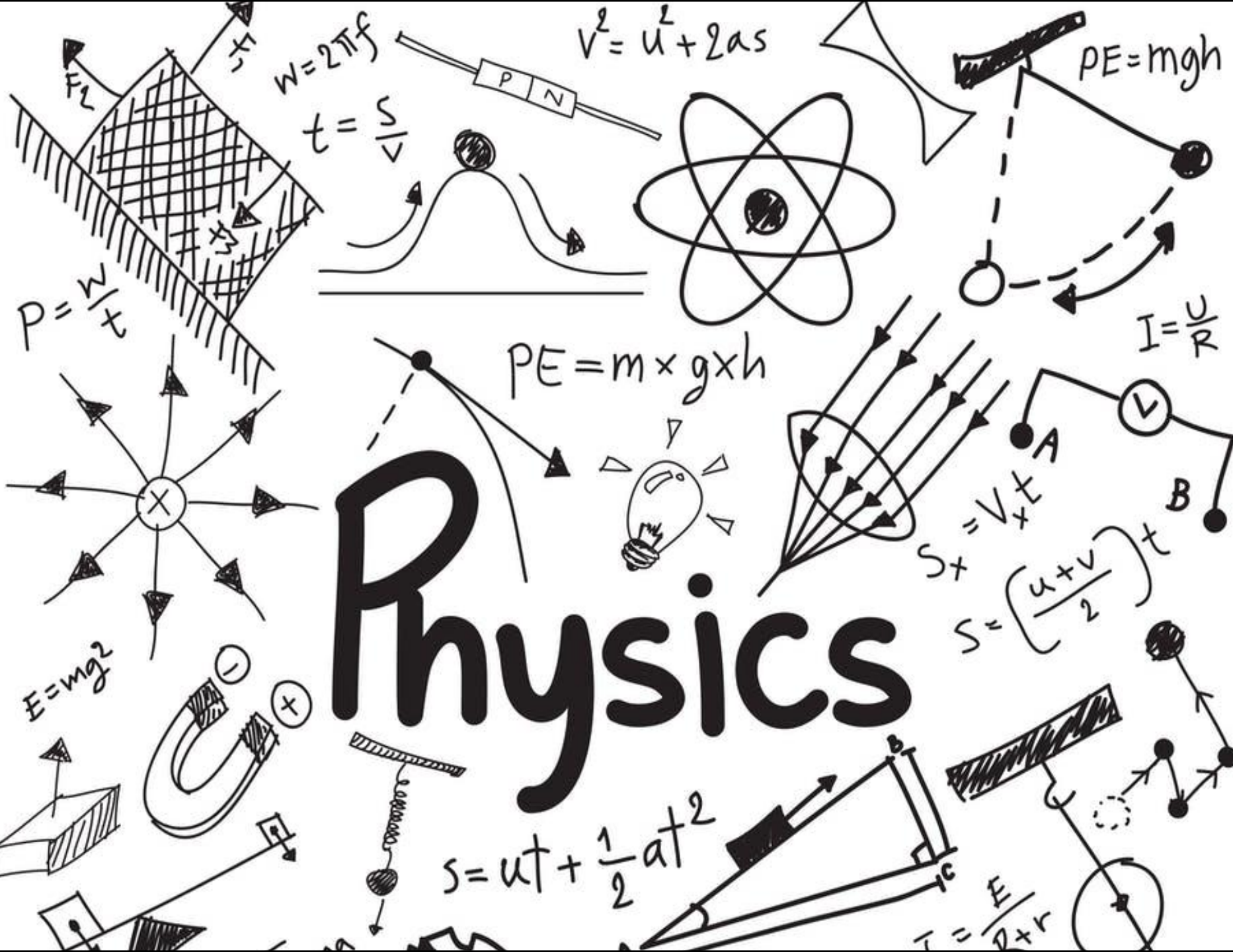


Physics



Reminder...

- ◉ Διαλέξεις
 - ◉ Προαιρετική παρουσία!
 - ◉ Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
 - ◉ Δεν υπάρχουν απουσίες
 - ◉ Υπάρχει σεβασμός στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
 - ◉ Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά



Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

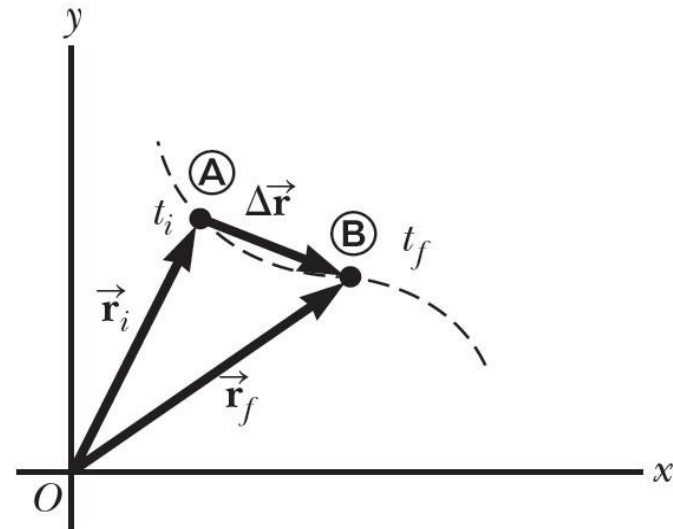
Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις (review...)

- Διάνυσμα θέσης $\vec{r}$
- Μετατόπιση $\Delta\vec{r}$
 - Διαφορά μεταξύ τελικής κι αρχικής θέσης
 - $\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_f - \vec{r}_i$
- Μέση Ταχύτητα
 - $\vec{v}_{avg} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$
- Στιγμιαία ταχύτητα
 - $\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$



- Μέση Επιτάχυνση
 - $\vec{a}_{avg} \equiv \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$
- Στιγμιαία Επιτάχυνση
 - $\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις (review...)

- Εξισώσεις κίνησης σε δυο διαστάσεις με σταθερή επιτάχυνση

- $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

$$u_{y_f} = u_{y_i} + a_y t$$

- $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$

$$x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

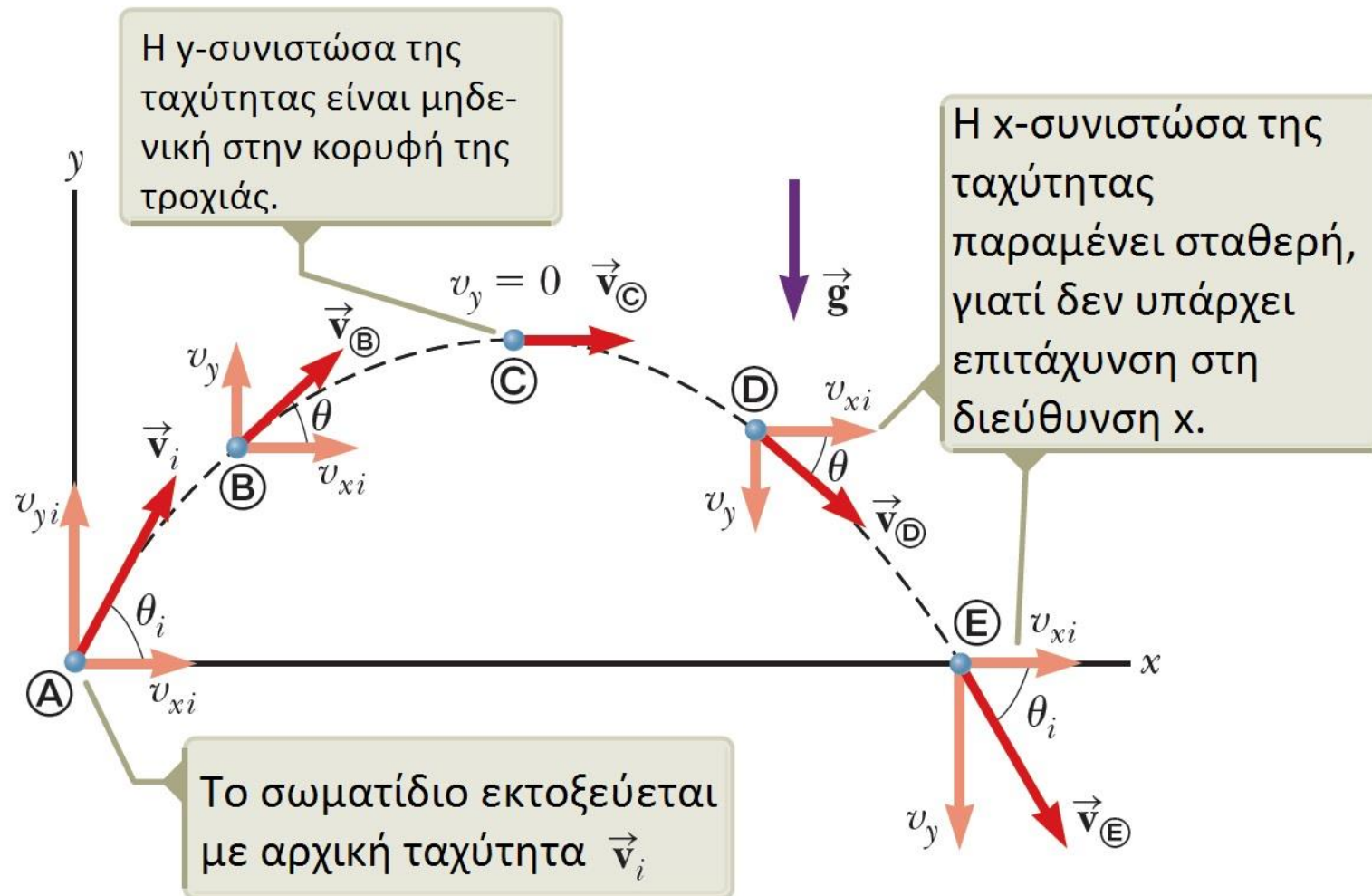
$$y_f = y_i + u_{y_i} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

Ισχύουν και όλες οι υπόλοιπες εξισώσεις που περιγράφουν την μονοδιάστατη κίνηση υπό σταθερή (ή μηδενική) επιτάχυνση!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις (review...)

- Μια κλασική κίνηση σε δυο διαστάσεις είναι η **βολή**.
- Το μόνο που αλλάζει είναι
 - A. Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$, που θεωρείται σταθερή και κάθετη (με φορά προς τα κάτω) στον άξονα x .
 - B. Επίσης, η **αντίσταση του αέρα** θεωρείται αμελητέα.
- Υπό αυτές τις συνθήκες, η ανάλυση τέτοιων προβλημάτων είναι απλή...

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις (review...)



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις (review...)

- Ας γράψουμε τις δυο διανυσματικές εξισώσεις **βολής**

- $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{g}t$

- $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

- Ίδιες με αυτές της Διαφ. 6 (3 slides πριν)!
- Προσοχή! Είναι διανυσματικές εξισώσεις!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις (review...)

- Ας αναλύσουμε την κίνηση

- Αρχική θέση

$$u_{xi} = u_i \cos(\theta_i)$$

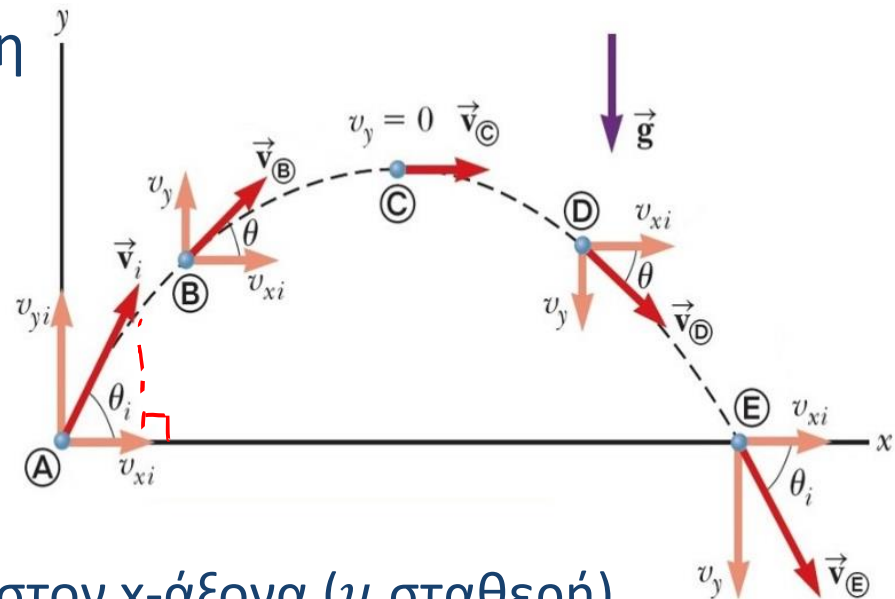
$$u_{yi} = u_i \sin(\theta_i)$$

- Δυο συνιστώσες:

- A) Μηδενική επιτάχυνση στον x-άξονα (u σταθερή)

- B) Σταθερή επιτάχυνση στον y-άξονα
(g – βαρυτική επιτάχυνση)

- Γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης όπως τις ξέρουμε, θεωρώντας αυθαίρετα μια θετική φορά σε κάθε άξονα (συνήθως πάνω και δεξιά)



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Αλγεβρικές εξισώσεις

- 1) $x_f = x_i + u_{xi}t$

- 2) $u_{yf} = u_{yi} - gt$

$$u_{y,avg} = \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})$$

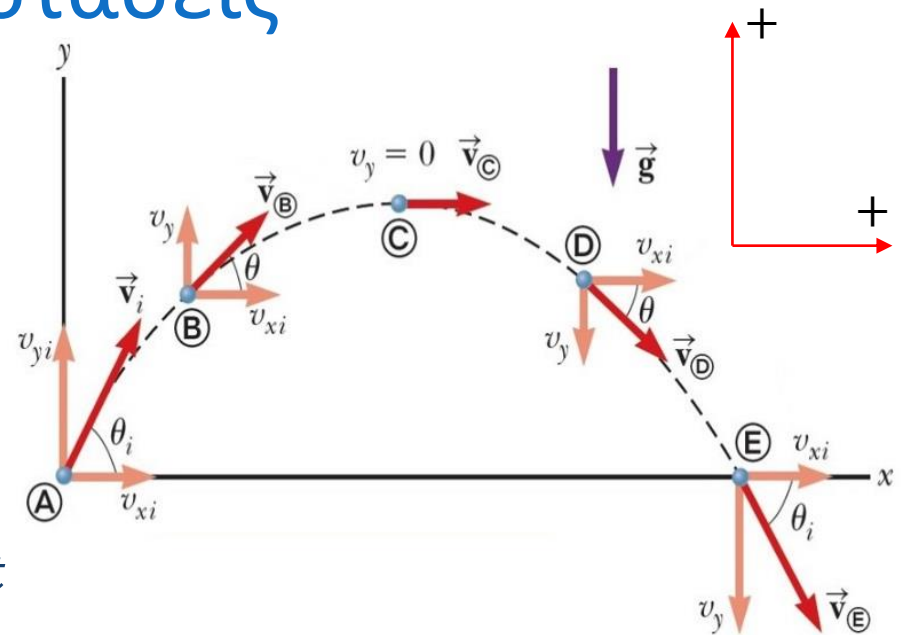
$$y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$$

$$y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$$

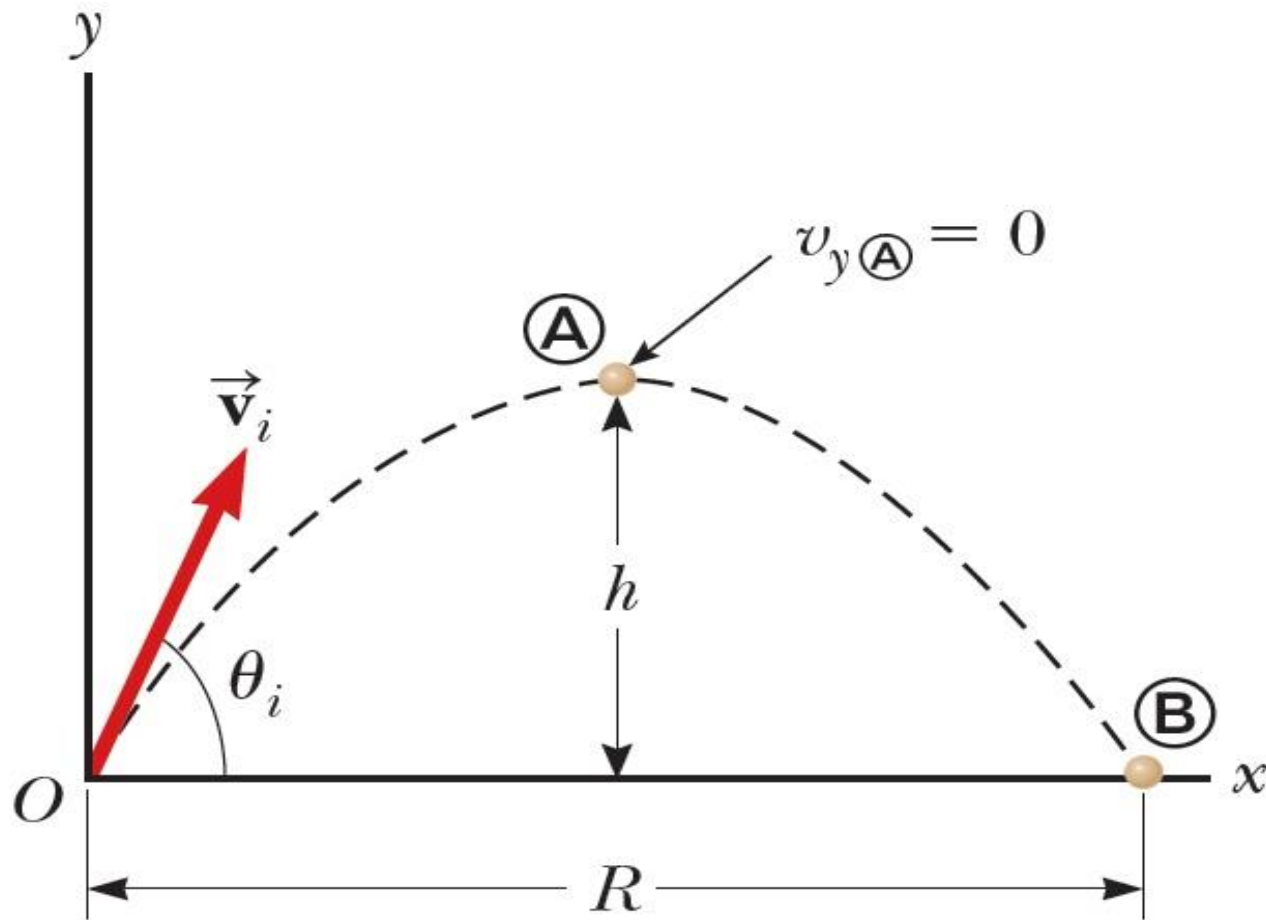
με $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

- Εντελώς ανεξάρτητες μεταξύ τους κινήσεις!



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Εύρος (ή Βεληνεκές) R και Μέγιστο Ύψος h βολής



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας βρούμε τα h, R συναρτήσει των δεδομένων:

Διαδρομή ΟΑ:

$$y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2 = h$$

$$\begin{aligned} h &= y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= 0 + u_i \sin(\theta_i)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Επίσης,

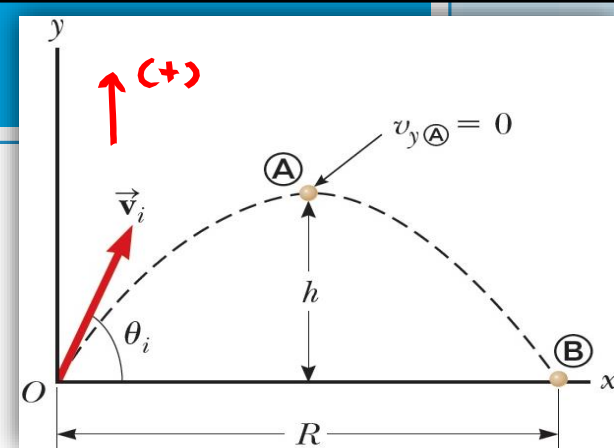
$$u_{y_f} = u_{y_i} - gt \Leftrightarrow t = \frac{u_{y_i}}{g}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις

$$h = u_i \sin(\theta_i) \left(\frac{u_{y_i}}{g} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{u_{y_i}}{g} \right)^2$$

κι αφού $u_{y_i} = u_i \sin(\theta_i)$ έχουμε

$$h = \frac{u_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g}$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας βρούμε τα h, R συναρτήσει των δεδομένων:

Διαδρομή OB:

Στον x-άξονα: $x_f = x_i + u_x t \Rightarrow R = x_i + u_x t = u_x t = u_i \cos \theta_i t$

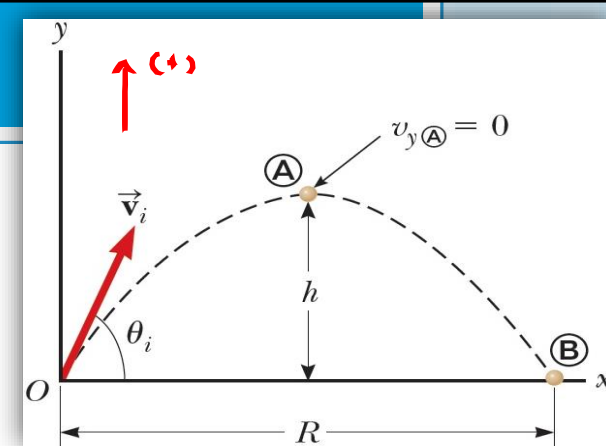
Στον y-άξονα: $y_f = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 0 = 0 + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$
 $\frac{1}{2} g t^2 = u_{y_i} t \Rightarrow \frac{1}{2} g t = u_{y_i} = u_i \sin \theta_i \Rightarrow t = \frac{2u_i \sin \theta_i}{g}$

Από τις παραπάνω σχέσεις,

$$R = u_i \cos(\theta_i) \frac{2u_i \sin \theta_i}{g} = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g}$$

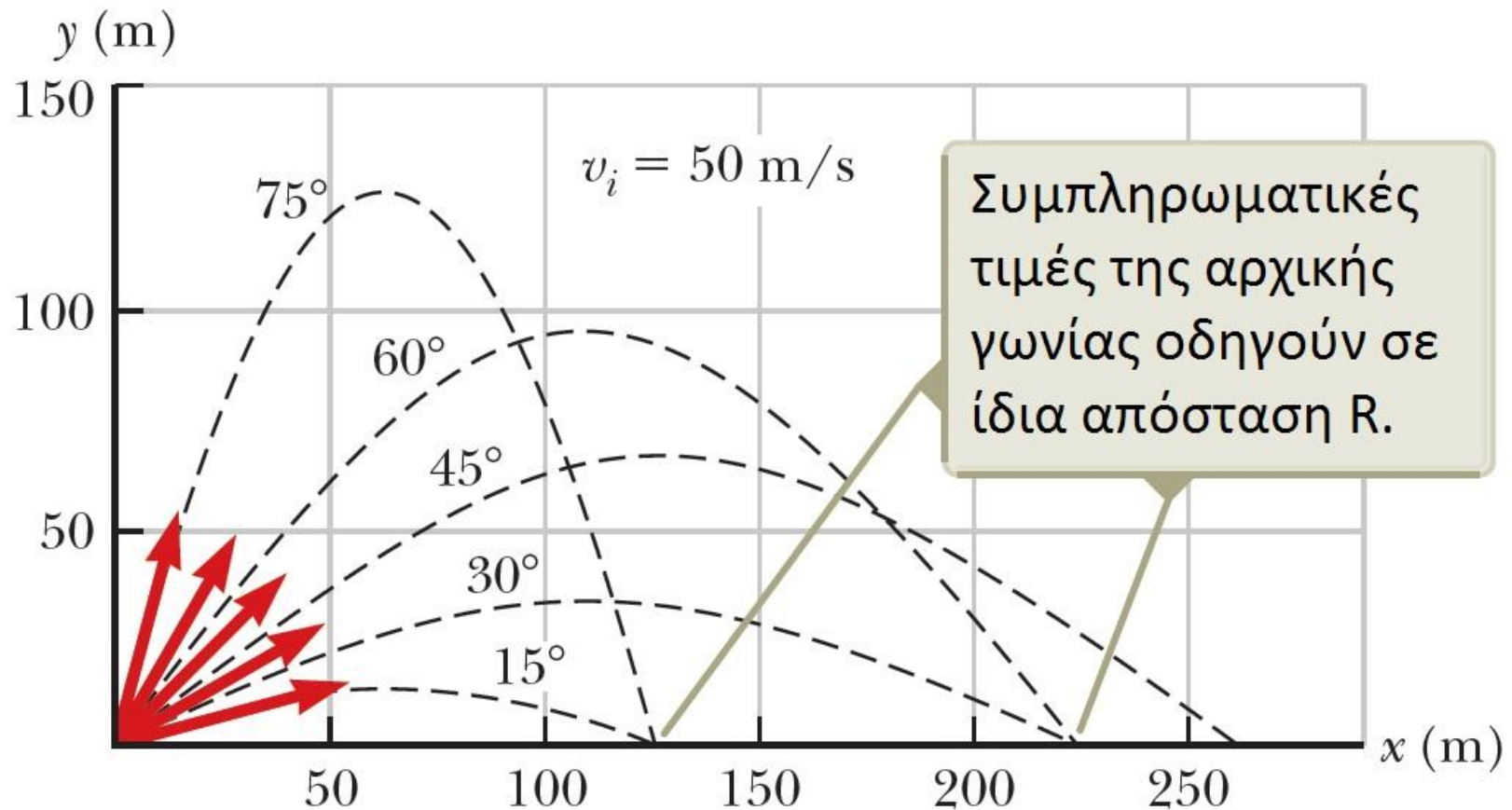
Έτσι

$$R = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g}$$



$$\begin{aligned} \sin(2x) &= \\ &= 2 \sin(x) \cos(x) \end{aligned}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- ◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ο Γιάννης Αντετοκούνμπο σουτάρει την μπάλα υπό γωνία 40° με το οριζόντιο επίπεδο, σε απόσταση 10 m από το καλάθι (buzzer beater). Το ύψος του είναι 2.0 m ενώ το ύψος της μασκέτας είναι 3.0 m.

A) Ποια είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της;

B) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

• Παράδειγμα – Λύση:

- γωνία 40° , απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπάσκετας 3m.
Α) Ποια είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της;

Η μόνη επιτάχυνση που υπάρχει στη βολή αυτή

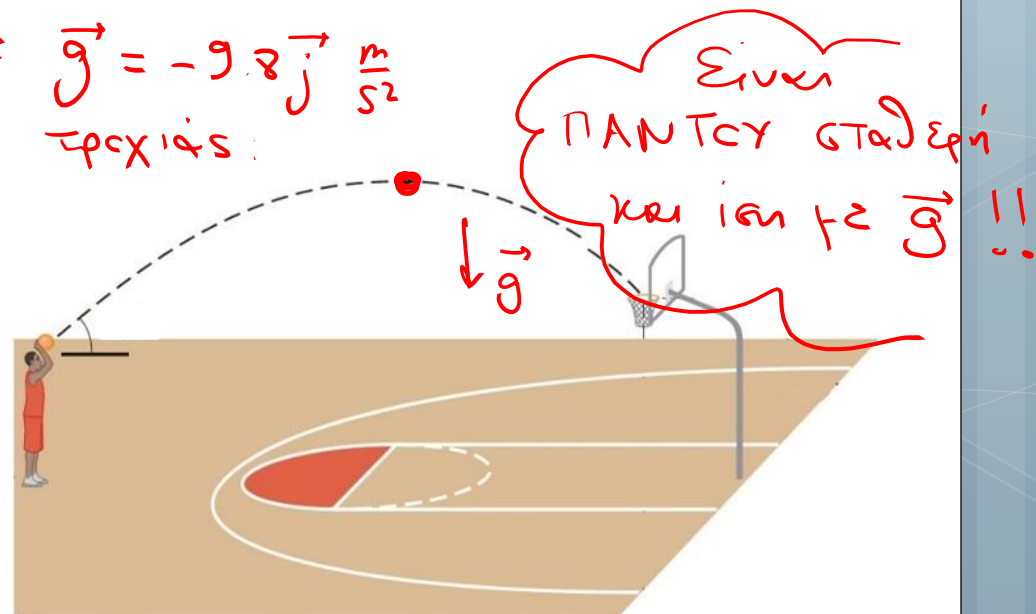
είναι αυτή της βαρύτητας: $\vec{g} = -9.8 \vec{j} \frac{m}{s^2}$

Δηλ. σε κάθε σημείο της τροχιάς:

$$\vec{a} = \underbrace{a_x}_{0} \vec{i} + a_y \vec{j}$$

$$= 0 \vec{i} - 9.8 \vec{j}$$

$$= -9.8 \vec{j} \frac{m}{s^2}$$

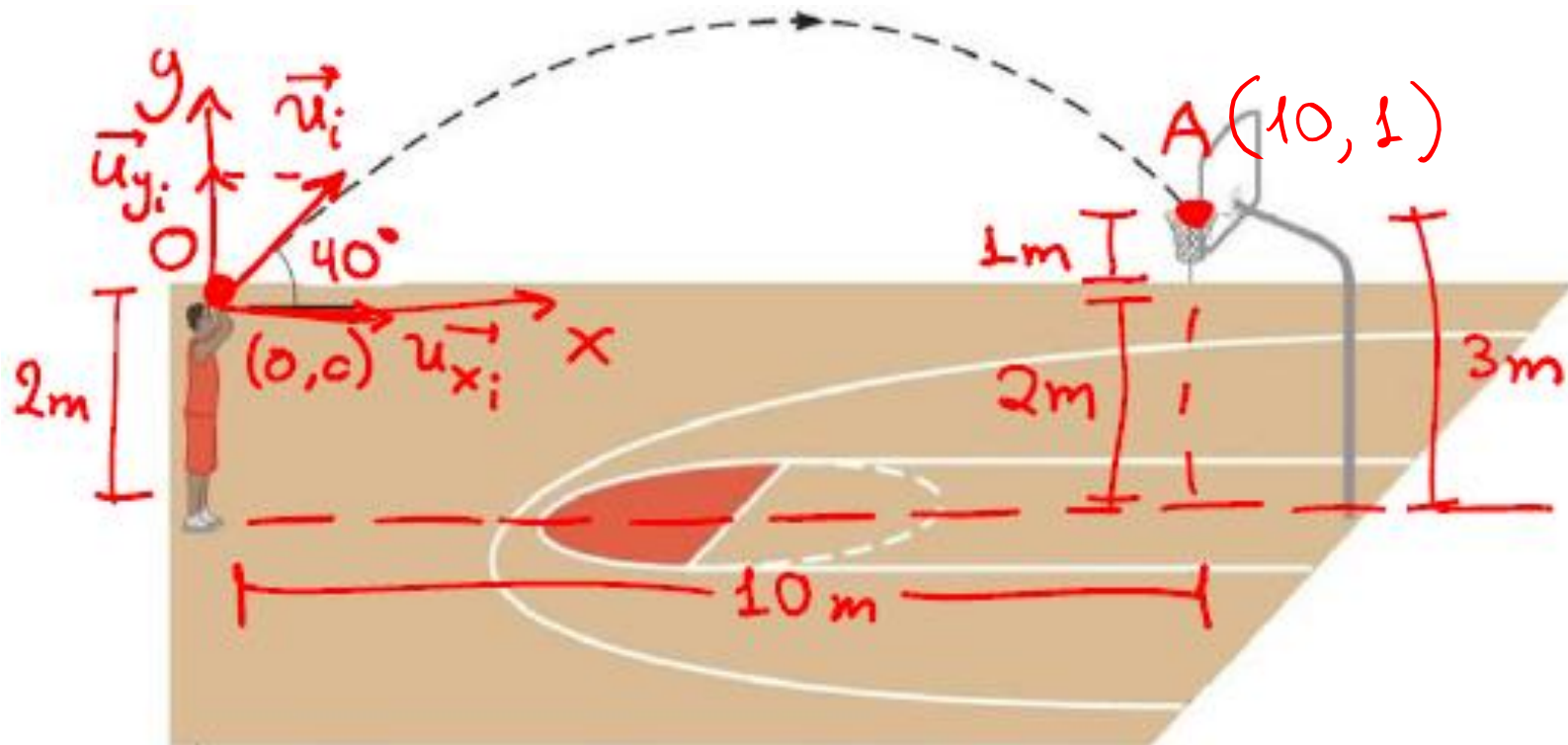


Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

• Παράδειγμα – Λύση:

- γωνία 40° , απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπάσκετας 3m.

Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

• Παράδειγμα – Λύση:

- γωνία 40° , απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπάσκετας 3m.

Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;

Δίνονται:

$$\tan(40^\circ) = 0.84,$$

$$\cos(40^\circ) = 0.76,$$

$$\cos^2(40^\circ) = 0.58$$

Επιλέξαμε να τοποθετήσουμε τη συντονική των αξόνων στο χέρι του παίκτη.

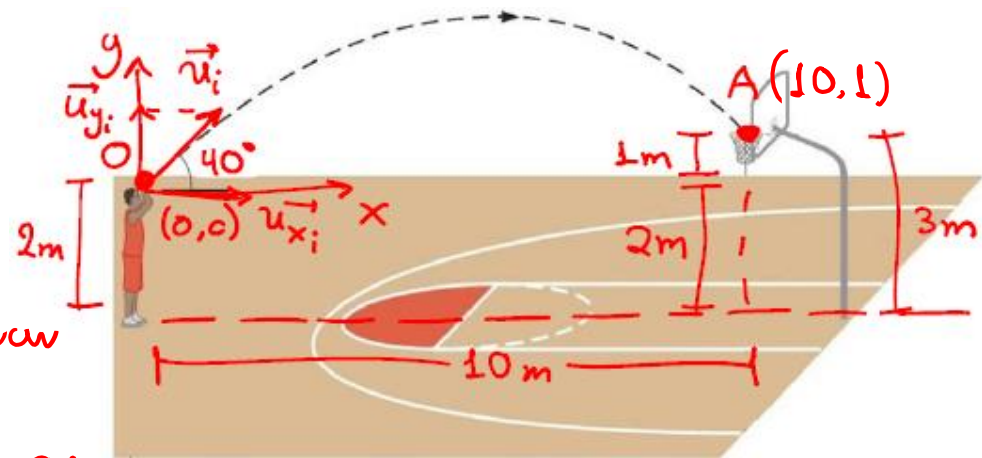
Διαλέξαμε στη διαδρομή ΟΑ.

→ Επιταχυνόμενη κίνηση στον y .

→ Με σταθερή ταχύτητα στον x .

Στον άξονα x , ισχύει: $x_A = x_0 + u_{x_A} \cdot t \Leftrightarrow 10 = 0 + u_{x_A} \cdot t$

$\Leftrightarrow 10 = u_{x_A} \cdot t \Leftrightarrow 10 = u_i \cdot \cos(40^\circ) \cdot t \Leftrightarrow t = 10 / u_i \cdot \cos(40^\circ)$ (1)



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

● Παράδειγμα – Λύση:

- γωνία 40° , απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπάσκετας 3m.

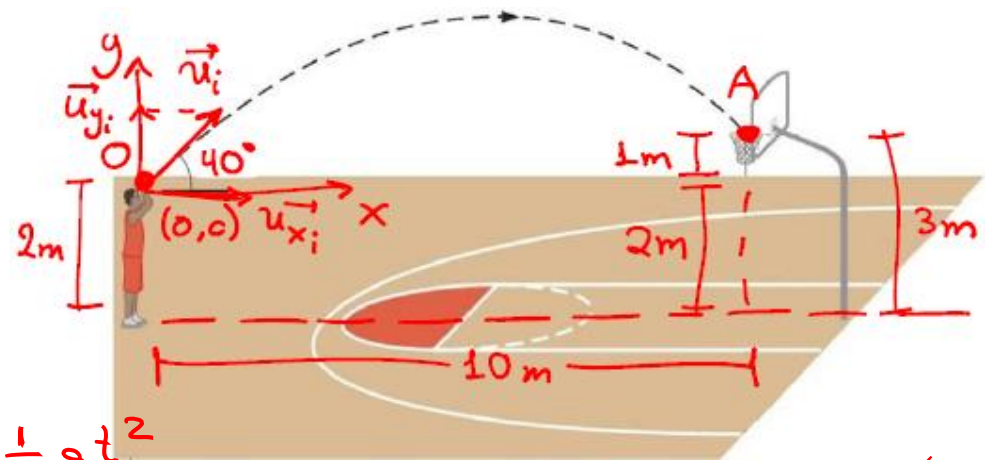
Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;

Δίνονται:

$$\tan(40^\circ) = 0.84,$$

$$\cos(40^\circ) = 0.76,$$

$$\cos^2(40^\circ) = 0.58$$



Στον άξονα y, ισχύει

$$y_A = y_0 + u_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$1 = 0 + u_i \sin(40^\circ) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Από τη σχέση (1) έχουμε $1 = u_i \sin(40^\circ) \cdot \frac{10}{u_i \cos 40^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \left(\frac{10}{u_i \cos 40^\circ} \right)^2$

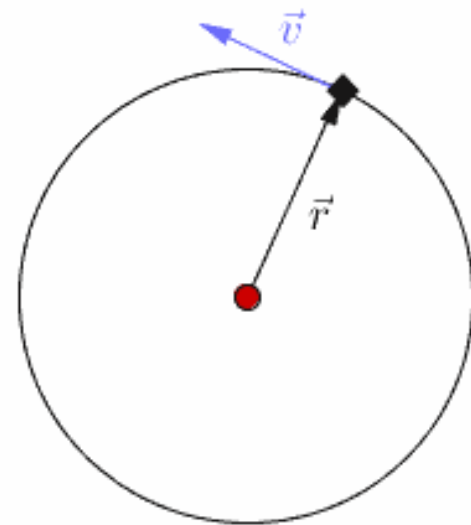
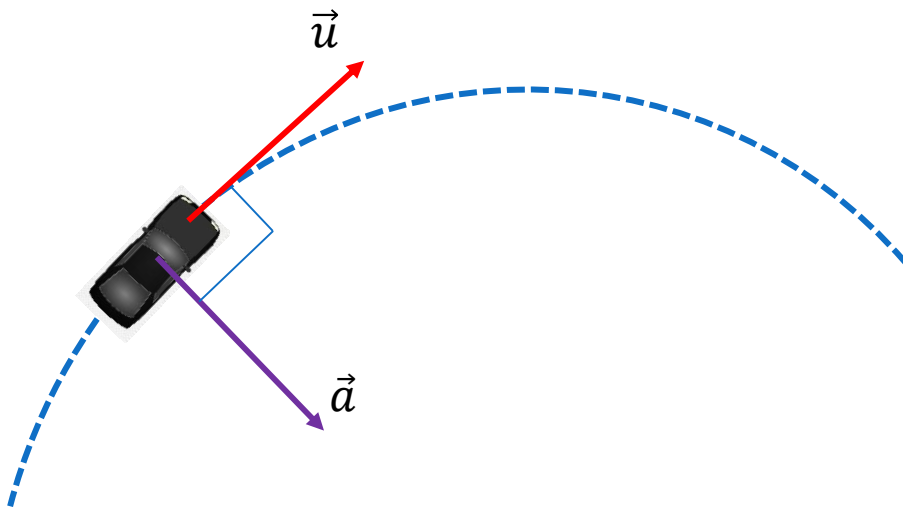
$$\Leftrightarrow 1 = 10 \tan(40^\circ) - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \frac{100}{u_i^2 \cos^2(40^\circ)} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow u_i \cong 10.7 \frac{m}{s}$$

Άρα η αρχική ταχύτητα έχει μέτρο $u_i \cong 10.7 \frac{m}{s}$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Ομαλή κυκλική κίνηση

- Σωματίδιο κινείται σε κύκλο ή σε κυκλικό τόξο
- Σταθερή αριθμητική ταχύτητα σε απόσταση r
 - ...προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα ταχύτητας
 - Ως εκ τούτου, το σώμα επιταχύνεται!



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

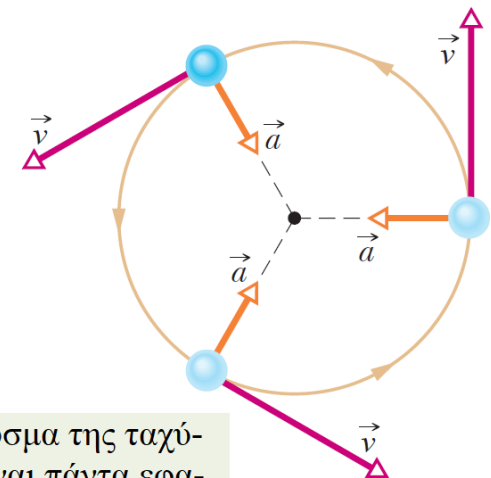
Ομαλή κυκλική κίνηση

- Σωματίδιο κινείται σε κύκλο ή σε κυκλικό τόξο
- Σταθερή αριθμητική ταχύτητα σε απόσταση r
 - ...προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα ταχύτητας
 - Ως εκ τούτου, το σώμα επιταχύνεται!

Σταθερή επιτάχυνση κατά μέτρο

- ...προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα επιτάχυνσης
- Όμως κατευθύνεται πάντα ακτινικά προς τα «μέσα»!
- Κεντρομόλος επιτάχυνση

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ομαλή κυκλική κίνηση

- Ταχύτητα

- Διάνυσμα εφαπτόμενο σε σημεία του κύκλου
- Φορά προς την κατεύθυνση της κίνησης

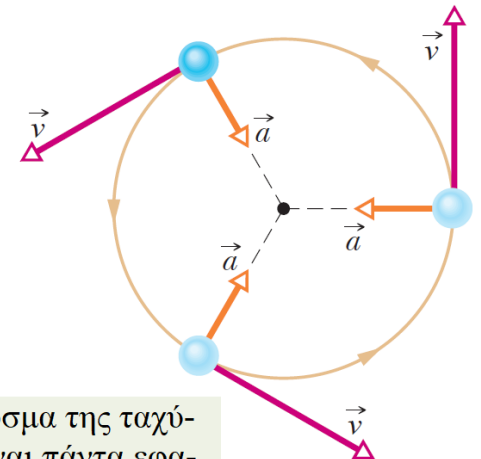
- Επιτάχυνση

- Διάνυσμα με κατεύθυνση ακτινικά προς τα «μέσα»
- Κεντρομόλος επιτάχυνση

$$a = \frac{u^2}{r}$$

με u το μέτρο της ταχύτητας
με r την ακτίνα του κύκλου

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ομαλή κυκλική κίνηση

- Το σωματίδιο διατρέχει την περιφέρεια του κύκλου μια φορά σε χρόνο

$$T = \frac{2\pi r}{u}$$

- Η ποσότητα αυτή ονομάζεται **περίοδος**

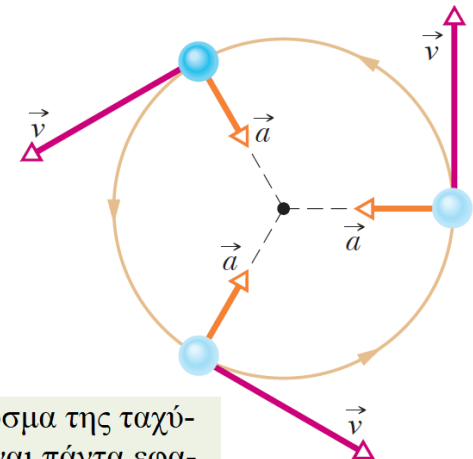
- Από την ίδια σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα ως

$$u = \frac{2\pi r}{T}$$

και την επιτάχυνση ως

$$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

• Ομαλή κυκλική κίνηση

- Εκτός της (γραμμικής) ταχύτητας, υπάρχει κι ένα ακόμα μέγεθος που μας πληροφορεί για το ρυθμό με τον οποίο η ακτίνα της κυκλικής κίνησης διαγράφει γωνίες
- Ο λόγος

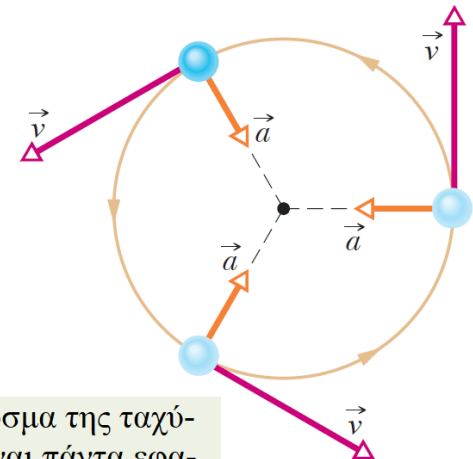
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ονομάζεται **γωνιακή ταχύτητα ω**

- Ισούνται με το ρυθμό μεταβολής του τόξου που διαγράφεται κατά την κίνηση
- Μπορείτε εύκολα να δείξετε ότι

$$u = r\omega \quad \text{και} \quad \alpha = r\omega^2$$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.

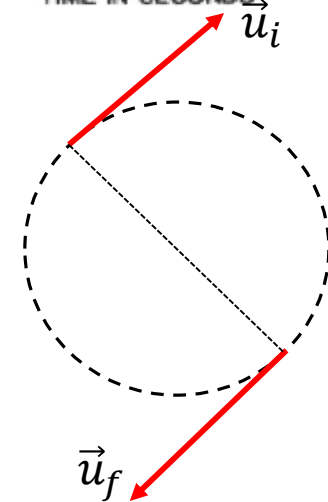
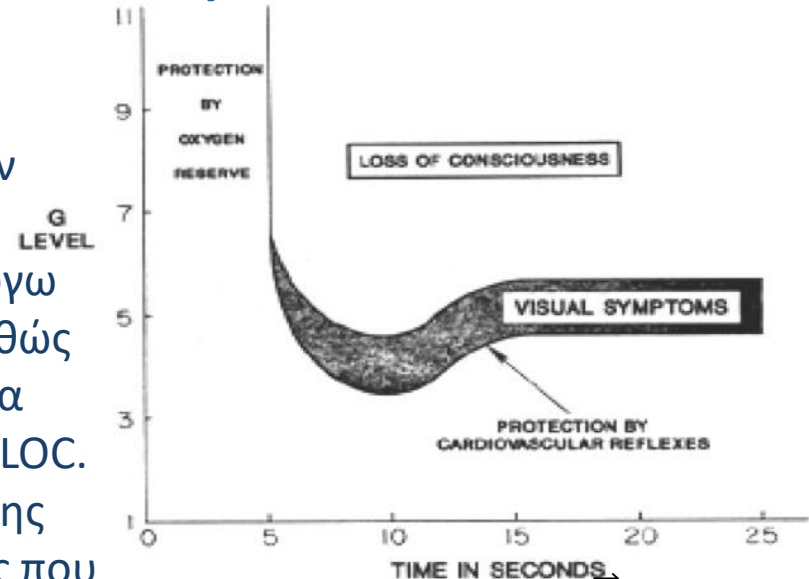


Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Οι πιλότοι μαχητικών αεροσκαφών προβληματίζονται όταν έχουν να πάρουν πολύ κλειστές στροφές λόγω της κεντρομόλου επιτάχυνσης. Καθώς η επιτάχυνση αυξάνεται, μπορεί να συμβεί μια συνθήκη γνωστή ως g-LOC. Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης (σε μονάδες g) ενός αεροσκάφους που μπαίνει σε οριζόντια κυκλική στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_i = 400\vec{i} + 500\vec{j}$ m/s για χρόνο $t = 24$ s και βγαίνει από τη στροφή (πριν «κλείσει» πλήρη κύκλο) με ταχύτητα $\vec{v}_f = -400\vec{i} - 500\vec{j}$ m/s ?



$$1. \quad a = \frac{u^2}{r} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$2. \quad u = \frac{2\pi r}{T} = r\omega$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

◉ Παράδειγμα – Λύση:

- ◉ Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης (σε μονάδες g) ενός αεροσκάφους που μπαίνει σε οριζόντια κυκλική στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_i = 400\vec{i} + 500\vec{j} \text{ m/s}$ για χρόνο $t = 24 \text{ s}$ και βγαίνει από τη στροφή (πριν «κλείσει» πλήρη κύκλο) με ταχύτητα $\vec{v}_f = -400\vec{i} - 500\vec{j} \text{ m/s}$?

Καταλαβαίναμε ότι αν $t = 24 \text{ s}$, τότε $T = 48 \text{ s}$.

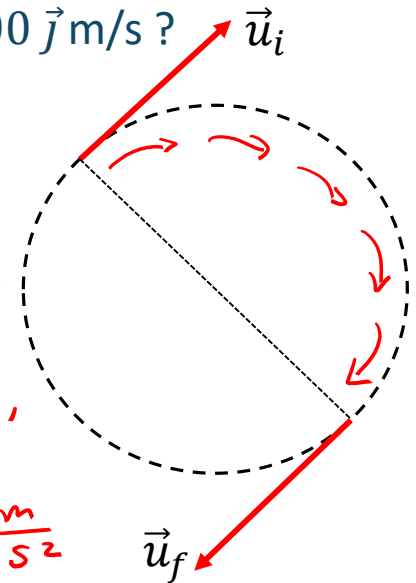
Επίσης, θεωρώντας την κίνηση ομαλή κυκλική,

θα είναι $|\vec{u}| = |\vec{u}_i| = |\vec{u}_f| = \sqrt{400^2 + 500^2} \approx 640.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Τέλος, $u = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow r = \frac{uT}{2\pi}$ κι επειδή $a = \frac{u^2}{r}$,

παίρναμε $a = \frac{u^2}{r} = \frac{u^2}{\frac{uT}{2\pi}} = \frac{2\pi u}{T} \approx 83.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Σε μονάδες g , είναι $\approx 8.6g$ (!!)





Τέλος Διάλεξης
