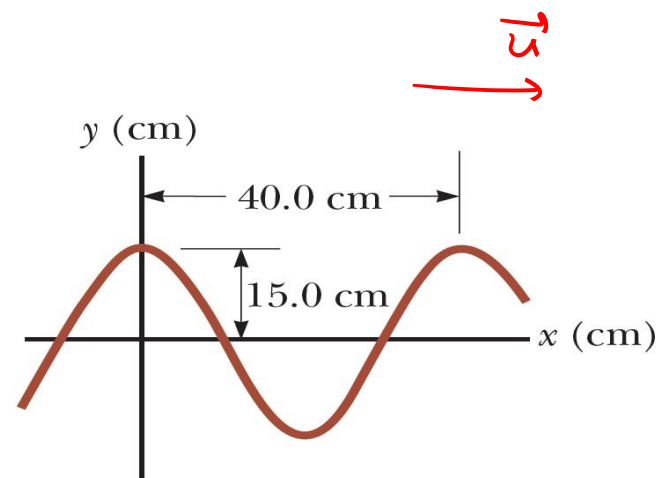
Κύματα

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Ημιτονοειδές κύμα που διαδίδεται στην θετική κατεύθυνση του x -άξονα έχει πλάτος 15 cm, μήκος 40 cm, και συχνότητα 8 Hz. Η χρονική στιγμή $t = 0$ φαίνεται στο σχήμα.
- ◉ Α) Βρείτε τα k , T , ω , u .

Είναι

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$
$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8} = 0.125 \text{ sec}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.125} = 16\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$
$$u = \lambda f = 0.4 \cdot 8 = 3.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Κύματα

$$y(x,t) = A \sin(kx \pm \omega t + \varphi) = 0.15 \sin(5\pi x - 16\pi t + \varphi)$$

• Παράδειγμα – Λύση:

- Ημιτονοειδές κύμα που διαδίδεται στην θετική κατεύθυνση του x-άξονα έχει πλάτος 15 cm, μήκος 40 cm, και συχνότητα 8 Hz. Η χρονική στιγμή $t = 0$ φαίνεται στο σχήμα.
- Β) Βρείτε τη σταθερά φάσης φ και γράψτε την κυματοσυνάρτηση.

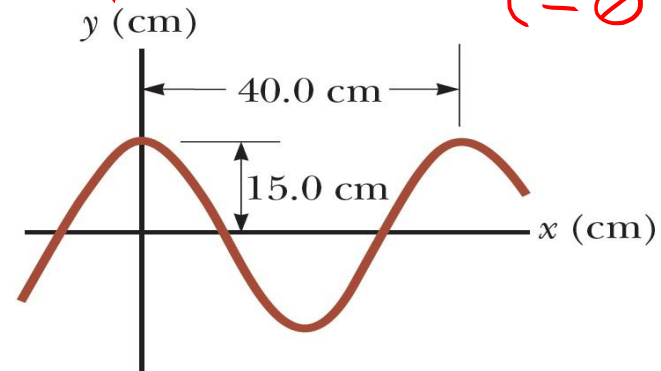
Είναι $y(x,t) = 0.15 \sin(5\pi x - 16\pi t + \varphi)$. Θέτουμε $t=0$:

$$y(x,0) = 0.15 \sin(5\pi x + \varphi). \text{ Για } x=0, y(0,0) = 0.15 \sin(\varphi)$$

$$\Leftrightarrow y(0,0) = 0.15 \sin(\varphi) = 0.15 \Leftrightarrow \sin(\varphi) = 1 \Rightarrow t=0$$

$$\Rightarrow \varphi = +\frac{\pi}{2}, \text{ άρα}$$

$$y(x,t) = 0.15 \sin\left(5\pi x - 16\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$



$$(1) \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$$

Κύματα

$$* 2\pi = k\lambda$$

Παράδειγμα – Λύση:

- Ημιτονοειδές κύμα που διαδίδεται στην θετική κατεύθυνση του x-άξονα έχει πλάτος 15 cm, μήκος 40 cm, και συχνότητα 8 Hz. Η χρονική στιγμή $t = 0$ φαίνεται στο σχήμα.

- Β) Βρείτε τη σταθερά φάσης φ και γράψτε την κυματοσυνάρτηση.

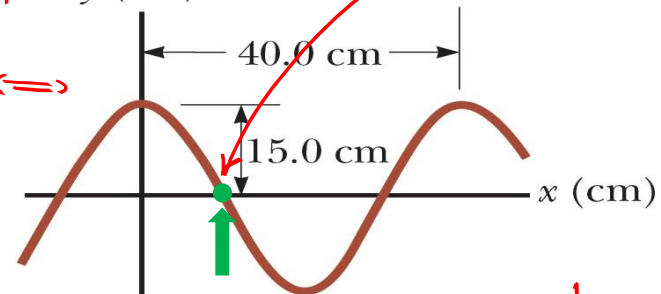
Στην ερώτηση «**αν παίρναμε άλλο σημείο στο σχήμα, θα παίρναμε την ίδια απάντηση?**», η απάντηση είναι «**ναι**», αν και δεν έχουμε πληροφορία για όλα τα υπόλοιπα σημεία. Μπορούμε όμως να πάρουμε για παράδειγμα το «**πράσινο**» σημείο στο σχήμα. Έχει $x = \lambda/4$ και $y = 0$ και έτσι μπορούμε να κάνουμε υπολογισμούς:

$$\text{Για } x = \frac{\lambda}{4}, \text{ έχουμε } y(\frac{\lambda}{4}, 0) = 0.15 \sin(k\frac{\lambda}{4} + \varphi) = 0 \quad (\frac{\lambda}{4}, 0)$$

$$\text{Άρα } y(\frac{\lambda}{4}, 0) \stackrel{*}{=} 0.15 \sin(\frac{2\pi}{4} + \varphi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{2} + \varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Επιλέξαμε το } +\frac{\pi}{2} \text{ γιατί το σχήμα δεξιά είναι συνημιτονοειδές! (1)}$$



Κύματα

• Ημιτονοειδή κύματα

- Κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το κύμα του διπλανού σχήματος:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

- Άρα περιγράφει και την κίνηση κάθε σημείου του, όπως π.χ. το P

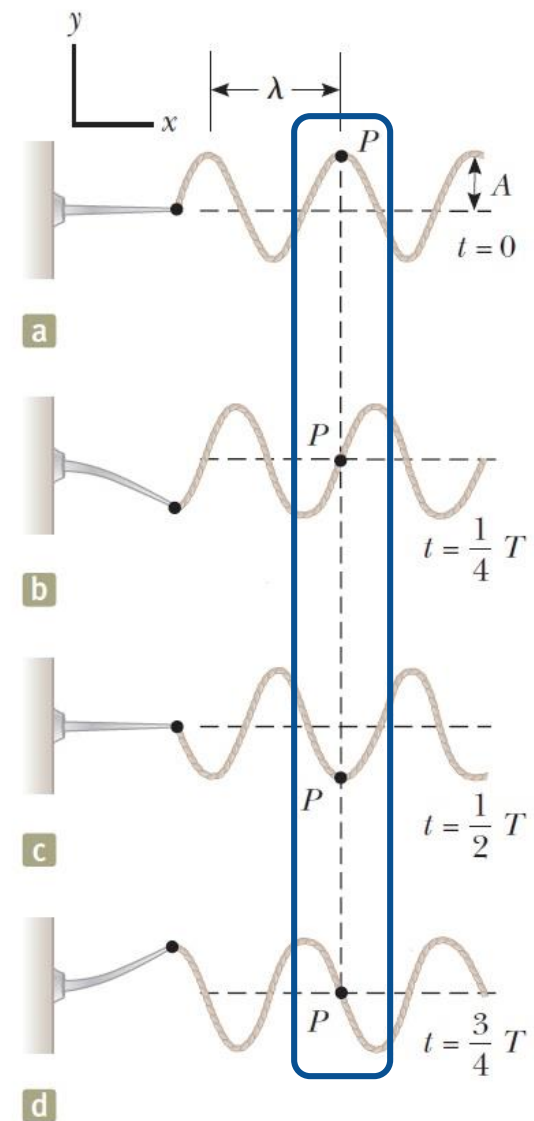
- Εγκάρσια μετατόπιση του στοιχείου P από τη θέση ισορροπίας

$$y(t) = y(x_P, t) = A \sin(kx_p - \omega t)$$

- Εγκάρσια ταχύτητα και επιτάχυνση του στοιχείου P

$$v_y(t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx_P - \omega t)$$

$$a_y(t) = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 A \sin(kx_P - \omega t)$$



Κύματα

- Ταχύτητα Διάδοσης u κύματος σε τεντωμένο νήμα

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

όπου T η τάση του νήματος, και μ η μάζα του νήματος ανά μονάδα μήκους

- Μάζα ανά μονάδα μήκους

$$\mu = \frac{m}{l}$$

- Λέγεται και γραμμική πυκνότητα μάζας

Κύματα

• Παράδειγμα:

Κύμα διαδίδεται σε νήμα και περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$y(x, t) = 0.02 \sin(12.57x - 638t)$$

Η γραμμική πυκνότητα μάζας του νήματος είναι $\mu = 0.005 \text{ kg/m}$.

A) Βρείτε την τάση του νήματος

B) Βρείτε τη μέγιστη μετατόπιση ενός στοιχείου του νήματος

Γ) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα ενός στοιχείου του νήματος

A) $\equiv$ έραφε ότι $u = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow u^2 = \frac{T}{\mu} \Rightarrow T = u^2 \mu \quad (1)$

$$\left. \begin{array}{l} u = \lambda f \\ k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \omega = 2\pi f \end{array} \right\} \Rightarrow u = \frac{\cancel{2\pi}}{k} \cdot \frac{\omega}{\cancel{2\pi}} = \frac{\omega}{k} = \frac{638}{12.57} \approx 50.755 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (2)$$

$$(1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} T = (50.755)^2 \cdot 0.005 \approx 12.88 \text{ N}$$

Κύματα

ο Παράδειγμα – Λύση:

$$y(x, t) = 0.02 \sin(12.57x - 638t)$$

$$\mu = 0.005 \text{ kg/m.}$$

A) Βρείτε την τάση του νήματος

B) Βρείτε τη μέγιστη μετατόπιση ενός στοιχείου του νήματος

Γ) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα ενός στοιχείου του νήματος

B) Είναι $y_{\max} = A = 0.02 \text{ m}$ για κάθε στοιχείο
του νήματος!

Γ) Είναι $u_{\max} = \omega A = 638 \cdot 0.02 = 12.76 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
για κάθε στοιχείο του νήματος!

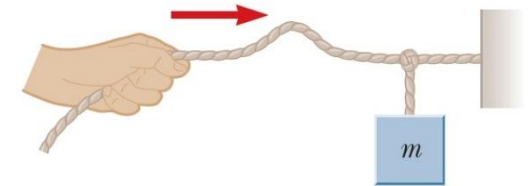
Κύματα

• Μεταφορά ενέργειας σε νήμα

- Είπαμε (και είδαμε) ότι στα μηχανικά κύματα μεταφέρεται ενέργεια
- Που πηγαίνει αυτή η ενέργεια;

• Παράδειγμα:

- Έστω το {σώμα + Γη} ως μη απομονωμένο σύστημα
- Ενέργεια λόγω έργου (χέρι)
 - Εξωτερική στο σύστημα
- Διάδοση κατά μήκος του νήματος
- Ανύψωση σώματος
 - Μεταβολή δυναμικής ενέργειας συστήματος Γη-σώμα



a

Ο παλμός ανυψώνει το σώμα. Αυξάνεται έτσι η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος σώμα-Γη.



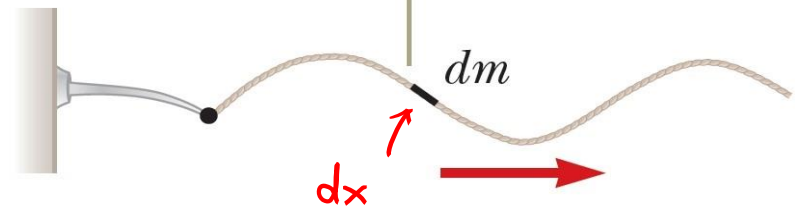
b

Κύματα

• Μεταφορά ενέργειας σε νήμα

- Ας θεωρήσουμε ένα απειροστά μικρό τμήμα του νήματος μήκους dx και μάζας dm
- Εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση (y -άξονα)!
- Άρα έχει **κινητική και δυναμική** ενέργεια!

Κάθε απειροστά μικρό (στοιχειώδες) τμήμα του νήματος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, και άρα έχει δυναμική και κινητική ενέργεια.



Κύματα

$$\mu = \frac{m}{l} = \frac{dm}{dx}$$

- Μεταφορά ενέργειας σε νήμα

- Κινητική ενέργεια για ένα στοιχείο νήματος

$$dK = \frac{1}{2}(dm)v_y^2 = \frac{1}{2}(\mu dx)v_y^2 \quad (t=0) \quad = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2(kx)dx$$

- Ολοκληρώνοντας για ένα μήκος κύματος

$$K_\lambda = \int dK = \int_0^\lambda \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2(kx)dx = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

- Δυναμική ενέργεια (με όμοιο τρόπο)

$$U_\lambda = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

Κύματα

- **Μεταφορά ενέργειας σε νήμα**

- Η συνολική ενέργεια σε ένα μήκος κύματος ισούται με το άθροισμα κινητικής και δυναμικής

$$E_{mech} = K_{\lambda} + U_{\lambda} = E_{\lambda} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \lambda$$

- **Ρυθμός μεταφοράς ενέργειας (= Μέση Ισχύς)**

$$P = \frac{E_{μηχ.κυμ.}}{\Delta t} = \frac{E_{\lambda}}{T} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \frac{\lambda}{T} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 u$$

με u την ταχύτητα διάδοσης του κύματος



Τέλος Διάλεξης
