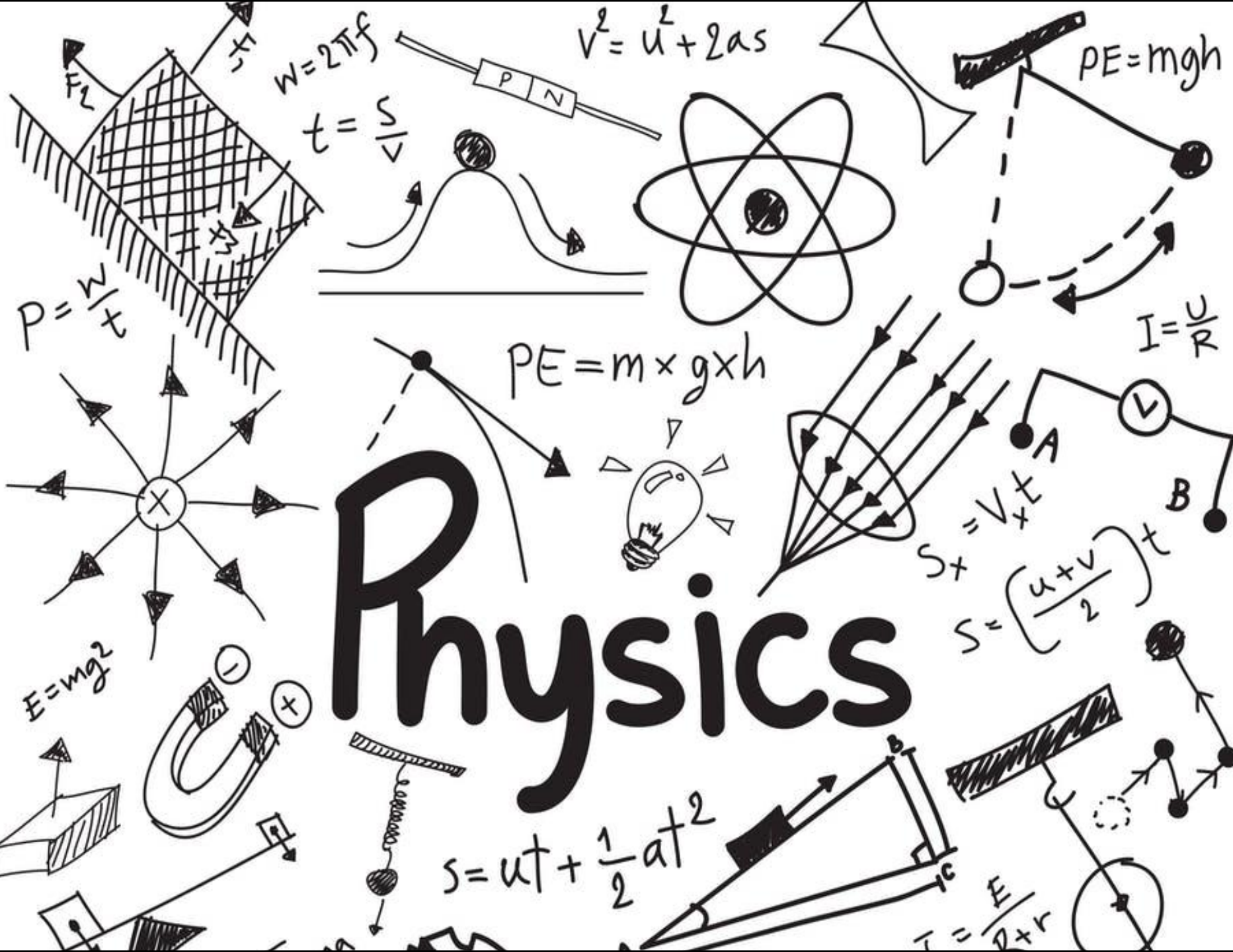


Physics



Reminder...

- ◉ Διαλέξεις
 - ◉ Προαιρετική παρουσία!
- ◉ Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
- ◉ Δεν υπάρχουν απουσίες
- ◉ Υπάρχει σεβασμός στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
- ◉ Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά

Κίνηση σε μια Διάσταση (review...)

- ◉ Μοντέλα Κίνησης σε μια διάσταση
- ◉ Κίνηση υπό σταθερή ταχύτητα
 - ◉ Περιγράφουμε την ευθύγραμμη κίνηση ενός σώματος με μηδενική επιτάχυνση
- ◉ Κίνηση υπό σταθερή επιτάχυνση
 - ◉ Περιγράφουμε την ευθύγραμμη κίνηση ενός σώματος με σταθερή ($\neq 0$) επιτάχυνση
- ◉ Κάθε μοντέλο «έρχεται» με τις εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση

Κίνηση σε μια Διάσταση (review...)

- Ειδική περίπτωση: a_x μηδενική (δηλ. ταχύτητα σταθερή)

$$x_f = x_i + u_x t$$

- Ειδική περίπτωση: a_x σταθερή, $a_x \neq 0$

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$

2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$

3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + u_{x_f})t$ ή $x_f = x_i + u_{x,avg}t$

4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Αν η κίνηση είναι κατακόρυφη:

$$x := y$$

$$a_y := -g$$

Θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω



Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

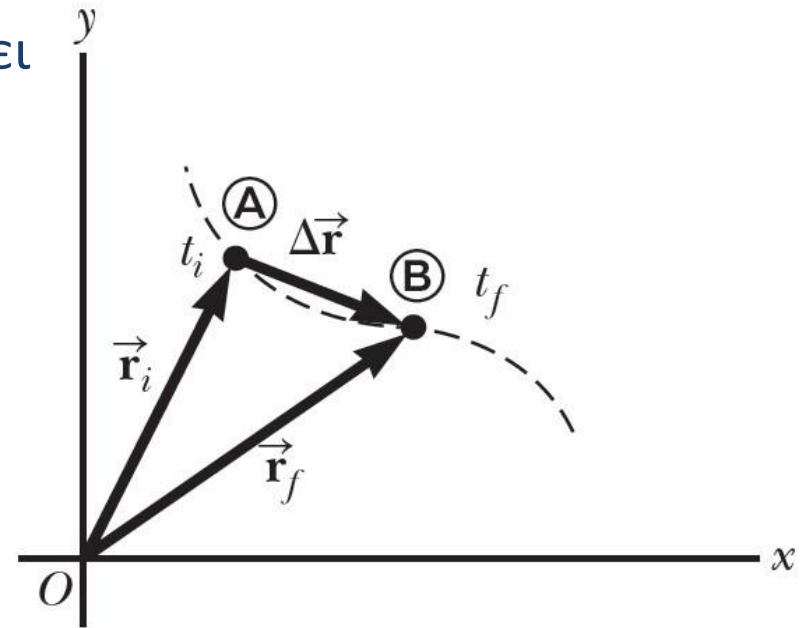
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας επεκτείνουμε τις ιδέες που ήδη ξέρουμε στο χώρο xy
 - Χώρος επιπέδου
- Θα κάνουμε εκτεταμένη χρήση διανυσμάτων
 - ...αλλά και ανάλυσης σε συνιστώσες
 - Δηλ. θα δουλεύουμε κυρίως κατά **άξονες της κίνησης**
- Η γνώση της μονοδιάστατης κίνησης θα είναι πολύτιμη!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Στη μια διάσταση, μας αρκούσε ένα μονόμετρο μέγεθος (αριθμ. τιμή) για να ορίσουμε τη θέση ενός σωματιδίου
 - ...λόγω της σύμβασης που κάναμε με τα πρόσημα
- Στις δυο διαστάσεις, χρειαζόμαστε το **διάνυσμα θέσης $\vec{r}$**
 - Ξεκινά από το $(0,0)$ και φτάνει ως τη θέση του σωματιδίου στο επίπεδο xy
- **Μετατόπιση $\Delta\vec{r}$**
 - Διαφορά μεταξύ τελικής και αρχικής θέσης
 - $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ορίζουμε τη **Μέση Ταχύτητα** σε ένα χρονικό διάστημα Δt :

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

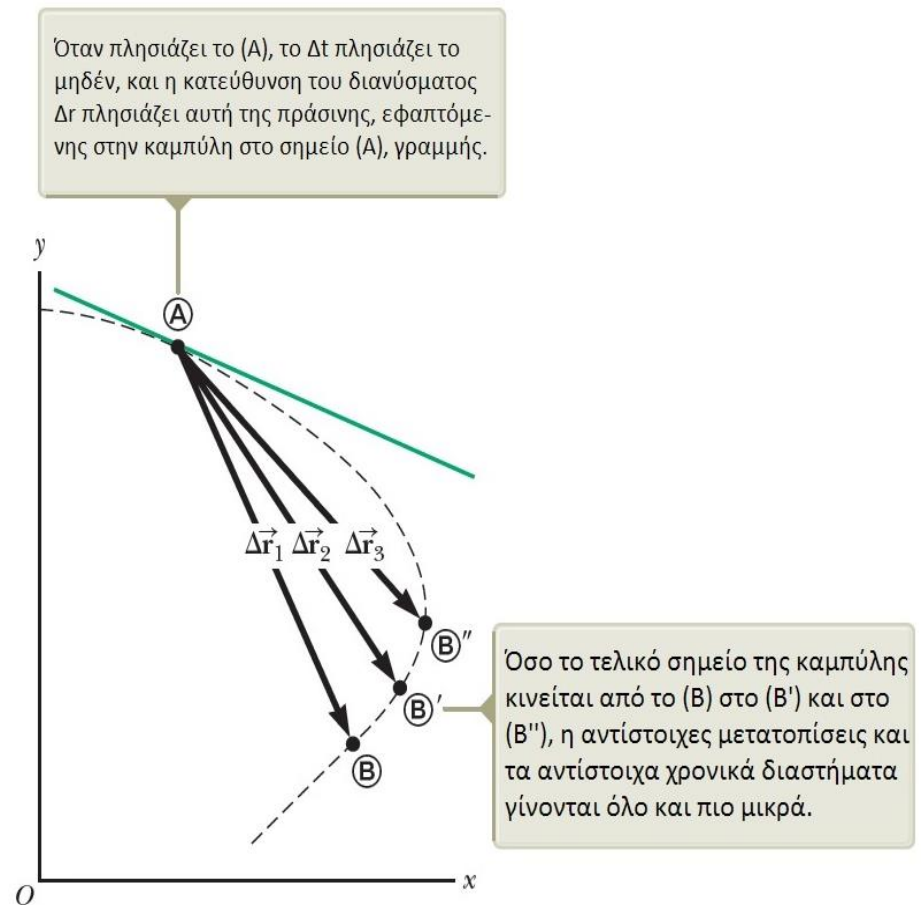
- Διάνυσμα με ίδια διεύθυνση και φορά με το $\Delta \vec{r}$
 - Θυμηθείτε από την κίνηση σε μια διάσταση:

$$\vec{u}_{avg} \equiv \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

- Διάνυσμα ανεξάρτητο της διαδρομής!
 - Γιατί; Εξαρτάται μόνο από το $\Delta \vec{r}$
 - Που εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση του σωματιδίου

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται ανάμεσα σε 2 σημεία, A και B.
- Παρατηρούμε το σωματίδιο σε όλο και μικρότερα χρονικά διαστήματα (B, B', B'')
- Η κατεύθυνση του $\Delta \vec{r}$ πλησιάζει αυτήν της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο A.



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

• Στιγμαιαία Ταχύτητα

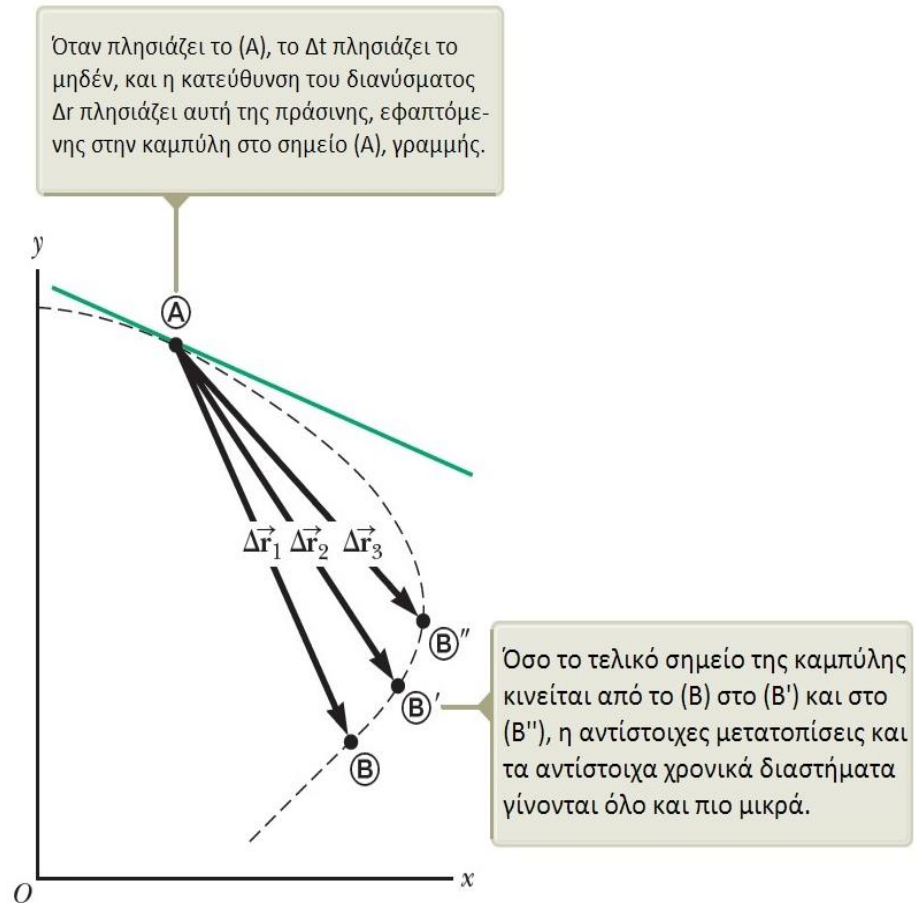
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- Η κατεύθυνση της $\vec{v}$ βρίσκεται στην εφαπτομένη της καμπύλης στο εκάστοτε σημείο

- Μέτρο ταχύτητας = $|\vec{v}|$

- Θυμηθείτε:

$$\vec{u}_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

• Μέση Επιτάχυνση

$$\vec{a}_{avg} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$$

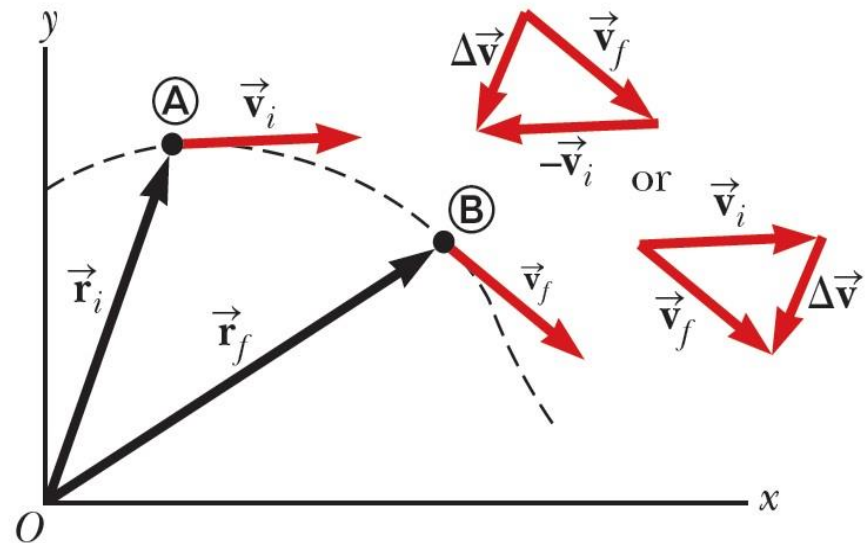
- Διάνυσμα: έχει την ίδια κατεύθυνση με την διανυσματική διαφορά ταχυτήτων $\Delta \vec{v}$

- Θυμηθείτε:

$$\vec{a}_{avg} \equiv \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{\vec{u}_f - \vec{u}_i}{t_f - t_i}$$

- Παράδειγμα:

- Βρείτε το διάνυσμα $\vec{a}_{avg}$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Στιγμαία Επιτάχυνση $\vec{a}$

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t)$$

- Θυμηθείτε:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Μοντέλο κίνησης: με σταθερή επιτάχυνση
 - ...όμοια με την κίνηση στη μια διάσταση
- Θα σκεφτόμαστε με βάση την παρακάτω «αρχή»:
 - Η κίνηση σε δυο διαστάσεις μπορεί να μοντελοποιηθεί ως δυο ανεξάρτητες ευθύγραμμες κινήσεις σε δυο κάθετους άξονες:
 - Τον άξονα των x
 - Τον άξονα των y
- Έτσι, η κίνηση στον έναν άξονα δεν επηρεάζει την κίνηση στον άλλο (και αντίστροφα)

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Διάνυσμα θέσης

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

με $\vec{i}, \vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου

- Αν ξέρουμε το $\vec{r}$, μπορούμε να βρούμε τη στιγμιαία ταχύτητα $\vec{v}$, ως

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j}) = u_x\vec{i} + u_y\vec{j}$$

- Επίσης,

$$u_x = u_{x_i} + a_x t, \quad u_y = u_{y_i} + a_y t$$

- Αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned} u_x\vec{i} + u_y\vec{j} &= (u_{x_i} + a_x t)\vec{i} + (u_{y_i} + a_y t)\vec{j} \\ &= (u_{x_i}\vec{i} + u_{y_i}\vec{j}) + (a_x\vec{i} + a_y\vec{j})t \end{aligned}$$

- Δηλ.

$$\vec{v} = \vec{v}_i + \vec{a}t$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Διάνυσμα θέσης

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

με $\vec{i}, \vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα του επιπέδου

- Αναλύοντας

$$\begin{aligned}\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} &= \left(x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2\right)\vec{i} + \left(y_i + u_{y_i}t + \frac{1}{2}a_y t^2\right)\vec{j} \\ &= \underbrace{(x_i\vec{i} + y_i\vec{j})}_{\vec{r}_i} + \underbrace{(u_{x_i}\vec{i} + u_{y_i}\vec{j})t}_{\vec{v}_i t} + \frac{1}{2}\underbrace{(a_x\vec{i} + a_y\vec{j})}_{\vec{a}}t^2\end{aligned}$$

- Έτσι,

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Αυτές οι εξισώσεις
κατασκευάστηκαν από
ξεχωριστή μελέτη της
κίνησης ΑΝΑ ΑΞΟΝΑ!

- Ας γράψουμε τις δυο *διανυσματικές* εξισώσεις κίνησης σε δυο διαστάσεις με σταθερή επιτάχυνση

$$\bullet \vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t \quad \begin{cases} \rightarrow u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t \\ \rightarrow u_{y_f} = u_{y_i} + a_y t \end{cases}$$

$$\bullet \vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \quad \begin{cases} \rightarrow x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ \rightarrow y_f = y_i + u_{y_i} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{cases}$$

Ισχύουν και όλες οι υπόλοιπες εξισώσεις που περιγράφουν την μονοδιάστατη κίνηση υπό σταθερή ή μηδενική επιτάχυνση!

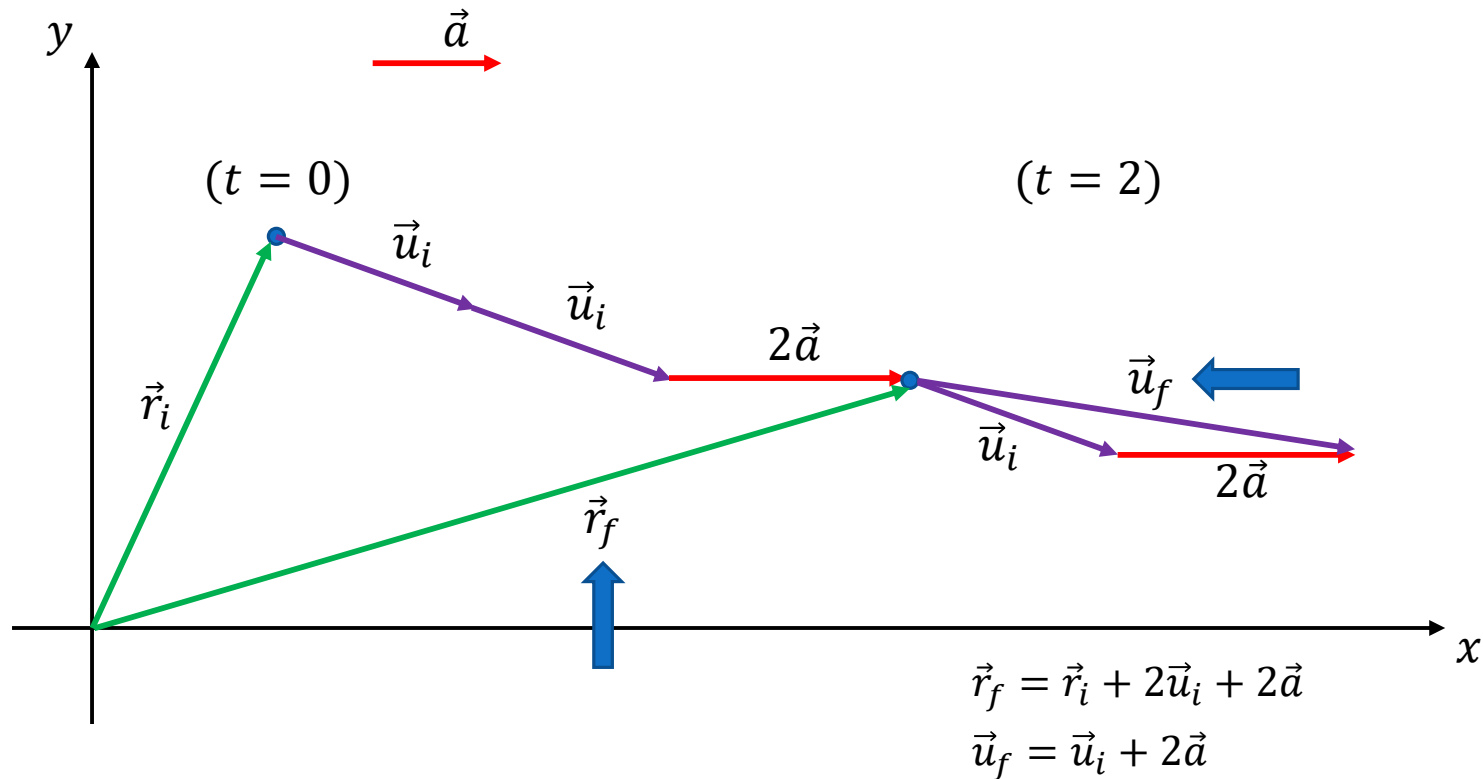
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

- Quiz:

- Προβλέψτε τη θέση και την ταχύτητα του σώματος όταν $t = 2$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

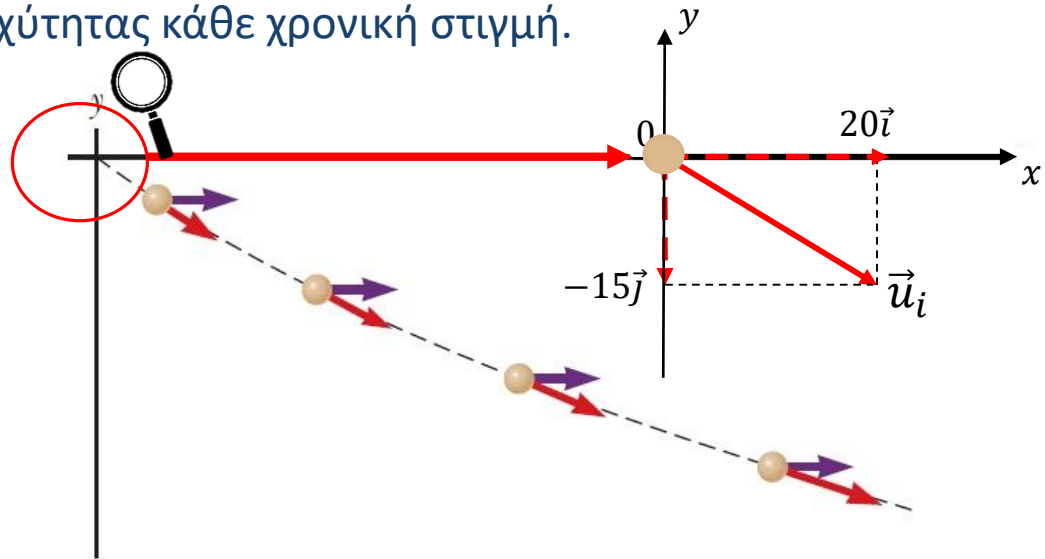
◉ Παράδειγμα:

- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το $(0,0)$ και με αρχική ταχύτητα 20m/s στον x -άξονα, και -15m/s στον y -άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x -άξονα ως $\vec{a}_x = 4\vec{i} \text{ m/s}^2$. Με ποια μοντέλα κίνησης μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση του σωματιδίου;

A) Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή.

B) Βρείτε την ταχύτητα σε μέτρο και κατεύθυνση όταν $t = 5\text{s}$, δηλ. τη γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον άξονα των x .

Γ) Βρείτε τις x, y συντεταγμένες του σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή t , και το διάνυσμα θέσης r .



- $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
- $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
- $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + u_{x_f}) t$
- $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
- $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

• Παράδειγμα – Λύση:

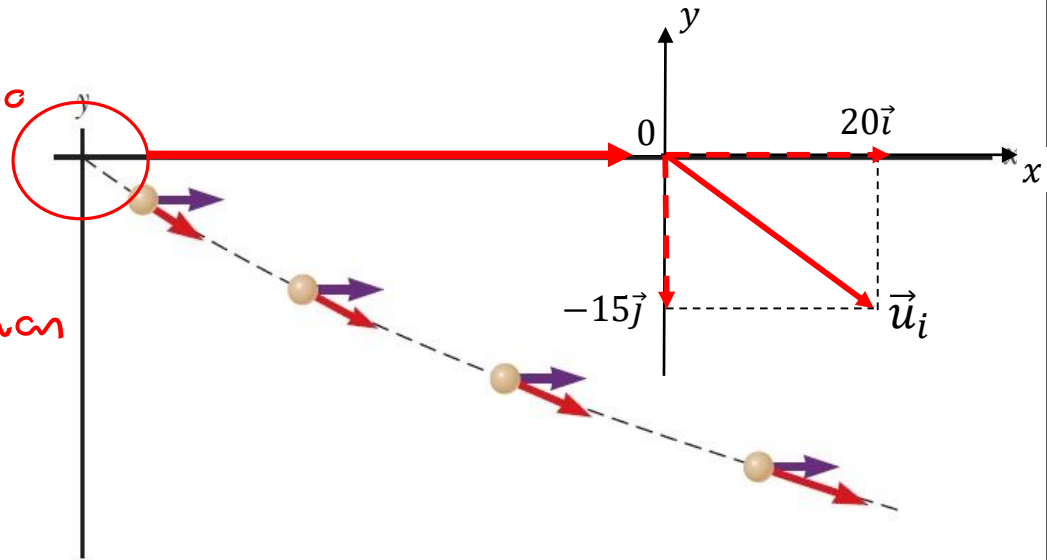
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το $(0,0)$ και με αρχική ταχύτητα 20m/s στον x -άξονα, και -15m/s στον y -άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x -άξονα ως $\vec{a}_x = 4\vec{t} \text{ m/s}^2$. Με ποια μοντέλα κίνησης μπορείτε να περιγράψετε την κίνηση του σωματιδίου;

1. $u_{xf} = u_{xi} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{xi} + u_{xf}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{xi} + u_{xf})t$
4. $x_f = x_i + u_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$
5. $u_{xf}^2 = u_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Η κίνηση στο x - y επίπεδο είναι επιταχυνόμενη.

- $x'x$: επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση $a_x = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

- $y'y$: κίνηση με μηδενική επιτάχυνση $\Rightarrow$ σταθερή ταχύτητα ($y_f = y_i + u_{yi} t$)



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

● Παράδειγμα – Λύση:

- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το $(0,0)$ και με αρχική ταχύτητα 20m/s στον x -άξονα, και -15m/s στον y -άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x -άξονα ως $\vec{a}_x = 4\vec{i} \text{ m/s}^2$.

Α) Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας κάθε χρονική στιγμή.

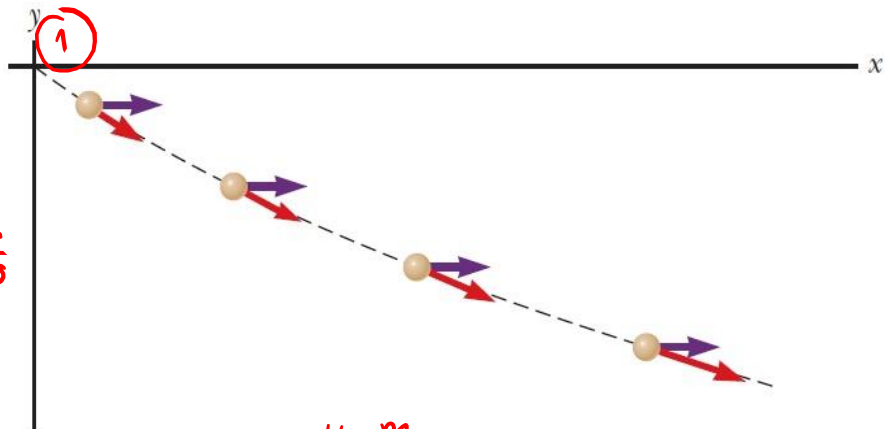
Γνωρίζουμε ότι $\vec{u} = \vec{u}_x + \vec{u}_y$
 $= u_x \vec{i} + u_y \vec{j}$

Στον άξονα y , η ταχύτητα είναι σταθερή και ίση με $-15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ παντού! Άρα $u_y = -15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (2)

Στον άξονα x , υπάρχει επιτάχυνση: $a_x = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Ισχύει $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t = 20 + 4t$ (3) . | (1) (2) (3) $\vec{u} = (20 + 4t)\vec{i} - 15\vec{j} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{x_i} + u_{x_f})t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i}t + \frac{1}{2}a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

• Παράδειγμα - Λύση:

- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το $(0,0)$ και με αρχική ταχύτητα 20m/s στον x -άξονα, και -15m/s στον y -άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x -άξονα ως $\vec{a}_x = 4\vec{i} \text{ m/s}^2$.
B) Βρείτε την ταχύτητα σε μέτρο και κατεύθυνση όταν $t = 5\text{s}$, δηλ. τη γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον άξονα των x .

1. $u_{xf} = u_{xi} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{xi} + u_{xf}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2}(u_{xi} + u_{xf})t$
4. $x_f = x_i + u_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$
5. $u_{xf}^2 = u_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

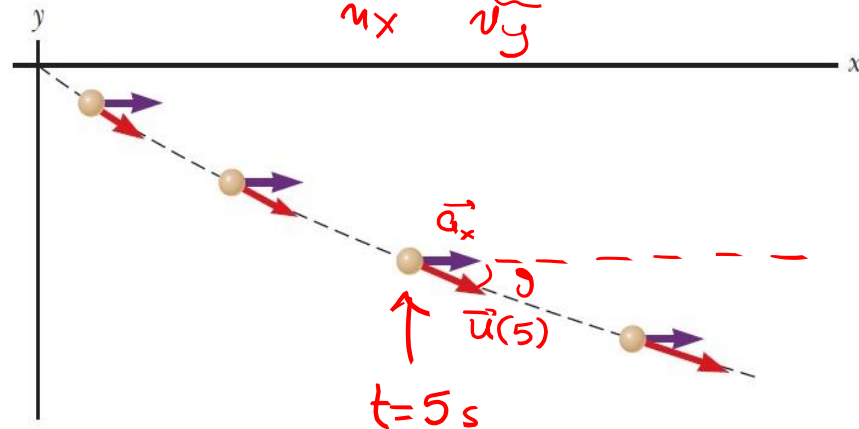
$$\Theta_x \text{ είναι } \vec{u}(5) = (20 + 4 \cdot 5)\vec{i} - 15\vec{j} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \underbrace{40\vec{i}}_{\vec{u}_x} - \underbrace{15\vec{j}}_{\vec{u}_y}$$

Επίσης,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-15}{40}\right) \approx -21^\circ$$

και

$$|\vec{u}(5)| = \sqrt{40^2 + (-15)^2} \\ \approx 43 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

• Παράδειγμα - Λύση:

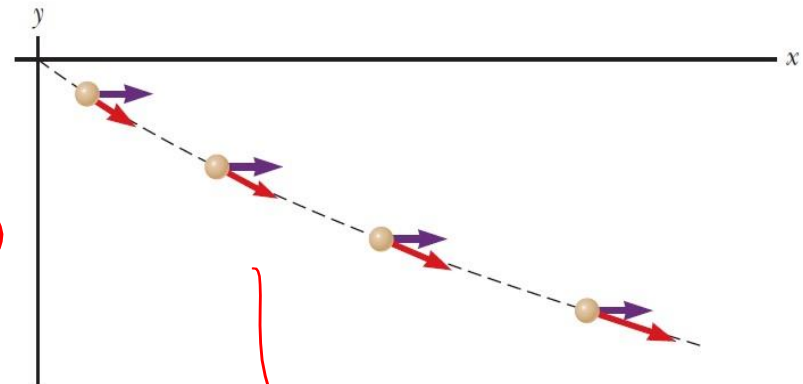
- Ένα σωματίδιο κινείται στο xy επίπεδο, ξεκινώντας από το $(0,0)$ και με αρχική ταχύτητα 20m/s στον x -άξονα, και -15m/s στον y -άξονα. Το σωματίδιο υφίσταται επιτάχυνση μόνο στον x -άξονα ως $\vec{a}_x = 4\vec{i} \text{ m/s}^2$.
Γ) Βρείτε τις x, y συντεταγμένες του σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή t , και το διάνυσμα θέσης r . $\rightarrow \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

• Στην άξονα y , ισχύει

$$\begin{aligned} y_f &= y_i + u_{y_i} t \\ &= 0 - 15t = -15t \quad (1) \end{aligned}$$

• Στην άξονα x , ισχύει

$$\begin{aligned} x_f &= x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ &= 0 + 20 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot t^2 = 2t^2 + 20t \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j}$$

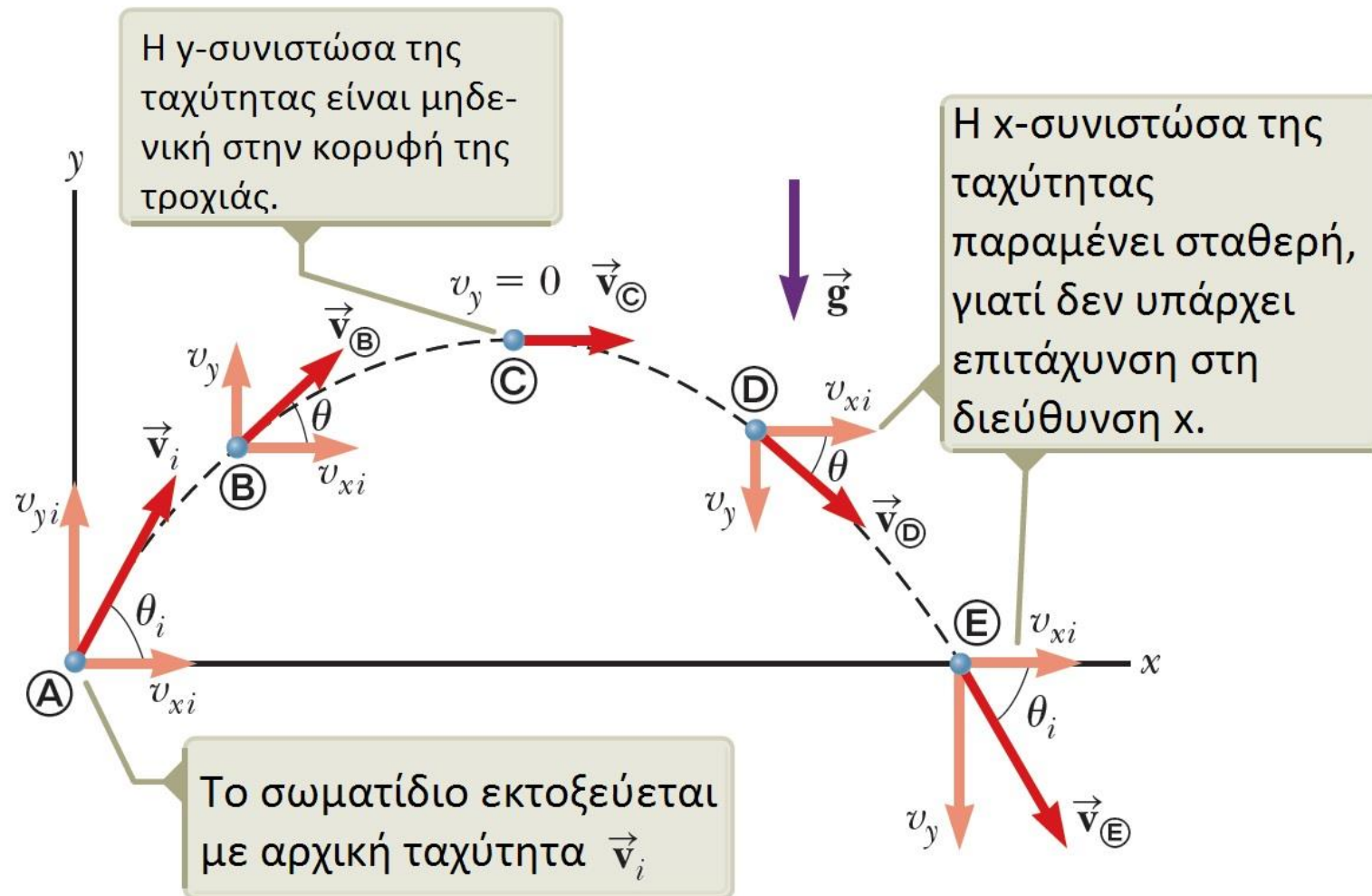
$$\stackrel{(1)}{=} \stackrel{(2)}{=} (2t^2 + 20t) \vec{i} - (15t) \vec{j} \text{ m}$$

1. $u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$
2. $u_{x,avg} = \frac{u_{x_i} + u_{x_f}}{2}$
3. $x_f = x_i + \frac{1}{2} (u_{x_i} + u_{x_f}) t$
4. $x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$
5. $u_{x_f}^2 = u_{x_i}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Μια κλασική κίνηση σε δυο διαστάσεις είναι η **βολή**.
- Το μόνο που αλλάζει είναι
 - A. Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$, που θεωρείται σταθερή και κάθετη (με φορά προς τα κάτω) στον άξονα x .
 - B. Επίσης, η **αντίσταση του αέρα** θεωρείται αμελητέα.
- Υπό αυτές τις συνθήκες, η ανάλυση τέτοιων προβλημάτων είναι απλή...

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας γράψουμε τις δυο διανυσματικές εξισώσεις **βολής**

- $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{g}t$

- $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

- Ίδιες με αυτές της Διαφ. 17 (9 slides πριν)!
- Προσοχή! Είναι διανυσματικές εξισώσεις!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας αναλύσουμε την κίνηση

- Αρχική θέση

$$u_{xi} = u_i \cos(\theta_i)$$

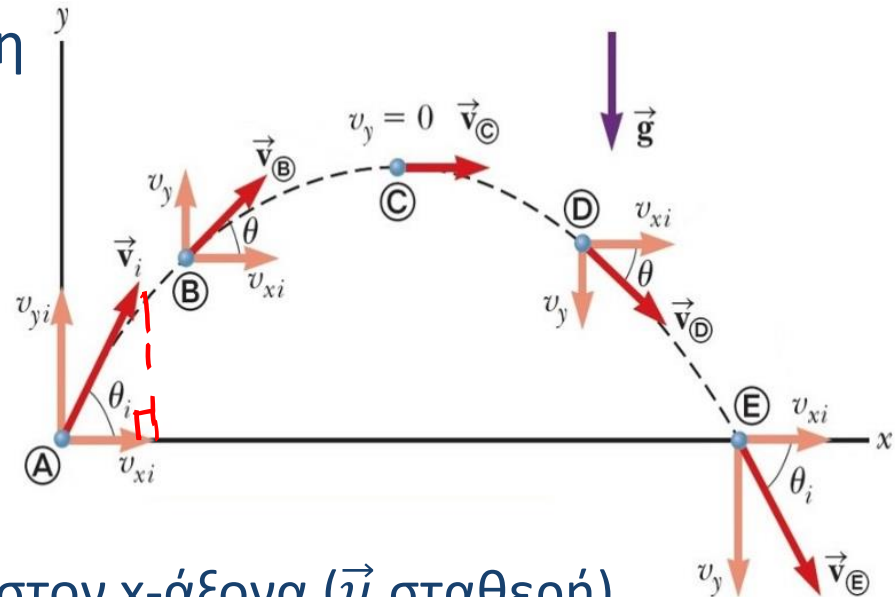
$$u_{yi} = u_i \sin(\theta_i)$$

- Δυο συνιστώσες:

- A) Μηδενική επιτάχυνση στον x-άξονα ($\vec{u}$ σταθερή)

- B) Σταθερή επιτάχυνση στον y-άξονα
(g – βαρυτική επιτάχυνση)

- Γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης όπως τις ξέρουμε, θεωρώντας αυθαίρετα μια θετική φορά σε κάθε άξονα (συνήθως πάνω και δεξιά)





Συνεχίζεται... 😊
